

การวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับ ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย จังหวัดน่าน

รุจิเรข บุญมาปะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา

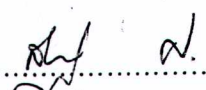
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

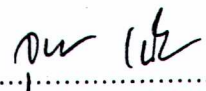
เมษายน 2561

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยบูรพา

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณา  
วิทยานิพนธ์ของ รุจิเรข บุญมาปะ ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม  
หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้


คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

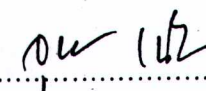
 ..... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนางุ ศรีมงคล)

 ..... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม  
(ดร.จุฑาทพร เนียมวงษ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


 ..... ประธาน  
(ดร.ศักดิ์ดา น้อยนาง)

 ..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนางุ ศรีมงคล)

 ..... กรรมการ  
(ดร.จุฑาทพร เนียมวงษ์)

 ..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษาของมหาวิทยาลัยบูรพา

 ..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกรัฐ ศรีสุข)

วันที่ 3 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2561

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล อาจารย์ที่ปรึกษา และดร.จุฑาทพร เนียมวงษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.ศักดิ์ดา น้อยนาง ประธานคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังคนะภัทรขจร กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้ความรู้ ให้คำปรึกษา ตรวจสอบแก้ไขและวิจารณ์ผลงานทำให้งานวิจัยมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ขอกราบขอบพระคุณ ดร.สมคิด อินเทพ ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์ และอาจารย์ณพิศว์ พลทิพย์ ที่ให้ความกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือในการวิจัย นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์จาก ผู้อำนวยการโรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม โรงเรียนหนองบัวพิทยาคม โรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร และโรงเรียนสารธรรมวิทยาคาร ตลอดจนครูและนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2559 อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน ที่ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดีในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อใหม่ คุณแม่ณงลักษณ์ ธนะวงศ์ และครอบครัวที่ทำให้กำลังใจ และสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา ขอขอบคุณพี่ ๆ โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม ที่คอยให้กำลังใจและคำปรึกษา ที่ดีเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูคุณเวทิตาแต่บุพการี บุรพจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษา และประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

รุจิเรข บุญมาปะ

56990385: สาขาวิชา: คณิตศาสตร์ศึกษา; วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา)

คำสำคัญ: ลำดับ/ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์/ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

รุจิเรข บุญมาปะ: การวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับ ในโรงเรียน  
มัธยมศึกษาตอนปลาย จังหวัดน่าน (MATHEMATICAL CONCEPTIONS OF SEQUENCE IN  
HIGH SCHOOL IN NAN PROVINCE) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: สินีนาฏ ศรีมงคล,  
Ph.D., จุฑาพร เนียมวงษ์, Ph.D. 130 หน้า. ปี พ.ศ. 2561.

ความมุ่งหมายของการวิจัยในครั้งนี้ คือ เพื่อวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา  
จังหวัดน่าน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย 1) แบบทดสอบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง  
ลำดับ ของมอล โกชาด้า ฟรีเซนนิโอสโล ซึ่งแบ่งเป็น 2 ตอน โดยตอนที่ 1 เป็นสถานการณ์ทาง  
คณิตศาสตร์ของลำดับในรูปแบบของพจน์ทั่วไป ลำดับแบบแฉงพจน์ เซต เซตของคู่อันดับ  
พจน์ทั่วไปของลำดับแบบสองเงื่อนไข และความสัมพันธ์เวียนเกิด ตอนที่ 2 เป็นสถานการณ์ทาง  
คณิตศาสตร์ของลำดับในรูปของกราฟ ตาราง และแผนภาพลูกศร 2) แบบสัมภาษณ์ ผลการวิจัย  
พบว่า สามารถวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม ได้แก่  
กลุ่มที่หนึ่งเป็นกลุ่มที่มีมโนทัศน์รับรู้ว่ลำดับเป็นฟังก์ชัน กลุ่มที่สองเป็นกลุ่มที่มีมโนทัศน์  
เชื่อมโยงกับอันดับของสมาชิก และมีนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ  
ได้ จากผู้ประสงค์เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 335 คน กลุ่มที่มีมโนทัศน์รับรู้ว่ลำดับเป็นฟังก์ชันมี  
จำนวน 61 คน คิดเป็นร้อยละ 18.21 ของนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย กลุ่มที่มีมโนทัศน์  
เชื่อมโยงกับอันดับของสมาชิกมีจำนวน 246 คน คิดเป็นร้อยละ 73.43 ของนักเรียนที่ประสงค์เข้า  
ร่วมการวิจัย และนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้มีจำนวน 28 คน  
คิดเป็นร้อยละ 8.36 ของนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย

56990385 : MAJOR: MATHEMATICS EDUCATION; M.Sc. (MATHEMATICS  
EDUCATION)

KEYWORDS: SEQUENCE/ CONCEPT OF MATHEMATICS/ CONCEPT OF SEQUENCE

RUIREK BUNMAPA: MATHEMATICAL CONCEPTIONS OF SEQUENCE IN  
HIGH SCHOOL IN NAN PROVINCE. ADVISORY COMMITTEE: SINEENART  
SRIMONGKOL, Ph.D., JUTAPORN NEAMVONK, Ph.D. 130 P. 2018.

The purpose of this research was to analyze the mathematical concept of sequence of high school science and mathematics education program of Mathayomsuksa 5 – 6 students at Thawongpha district in Nan province. The research instruments included 1) Mathematical conception test of sequence obtained from MALGORZATA PREZENIOSLO. It was divided into 2 parts. In part I, the questions were about the general of sequence, set, set of ordered pairs, two-terms formula and recurrence relation. In parts II, the questions were including figures graphs, tables and diagrams. 2) The interview form recorded for purpose of analysis. Then the mathematical conception test was used for 335 students. The students' conceptions were divided into two groups include 61 students in the first group who perceived a sequence as a function, this group accounted for 18.21% of the participated students and 246 students in the second group who was associated sequence with ordered elements, this group accounted for 73.43% of the participated students. However, there were 28 students who could not categorized the conceptions, this group accounted for 8.36% of the participated students.

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย .....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
สารบัญ.....	ฉ
สารบัญตาราง.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฅ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
ที่มาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	7
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย.....	7
ขอบเขตของการวิจัย.....	7
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	11
ความหมายของมโนทัศน์.....	11
ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์.....	13
งานวิจัยต่างประเทศ.....	14
งานวิจัยในประเทศ.....	16
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ของลำดับ.....	18
ความหมายของของลำดับ.....	18
ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ.....	22
การจำแนกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ.....	23
งานวิจัยต่างประเทศ.....	33
งานวิจัยในประเทศ.....	35

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3	36
วิธีดำเนินการวิจัย.....	36
การกำหนดกลุ่มประชากร.....	36
เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล.....	37
การดำเนินการวิจัยและเก็บรวบรวมข้อมูล.....	40
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	41
4	51
ผลการวิจัย.....	51
ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ โดยเกณฑ์ของ มอลโกลชาด้า ฟรีเซนนิโอสโล.....	51
ตอนที่ 2 ผลการตรวจแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของ กลุ่มตัวอย่าง.....	59
ตอนที่ 3 ผลการสัมภาษณ์นักเรียนผู้ทำแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ของลำดับ.....	68
5	77
สรุปผลและอภิปรายผล.....	77
สรุปผลการวิจัย.....	77
อภิปรายผลการวิจัย.....	79
ข้อเสนอแนะ.....	83
บรรณานุกรม.....	84
ภาคผนวก.....	88
ภาคผนวก ก .....	89
ภาคผนวก ข .....	97
ภาคผนวก ค .....	106
ภาคผนวก ง .....	111
ประวัติย่อของผู้วิจัย .....	130

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2-1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างรูปที่และจำนวนจุด.....	20
2-2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่กับจำนวนแต่ละจำนวนในแบบรูป.....	21
2-3 แสดงประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจากผลการวิจัยของ มอลโกชาต้า ฟรีเซนนิโอสโล.....	34
4-1 แสดงจำนวนนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยแบ่งออกได้ 3 กลุ่ม .....	52
4-2 แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มที่รับรู้ว่ลำดับเป็นฟังก์ชัน.....	53
4-3 แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ.....	55
4-4 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 1 (18 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของ ลำดับของกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 307 คน.....	60
4-5 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 2 (10 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของ ลำดับของกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 307 คน.....	62
4-6 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 1 (18 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ของลำดับของนักเรียนที่ ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 28 คน.....	65
4-7 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 2 (10 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ของลำดับของนักเรียน ที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 28 คน.....	70
5-1 แสดงจำนวนนักเรียนที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้จากเกณฑ์ ของมอลโกชาต้า ฟรีเซนนิโอสโล.....	78
ข-1 แสดงประเด็นการประเมินความเหมาะสมของแบบสัมภาษณ์ เรื่องมโนทัศน์ทาง คณิตศาสตร์ของลำดับ .....	100
ข-2 แสดงผลการประเมินแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ.....	103



## สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1-1 แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความถนัดวิชาการและวิชาชีพ รายวิชาคณิตศาสตร์ (PAT1).....	2
1-2 แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยการสอบ O-NET.....	3
1-3 แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยการสอบ O-NET วิชาคณิตศาสตร์.....	4
2-1 แสดงรูปเรขาคณิต .....	19
2-2 แสดงรูปวงกลม.....	19
2-3 แสดงการหาผลต่างของจำนวนแต่ละคู่.....	20
2-4 แสดงจำนวนจุด.....	20

# บทที่ 1

## บทนำ

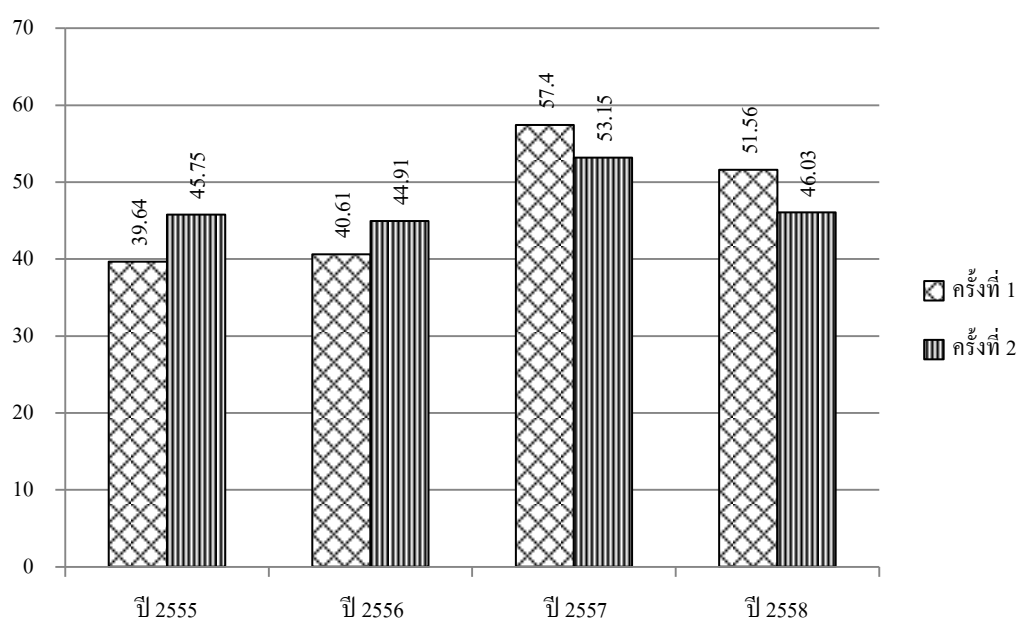
### ที่มาและความสำคัญของปัญหา

จากแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 11 (พ.ศ. 2555-2559) ที่อธิบายไว้ว่า ประเทศต้องเผชิญกับกระแสการเปลี่ยนแปลงทั้งภายนอกและภายในอย่างรวดเร็วและซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ซึ่งอาจเป็นทั้งโอกาสและความเสี่ยงต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะข้อผูกพันที่จะเป็นประชาคมอาเซียนในปี 2558 จึงจำเป็นที่ประเทศจะต้องเตรียมความพร้อมให้แก่ คน สังคม และระบบเศรษฐกิจของประเทศให้สามารถปรับตัวรองรับผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงได้อย่างเหมาะสม โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการเตรียมความพร้อมให้แก่คนนับเป็นความสำคัญมากที่สุด ทั้งนี้ เพราะคนเป็นศูนย์กลางการพัฒนาที่จะเชื่อมโยงทุกมิติของการพัฒนาประเทศ ทั้งมิติตัวคน สังคม เศรษฐกิจ สิ่งแวดล้อม และการเมือง ดังนั้นภายใต้สังคมและเศรษฐกิจที่ขับเคลื่อนด้วยความรู้ ความเปลี่ยนแปลง ระบบการศึกษาจึงเป็นกลไกสำคัญในการการสร้างความพร้อมให้เต็มเปี่ยมไปด้วยความพร้อมด้านนวัตกรรม ทักษะที่จำเป็นและความสามารถ

คณิตศาสตร์นับเป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยในการเตรียมความพร้อมและพัฒนาคนได้ดังแผนพัฒนาฯ ข้างต้น ทั้งนี้เพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ช่วยให้นักเรียนมีความคิดสร้างสรรค์ สามารถคิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน (กรมวิชาการ, 2544, หน้า 1) มีความรับผิดชอบในงานที่มอบหมาย มีความสามารถในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันได้อีกด้วย (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551, หน้า 50) จากเหตุผลข้างต้นชี้ให้เห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากต่อการพัฒนามนุษย์ให้มีคุณภาพ ดังนั้นหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กำหนดให้คณิตศาสตร์เป็นสาระการเรียนรู้หนึ่งที่ผู้เรียนทุกคนในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานจำเป็นต้องเรียนรู้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551, หน้า 10) นอกจากนั้นคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้นอีกด้วย

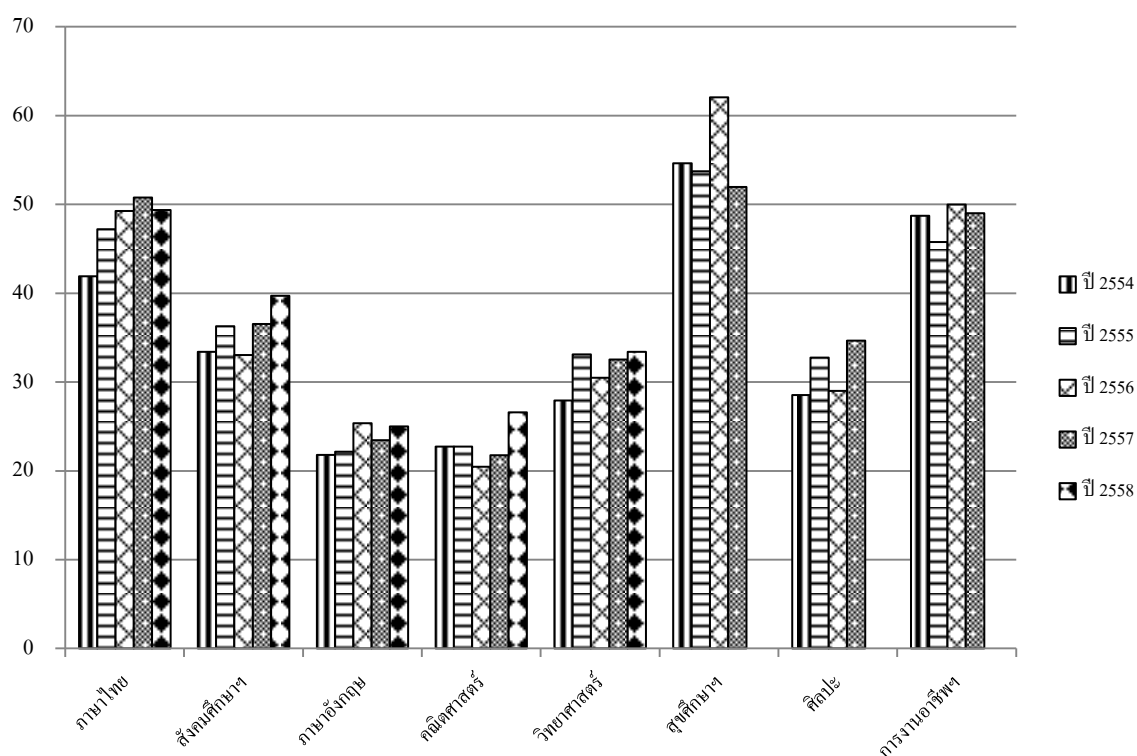
อย่างไรก็ตามแม้ว่าคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญต่อการพัฒนาประเทศ แต่กลับพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยไม่สูงมากนัก จากการทดสอบความถนัดทางวิชาการและวิชาชีพ (Professional and Academic Aptitude Test หรือ PAT) คือ การวัดความรู้ที่เป็นพื้นฐานกับศักยภาพที่จะเรียนในวิชาชีพนั้น ๆ ให้ประสบความสำเร็จ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีทั้งหมด 7 วิชา ได้แก่ PAT 1 คือ ความถนัดทางคณิตศาสตร์ PAT 2 คือ ความถนัดทางวิทยาศาสตร์ PAT 3 คือ ความถนัดทางวิศวกรรมศาสตร์ PAT 4 คือ ความถนัดทาง

สถาปัตยกรรมศาสตร์ PAT 5 คือ ความถนัดทางวิชาชีพครู PAT 6 คือ ความถนัดทางศิลปกรรมศาสตร์ PAT 7 คือ ความถนัดทางภาษาต่างประเทศ (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2558) ซึ่งความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1) ในหนึ่งปีการศึกษามีการจัดสอบ 2 ครั้ง จากปีการศึกษา 2555 ถึง 2558 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ (PAT1) จากคะแนนเต็ม 300 คะแนน พบว่ามีค่าเฉลี่ยค่อนข้างต่ำ แสดงได้ด้วยภาพที่ 1- 1



ภาพที่ 1- 1 แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความถนัดวิชาการและวิชาชีพ รายวิชาคณิตศาสตร์ (PAT1)

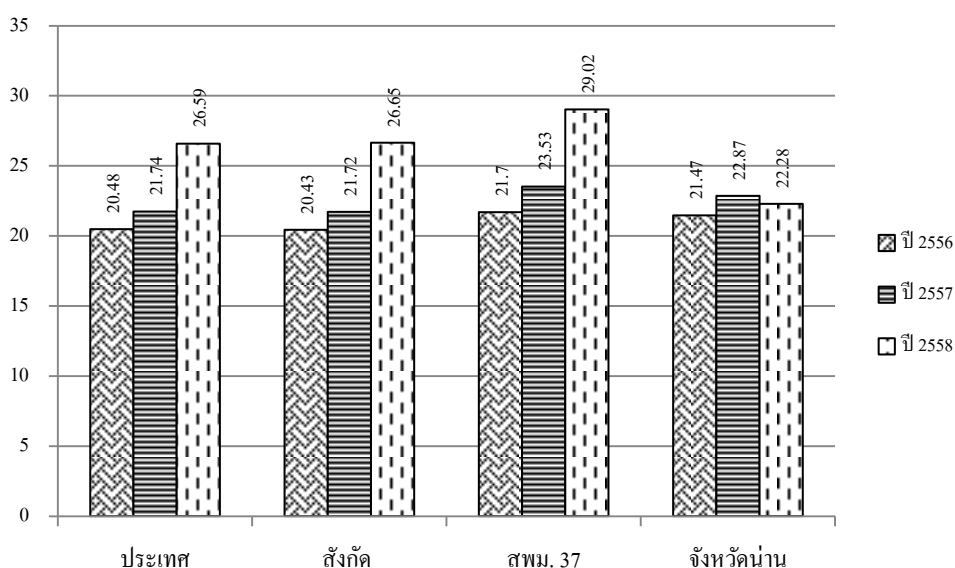
จากการทดสอบวัดความรู้ขั้นพื้นฐานทางการศึกษาแห่งชาติ (Ordinary National Educational Test : O-NET) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2554 ถึง 2556 มีการทดสอบทั้ง 8 รายวิชา พบว่าคะแนนเฉลี่ยต่ำทุกรายวิชา มีเพียงวิชาสุขศึกษาและพลศึกษาเท่านั้นที่มีคะแนนสูงกว่าร้อยละ 50 หลังจากนั้นในปีการศึกษา 2558 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2558) เหลือการทดสอบเพียง 5 รายวิชา ได้แก่ ภาษาไทย สังคมศึกษา ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ แต่วิชาคณิตศาสตร์ก็ยังคงเป็นวิชาที่มีคะแนนเฉลี่ยต่ำที่สุดของทั้งสองปีการศึกษา คือมีคะแนนเพียงร้อยละ 21.74 และ 26.59 ตามลำดับ ซึ่งคะแนนเฉลี่ยทุกรายวิชาแสดงได้โดยแผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยการสอบ O-NET ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน ของปีการศึกษา 2554 ถึงปีการศึกษา 2558 จำแนกตามวิชา ดังภาพที่ 1- 2



ภาพที่ 1-2 แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยการสอบ O-NET

เมื่อพิจารณาศักยภาพในการแข่งขันของนักเรียนไทยในระดับนานาชาติ จากการประเมินโครงการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับนานาชาติ (Trends in International Mathematics and Science Study : TIMSS) โดยประเมินต่อเนื่องทุก ๆ 4 ปี พบว่าผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์และวิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของไทยในช่วงแรกที่เข้าร่วมการประเมินปี 1995 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยระดับนานาชาติ หลังจากนั้นคะแนนเฉลี่ยทั้ง 2 วิชาก็ลดลงอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบันและมีแนวโน้มที่จะลดลงอีกในอนาคต (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2556) ขณะที่โครงการประเมินผลนักเรียนระดับนานาชาติ (Programme for International Student Assessment : PISA) เป็นโครงการที่ทำหน้าที่ประเมินสมรรถนะของนักเรียนใน 3 ด้านคือ การรู้เรื่องด้านการอ่าน (Reading Literacy) การรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) และการรู้เรื่องวิทยาศาสตร์ (Scientific Literacy) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อประเมินคุณภาพระบบการศึกษาในการเตรียมประชากรอายุ 15 ปี โดยหลักสากลถือว่าเป็นระดับการศึกษาภาคบังคับ โดย PISA พบว่าคะแนนสอบมาตรฐานระดับนานาชาติของประเทศไทยในปี 2012 ขยับสูงขึ้นทั้ง 3 ด้านเมื่อเทียบกับทุกครั้งในอดีต (ปี 2003, ปี 2006 และปี 2009) (สำนักงาน

เลขาธิการสภาการศึกษา, 2556) อย่างไรก็ตามคะแนนที่เพิ่มขึ้นเป็นการเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย เมื่อพิจารณาภาพรวมพบว่า คะแนนเฉลี่ยของประเทศไทยยังคงต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยของนานาชาติทั้งสามด้าน และถูกจัดเป็นอันดับที่ 50 จากจาก 65 ประเทศที่เข้าร่วมการประเมิน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) มีคะแนนเฉลี่ยของไทยเท่ากับ 427 คะแนนซึ่งต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยรวมทุกประเทศ (494 คะแนน) เมื่อลงลึกถึงรายละเอียดคะแนนการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินี้พื้นฐาน (O-NET) ระดับจังหวัดน่านของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 วิชาคณิตศาสตร์เมื่อเปรียบเทียบกับระดับประเทศ ระดับสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (สพฐ.) ระดับสำนักงานการศึกษามัธยมศึกษา เขต 37 (แพร่ – น่าน) มีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน ดังแสดงในภาพที่ 1 – 3



ภาพที่ 1 – 3 แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยการสอบ O-NET วิชาคณิตศาสตร์

ภาพรวมของคะแนนเฉลี่ยทุกระดับมีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้น แต่ก็ยังต่ำกว่าร้อยละ 30 เมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยของจังหวัดน่านเท่ากับร้อยละ 22.28 ซึ่งโรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม จังหวัดน่าน มีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 28.39 กล่าวโดยสรุปผลการประเมินทั้งในระดับประเทศและระดับนานาชาติ ชี้ให้เห็นว่ามีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ประเทศต้องให้ความสำคัญกับการยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้นเพื่อเพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันและก้าวทันนานาชาติได้

จากปัญหาผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ต่ำ อาจเนื่องมาจากหลายสาเหตุ อาทิเช่น สาเหตุจากกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่ขาดจุดเน้นในเรื่องการมีส่วนร่วมของนักเรียนแต่เป็นการเรียนการสอนที่เน้นครูเป็นศูนย์กลาง สาเหตุจากตัวนักเรียนที่มีเจตคติที่ไม่ดีต่อการเรียน ไม่มีความสนใจ ไม่เห็นคุณค่าและความหมายของสิ่งที่ได้เรียนรู้ในบางวิชา ทั้งนี้เพราะครูไม่ได้สอนเนื้อหาที่เชื่อมโยงกับสถานการณ์จริง สาเหตุจากธรรมชาติของวิชา กล่าวคือ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความเป็นนามธรรมสูง ซึ่งเกี่ยวข้องกับกระบวนการคิด มีการใช้สัญลักษณ์มากกว่าสื่อและอุปกรณ์ ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์จึงควรเป็นลักษณะที่ครูสนับสนุนให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมที่หลากหลาย ส่งเสริมให้คิดเป็น ทำเป็นและแก้ปัญหาเป็น (สุพัตรา จอมคำสิงห์, 2552, หน้า 2) ซึ่งสอดคล้องกับสุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2546, หน้า 37) ได้กล่าวว่า วิธีการหนึ่งที่จะทำให้นักเรียนสามารถเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มมากยิ่งขึ้นด้วยการที่ครูน่าจะต้องพยายามสอนคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่เป็นนามธรรมให้เป็นวิชารูปธรรมให้มากที่สุด โดยใช้สื่อการสอนเข้ามาช่วยประกอบการอธิบายหรือเทคนิควิธีการสอนใหม่ การจัดการกระบวนการเรียนรู้ไม่ได้ส่งเสริมให้เด็กเกิดความคิดสร้างสรรค์ ทักษะการแก้ปัญหา การคิดวิเคราะห์ ดังนั้นจึงจำเป็นอย่างยิ่งที่การจัดการเรียนการสอนสมัยใหม่ต้องปรับไปสู่การหลอมรวมการเรียนรู้ในห้องกับการเรียนรู้ ครูจะต้องจัดการเรียนการสอนที่ยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางอย่างแท้จริง โดยต้องมีเป้าหมายเพื่อพัฒนานักเรียนทั้งด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ควบคู่ไป ซึ่งทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics skills and processes) เป็นความสามารถหรือความชำนาญในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบสำคัญของศักยภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Proficiency) ของผู้เรียนทุกคน เนื่องจากเป็นสิ่งที่ทำให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความหมาย การจัดการศึกษาคณิตศาสตร์จึงมุ่งให้ผู้เรียนมีทั้งความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ดีควบคู่กันไป (อัมพร ม้าคนอง, 2553, หน้า 21) ซึ่งสอดคล้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555, หน้า 76) ได้อธิบายว่าเนื่องจากความรู้ทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นนามธรรม และการใช้สัญลักษณ์ในการสื่อความหมาย ซึ่งเป็นเรื่องยากและซับซ้อนต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ดังนั้นครูจึงต้องจัดการเรียนการสอนในลักษณะที่ส่งเสริมและพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้เกิดขึ้นไปพร้อมกับการเรียนรู้เนื้อหา ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้มีการกำหนดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ทั้งหมด 5 ประการ ซึ่งประกอบไปด้วย ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการให้เหตุผล ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับ

ศาสตร์อื่น ๆ และความสามารถในการคิดริเริ่มสร้างสรรค์ จะเห็นได้ว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ถูกจัดเป็นทักษะพื้นฐาน (Problem Solving as a basic skill) หากนักเรียนขาดการพัฒนาทักษะในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์แล้วย่อมทำให้การพัฒนาทักษะในระดับที่สูงขึ้นเป็นไปได้ยาก และเป็นเป้าหมายในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (Branca, 1980, pp. 3-8) นั่นคือการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ซึ่งเป็นแนวคิดบนพื้นฐานที่ว่า รูปแบบการศึกษาในช่วงที่ผ่านมาที่มีเน้นเพียงแค่การเรียนและการท่องจำไม่เพียงพออีกต่อไปแล้วสำหรับการเตรียมพร้อมนักเรียนให้สามารถดำรงชีวิตและทำงานในโลกยุคใหม่ที่เต็มไปด้วยความท้าทายและความเสี่ยงมากมาย นักเรียนจำเป็นต้องได้รับการปลูกฝังทักษะที่จำเป็น อันได้แก่ ทักษะการคิดขั้นสูง ทักษะการสร้างสรรค์สิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเอง ทักษะการเรียนรู้การแก้ปัญหา ทักษะการทำงานและดำรงชีวิต เป็นต้น

ลำดับและอนุกรมเป็นเนื้อหาทางวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญอีกเรื่องหนึ่ง ลำดับถูกจัดให้อยู่สาระพีชคณิต หลักสูตรของโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายลำดับถูกจัดให้อยู่ในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สำคัญลำดับยังมีเนื้อหาใช้ในข้อสอบ O-NET จากประสบการณ์ของผู้วิจัยในการจัดกระบวนการเรียนรู้ให้กับนักเรียนเรื่องลำดับเป็นเวลา 5 ปี พบว่าการที่นักเรียนจะเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้นั้น นักเรียนจำเป็นต้องมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ นั่นคือความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ระหว่างฟังก์ชันและลำดับ ฟังก์ชันเป็นเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แม้ว่านักเรียนจะผ่านการเรียนเรื่องฟังก์ชันมาแล้ว นักเรียนยังไม่สามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับ นั่นคือไม่สามารถเชื่อมโยงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของฟังก์ชันกับลำดับได้ ผู้วิจัยยังสังเกตได้อีกว่านักเรียนยังขาดความเข้าใจในเรื่องโดเมนของลำดับ มีความเข้าใจคลาดเคลื่อนของคำศัพท์อันดับว่าเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของลำดับที่มีความต่อเนื่องกัน ขาดความเข้าใจสัญลักษณ์แทนลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots$  นักเรียนยังมีความสับสนระหว่างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ ทำให้ไม่สามารถแยกลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ได้ สับสนระหว่างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต ทำให้ไม่สามารถแยกลำดับที่กำหนดให้ว่าเป็นลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิตได้ ส่งผลต่อการหาพจน์ถัดไปและพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต ส่งผลให้ไม่เข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเลขคณิตอนันต์และลำดับเรขาคณิตอนันต์

จากการวิจัยของพีเรเนียนิโอสโล (Przenioslo, 2005a) ทำการศึกษาการสร้างมโนทัศน์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยที่เข้าศึกษาต่อทางด้านคณิตศาสตร์ในประเทศโปแลนด์ ผลการวิจัยพบว่า สามารถแบ่งกลุ่มตัวอย่างออกได้เป็นสองกลุ่มคือ กลุ่มที่หนึ่งรับรู้ได้ว่าลำดับคือฟังก์ชัน และกลุ่มที่สองรับรู้ว่าลำดับมีความสัมพันธ์กับอันดับของสมาชิก ซึ่งในกลุ่มที่สองนี้มีการแบ่งออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ อีกหลายกลุ่ม ซิเออไพสกา (Sierpinska, 1900 cited in Przenioslo, 2005a) ทำการศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับโดย พบว่านักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ของลำดับว่าลำดับต้องอยู่ในรูปแบบลำดับอนันต์ และลำดับถูกมองว่าเป็นจำนวนที่เขียนให้ยาว ๆ ได้ ยิ่งไปกว่านั้นนักเรียนยังได้บอกอีกว่า ลำดับต้องเป็นเซตแบบบอกลีออนซ์ที่มีพจน์ทั่วไป และต้องเขียนให้อยู่ในรูปตัวเลขเท่านั้น ปัญหาของความไม่เข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับอนันต์ ยังมีการอภิปรายโดย มาโมน่า, เมคโดนัล และคณะ (Mamona & McDonald et al., 2000, cited in Przenioslo, 2005a) พบว่าการที่นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายไม่เข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ โดยมีความเข้าใจว่าเป็นเพียงกระบวนการของตัวเลข มากกว่าที่จะเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ จากเหตุผลทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้นทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ของนักเรียนในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอบางบาล จังหวัดน่าน เพื่อที่จะทราบถึงประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของนักเรียน และยังเป็นอีกหนึ่งแนวทางเพื่อให้ครูนำไปใช้ในการสร้างและพัฒนาระบบการจัดการเรียนการสอนรวมถึงสื่อการเรียนการสอนเพื่อแก้ปัญหาความเข้าใจคลาดเคลื่อนในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับต่อไปในอนาคต

### วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอบางบาล จังหวัดน่าน

### ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้รู้มโนทัศน์ของลำดับของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอบางบาล จังหวัดน่าน
2. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องลำดับ เพื่อให้ผู้เรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง



## ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 รวมทั้งหมด 345 คน มีรายละเอียดดังนี้

1.1 โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม จำนวน 287 คน ได้แก่

1.1.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 150 คน

1.1.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 137 คน

1.2 โรงเรียนหนองบัวพิทยาคม จำนวน 7 คน ได้แก่

1.2.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 7 คน

1.3 โรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร จำนวน 15 คน ได้แก่

1.3.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 5 คน

1.3.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 10 คน

1.4 โรงเรียนสารธรรมวิทยาคาร จำนวน 36 คน ได้แก่

1.4.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 22 คน

1.4.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 14 คน

2. การวิจัยครั้งนี้ เป็นการเก็บข้อมูลโดยใช้แบบทดสอบและการสัมภาษณ์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559

3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิเคราะห์ห่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ผู้วิจัยใช้เครื่องมือคือ แบบทดสอบที่ได้ทำการสร้างและพัฒนาขึ้นโดย มอลโกชาต้า ฟริเซนนิโอสโต มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 แบบทดสอบอัตนัยเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ จำนวน 28 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

3.1.1 ตอนที่ 1 เป็นข้อคำถามที่กำหนดโดยสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ พจน์ทั่วไป การเขียนลำดับจากเรขาคณิต เซต เซตของคู่อันดับ และเซตแบบบอกเงื่อนไข ให้นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับหรือไม่พร้อมให้เหตุผล จำนวน 18 ข้อ (ข้อ a – r)

3.1.2 ตอนที่ 2 เป็นข้อคำถามที่กำหนดโดยสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ กราฟของลำดับ ตาราง และแผนภาพลูกศร แล้วให้นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับหรือไม่พร้อมให้เหตุผล จำนวน 10 ข้อ (ภาพที่ 1 – 10)

3.2 แบบสัมภาษณ์ ที่ผ่านผู้เชี่ยวชาญทำการตรวจสอบเป็นที่เรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยเป็นผู้สัมภาษณ์ด้วยตนเอง และทำการบันทึกการสัมภาษณ์ นักเรียนจะถูกถามด้วยข้อคำถามจากสถานการณ์ที่นักเรียนเขียนคำตอบจากแบบทดสอบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ โดยการพิจารณาเหตุผลของการเขียนตอบ คำถามที่ใช้เป็นหัวข้อสนทนาเป็นคำถามที่เปิดให้นักเรียนอธิบายคำตอบได้ตามความคิดเห็น

### 3.3 ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง

การดำเนินการทดลองครั้งนี้ เป็นการเก็บข้อมูลโดยใช้แบบทดสอบและการสัมภาษณ์ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559

## นิยามศัพท์เฉพาะ

1. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ภาพหรือความคิดขั้นสุดท้ายที่เป็นนามธรรมที่เป็นลักษณะสำคัญในการจัดกลุ่มของสิ่งนั้นหรือเหตุการณ์นั้น สามารถแยกแยะลักษณะร่วม หรือลักษณะเฉพาะเพื่อให้นักเรียนจำแนกสิ่งที่มีลักษณะตามความคิดนามธรรมนั้น ๆ ได้ ระบุว่าเป็นตัวอย่างหรือไม่เป็นตัวอย่าง เช่น มโนทัศน์ของรูปเรขาคณิตอื่น ๆ กับรูปสามเหลี่ยม และสามารถเชื่อมโยงหมวดหมู่ประเภทเดียวกัน การเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ อาจจะใช้วิธีการให้บทนิยามของเนื้อหานั้น ๆ หรือการฟัง การดู การสัมผัส การอภิปราย เช่น มโนทัศน์ของเซตของกลุ่มอันดับ มโนทัศน์ของฟังก์ชัน มโนทัศน์ของลำดับ เป็นต้น

2. ลำดับ หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกหรือสับเซตของจำนวนเต็มบวกเขียนอยู่ในรูป  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  หรือ  $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

3. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ หมายถึง การอธิบาย การให้เหตุผล การแยกแยะสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้เป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับ พิจารณาจากการอ้างอิงบทนิยามของลำดับ การใช้สัญลักษณ์ของลำดับ จากแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ และกำหนดเกณฑ์การแยกประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจากงานวิจัยของมอลโกซาดา ฟรีเซนนิโอสโล มโนทัศน์ที่แยกประเภทออกได้เป็นสองประเภทและแต่ละประเภทสามารถแยกออกเป็นประเภทย่อย ๆ ได้อีกหลายแบบดังต่อไปนี้

ประเภทที่ 1. มโนทัศน์รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน แบ่งออกเป็น 4 ประเภทดังนี้

- 1.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ
- 1.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ
- 1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์”

1.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นลักษณะของจำนวนนับ”

ประเภทที่ 2. มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ แบ่งออกเป็น 7 ประเภทดังนี้

- 2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”
- 2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”
- 2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน”
- 2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”
- 2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ”
- 2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน”
- 2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”

สรุปได้ว่ามโนทัศน์ของวิชาคณิตศาสตร์ของลำดับ หมายถึง มโนทัศน์ของวิชาคณิตศาสตร์ของลำดับ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ผ่านการเรียนเรื่องลำดับมาแล้ว โดยใช้แบบทดสอบมโนทัศน์ของลำดับจากงานวิจัยของมอลโกซาดา ฟรีเซนนิโอสโล

4. การสัมภาษณ์ หมายถึง การสนทนาระหว่างครูกับนักเรียน เป็นการสนทนาแบบหนึ่งต่อหนึ่ง คำถามได้จากการตรวจแบบทดสอบ เรื่องลำดับ โดยเป็นบทสนทนาอย่างไม่เป็นทางการ และมีการบันทึกบทสนทนาจากการสัมภาษณ์ เพื่อใช้ประกอบการวิเคราะห์ห่ม มโนทัศน์เรื่องลำดับของนักเรียน

5. นักเรียน หมายถึง ผู้ที่กำลังศึกษาอยู่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน

## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อดังต่อไปนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
  - 1.1 ความหมายของมโนทัศน์
  - 1.2 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
  - 1.3 งานวิจัยต่างประเทศ
  - 1.4 งานวิจัยในประเทศ
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ
  - 2.1 ความหมายของลำดับ
  - 2.2 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ
  - 2.3 การจำแนกมโนทัศน์ของลำดับ
  - 2.4 งานวิจัยต่างประเทศ
  - 2.5 งานวิจัยในประเทศ

#### 1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

##### 1.1 ความหมายของมโนทัศน์

ความหมายของ Concept, มโนทัศน์, ความคิดรวบยอด (พจนานุกรมศัพท์ศึกษาศาสตร์, 2555, หน้า 106) หมายถึง ภาพหรือความคิดในสมองที่เป็นตัวแทนของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ประกอบด้วยคุณสมบัติร่วมที่สำคัญของสิ่งนั้น ซึ่งขาดไม่ได้ หากขาดไปจะทำให้ไม่ใช่สิ่งนั้น

ชนาธิป พรกุล (2557, หน้า 123) กล่าวว่า ความหมายของมโนทัศน์ คือ ข้อความที่แสดงแก่นของเรื่องใดเรื่องหนึ่ง ซึ่งเกิดจากการรวบรวมลักษณะเฉพาะของเรื่องนั้น การจัดลักษณะที่เหมือน ๆ กันของสิ่งของ เหตุการณ์ ประสบการณ์ หรือกระบวนการเข้าด้วยกันอย่างมีระเบียบขึ้นเป็นหน่วยความคิด ประเภท หมู่ หรือกลุ่มคล้ายคำจำกัดความ ความเข้าใจจนสามารถกำหนดเกณฑ์ที่จะใช้แบ่งประเภทสรรพสิ่งรอบตัวที่เป็นสิ่งของ วัตถุ พฤติกรรม และสิ่งที่เป็นนามธรรม

เดอ เซกโก และครอว์ฟอร์ด (De cecco & Crawford, 1974, p. 288 ) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ว่า มโนทัศน์ คือ การจัดกลุ่มของสิ่งเร้าที่มีลักษณะร่วมกัน สิ่งเร้าเหล่านี้ได้แก่ วัตถุ เหตุการณ์ หรือ บุคคล โดยทั่วไปแล้วเราจะอธิบายมโนทัศน์โดยชื่อ นั่นคือมโนทัศน์ไม่ใช่ลักษณะเฉพาะเจาะจงของสิ่งเร้าแต่เป็นการจัดกลุ่มที่มีส่วนที่ร่วมกันของสิ่งเร้า

ทอลล์ และ วินเนอร์ (Tall & Vinner, 1981, อ้างถึงใน กาญจนา ฉลาดสัน, 2550, หน้า 17 – 18) อธิบายมโนทัศน์เชิงมโนภาพ (Concept Image) ว่าเป็นสิ่งที่เราได้พบเห็นหรือได้ยินเกี่ยวกับมโนทัศน์ จะทำให้เกิดการกระตุ้นความทรงจำหรือระลึกถึงอะไรบางอย่างเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้น ในทำนองเดียวกันกับมโนทัศน์เชิงมโนภาพ (Concept Image) เป็นสิ่งที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยคำพูด แต่จะเชื่อมโยงกับจิตใจ เรียกว่า ความคิด ซึ่งสามารถแสดงออกมาเป็นภาพได้ อาจเป็นภาพที่สื่อออกมาทางจิตใจ การรวบรวมความประทับใจหรือประสบการณ์ต่าง ๆ และสามารถแปลงมาเป็นรูปแบบของคำพูดได้ แต่เป็นเพียงการสื่อออกมาในส่วนท้าย ๆ ไม่ใช่สิ่งแรกที่เกิดขึ้นในความทรงจำ ตัวอย่างเช่น เมื่อได้ยินคำว่าฟังก์ชัน (function) อาจจะทำให้ย้อนคิดถึงสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนฟังก์ชัน  $y = f(x)$  หรืออาจจะจินตนาการถึงภาพที่ต่างออกไป เช่น  $y = x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \ln x$  เป็นต้น สรุปได้ว่า มโนทัศน์เชิงมโนภาพมีความสัมพันธ์กับสิ่งนั้นอย่างเฉพาะเจาะจง และมโนทัศน์ต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่งของแต่ละบุคคลอาจแตกต่างกันไป

ปฏิภาณ ยอดขุนทด (2552, หน้า 7) อธิบายว่ามโนทัศน์เป็นนามธรรม การสร้างมโนทัศน์ขึ้นอยู่กับกระบวนการบันทึกความเป็นนามธรรมของคุณสมบัติที่แตกต่างกันจากสถานการณ์ต่าง ๆ ความเป็นนามธรรมนั่นเองทำให้ยากต่อการถ่ายทอดมโนทัศน์จากคนหนึ่งไปยังอีกคนหนึ่ง ดังนั้นการกำหนดสถานการณ์ของมโนทัศน์จึงมีความสำคัญ เพราะมโนทัศน์ที่ไม่ได้เชื่อมด้วยสถานการณ์ จะไม่มีความหมายและยากต่อความเข้าใจ นั่นคือการสอนมโนทัศน์ให้ประสบความสำเร็จจะต้องมีสถานการณ์เข้ามามีส่วนช่วยให้เข้าใจถึงมโนทัศน์ของสิ่งนั้นด้วย

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถอธิบายความหมายของมโนทัศน์ได้ดังนี้ มโนทัศน์เป็นหมวดหมู่ของวัตถุ ภาพ หรือความคิดที่เชื่อมโยงกับจิตใจ มโนทัศน์ที่เกิดจากความทรงจำต่อสิ่ง ๆ นั้น ประกอบด้วยคุณสมบัติร่วมที่สำคัญของสิ่งนั้นมากเพียงพอที่จะเป็นตัวแทนของบางสิ่งบางอย่าง เนื่องจากมโนทัศน์มีความเป็นนามธรรมจึงยากที่จะถ่ายทอดมโนทัศน์จากคนหนึ่งไปสู่อีกคนหนึ่ง จึงต้องอาศัยสถานการณ์ที่สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้น เพื่อกระตุ้นความทรงจำเกี่ยวกับมโนทัศน์ และมโนทัศน์จะแตกต่างกันออกไปขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของแต่ละบุคคลที่ได้รับมา

## 1.2 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

สำหรับความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายไว้ดังนี้

เบล (Bell, 1981, อ้างถึงใน สันติ อธิพิณฑานาวกุล, 2550, หน้า 58) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นความคิดเชิงนามธรรมในการจัดกลุ่มสิ่งของ หรือเหตุการณ์ที่เป็นตัวอย่างและไม่เป็นตัวอย่าง เช่นมโนทัศน์ของเซต สับเซต การเท่ากัน การไม่เท่ากัน รูปสามเหลี่ยม ลูกบาศก์ รัศมี เลขยกกำลัง เป็นต้น ยกตัวอย่างเช่น การเรียนรู้มโนทัศน์ของรูปสามเหลี่ยมต้องสามารถจำแนกรูปเรขาคณิตออกเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่เป็นรูปสามเหลี่ยม กับกลุ่มที่ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งการเรียนรู้มโนทัศน์อาจจะให้บทนิยาม หรือการสังเกต เช่น ฟัง ดู สัมผัส อภิปราย ความคิดของสิ่งที่เป็นตัวอย่างกับไม่เป็นตัวอย่าง และสิ่งที่มีสมบัติตรงกันข้าม การเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา ต้องใช้การดูด้วยตา การสัมผัสด้วยมือ อยู่ในขั้นคิดเป็นรูปธรรม ในส่วน of นักเรียนชั้นสูงกว่าจะเรียนรู้โดยการอภิปรายและตรรกะตรง ซึ่งหลังจากผ่านการเรียนรู้มโนทัศน์แล้วจะสามารถจำแนกสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างของมโนทัศน์ได้

ฐาปณี ดนัยอัชฌาวุฒ (2547, หน้า 4) อธิบายว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หมายถึงความคิดขั้นสุดท้าย ซึ่งเป็นข้อสรุป หรือคำจำกัดความ ที่สามารถระบุลักษณะร่วม หรือลักษณะเฉพาะของสิ่งใดสิ่งหนึ่งส่งผลให้สามารถแยกประเภท และในขณะเดียวกันสามารถเชื่อมโยงกลุ่มประเภทเดียวกันได้ ตลอดจนนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนเกิดกระบวนการสร้างมโนทัศน์ในวิชาคณิตศาสตร์ คือการสอนให้ผู้เรียนเห็นจากของจริง วัสดุประดิษฐ์ หรือศึกษาจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อจำแนกความแตกต่างและหาลักษณะร่วมแล้วสรุปเป็นนิยาม โดยวัดด้วยแบบทดสอบวัดมโนทัศน์ ซึ่งมีลำดับขั้นการสอนดังนี้ ขั้นที่ 1 ให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อจำแนกความแตกต่างและหาลักษณะร่วม ขั้นที่ 2 สรุปลักษณะร่วม ขั้นที่ 3 ทดสอบและนำไปใช้

อัมพร ม้าคนอง (2557, หน้า 15) อธิบายว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematic concept) หมายถึง เป็นความคิดรวบยอดเกี่ยวกับลักษณะสำคัญ ความหมาย ที่มา หรือการขยายความ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม นิยาม เป็นความคิดนามธรรมที่ทำให้ผู้เรียนสามารถจำแนกสิ่งที่มีลักษณะตามความคิดนามธรรมนั้น ๆ ได้ และสามารถระบุได้ว่าสิ่งที่กำหนดให้เป็นตัวอย่างหรือไม่ใช่ตัวอย่างของนามธรรมนั้น ตัวอย่างของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น รูปสามเหลี่ยมมีลักษณะเป็นรูปเรขาคณิตสองมิติ ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้นเชื่อมจุดปลายต่อกันเป็น

รูปปิดในระนาบ ลักษณะดังกล่าวสามารถใช้ในการจำแนกว่ารูปใดเป็นรูปสามเหลี่ยม รูปใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม

อรพรรณ เลื่อนแป้น (2555, หน้า 9) กล่าวว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิด ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้จากการเรียนรู้ โดยนักเรียนสามารถสรุปออกมาเป็นบทนิยามหรือความหมายของเรื่องนั้นได้

จากความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวมาข้างต้นทั้งหมดนั้น สามารถสรุปเป็นความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ ภาพหรือความคิดขั้นสุดท้ายที่เป็นนามธรรมที่เป็นลักษณะสำคัญในการจัดกลุ่มของสิ่งนั้นหรือเหตุการณ์นั้น สามารถแยกแยะลักษณะร่วม หรือลักษณะเฉพาะเพื่อให้นักเรียนจำแนกสิ่งที่มีลักษณะตามความคิดนามธรรมนั้น ๆ ได้ ระบุว่าเป็นตัวอย่างหรือไม่เป็นตัวอย่าง และสามารถเชื่อมโยงหมวดหมู่ประเภทเดียวกัน การเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ อาจจะใช้วิธีการให้บทนิยามของเนื้อหา นั้น ๆ หรือการฟัง การดู การสัมผัส การอภิปราย เช่น มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของรูปสามเหลี่ยม มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของรูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น

### 1.3 งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยมโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ต่างประเทศมีดังนี้

บราว (Brown, 2004, pp. 191 – 195) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับที่มาของมโนทัศน์ของลิมิต ในวิชาแคลคูลัส เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาที่มาของมโนทัศน์ของลิมิต ในวิชาแคลคูลัส โดยการใช้การสัมภาษณ์สองครั้ง ซึ่งครั้งที่สองมีระยะห่างจากครั้งแรกหนึ่งเดือน มีผู้เข้าร่วมการวิจัย 14 คน ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน และได้ผ่านการเรียนวิชาแคลคูลัสมาแล้ว ได้แก่ นักเรียนหรือผู้ที่จบการศึกษาไปแล้ว 9 คน กำลังศึกษาระดับมหาวิทยาลัย สาขาคณิตศาสตร์ 2 คน และอีก 3 คน จบการศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า กระบวนการรับรู้ ความสามารถในการเข้าใจ มโนทัศน์ของลิมิตในวิชาแคลคูลัสมีความสัมพันธ์กับการแปรผันตามบริบทเกี่ยวกับพื้นฐานของภูมิหลังทางด้านวิชาการ โดยมีผู้เข้าร่วมการวิจัย 5 คนที่มีความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิต ได้แก่ นักเศรษฐศาสตร์ นักการสื่อสารโทรคมนาคม นักเทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์ และสองคนเป็นครูสอนด้านวิศวกรรมศาสตร์

ฟรีเซนนิโอสโล (Przenioslo, 2005b, pp. 71 – 93) ได้ทำการศึกษากการแนะนำมโนทัศน์ของอนุกรมสู่เข้าในโรงเรียนมัธยมศึกษา วัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อนำเสนอเครื่องมือชุดการสอนที่ออกแบบปัญหาและคำถามสำหรับการอภิปราย ที่สามารถช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ของลิมิตของอนุกรมสู่เข้าได้ดีขึ้น

รานี และ คอรั (Rani & Kaur, 2010) ได้ทำการศึกษาผลของการเรียนการสอนโดยการสร้างรูปแบบของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เปรียบเทียบกับนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีปกติ ของนักเรียนเกรดเจ็ด กลุ่มตัวอย่างจำนวน 87 คน จากเมืองโกรายา (Goraya) แบ่งออกเป็นสองกลุ่ม กลุ่มแรกจำนวน 45 คน จากโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นของรัฐบาล (Government Senior Secondary School) เป็นกลุ่มที่ได้รับการสอนรูปแบบสร้างมโนทัศน์กลุ่มที่สองจำนวน 42 คน จากโรงเรียนอคาเดมี่ (Punjab Rural Academy) เป็นกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการปกติ เลือกโดยวิธีการสุ่มอย่างง่าย ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มที่สอนโดยวิธีการสอนรูปแบบสร้างมโนทัศน์มีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .01

แอมกิ, เดกซอล และคาร์เทินซัน (Ehmke, Drechsel, & Carstensen, 2010, pp. 27 – 35) ทำการศึกษาผลกระทบของการเก็บคะแนนต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและมโนทัศน์ของตนเอง (self – concept) ในด้านวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ การศึกษาครั้งนี้เป็นการเก็บข้อมูลระยะยาว กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 9 ในประเทศเยอรมนี เปรียบเทียบนักเรียนที่มีอายุเท่ากัน ได้แบ่งออกเป็นสามกลุ่ม ดังนี้ (a) นักเรียนที่ยังเรียนอยู่เกรด 9 (b) จับคู่กันในกลุ่มนักเรียนที่อยู่ในระดับเดียวกันที่ได้รับการเลื่อนชั้น (c) นักเรียนทั้งหมดในกลุ่มที่ได้รับการเลื่อนชั้น ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมีมโนทัศน์ของตนเองสูงขึ้นในวิชาคณิตศาสตร์หลังจากหนึ่งปีของการเก็บข้อมูล ความคงทนในการเรียนของนักเรียนเกรด 9 ไม่ได้ลดลง การศึกษากับนักเรียนที่ได้เลื่อนชั้นปกติ

มาร์ติน เบนเนอร์, กอนซาเลส, คิริสทีน่า และอาซิวิโด (Martinez-Planell, Gonzalez, DiCristina, & Acevedo, 2012, p. 235) ได้ทำการศึกษามโนทัศน์ของนักเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นว่านักเรียนสร้างมโนทัศน์ของอนุกรมอนันต์ที่แตกต่างกันสองประเภท เพื่อแสดงให้เห็นความยากของโครงสร้างโดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับนักเรียนและการตรวจสอบ และเพื่อค้นหาวิธีการปรับปรุงความเข้าใจของนักเรียนในการค้นพบวิธีการสร้างมโนทัศน์ที่แตกต่างกันทั้งสองรูปแบบ พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาเกี่ยวกับความไม่เข้าใจในผลรวมย่อยของอนุกรมอนันต์

เทคเกิน, ยาลิซี และ ดีลีซ (Ertekin, Yazici, & Delice, 2014, pp. 566 – 588) ได้ทำการสืบสวนมโนทัศน์เชิงมโนภาพทางคณิตศาสตร์ เรื่องทรงกระบอกและทรงกรวย ของนักเรียนและครูในระดับประถมศึกษา จุดมุ่งหมายของการศึกษาในครั้งนี้คือการหาคำจำกัดความที่มีอิทธิพลต่อมโนทัศน์ของทรงกระบอกและทรงกรวย ในการสร้างหลักคณิตศาสตร์ของครูและนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์เชิงมโนภาพ การศึกษามีการออกแบบการสำรวจเชิงสัมพัทธ์และผู้เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 238 คน ผลการวิจัยมีดังนี้ ครูไม่มีความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ของทรงกระบอกและ



ทรงกรวยเพียงพอในการสร้างมโนทัศน์เชิงมโนภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยครูต้องเพิ่มบทนิยามมโนทัศน์อย่างมีประสิทธิภาพเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเลือกการสร้างมโนทัศน์ที่ถูกต้องของทรงกระบอกและทรงกรวยจากการกำหนดเขตของรูปแบบ บทนิยามของสูตรไม่มีผลต่อการเลือกการสร้างมโนทัศน์ของทรงกระบอกและทางกรวย และโครงสร้างใหม่ของการสร้างมโนทัศน์ของทรงกรวย

#### 1.4 งานวิจัยในประเทศ

งานวิจัยเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์มีดังนี้

กาญจนา ฉลาดสัน (2550, หน้า 103 – 110) ทำการศึกษากระบวนการสร้างความคิดรวบยอดเชิงมโนภาพของนักเรียน เรื่องวงกลมโดยใช้โปรแกรม The Geometer Sketchpad เป็นการทำกิจกรรมกลุ่มในบริบทนอกชั้นเรียน ระเบียบวิจัยเชิงคุณภาพเน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 12 คน แบ่งออกเป็น 2 วงจร วงจรละ 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน ทำแบบทดสอบหลังเรียนและผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนทุกคน ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยวิเคราะห์กระบวนการสร้างความคิดรวบยอดเชิงมโนภาพของนักเรียนตามกรอบทฤษฎี Action – Process – Structure ที่พัฒนาโดยไฮอินกราจ (Heingraj, 2006) ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนสร้างความคิดรวบยอดเชิงมโนภาพซึ่งเป็นการเข้าใจระดับจัดกระทำ โดยแปลความหมายจากข้อมูล การสังเกตและนำความรู้เดิมมาใช้แล้วพัฒนาเป็นการเข้าใจระดับกระบวนการ โดยผ่านกระบวนการปรับเปลี่ยน (Interiorization) อธิบายเปรียบเทียบสะท้อนสิ่งที่สังเกตได้จากภาพเคลื่อนไหวบนหน้าจอ และมีการสร้างความคิดรวบยอดเชิงมโนภาพในระดับที่สูงขึ้น (Encapsulation) ซึ่งเป็นความเข้าใจในระดับโครงสร้างต่อไป 2) การทำกิจกรรมและการทำแบบทดสอบแสดงให้เห็นความคิดรวบยอดเชิงมโนภาพทั้งสามระดับที่กล่าวมาแล้ว และ 3) นักเรียนให้ความคิดเห็นเกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ว่าช่วยให้เรียนคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้นและเข้าใจโดยการเปรียบเทียบและสังเกตการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น เกิดความสนุกสนานเพราะเป็นภาพเคลื่อนไหวได้และมองเห็นภาพได้ชัดเจนมากขึ้น

มงคล ประเสริฐสังข์ (2551, หน้า 77 – 80) ทำการศึกษาโครงสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พาราโบลาโดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้ 5Es. เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมาย 3 คน มีผลคะแนนเฉลี่ยในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน วัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อศึกษาการสร้างโครงสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์)

ระดับมัธยมศึกษา การศึกษาครั้งนี้พบว่านักเรียนสามารถสร้างความคิดรวบยอดได้อย่างครบถ้วน และสามารถใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

ปฏิภาณ ขอดขุนทด (2552, หน้า 95 – 98) ได้ทำการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเชิงจำนวนของนักเรียนในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด ใช้ระเบียบวิจัยเชิงคุณภาพ ด้วยวิธีการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และการบรรยายวิเคราะห์ (Analytic Description) กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 6 คน แบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 3 คน สรุปผลการวิจัยได้ว่า 1) สถานการณ์ปัญหาปลายเปิดจากวิธีการแบบเปิดทำให้นักเรียนสร้างปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาดังกล่าว และเกิดกลุ่มของสถานการณ์ปัญหาย่อย ด้วยกลุ่มสถานการณ์ดังกล่าว ทำให้นักเรียนได้ความหมายเชิงจำนวน 2) ความคิดรวบยอดเชิงจำนวนของนักเรียนค่อย ๆ รวมตัวกันจากการแก้ปัญหาปลายเปิด ตั้งแต่การใช้อุปกรณ์แทนตัวปัญหา ใช้การวาดภาพอุปกรณ์แทนปัญหาและยืนยันภาพด้วยอุปกรณ์จนได้สัญลักษณ์ พร้อมกับใช้อุปกรณ์ยืนยันสัญลักษณ์ทำให้ความหมายเชิงจำนวนต่อสัญลักษณ์มีความชัดเจนมากขึ้น 3) ความหมายของจำนวนที่เกิดจากการนับด้วยมือ นับด้วยอุปกรณ์ นับด้วยภาพ ที่นักเรียนนำมาอธิบายและตรวจสอบจำนวนจากขั้นตอนและวิธีการแก้ปัญหาทำให้เกิดความคิดรวบยอดเชิงจำนวนมีความชัดเจนมากขึ้น 4) นักเรียนใช้สัญลักษณ์มีความหมายต่อวิธีการแก้ปัญหา

พรพิมล ยังฉิม (2556) ทำการวิจัยผลการแก้ไขความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์เรื่องรากที่  $n$  ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ โดยใช้เทคนิคการสอนแบบระดมความคิด กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนที่มีผลการเรียนไม่ผ่านเกณฑ์ (คะแนนต่ำสุด) จำนวน 28 คน จุดประสงค์ของการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนชายกับนักเรียนหญิง และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังการใช้เทคนิคการสอนแบบระดมความคิด แบบทดสอบปรนัยเพื่อใช้ทดสอบหลังการปรับแก้ไขความคิดรวบยอดที่ผิดพลาด จำนวน 30 ข้อ ผลการวิจัยพบอันดับที่หนึ่งที่นักเรียนมีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดคือ บทนิยามของรากที่ 2 อันดับที่สองลงมาเรียนตามลำดับได้ดังนี้ บทนิยามของรากที่  $n$  การเขียนสัญลักษณ์ การหาผลบวกและผลต่างของกรณฑ์ สมบัติของรากที่ การหาผลคูณและผลหารของกรณฑ์ การเขียนสัญลักษณ์แทนรากที่ 2 และสมบัติของรากที่ 2 ยังคงพบอีกว่านักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ฯ แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังได้รับการแก้ไขความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จะเห็นได้ว่างานวิจัยทั้งต่างประเทศและในประเทศที่เป็นตัวอย่างดังที่กล่าวมาข้างต้นเป็นงานวิจัยที่แสดงให้เห็นถึงการศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ไม่ว่าจะเป็นการวิจัย

เชิงคุณภาพเพื่อศึกษาการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์แล้วแต่มีความมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนได้รับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง สามารถเชื่อมโยงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์กับการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ และเป็นการวิจัยเพื่อค้นหาและแก้ไขข้อบกพร่องของมโนทัศน์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยสนใจงานวิจัยที่ใช้การสำรวจและวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจากนักเรียนหลังการเรียนเรื่องลำดับแล้ว เพื่อที่จะนำข้อบกพร่องในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ค้นพบไปทำการแก้ไขจุดบกพร่องและพัฒนาให้นักเรียนในครั้งต่อไป อีกทั้งยังเป็นแนวทางสำคัญอีกแนวทางหนึ่งให้กับครูในการปรับปรุงและพัฒนาการจัดกระบวนการเรียนการสอน ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านเนื้อหา หรือด้านการเลือกใช้ตัวอย่างในการสอน ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน

## 2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

### 2.1 ความหมายของลำดับ

ราชบัณฑิตยสถาน (2538, หน้า 243) แปล Sequence ว่า ลำดับ และได้มีผู้ให้ความหมายของลำดับ ดังต่อไปนี้

ลาส (Large, 2010, p. 10) ได้ให้ความหมายของลำดับ (Sequence) หมายถึง จำนวนหลาย ๆ จำนวนซึ่งอยู่ในรายการเดียวกัน มีแบบรูปเฉพาะหรือกฎ เรียกว่า ลำดับ (Sequence) เรียกแต่ละจำนวนในลำดับว่า พจน์ (Term) ถ้าไม่กำหนดกฎให้ก็สามารถที่จะหาได้จากจำนวนสองสามจำนวนแรกที่อยู่ในลำดับ

โรเจอร์ และ ลาส (Rogers & Large, 2012, pp. 14 – 15) บอกว่า ลำดับ (Sequence) คือ กลุ่มของสิ่งของที่เรียงกันตามลำดับ และมีรูปแบบหรือกฎที่แน่นอน ยกตัวอย่าง เช่น เลขที่บ้านอาจจะมาจากลำดับของเลขคู่ 2 4 6 8 ไปเรื่อย ๆ รูปร่างและรูปภาพก็สามารถเป็นลำดับได้เช่นกัน คลิสติน โรเจอร์ และโทริ ลาส ยังได้ให้ความหมายของ พจน์ (Terms) คือ จำนวน หรือ รูปร่าง หรือ รูปภาพ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งในลำดับ เช่น

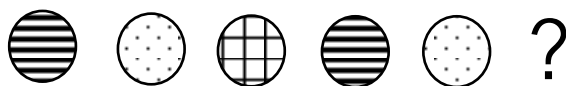
1	2	4	8	...
พจน์ที่ 1	พจน์ที่ 2	พจน์ที่ 3	พจน์ที่ 4	...

แต่ละพจน์ในลำดับของจำนวนลำดับนี้มีค่าเท่ากับสองเท่าของพจน์ที่มาก่อนหนึ่งพจน์ พจน์ถัดจากนี้ไปคือ 16 สัญลักษณ์สามจุด “...” ในตอนท้ายของลำดับหมายความว่าลำดับนี้มีต่อไปเรื่อยๆ



ภาพที่ 2-1 แสดงรูปเรขาคณิต

พจน์ในลำดับนี้คือรูปร่าง แต่ละพจน์มีจำนวนด้านมากกว่าที่มีอยู่ในพจน์ก่อนหน้า 1 ด้าน พจน์ถัดไปในลำดับนี้จะเป็รูปร่างที่มี 6 ด้าน (รูปหกเหลี่ยม)



ภาพที่ 2-2 แสดงรูปร่างกลม

พจน์เหล่านี้มาจากลำดับของหลาย พจน์ถัดไปจะเป็นวงกลมลายตาราง

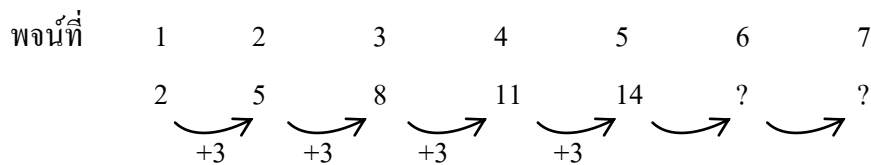
จำนวนติดกัน (Consecutive numbers) คือจำนวนเต็มที่อยู่ติดกันเรียกว่าจำนวนติดกัน ยกตัวอย่าง เช่น จำนวนเหล่านี้คือจำนวนติดกัน 1 2 3 4 5 6

จำนวนเหล่านี้ก็เช่นกัน -21 -22 -23 -24 -25

จำนวนเหล่านี้ไม่ใช่จำนวนติดกัน -15 2 5 32 11 4

กฎ (Rules) คือ รูปแบบ (หรือเงื่อนไข) ที่ลำดับต้องทำตาม เรามักจะเจอกฎสำหรับหาพจน์ถัดไปในลำดับโดยการดูความต่างของตัวเลข ยกตัวอย่างเช่น

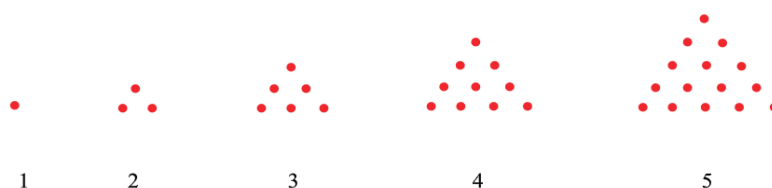
จงหาพจน์ที่ 6 และ 7 ในลำดับข้างล่าง เราหาผลต่างของจำนวนแต่ละคู่



ภาพที่ 2-3 แสดงการหาผลต่างของจำนวนแต่ละคู่

กฎที่ได้ คือ “การบวกเพิ่มทีละ 3 ในแต่ละครั้ง” ดังนั้น สองพจน์ถัดไป คือ 17 และ 20

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] (2556, หน้า 134 – 136) ได้มีการอธิบายความหมายของลำดับ โดยเริ่มจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแบบรูปต่อไปนี้



ภาพที่ 2-4 แสดงจำนวนจุด

จากแบบรูปข้างต้นพบว่า ลำดับของรูปและจำนวนจุดในรูปมีความสัมพันธ์กันดังนี้

ตารางที่ 2-1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างรูปที่และจำนวนจุด

รูปที่	1	2	3	4	5
จำนวนจุด	1	3	6	10	15

จากตารางจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ของลำดับของรูป และจำนวนจุดในแต่ละรูปเป็นฟังก์ชันที่มี  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  เป็นโดเมน และมี  $\{1, 3, 6, 10, 15\}$  เป็นเรนจ์ พิจารณารูปของจำนวน 1, 3, 5, 7, 9, ...,  $2n - 1$ , ... เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับ จากรูปข้างต้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่กับจำนวนแต่ละจำนวนในแบบรูปได้ดังนี้

ตารางที่ 2 – 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่กับจำนวนแต่ละจำนวนในแบบรูป

รูปที่	1	2	3	4	5	...	n	...
จำนวนจุด	1	3	5	7	9	...	$2n - 1$	...

จากตารางจะเห็นว่าความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$  และมีเรนจ์เป็น  $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots\}$  นั่นคือความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน พิจารณาจากโดเมนพบว่าโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ดังนั้นฟังก์ชันนี้เป็นลำดับ และโดเมนเป็นเซตอนันต์ ลำดับนี้จึงเป็นลำดับอนันต์

ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็นเซตหรือสับเซตของจำนวนเต็มบวก ที่เขียนในรูป  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  เรียกว่า ลำดับ ในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็น  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า ลำดับจำกัด (Finite sequence) และในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า ลำดับอนันต์ (Infinite sequence)

การเขียนลำดับจะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไป กล่าวคือ ถ้า  $a$  เป็นลำดับจำกัด จะเขียนแทนด้วย  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ในกรณีที่  $a$  เป็นลำดับอนันต์จะเขียนแทนด้วย  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เรียก  $a_1$  ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

$a_2$  ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

$a_3$  ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

⋮

$a_n$  ว่า พจน์ที่  $n$  หรือพจน์ทั่วไป (General term) ของลำดับ

สรุปได้ว่าลำดับ หมายถึง กลุ่มของสิ่งของที่เรียงกันตามลำดับ และมีรูปแบบหรือกฎที่แน่นอน หรืออาจเป็นจำนวนหลาย ๆ จำนวนซึ่งอยู่ในรายการเดียวกัน มีแบบรูปเฉพาะหรือกฎ เรียกว่า ลำดับ (Sequence) เรียกแต่ละจำนวนในลำดับว่า พจน์ (Term) ถ้าไม่กำหนดกฎให้ก็สามารถที่จะหาได้จากจำนวนสองสามจำนวนแรกที่อยู่ในลำดับ และลำดับเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตหรือสับเซตของจำนวนเต็มบวก

## 2.2 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

จากการศึกษาค้นคว้าหัวข้อ ความหมายของมโนทัศน์ ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และความหมายของลำดับที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น สามารถสรุปเป็นความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ดังนี้

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ หมายถึง ภาพหรือความคิดขั้นสุดท้ายที่เป็นนามธรรมที่เป็นลักษณะสำคัญของลำดับ พิจารณาจากการอ้างอิงบทนิยามของลำดับ การใช้สัญลักษณ์ของลำดับ จากแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ และกำหนดเกณฑ์การแยกประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจากงานวิจัยของมอลโกซาดา ฟรีเซนนิโอสโล มโนทัศน์ที่แยกประเภทออกได้เป็นสองประเภทและแต่ละประเภทสามารถแยกออกเป็นประเภทย่อย ๆ ได้อีกหลายแบบดังต่อไปนี้

ประเภทที่ 1. มโนทัศน์รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน แบ่งออกเป็น 4 ประเภทดังนี้

- 1.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ
- 1.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ
- 1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์”
- 1.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ”

ประเภทที่ 2. มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ แบ่งออกเป็น 7 ประเภทดังนี้

- 2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”
- 2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”
- 2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน”
- 2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”
- 2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ”
- 2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน”
- 2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”

สรุปได้ว่ามโนทัศน์ของวิชาคณิตศาสตร์ของลำดับ หมายถึง มโนทัศน์ของวิชาคณิตศาสตร์ของลำดับ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ผ่านการเรียนเรื่องลำดับมาแล้ว โดยใช้แบบทดสอบมโนทัศน์ของลำดับจากงานวิจัยของมอลโกซาดา ฟรีเซนนิโอสโล

### 2.3 การจำแนกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

ในการจำแนกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ผู้วิจัยในนำเกณฑ์การแยกประเภทมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับมาจาก มอลโกซาตา ฟรีเซนนิโอสโล เพื่อจำแนกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับไว้ดังนี้

สถานการณ์ที่เลือกมาใช้เป็นคำถามตอนที่ 1 ใช้สถานการณ์ที่ง่ายแต่มีบางสถานการณ์ที่อยู่นอกเหนือจากบทเรียน เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม สามารถตรวจสอบได้ว่านักเรียนมีการรับรู้มโนทัศน์ของลำดับและข้อสรุปที่สามารถดึงดูความสนใจ สถานการณ์ที่เลือกมาใช้เป็นคำถามตอนที่ 2 เลือกมาจากหลากหลายสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับลำดับ ตัวอย่างสถานการณ์ทั้ง 2 ตอน เช่น พจน์ทั่วไป ( $a_n$ ), พจน์ของลำดับ (Terms) และเลือกสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องระหว่างฟังก์ชันกับลำดับ เช่น เซตของคู่อันดับ, กราฟ, พจน์แบบสองเงื่อนไข (Two – terms formula), แผนภาพลูกศร (Arrow diagram) และตาราง

ซึ่งสถานการณ์ทั้งหมดที่กล่าวมานั้น จะใช้เป็นแนวทางในการแยกมโนทัศน์ของลำดับ โดยจะให้ปัญหาในตอนที่ 1 เป็นปัญหำนำ ส่วนปัญหาในตอนที่ 2 เป็นปัญหาที่ใช้เข้ามาช่วยตัดสินใจ ดังนั้นอาจใช้สถานการณ์ส่วนมาก บ่อยครั้งหรืออาจต่างรูปแบบกันเพียงเล็กน้อย หรืออาจซ้ำกันรวมกันอยู่ในปัญหาดังต่อไปนี้

ข้อตกลงการเขียนลำดับ  $-4, -2, 0, 2, 4, 6$  เขียนแทน  $(-4, -2, 0, 2, 4, 6)$

ตอนที่ 1 : ข้อต่อไปนี้ เป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับ และอธิบายเหตุผลประกอบ

(a)  $x \rightarrow \sqrt{2}, x \in \mathbb{N}$

(b)  $a_n = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$

(c)  $x_n = \frac{1}{n}$

(d)  $-4, -2, 0, 2, 4, 6$

(e)  $-1, -3, -5, -5, -5, \dots$

(f)  $2, 7, 0, 4, 1, 2$

(g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$

(h)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

(i)  $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots\}$

(j)  $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots\}$

(k)  $\left\{\left(1, \frac{1}{5}\right), (2, 3), (3, \pi), \dots\right\}$

(l)  $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$

(m)  $\{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$

(n)  $\left\{\left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \dots\right\}$



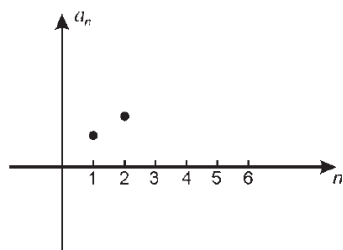
(o)  $\{(1, 2)\}$

(p)  $\{(1, \Delta), (2, \text{อี}), (3, \text{อู๋}), (4, \text{อ๋อ})\}$

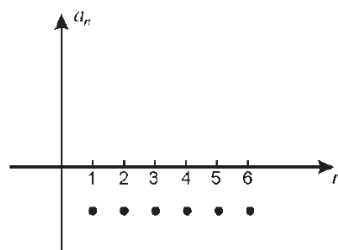
(q)  $a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$

(r)  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n, n \in \mathbb{N}$

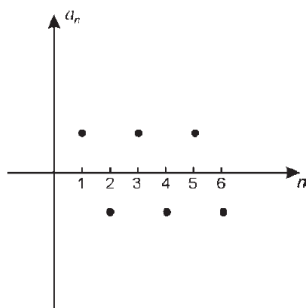
ตอนที่ 2 : รูปต่อไปนี้ เป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับ และอธิบายเหตุผลประกอบ



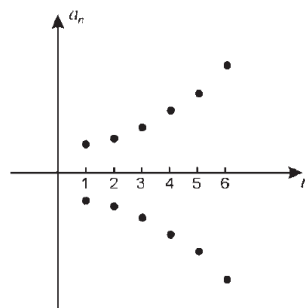
รูปที่ 1



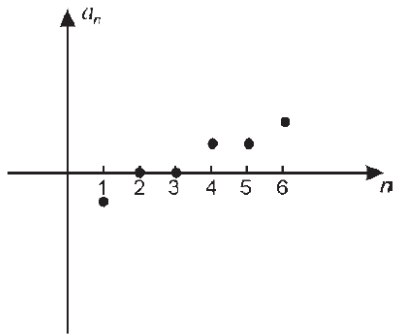
รูปที่ 2



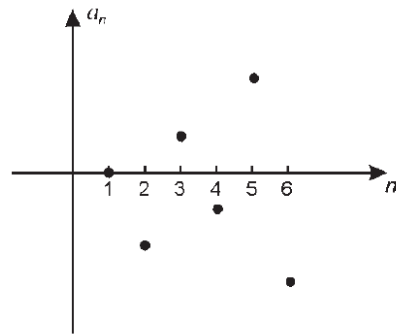
รูปที่ 3



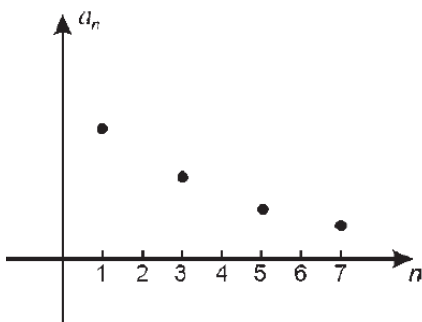
รูปที่ 4



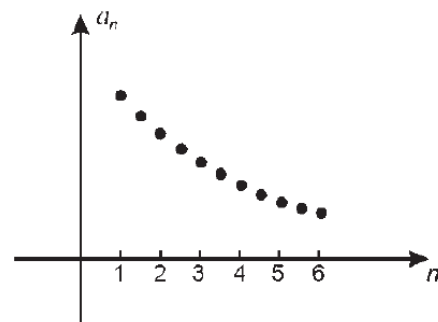
รูปที่ 5



รูปที่ 6



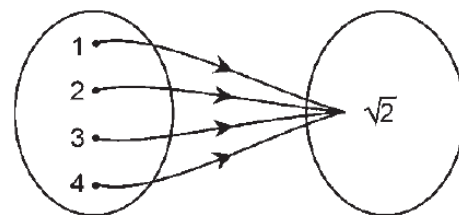
รูปที่ 7



รูปที่ 8

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9



รูปที่ 10

มอลโกซาดา ฟรีเซนนิโอสโล ทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างคือนักเรียน  
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์ – ฟิสิกส์,  
วิทยาศาสตร์ – คอมพิวเตอร์ และนักศึกษาชั้นปีที่ 1 สาขาคณิตศาสตร์ ประเทศโปแลนด์ สามารถ  
แยกประเภทของมโนทัศน์ของลำดับได้ดังหัวข้อต่อไปนี้

### 1. มโนทัศน์รับรู้ลำดับเป็นฟังก์ชัน (Conceptions based on perceiving a sequence as a function.)

การให้คำจำกัดความมโนทัศน์ของลำดับขึ้นอยู่กับพิจารณาโดเมน เนื่องจากมโนทัศน์  
ของลำดับจะมีการเกร็นนำมาจากแนวคิดเรื่องของฟังก์ชัน การพิจารณาเฉพาะโดเมนจึงเป็นการง่าย  
ที่จะบอกว่าเป็นลำดับหรือไม่ แต่ถึงอย่างไรบทนิยามของลำดับและฟังก์ชันก็มีความแตกต่างกัน มี  
ความเชื่อเกี่ยวกับฟังก์ชันที่เรียกด้วยชื่อต่างกันเพื่อใช้อ้างถึงฟังก์ชัน (เช่น ฟังก์ชันเชิงขั้ว ค่า คณิต  
ของลำดับ หรือพจน์) สัญลักษณ์ของฟังก์ชันและลำดับก็ยังคงมีความแตกต่างกัน ( $f(x)$  และ  $a_n$ ) และ  
การอธิบายลำดับโดยใช้ตาราง แผนภาพลูกศร กราฟ เซตของคู่อันดับ หรือเขียนในเทอมของ  
พจน์ การให้ความหมายอย่างเป็นอิสระของศัพท์คำว่า “ลำดับ” มโนทัศน์ของลำดับที่อยู่บนพื้นฐาน  
ของการรับรู้ลำดับเป็นฟังก์ชัน การรับรู้ลำดับเป็นฟังก์ชันของนักเรียนกลุ่มนี้ยังสามารถแบ่ง  
ออกเป็นกลุ่มย่อยได้ดังนี้

#### 1.1. รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ (Definition known and efficient.)

นักเรียนกลุ่มนี้เป็นนักเรียนที่มีความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ เนื่องจาก  
นักเรียนมี “logicians - theoreticians” ซึ่งมีการใช้บทนิยามของลำดับในการสร้างมโนทัศน์ของ  
ลำดับ สามารถประยุกต์การวิเคราะห์ข้อมูลแนวคิดเชิงทฤษฎีได้อย่างสมบูรณ์ครบถ้วน ประเมินค่า  
อย่างสมเหตุสมผล สามารถใช้เป็นเครื่องมือในการอนุมานทางกระบวนการคิด ในภาพรวมนักเรียน  
เข้าใจสัญลักษณ์และข้อสมมุติฐานของบทนิยามทางคณิตศาสตร์ เมื่อยกตัวอย่างให้นักเรียนสามารถ  
อธิบายได้อย่างชัดเจนตอบคำถามด้วยความมั่นใจ และแม่นยำโดยการอ้างอิงได้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน

#### 1.2. รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ (Definition known but hardly efficient.)

พิจารณาได้จากการใช้บทนิยามของลำดับที่แสดงโดยกราฟ นักเรียนกลุ่มนี้จะไม่  
ยอมรับสัญลักษณ์ของลำดับในรูปเซตของอันดับ (Set of ordered pairs) พจน์ทั่วไปของลำดับที่มี  
สองเงื่อนไข (Two-term formulas) และแผนภาพลูกศร (Arrow diagram) หรือตาราง ยกตัวอย่างเช่น  
สถานการณ์ข้อ (g) ตอนที่ 1 พบคำอธิบายว่าเป็นลำดับเพราะมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนนับ 1, 2, 3,  
4 เท่านั้น แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าในแผนภาพลูกศร (สถานการณ์ในรูปแบบที่ 10 ตอนที่ 2) พบคำอธิบายว่า

แผนภาพนี้ไม่สามารถใช้เป็นสัญลักษณ์ของลำดับได้ จากตัวอย่างสถานการณ์ข้อ (f) ตอนที่ 1 แสดงให้เห็นได้ชัดเจนถึงความไม่มีประสิทธิภาพในการใช้บทนิยามของลำดับ โดยมีคำอธิบายว่าไม่มีลำดับที่เป็นอันดับ (Unordered sequence)

1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์” (Conceptions based on the belief that ‘a sequence must be infinite’.)

ความเข้าใจโมทัศน์ของลำดับที่อยู่บนพื้นฐานของลำดับอนันต์ มีข้อสังเกตว่าความเข้าใจโมทัศน์ในหัวข้อนี้มาจากบทนิยามของลำดับที่ยกตัวอย่างเกี่ยวข้องกับลิมิตของลำดับ ซึ่งการให้ตัวอย่างลำดับที่เป็นลำดับจำกัดอาจมีส่วนน้อย โดยส่วนมากเป็นการให้ตัวอย่างที่เป็นลำดับอนันต์ จึงทำให้ความเข้าใจโมทัศน์ของลำดับคลาดเคลื่อนไป ยกตัวอย่างเช่น สถานการณ์ในรูปที่ 3 – 9 ตอนที่ 2 ซึ่งนักเรียนกลุ่มนี้จะให้สมมติฐานว่ามีเพียงบางส่วนของกราฟเท่านั้นที่แสดงถึงลำดับอนันต์ และไม่สามารถหาพจน์ถัดไปได้ โดยพจน์นั้นต้องมีคุณสมบัติเหมือนพจน์ก่อนหน้า

1.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ” (Conceptions based on the belief that ‘the sequence domain is an arbitrary subset of  $N$ ’.)

นักเรียนกลุ่มนี้จะมีความเชื่อมโยงโมทัศน์ของลำดับด้วยฟังก์ชัน และมีความเข้าใจว่าโดเมนของลำดับจะเป็นสับเซตของจำนวนนับ โดยไม่ได้คำนึงว่าโดเมนต้องเป็นจำนวนนับที่เรียงกันเริ่มที่ 1 เท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนยอมรับเงื่อนไขของสถานการณ์ข้อ (m) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 7 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ โดยไม่ได้พิจารณาว่าสถานการณ์ข้อ (m) ขาดพจน์ที่ 3 ดังนั้นจึงไม่เป็นลำดับ แต่นักเรียนกลุ่มนี้จะมองว่าเป็นลำดับเพราะโดเมนยังคงเป็นสับเซตของจำนวนนับ อาจเป็นไปได้ว่านักเรียนไม่ได้เชื่อมโยงลำดับกับสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับ โดยมองว่าเป็นลำดับถ้าสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับเรียงกันเป็นลำดับ และนักเรียนกลุ่มนี้ไม่ตระหนักถึงสัญลักษณ์ลำดับคือ  $a_1, a_2, a_3$

## 2. โมทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ (Conceptions connected with ordering.)

นักเรียนกลุ่มนี้ทุกคนจะวิเคราะห์การสร้างโมทัศน์ของลำดับด้วย “อันดับของจำนวน” (Ordered numbers) “อันดับของสมาชิก” (Ordered elements) “อันดับของเซตจำนวน” (Ordered set of numbers) หรือ “อันดับของเซตที่มีสมาชิกเฉพาะเจาะจง” (Ordered set of certain elements) มีความคิดเห็นว่า อันดับต้องมีความสัมพันธ์กับพจน์ของลำดับ หรือต้องมีความแน่นอน สม่่าเสมอ หรือความสอดคล้องกันระหว่างพจน์ ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่จะพยายามเชื่อมโยงโมทัศน์ของลำดับ

โดยเปรียบเทียบกับเซต มันเป็นผลมาจากการให้บทนิยามทางคอมพิวเตอร์ในบางชุดคำสั่งว่าลำดับเป็นค่า (Values) ที่ต่อเนื่องกันตามลำดับ

การวิเคราะห์ความเชื่อมั่นที่นักเรียนแสดงออกมาจากการสนทนาทำให้ง่ายขึ้นมันเป็น การแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเชื่อมโยงกับการสร้างมโนทัศน์ จะเห็นได้จากหัวข้อก่อนหน้าที่นักเรียนคิดว่าลำดับต้องเป็นลำดับอนันต์ มันเชื่อมโยงให้เห็นตำแหน่งที่สำคัญในการใช้สัญลักษณ์สามจุด “...” ในความหมายของลำดับอนันต์

นักเรียนส่วนใหญ่ยอมรับสถานการณ์ (h) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ โดยให้คำอธิบายว่า สถานการณ์ดังกล่าวเป็นเซตและในเซตนี้ไม่ได้กำหนดความต่อเนื่องของลำดับ นั่นคือนักเรียนเห็นว่าเป็นเซตของจำนวนนับแต่ไม่เกี่ยวกับเซตของลำดับ นั่นคือนักเรียนไม่สามารถแยกแยะความแตกต่างระหว่างสัญลักษณ์ของเซตและลำดับได้

นอกจากนั้นแล้วการวิเคราะห์จากสถานการณ์ข้อ (i) – (p) ตอนที่ 1 ค่าของสมาชิกในกลุ่มอันดับเป็นลำดับ โดยปกติแล้วเราพิจารณาค่าของสมาชิกตัวแรกและตัวที่สองแยกออกจากกันอย่างอิสระ ส่วนมากจิตใต้สำนึกของนักเรียนเชื่อว่าสมาชิกตัวแรกต้องเป็นจำนวนนับแต่ไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้ ทั้งหมด และนักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (o) ตอนที่ 1 โดยได้อธิบายว่าไม่มีอันดับในเซตนี้ และนักเรียนยังคิดว่าสถานการณ์ข้อ (p) ตอนที่ 1 ไม่เป็นลำดับ เนื่องจากถูกรบกวนการสร้างมโนทัศน์ด้วยความจริงที่ว่าสมาชิกตัวที่สองของกลุ่มอันดับไม่ใช่จำนวน จากบทสนทนาพบว่านักเรียนไม่ยอมรับสมาชิกของลำดับที่เป็นรูปผลไม้มันและรูปเรขาคณิต

นักเรียนกลุ่มนี้ไม่ยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 9 และ 10 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ ซึ่งมีความเป็นไปได้สูงว่าไม่เข้าใจลำดับที่อยู่ในรูปของตารางและแผนภาพลูกศร ในทำนองเดียวกันเหตุผลที่สามารถพบได้บ่อยและคล้ายกันคือไม่ยอมรับว่าพจน์มีสองสูตรในสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ แต่ขัดแย้งกับสูตรของสถานการณ์ข้อ (c) ตอนที่ 1 นักเรียนยอมรับว่าเป็นลำดับเหตุผลเพราะว่านักเรียนใช้ความคุ้นเคยในการตัดสินใจว่าสถานการณ์ข้อใดเป็นลำดับ

นักเรียนกลุ่มที่เชื่อมโยงมโนทัศน์ของลำดับด้วยอันดับนี้สามารถแยกออกเป็นกลุ่มย่อยได้ดังต่อไปนี้

2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า” (Conceptions based on ‘greater than’ and ‘less than’ relation.)

นักเรียนใช้ข้อความ “ความสัมพันธ์มากกว่า” และ “ความสัมพันธ์น้อยกว่า” หรือสัญลักษณ์ “ $>$ ” และ “ $<$ ” อย่างไรก็ตามการสร้างมโนทัศน์นี้ได้จากการอธิบายของนักเรียนว่า สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้จะเป็นลำดับ ถ้าพจน์ของลำดับมีความต่อเนื่องกัน อาจจะต้องเพิ่มขึ้น หรือลดลง อาจจะเป็นค่าคงที่ ตัวอย่างเช่นสถานการณ์ข้อ (d) – (e) ตอนที่ 1 หรือเป็น

จุดที่ต่อเนื่องบนกราฟนั้นแสดงด้วยคู่อันดับในสถานการณ์ข้อ (i) – (o) ตอนที่ 1 นักเรียนยังได้อธิบายลำดับในรูปค่าของลำดับ แนวความคิดนี้อาจได้รับอิทธิพลมาจากบทนิยามของ “พจน์ของลำดับ” (Term of a sequence) สำหรับลำดับ  $(a_n)$  จาก “พจน์ที่  $n$ ” ( $n^{\text{th}}$  term) สามารถนำไปอ้างเป็นค่าของพจน์ที่  $n$  จากคู่อันดับ  $(n, a_n)$  และจุดบนกราฟ นักเรียนนำแนวคิดดังกล่าวไปประยุกต์ใช้เพื่อเป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจว่าสถานการณ์ข้อ (n) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ เมื่อนักเรียนพิจารณาสถานการณ์ของกราฟ รูปที่ 1, 2, 7 และ 8 ตอนที่ 2 นักเรียนอธิบายว่ากราฟเหล่านี้เป็นตัวแทนของลำดับ แสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์ “ $\geq$ ” และ “ $\leq$ ”

นักเรียนใช้ความสัมพันธ์มากกว่าเท่ากับ และน้อยกว่าเท่ากับเป็นการตัดสินใจว่าเป็นลำดับหรือไม่แทนการใช้อันดับในความรู้สึกทางคณิตศาสตร์ มีเพียงส่วนน้อยที่ใช้ความเชื่อมโยงกับอันดับของเซต นักเรียนตระหนักว่าอันดับที่สัมพันธ์กับอันดับ แต่ก็ยังไม่แน่ใจว่าข้อความดังกล่าวเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับเซตของอันดับหรือไม่ มีความน่าจะเป็นที่อาจเป็นเพราะในช่วงเริ่มต้นของการเรียนเรื่องลำดับ นักเรียนได้เรียนการตรวจสอบว่าความสัมพันธ์เป็นลำดับด้วยการตัวอย่างของความสัมพันธ์ “ $<$ ” ซึ่งเป็นการยกตัวอย่างให้เห็นเป็นรูปธรรม

2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว” (Conceptions based on the belief that ‘a sequence must be monotonic’.)

ความเชื่อมั่นนี้เกี่ยวข้องกับ พจน์ของลำดับที่เพิ่มขึ้น ลดลง หรือคงที่ นักเรียนกล่าวถึงความต่อเนื่อง การสร้างมโนทัศน์ของลำดับประกอบด้วย การเพิ่มขึ้น การลดลง การคงที่ การไม่เพิ่ม การไม่ลดลงของพจน์ของลำดับ แต่ยังคงใช้สถานการณ์ที่เป็นตัวแทนของลำดับ เช่น สถานการณ์รูปที่ 7 และ 8 ตอนที่ 2 และนักเรียนที่คิดว่า สถานการณ์ข้อ (l), (m) และ (n) ตอนที่ 1 เป็นลำดับ โดยแยกพิจารณาสมาชิกตัวแรกและตัวหลังของคู่อันดับ นักเรียนบางคนอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับกราฟว่า พจน์ของลำดับจะต้องอยู่บนแนวเดียวกันและไม่แตกออกจากกัน แสดงให้เห็นว่าในกรณีของกราฟ นักเรียนมีความยึดติดกับความต่อเนื่องกัน

แหล่งกำเนิดของมโนทัศน์ของลำดับดังกล่าวมีความคล้ายคลึงกับหัวข้อก่อนหน้านี้ นอกจากนั้นกรณีนี้จากกราฟของลำดับยังแสดงให้เห็นถึงการเรียนการสอนของนักเรียนอย่างมีนัยสำคัญ ในที่นี้การวิเคราะห์เกี่ยวกับลำดับอาจมีความเชื่อมโยงกับลิมิต ซึ่งความเชื่อในเรื่องลิมิตของลำดับอาจเกิดขึ้นระหว่างการสังเกตกราฟ อาจมีส่วนที่เริ่มมาจากการอธิบายลำดับ  $(a_n)$  จากกราฟของ  $a_n = \frac{1}{n}$  กราฟของลำดับดังกล่าวถูกอธิบายโดยกราฟของฟังก์ชัน  $x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$  ทำให้เกิดจุดของคู่อันดับ  $(n, a_n)$  การเรียนการสอนรูปแบบนี้นักเรียนจะเชื่อมโยงกับความรู้เรื่องลิมิตของลำดับอนันต์ อาจมีอิทธิพลต่อความเชื่อมั่นในเรื่องจุดบนกราฟต้องอยู่บนเส้นเดียวกัน

2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน” (Conceptions based on the belief that ‘the difference between the terms must be the same’.)

นักเรียนที่มีความเชื่อมั่นนี้อาจมาจากเหตุผลระยะห่างระหว่างพจน์ต้องต่อเนื่องกัน และเท่ากันไปตลอด นักเรียนจะใช้เกณฑ์ระยะห่างระหว่างพจน์แรกกับพจน์ที่สอง และระหว่างพจน์ที่สองกับพจน์ที่สามจะต้องเท่ากันเสมอ เป็นแบบนี้ตลอดไปทุกพจน์

การสร้างมโนทัศน์ดังกล่าวอาจได้รับผลกระทบมาจากการพิจารณาความเชื่อมโยงกับมโนทัศน์ของลำดับเลขคณิต อย่างไรก็ตามนักเรียนได้ขยายแนวคิดโดยการประยุกต์ใช้มโนทัศน์ของลำดับเลขคณิตในการพิจารณากราฟพวกเขาสนใจระยะห่างระหว่างจุดที่ไม่มีแตกต่างระหว่างพจน์ พิจารณาได้จากกรณีที่นักเรียนกลุ่มนี้ยอมรับสถานการณ์รูปที่ 3 ตอนที่ 2 และยังมีนักเรียนยอมรับสถานการณ์รูปที่ 5, 7 และ 8 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ

2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมาจากสูตร” (Conceptions based on the belief that ‘the terms must form a formula’.)

นักเรียนกลุ่มนี้มีการสร้างมโนทัศน์ของลำดับ เกี่ยวข้องกับพจน์ของลำดับ คือลำดับต้องเป็นพจน์ที่มาจากสูตร หรือต้องใช้วิธีการของสูตรจึงจะได้มาซึ่งพจน์ของลำดับ นั่นคือเป็นเพียงแค่การเชื่อมโยงลำดับที่มีสูตรที่ทำให้เกิดการใส่ใจในการสร้างพจน์ นักเรียนกลุ่มนี้ยอมรับแนวคิดของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต แม้ว่าจะไม่สามารถหาสูตรของพจน์ทั่วของลำดับนั้นได้ ในกรณีนี้ สูตร คือพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต เมื่อนักเรียนพิจารณาสถานการณ์ของกราฟในรูปที่ 2, 7 และรูปที่ 8 ตอนที่ 2 นักเรียนจะใช้เวลาและตอบว่าเป็นลำดับ โดยเชื่อมโยงมโนทัศน์เกี่ยวกับลำดับ ( $a_n$ ) กรณี  $a_n = \frac{1}{n}$

2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ” (Conceptions based on the belief that ‘a sequence must be regular’.)

คำศัพท์ “สม่ำเสมอ” (Regular) ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับรูปแบบของสถานการณ์ทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้น โดยที่นักเรียนไม่ทราบชื่อ หรือเงื่อนไขกำหนด เพื่ออธิบายการสร้างมโนทัศน์ของลำดับ อธิบายโดยสถานการณ์ที่คล้ายกัน นักเรียนคู่อันดับที่ด้วยในสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 4 หรืออาจสถานการณ์ในรูปที่ 5 ตอนที่ 2 นักเรียนได้อธิบายว่าจากสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 มีแต่จำนวน 1 เท่านั้น ไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของพจน์เลย และมองไม่เห็นความสม่ำเสมอ

2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” (Conceptions based on the belief that “there must be some harmony”.)

ลำดับและความกลมกลืน (Order and harmony) ถูกนำมาใช้โดยนักเรียนทั้งหมดที่มีการสร้างมโนทัศน์จากการวิเคราะห์ต่อไปนี้ นักเรียนส่วนใหญ่อ้างถึง อันดับกลายเป็นส่วนประกอบของพจน์ แต่ยังมีการให้ความหมายที่แตกต่างกันระหว่างลำดับและความกลมกลืน ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็นกลุ่มย่อยได้ดังนี้

- อันดับทางคณิตศาสตร์ (Mathematical order)

นักเรียนจะใช้ประโยคต่อไปนี้ สำหรับบางสถานการณ์ในการสร้างมโนทัศน์ของลำดับจะต้องมีบางอันดับ ความกลมกลืน การมีอันดับในทางคณิตศาสตร์ แสดงให้เห็นว่าพวกเขาไม่มีมโนทัศน์ของลำดับในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ มีแต่ความคิดในใจ ความเชื่อมั่น บางส่วนของอันดับทางคณิตศาสตร์ ทุกสถานการณ์ถูกมองด้วยลำดับที่ยกเว้นสถานการณ์ (h), (l) – (m) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปแบบที่ 4 ตอนที่ 2 แต่สถานการณ์ในรูปแบบที่ 6 ตอนที่ 2 นักเรียนมองว่ากราฟนี้เป็นลำดับ เนื่องจากมีความกลมกลืน นักเรียนจำลำดับกวด-แกว่งซึ่งเป็นลำดับประเภทหนึ่ง นักเรียนไม่เห็นอันดับในสถานการณ์ข้อ (f), (g) หรือ (k) ตอนที่ 1 และดังนั้นจึงอ้างว่าสถานการณ์ดังกล่าวมาแล้วนี้ไม่เป็นลำดับ การสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องอันดับนี้ยังเชื่อมโยงกับความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของลำดับ แต่ยังคงมีสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต ลำดับกวดแกว่ง บางครั้งอันดับขาดการอธิบายโดยการอ้างถึงลิมิตของลำดับหรือการเข้าใจค่าของพจน์ของลำดับ เช่นบางคนบอกว่าสถานการณ์รูปที่ 8 ตอนที่ 2 เป็นลำดับโดยอธิบายว่า พจน์มีแนวโน้มเข้าใกล้ 0

- อันดับทางปรัชญา (Philosophical order)

นักเรียนอธิบายแนวคิดเชื่อมโยงกับคำศัพท์ทางปรัชญาเช่น นักเรียนมองว่าสถานการณ์ข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปแบบที่ 6 ตอนที่ 2 ไม่เป็นลำดับ พวกเขาอธิบายว่า มีข้อสังเกตคือ ลำดับมีความหมายถึงบางสิ่งที่เป็นอันดับ ซึ่งขัดแย้งกับกราฟที่แสดงให้เห็นถึงความสับสนวุ่นวาย มโนทัศน์ของลำดับต้องเป็นอันดับและมีความกลมกลืนกัน ข้อสังเกตเหล่านี้เป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียนเกิดความคิดที่สับสนเกี่ยวกับมโนทัศน์ของลำดับ



- อันดับทางจิตวิทยา (Psychological order)

อันดับถูกเรียกในทางจิตวิทยาเนื่องจาก นักเรียนดูเหมือนผ่านความเชื่อมั่นเรื่องลำดับภายในตนเอง ยกตัวอย่างเช่น ลำดับทำให้นึกถึงเกี่ยวกับบางสิ่งที่มีเสถียรภาพ และคาดเดาจากสถานการณ์กราฟในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 หรือสถานการณ์ข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 เป็นปัญหาแรกที่กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความไม่สบายใจ และยังเห็นอันดับในสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 สถานการณ์รูปที่ 4 และ 5 ตอนที่ 2

- อันดับทางความต่อเนื่อง (Continuous order)

นักเรียนอธิบายว่า อันดับเป็นความต่อเนื่องอย่างไม่มีที่สิ้นสุด และยังบอกอีกว่า ลำดับต้องเป็นอนันต์ ยกตัวอย่างการอธิบายมโนทัศน์ของลำดับ เช่น ลำดับต้องไม่มีที่สิ้นสุด ทำให้นักเรียนมองไม่เห็นลำดับ เพราะลำดับที่มีอยู่บนโลกนี้ต้องมีบางอย่างต่อเนื่อง บางสิ่งยังคงต่อเนื่องไป (so on) ในกรณีดังกล่าวอาจเกิดจากความเชื่อมั่นในมโนทัศน์ของลำดับของนักเรียนอาจถูกสร้างขึ้นจากวลี ดังต่อไปนี้ “ลำดับของปรากฏการณ์” (a sequence of phenomena) “ลำดับของเหตุการณ์” (a sequence of events) นักเรียนคิดว่าอันดับที่จะต้องมีการมีก่อนหน้าเสมอ และไม่เข้าใจการใช้สัญลักษณ์ “...” ของลำดับอนันต์ โดยเข้าใจเพียงว่าเป็นสัญลักษณ์ของลำดับประเภทหนึ่ง ความเข้าใจเหล่านี้มีอิทธิพลต่อความเชื่อของนักเรียนกลุ่มนี้ แต่ยังคงมีความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ที่ยังส่งผลต่อความเข้าใจคำศัพท์ “อย่างต่อเนื่อง” เช่น “เราคิดว่าเป็นลำดับหากมีเงื่อนไขที่ถูกสร้างขึ้นอย่างต่อเนื่อง และใช้กระบวนการที่ไม่สิ้นสุด”

- อันดับทางภาษาศาสตร์ (Order in colloquial meaning)

มโนทัศน์อันดับทางภาษาศาสตร์นี้มาจากคำศัพท์ที่นักเรียนใช้ในชีวิตประจำวัน นักเรียนอธิบายว่า “อันดับหมายถึงบางสิ่งบางอย่างที่มีความชัดเจนและเป็นไปตามลำดับ ลำดับจะมีการจัดอันดับ” แนวความคิดนี้มีความคล้ายคลึงกับมโนทัศน์ของลำดับจะต้องมีความสม่ำเสมอ และยังคงแสดงออกในสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 สถานการณ์ในรูปที่ 4 และ 5 ตอนที่ 2 แต่การให้เหตุผลที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน บางส่วนของการสัมภาษณ์จะเห็นว่านักเรียนเชื่อมโยงลำดับโดยใช้อันดับที่ นักเรียนยังยอมรับพจน์ของลำดับที่ไม่เป็นตัวเลขได้ นักเรียนบางส่วนยอมรับสถานการณ์ข้อ (p) ตอนที่ 1 เป็นลำดับ

2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน” (Conceptions based on the belief that ‘a sequence is a list of numbers.’)

การสร้างมโนทัศน์ของนักเรียนกลุ่มนี้จะรวมอยู่กับมโนทัศน์ของลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ หรือรายการของจำนวน (List of numbers) อย่างไรก็ตามพวกเขายอมรับลำดับที่ถูกแสดงโดยกราฟ และแผนภาพลูกศร หรือตาราง และยังคงตระหนักถึงรายการค่าของความต่อเนื่องของ

ลำดับที่กำหนดในอันดับ แต่นักเรียนไม่สามารถอ้างถึงเซตของคู่อันดับ มากไปกว่านั้น มีนักเรียนบางส่วนบอกว่าสถานการณ์ในรูปที่ 4 และ 7 ตอนที่ 2 เป็นลำดับ ความเชื่อมแน่นดังกล่าวมีผลมาจากเซตของคู่อันดับและบทนิยามของลำดับในสาขาวิทยาศาสตร์-คอมพิวเตอร์

### 2.3 งานวิจัยต่างประเทศ

มอลโกซาดา ฟรีเซนนิโอสโล ได้ทำการศึกษารูปแบบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ในนักเรียนระดับมัธยม และมหาวิทยาลัยชั้นปีที่ 1 ที่เข้าเรียนในสาขาคณิตศาสตร์ ของประเทศโปแลนด์ จำนวน 602 คน โดยการใช้ข้อคำถามที่หลากหลายเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของการวิจัย (การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัย การสัมภาษณ์ และการอภิปรายในกลุ่มของนักเรียน) การดูจากสมุดวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ตลอดจนการสนทนาอย่างเป็นทางการกับครู ถูกนำมาใช้เพื่อการอธิบายบทนิยามมโนทัศน์ของลำดับตามแนวคิดของครูที่มีต่อนักเรียน ในส่วนของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้เป็นปัญหาที่ค่อนข้างง่ายแต่ยังเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนยังมีข้อบกพร่อง เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจในมโนทัศน์ของลำดับของนักเรียน และเพื่อให้ได้ข้อสรุปทั่วไปในการใช้สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม การใช้รูปภาพเป็นปัญหา รองลงมาที่ได้รับคัดเลือกเพื่อใช้อ้างอิงกับสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับลำดับ การอธิบายบทนิยามของลำดับโดยใช้วิธีการที่แตกต่างกันสองวิธีนี้ สัญลักษณ์พื้นฐานที่นำมาใช้เป็นตัวแทน ได้แก่ ลำดับ-สูตร ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันกับลำดับ เซตของคู่อันดับ กราฟ และสุดท้ายคือความสัมพันธ์กับฟังก์ชันนั้นคือ ฟังก์ชันที่มีสองเงื่อนไข (Two-term formula), แผนภาพลูกศร และตาราง ทั้งหมดทุกประเภทนี้เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความหมายในกรณีที่ลำดับเป็นฟังก์ชัน การกำหนดประเภทของฟังก์ชัน โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์สองมโนทัศน์ (ลำดับและฟังก์ชัน) พบว่ามโนทัศน์ของนักเรียนถูกแบ่งออกเป็นสองกลุ่มคือ กลุ่มที่หนึ่งรับรู้ได้ว่าลำดับคือฟังก์ชัน (Sequence perceived as a functions) ส่วนกลุ่มที่สองลำดับมีความสัมพันธ์กับอันดับของสมาชิก (Ordered elements) ความหลากหลายของมโนทัศน์กลุ่มหลังนี้เป็นที่น่าสนใจอย่างยิ่ง จะพบว่านักเรียนไม่เข้าใจคำศัพท์ “อันดับ” ว่าเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของลำดับความสม่ำเสมอหรือความกลมกลืน ในการวิจัยนี้ได้นำเสนอแนวทางในการแก้ไขมโนทัศน์และนอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการแนะนำมโนทัศน์ในระดับโรงเรียนของลำดับที่กล่าวมาแล้ว ผลการวิจัยเป็นดังนี้

ตารางที่ 2 – 3 แสดงประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจากผลการวิจัยของ  
มอลโกชาติ้า ฟรีเซนนิโอสโล

ประเภทของมโนทัศน์	มีความ	ความสามารถ
	สามารถทาง คณิตฯ (n = 308)	ทางคณิตฯ น้อย (n = 294)
<b>รู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน</b>		
รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ	35	-
รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ	21	-
ลำดับต้องเป็นอนันต์	11	-
ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ	7	-
<b>มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ</b>		
ความสัมพันธ์ของคำว่า “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”	33	58
ลำดับทางเดียว	37	33
ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน	5	38
พจน์ต้องเป็นสูตร	-	65
พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ	39	10
พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน		
อันดับทางคณิตศาสตร์	42	-
อันดับทางปรัชญา	14	-
อันดับทางจิตวิทยา	11	26
อันดับทางความต่อเนื่อง	20	22
อันดับในความหมายทางภาษาศาสตร์	8	42
ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน	25	-

## 2.4 งานวิจัยในประเทศ

จากการศึกษางานวิจัยในประเทศที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอน เรื่อง ลำดับและอนุกรม ดังต่อไปนี้

คมสันต์ เอ็นคะวัน (2553, หน้า 71 – 72) ได้ทำการพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาศุวครธานี พบว่าเป็นแบบทดสอบที่มีคุณภาพด้านความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาข้อสอบสามารถวัดได้ตรงกับสิ่งที่ต้องการวัดจริง ด้านอำนาจจำแนกข้อสอบนี้สามารถแยกนักเรียนกลุ่มรอบรู้กับกลุ่มไม่รอบรู้ออกจากกันได้ และแบบทดสอบนี้มีความเชื่อมั่นที่เชื่อถือได้ พบพฤติกรรมข้อบกพร่องส่วนมากจะเป็นเนื้อหาส่วนแรก ๆ ในจุดประสงค์ที่ 1 เรื่องความเข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับที่กำหนดให้ พบว่า นักเรียนไม่เข้าใจการเขียนสัญลักษณ์แทนพจน์ของลำดับ รองลงมาคือนักเรียนขาดทักษะในการคิดคำนวณ และไม่เข้าใจกระบวนการหาพจน์ที่  $n$  ของลำดับ จุดประสงค์ข้อต่อมานั้นนักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนดังต่อไปนี้ ขาดความเข้าใจสูตรการหาพจน์ที่  $n$  ของลำดับเลขคณิต, ไม่เข้าใจพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต, ไม่เข้าใจกระบวนการหาพจน์ที่  $n$  ของลำดับเรขาคณิต, ไม่เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์  $\Sigma$ , ไม่เข้าใจความหมายของอนุกรมเลขคณิต และ ไม่เข้าใจสูตร  $S_n$  ในการคำนวณผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต

จากงานวิจัยในประเทศได้มีการวิเคราะห์ความบกพร่องทางการเรียนของนักเรียน เรื่อง ลำดับ พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังขาดความเข้าใจความหมายของลำดับ ซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญที่นักเรียนต้องเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับเป็นอันดับแรก และจากงานวิจัยของมอลโกชาด้า ฟรีเซนนิโอสโล เป็นการวิจัยเพื่อให้เห็นถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ของนักเรียนโรงเรียนมัธยมและมหาวิทยาลัยชั้นปีแรกในประเทศโปแลนด์ ซึ่งสอดคล้องกับความสนใจของผู้วิจัยที่ได้ทำการสอน เรื่องลำดับ ซึ่งเป็นเนื้อหาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน และเกิดความสนใจที่จะวิเคราะห์ห่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน เพื่อทำให้รู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับ และเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องลำดับ เพื่อให้ผู้เรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง

## บทที่ 3

### วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยเรื่องการศึกษาแนวโน้มทัศนคติทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน ผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดกลุ่มประชากร
2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
3. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล

#### 1. การกำหนดกลุ่มประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 รวมทั้งหมด 345 คน มีรายละเอียดดังนี้

- 1.1 โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม จำนวน 287 คน ได้แก่
  - 1.1.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 150 คน
  - 1.1.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 137 คน
- 1.2 โรงเรียนหนองบัวพิทยาคม จำนวน 7 คน ได้แก่
  - 1.2.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 7 คน
- 1.3 โรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร จำนวน 15 คน ได้แก่
  - 1.3.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 5 คน
  - 1.3.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 10 คน
- 1.4 โรงเรียนสารธรรมวิทยาคาร จำนวน 36 คน ได้แก่
  - 1.4.1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 22 คน
  - 1.4.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 14 คน

## 2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ผู้วิจัยใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

2.1 แบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ ของมอลโกชาต้า ฟรีเซนนิโอสโล ผู้วิจัยได้นำมาแปลเป็นภาษาไทยโดยไม่มี การเปลี่ยนแปลงสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นข้อคำถาม โดยแบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอثنัย ประกอบด้วย 2 ตอน ตอนที่ 1 เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้แก่ พจน์ทั่วไป เซต เซตของกลุ่มอันดับ ลำดับ เซตแบบบอกเงื่อนไข และตอนที่ 2 เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปภาพ ได้แก่ กราฟ ตาราง แผนภาพลูกศร ดังต่อไปนี้

**ตอนที่ 1 :** จงพิจารณาสถานการณ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าเป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับ และอธิบายเหตุผลประกอบ

(a)  $x \rightarrow \sqrt{2}, x \in \mathbb{N}$

(b)  $a_n = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$

(c)  $x_n = \frac{1}{n}$

(d)  $-4, -2, 0, 2, 4, 6$

(e)  $-1, -3, -5, -5, -5, \dots$

(f)  $2, 7, 0, 4, 1, 2$

(g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$

(h)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

(i)  $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots\}$

(j)  $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots\}$

(k)  $\{(1, \frac{1}{5}), (2, 3), (3, \pi), \dots\}$

(l)  $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$

(m)  $\{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$

(n)  $\{(\frac{1}{5}, 1), (\frac{1}{3}, 2), (\frac{1}{2}, 3), \dots\}$

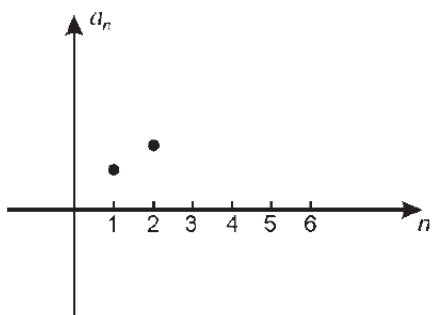
(o)  $\{(1, 2)\}$

(p)  $\{(1, \triangle), (2, \square), (3, \circ), (4, \diamond)\}$

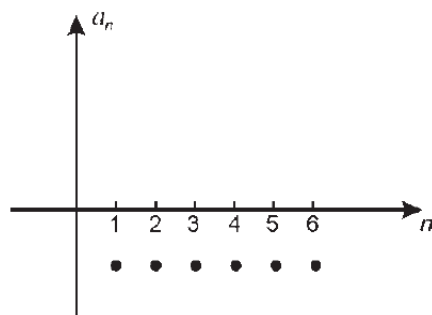
(q)  $a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$

(r)  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n, n \in \mathbb{N}$

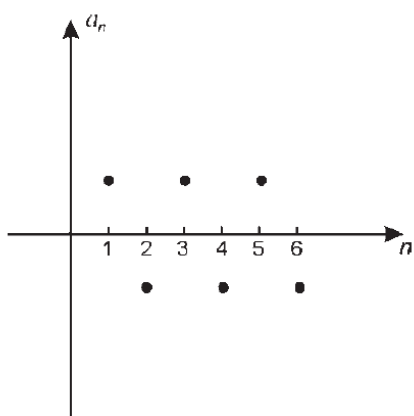
**ตอนที่ 2 :** จงพิจารณารูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับ และอธิบายเหตุผลประกอบ



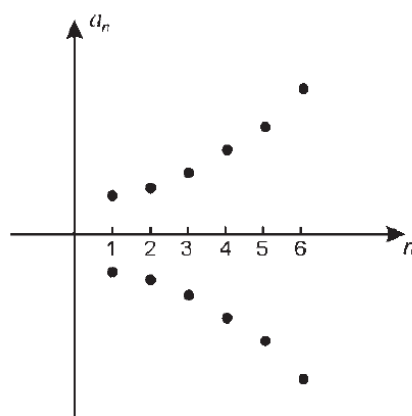
รูปที่ 1



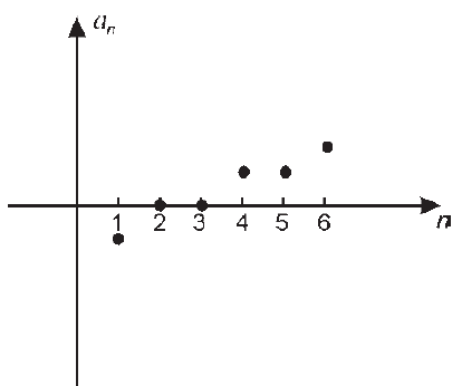
รูปที่ 2



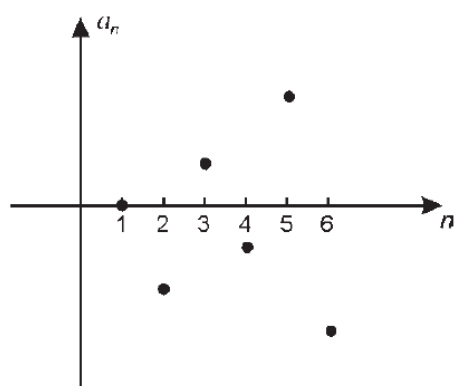
รูปที่ 3



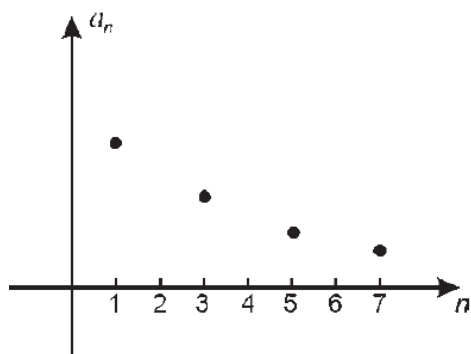
รูปที่ 4



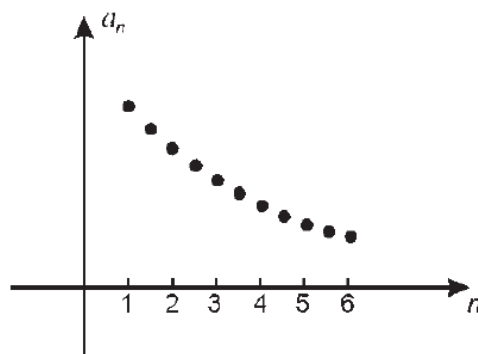
รูปที่ 5



รูปที่ 6



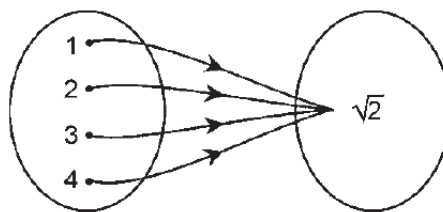
รูปที่ 7



รูปที่ 8

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9



รูปที่ 10

## 2.2 แบบสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์ในงานวิจัยนี้ เป็นการสัมภาษณ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง โดยผู้วิจัยเป็นผู้สัมภาษณ์ด้วยตัวเองโดยใช้แบบสัมภาษณ์ นักเรียนจะถูกถามด้วยข้อคำถามจากเหตุผลในการเขียนคำตอบแบบอัตนัย และมีการบันทึกการสัมภาษณ์ ซึ่งหัวข้อของคำถามจะได้มาจากแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับทั้งตอนที่ 1 และตอนที่ 2 จากนั้นนำมาแยกประเภทมโนทัศน์ของลำดับ และนำไปใช้สนทนากับนักเรียนแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งคำถามที่ใช้เป็นหัวข้อสนทนาเป็นคำถามที่เปิดให้นักเรียนอธิบายคำตอบได้ตามความคิดเห็น โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

### 2.2.1. จัดทำแบบสัมภาษณ์

### 2.2.2. จากนั้นนำไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจ และทำการปรับปรุงแก้ไข

### 2.2.3. นำแบบสัมภาษณ์ที่ผ่านอาจารย์ที่ปรึกษาแล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3

ท่าน ได้แก่ผู้ที่มีประสบการณ์สอนคณิตศาสตร์ ผู้เชี่ยวชาญการวัดผลและประเมินผล เพื่อพิจารณาข้อคำถามในการสัมภาษณ์ให้ครอบคลุม ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา เครื่องมือวัดได้ตรงตามเนื้อหา และครอบคลุมครบถ้วนตามเนื้อหาที่ต้องการวัด การตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาโดย



ผู้เชี่ยวชาญทางเนื้อหาตรวจสอบ (วารุ เฟ็งสวัสดิ์, 2551, หน้า 265) และได้รับข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญดังนี้ พบข้อคำถามที่เป็นคำถามที่บ่งชี้เฉพาะเกินไป เช่น นักเรียนคิดว่าไม่เป็นลำดับ เพราะเหตุใด ให้ใช้คำให้เหมือนกันทั้งฉบับ ไม่ควรขึ้นต้นประโยคด้วยคำว่า แต่, หรือ, และ การจัดเรียงรูปประโยคให้ใช้เป็น ประธาน กริยา กรรม โดยมีเกณฑ์การประเมิน ดังนี้

- 5 หมายถึง คุณภาพในระดับดีมาก
- 4 หมายถึง คุณภาพในระดับดี
- 3 หมายถึง คุณภาพในระดับปานกลาง
- 2 หมายถึง คุณภาพในระดับพอใช้
- 1 หมายถึง คุณภาพในระดับควรปรับปรุง

จากนั้นนำความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญหาค่าเฉลี่ย ( $\bar{X}$ ) แปลความหมายโดยใช้เกณฑ์ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 4.51 – 5.00 หมายถึง แบบสัมภาษณ์ มีคุณภาพในระดับดีมาก

ค่าเฉลี่ย 3.51 – 4.50 หมายถึง แบบสัมภาษณ์ มีคุณภาพในระดับดี

ค่าเฉลี่ย 2.51 – 3.50 หมายถึง แบบสัมภาษณ์ มีคุณภาพในระดับปานกลาง

ค่าเฉลี่ย 1.51 – 2.50 หมายถึง แบบสัมภาษณ์ มีคุณภาพในระดับพอใช้

ค่าเฉลี่ย 1.00 – 1.50 หมายถึง แบบสัมภาษณ์ มีคุณภาพในระดับควรปรับปรุง

สำหรับแบบสัมภาษณ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นครั้งนี้ พบว่าแบบสัมภาษณ์อยู่ในระดับดีและมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4.32 (ภาคผนวก ข ตารางที่ ข -2 หน้า 107) และนำแบบสัมภาษณ์ไปปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญแล้วนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

### 3. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

การเก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้แบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ ของมอลโกซาต้า ฟริเซนนิโอสโล ซึ่งผู้วิจัยแปลเป็นภาษาไทยและไม่ได้มีการแก้ไขสถานการณ์ที่ใช้ถาม โดยเป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ผ่านการเรียนเรื่องลำดับมาแล้วในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน แต่ก็ยังเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนอาจจะเกิดความเข้าใจในมโนทัศน์ของลำดับคลาดเคลื่อนไป การเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นไปตามการดำเนินการดังนี้

3.1 ผู้วิจัยได้ทำการสำรวจประชากรจำนวน 345 คน พบว่ามีผู้ประสงค์เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 335 คน

3.2 ผู้วิจัยจัดทำแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ และนำไปทดสอบกับนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย

3.3 ตรวจสอบแบบทดสอบของนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย

3.4 วิเคราะห์ประเภทมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับตามเกณฑ์ของมอลโกซาต้า ฟรีเซนนิโอสโต

3.5 ทำการสัมภาษณ์กลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยเลือกสัมภาษณ์นักเรียนจำนวน 37 คน โดยเลือกจากทุกโรงเรียนที่เข้าร่วมการวิจัย ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้ โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม จำนวน 11 คน โรงเรียนหนองบัวพิทยาคม จำนวน 3 คน โรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร จำนวน 7 คน และโรงเรียนสารธรรมจำนวน 8 คน แบ่งการเลือกนักเรียนที่จะสัมภาษณ์ออกเป็นสองกลุ่ม ได้แก่กลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 30 คน เพื่อเป็นการยืนยันการแยกประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ และเลือกจากการเขียนตอบเหตุผลจากแบบทดสอบที่ผู้วิจัยมีความสนใจจากเหตุผลของการเขียน เช่น “ $\pi$  เป็นรัศมีของวงกลม”, “มีการแยกสมาชิก”, “เป็นการจัดคู่อันดับ”, “เพราะ 0 มีแค่ตัวเดียวไม่สามารถเปรียบเทียบได้” เป็นต้น กลุ่มของนักเรียนไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้จำนวน 7 คน เพื่อให้ทราบถึงความคิดเกี่ยวกับลำดับแท้จริงว่านักเรียนกลุ่มนี้มีแนวคิดอย่างไร โดยเลือกจากการเขียนเหตุผลที่ผู้วิจัยสนใจ ตัวอย่างเช่น “มีเลขซ้ำกัน”, “เป็นจำนวนเต็ม”, “คิดว่าเป็น”, “ข้อความข้างต้นไม่ถูกต้อง”, “เป็นจำนวนตรรกยะ” เป็นต้น

#### 4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้แบบทดสอบและการสัมภาษณ์มาใช้ในการวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ตามเกณฑ์ของมอลโกซาต้า ฟรีเซนนิโอสโต ดังนี้

**ประเภทที่ 1** ระบุว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน สามารถแบ่งออกได้ 4 ประเภทดังนี้

1.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ

นักเรียนใช้บทนิยามลำดับได้อย่างดีเยี่ยม โดยใช้บทนิยามของลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตหรือสับเซตของจำนวนนับ

1.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ

นักเรียนกลุ่มนี้ไม่ยอมรับสถานการณ์ของลำดับได้แก่ เซตของคู่อันดับ พจน์ที่มีสองสูตร พบนักเรียนที่ไม่ยอมรับแผนภาพลูกศร หรือตาราง โดยนักเรียนจะยอมรับสถานการณ์ข้อ (g) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ แต่นักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 9 ตอนที่ 2 หรือในทางกลับกันนักเรียน

อาจจะไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (g) ตอนที่ 1 แต่กลับยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 9 ตอนที่ 2 และนักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (f) ตอนที่ 1 โดยให้เหตุผลว่า ไม่มีการจัดเรียงอันดับกันของลำดับ (Unordered sequence)

$$(f) 2, 7, 0, 4, 1, 2$$

$$(g) \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$$

$n$	1	2	3	4	5
$x_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9

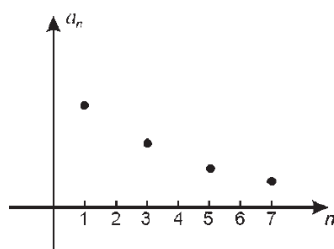
### 1.3 ลำดับต้องเป็นอนันต์

นักเรียนกลุ่มนี้มีมโนทัศน์ของลำดับมาจากนิยาม ลำดับเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ และเขียนถึงลำดับจำกัด ได้รับมโนทัศน์มากจากลำดับอนันต์ เช่น ลำดับถูกกำหนดโดยลิมิต และแนวการเขียนจะเกี่ยวกับลำดับอนันต์ และลิมิตของลำดับการพิจารณาจากสถานการณ์ในรูปที่ 3 – 9 ตอนที่ 2 นักเรียนให้คำอธิบายว่า หาพจน์ถัดไปไม่ได้ เพราะไม่มีคุณสมบัติตามที่กำหนดไว้

### 1.4 ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ

นักเรียนกลุ่มนี้จะมองเห็นลำดับโดยใช้นิยาม ลำดับคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนนับ พิจารณาได้จากการยอมรับสถานการณ์ข้อ (m) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 7 ตอนที่ 2 นั่นคือ นักเรียนไม่รู้ว่าโดเมนจะต้องเริ่มจาก 1, 2, 3, 4, ... ขาดตัวใดตัวหนึ่งไม่ได้

$$(m) \{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$$



รูปที่ 7

## ประเภทที่ 2. มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ

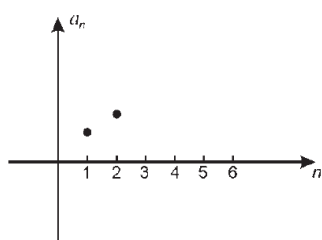
นักเรียนกลุ่มนี้จะมีความเชื่อว่า อันดับ (Order) มีความสัมพันธ์กับพจน์ของลำดับ (Terms of a sequence) เชื่อมโยงกับสัญลักษณ์ “...” ในเรื่องอนุกรมอนันต์ นักเรียนส่วนใหญ่ไม่เข้าใจสถานการณ์ข้อ (h)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  ตอนที่ 1 อธิบายมันเป็นเซต และสมาชิกในเซตไม่ได้ถูกกำหนดไว้ให้เป็นลำดับ นักเรียนเห็นเป็นเซตของจำนวนนับ แต่ไม่เห็นลำดับในเซต นั่นคือนักเรียนกลุ่มนี้ จะไม่สามารถแยกแยะสัญลักษณ์ของเซตและลำดับได้ อธิบายได้จากสถานการณ์ ข้อ (i) – (p) ตอนที่ 1 โดยการพิจารณาแยกกันระหว่างคู่อันดับตัวหน้ากับคู่อันดับตัวหลัง โดยไม่ได้กล่าวถึงอันดับของจำนวน หรือเซตของอันดับ นักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (o)  $\{(1, 2)\}$  ตอนที่ 1 เพราะในเซตนี้ไม่มีอันดับ นักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 9 และ 10 ตอนที่ 2 นักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) ในตอนที่ 1 อาจมีนักเรียนยอมรับสถานการณ์ข้อ (c) ตอนที่ 1

มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับนี้ยังสามารถแบ่งออกได้อีก 7 ประเภทดังนี้

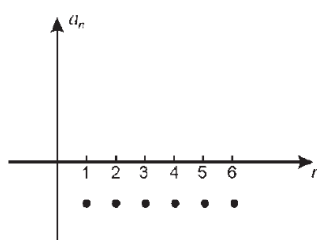
### 2.1 “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”

คำอธิบายของนักเรียนกลุ่มนี้เช่น แต่ละพจน์ที่ต่อเนื่องกันจะต้อง “มากขึ้นและมากขึ้น” หรือ “ลดลงและลดลง” ลำดับต้องเหมือนกันหรือคงที่ พิจารณาได้จากข้อ (d) – (e) ตอนที่ 1 และนักเรียนมีคำอธิบายเกี่ยวกับกราฟในตอนที่ 2 ว่า กราฟมีจุดต่อเนื่องกัน ยังสามารถพิจารณาได้จากข้อ (i) – (o) ตอนที่ 1 อธิบายโดยใช้เซตของคู่อันดับ  $(n, a_n)$  หรือคู่อันดับของจำนวน (แต่ที่จริงแล้วใช้ค่า  $a_n$  ของลำดับในการตัดสินใจ) ในตอนที่ 2 อธิบายเกี่ยวกับคู่อันดับเป็นจุดบนกราฟ นักเรียนกลุ่มนี้ยอมรับสถานการณ์ข้อ (n) ตอนที่ 1 และยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 1, 2, 7 และ 8 ตอนที่ 2 แต่ไม่ยอมรับสถานการณ์ที่มีความสัมพันธ์ “มากกว่าเท่ากับ” หรือ “น้อยกว่าเท่ากับ”

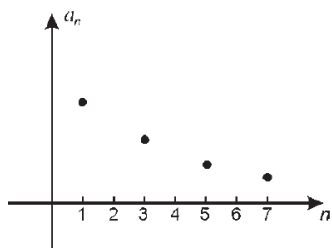
$$(n) \left\{ \left( \frac{1}{5}, 1 \right), \left( \frac{1}{3}, 2 \right), \left( \frac{1}{2}, 3 \right), \dots \right\}$$



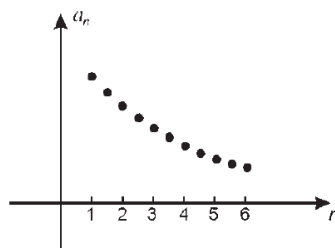
รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 7



รูปที่ 8

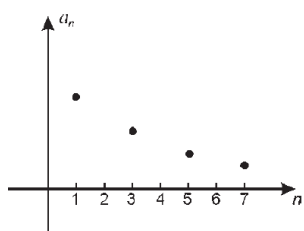
## 2.2 ลำดับทางเดียว

นักเรียนกลุ่มนี้มีมโนทัศน์ของลำดับเกี่ยวข้องกับ “เพิ่มขึ้น” “ไม่ลดลง” “ลดลง” หรือ “ไม่เพิ่มขึ้น” นักเรียนยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 7 และ 8 ตอนที่ 2 เหตุผลที่ใช้อธิบายคือเส้นกราฟไม่แตกออกจากกัน และนักเรียนยอมรับสถานการณ์ข้อ (l), (m) และ (n) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ โดยพิจารณาพฤติกรรมของกลุ่มอันดับตัวหน้าและตัวหลัง

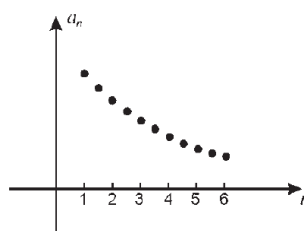
$$(l) \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$$

$$(m) \{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$$

$$(n) \left\{ \left( \frac{1}{5}, 1 \right), \left( \frac{1}{3}, 2 \right), \left( \frac{1}{2}, 3 \right), \dots \right\}$$



รูปที่ 7

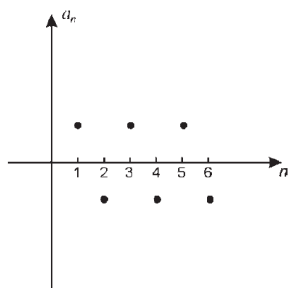


รูปที่ 8

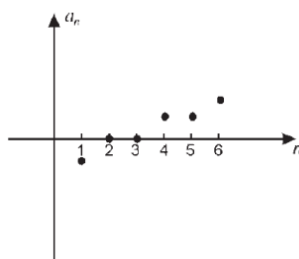
## 2.3 ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน

นักเรียนกลุ่มนี้จะเชื่อมโยงมโนทัศน์ของลำดับกับมโนทัศน์ของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต โดยจะอาศัยความคุ้นเคยของการหาระยะห่างระหว่างพจน์ ในทำนองเดียวกันกราฟในตอนที่ 2 จะเปรียบเทียบกับระยะห่างระหว่างจุดต้องเท่ากัน นักเรียนกลุ่มนี้จะแยกพิจารณาสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของกลุ่มอันดับ โดยผลต่างระหว่างสมาชิกตัวหน้าต้องเท่ากัน หรือ

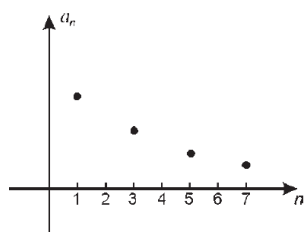
พิจารณาผลต่างของสมาชิกตัวหลังต้องเท่ากัน นักเรียนกลุ่มนี้จะยอมรับจากสถานการณ์ในรูปที่ 3 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ ตอบว่าสถานการณ์ในรูปที่ 5, 7 และ 8 ตอนที่ 2 เป็นลำดับ



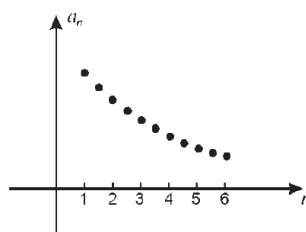
รูปที่ 3



รูปที่ 5



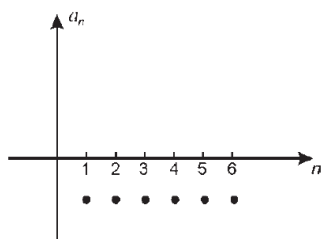
รูปที่ 7



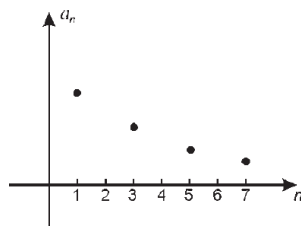
รูปที่ 8

#### 2.4 พจน์ต้องเป็นสูตร

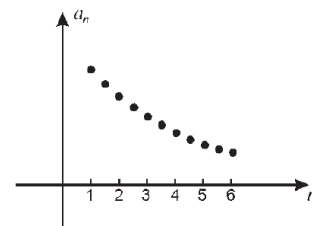
นักเรียนกลุ่มนี้เข้าใจว่าลำดับจะมีสูตร (พจน์ทั่วไป) เพื่อใช้หาพจน์ถัดไป นักเรียนยังยอมรับลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต แม้ว่าไม่ให้สูตรกับนักเรียน นักเรียนจะพิจารณารูป โดยอาศัยลำดับที่คุ้นเคย หรือเคยพบมาก่อน นักเรียนยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 2, 7 และ 8 ตอนที่ 2 คำอธิบายคือ ความคุ้นเคยกับสูตรของลำดับที่เคยเรียนมาก่อนหน้านี้ ยกตัวอย่างเช่น  $a_n = \frac{1}{n}$



รูปที่ 2



รูปที่ 7

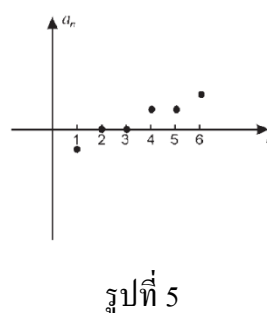
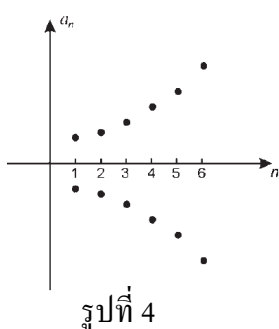


รูปที่ 8

## 2.5 พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ

นักเรียนกลุ่มนี้จะใช้คำศัพท์ “สม่ำเสมอ” เกือบทุกสถานการณ์ นักเรียนยอมรับสถานการณ์ที่เป็นลำดับ ได้แก่ สถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 4 ตอนที่ 2 บางครั้งยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 5 ตอนที่ 2

$$(q) a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$$



## 2.6 พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน

นักเรียนกลุ่มนี้มีความหลากหลายภายในกลุ่มเป็นอย่างมาก สถานการณ์ที่ใช้เป็นหลักในการพิจารณาได้แก่ สถานการณ์ข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 นักเรียนไม่ยอมรับว่าเป็นลำดับ สามารถแบ่งออกเป็น 5 ประเภทดังนี้

- อันดับทางคณิตศาสตร์

นักเรียนกลุ่มนี้มักจะใช้คำว่า บางอันดับ บางความสม่ำเสมอ มีบางอันดับทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องลำดับ โดยไม่นำอันดับทางคณิตศาสตร์มาใช้กับสถานการณ์ข้อ (h), (l) - (n) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 4 ในตอนที่ 2 สถานการณ์ในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 แสดงให้เห็นถึงอันดับทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนจะใช้ความจำเกี่ยวกับลำดับสลับ นักเรียนมองไม่เห็นลำดับในสถานการณ์ข้อ (f), (g), (k) ตอนที่ 1 นักเรียนยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 8 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับโดยอธิบายว่า กราฟลู่เข้าสู่ศูนย์

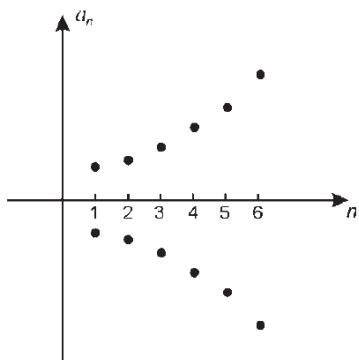
$$(h) \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$(l) \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$$

$$(m) \{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\},$$

$$(n) \left\{ \left( \frac{1}{5}, 1 \right), \left( \frac{1}{3}, 2 \right), \left( \frac{1}{2}, 3 \right), \dots \right\}$$

และ

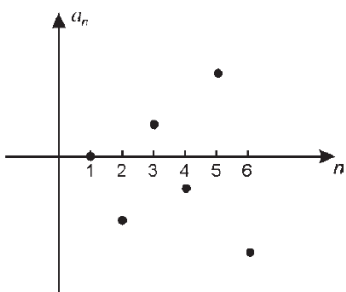


รูปที่ 4

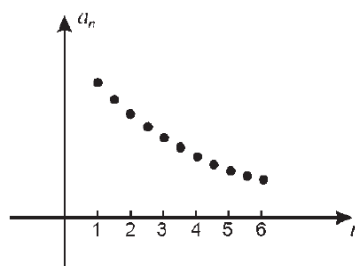
(f) 2, 7, 0, 4, 1, 2

(g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$

(k)  $\left\{ \left(1, \frac{1}{5}\right), (2, 3), (3, \pi), \dots \right\}$



รูปที่ 6



รูปที่ 8

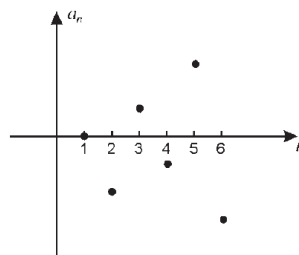


- อันดับทางปรัชญา

นักเรียนกลุ่มนี้อธิบายว่า ลำดับ คือ อันดับของบางสิ่ง และอาศัยแนวคิดที่ว่า ถ้ากราฟมีความวุ่นวายหรือความสับสน แล้วสถานการณ์นั้นจะไม่ใช่ลำดับ โดยไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 6 ตอนที่ 2

(f) 2, 7, 0, 4, 1, 2

(g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$

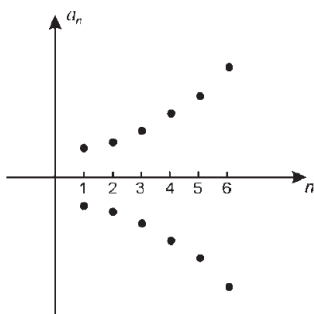


รูปที่ 6

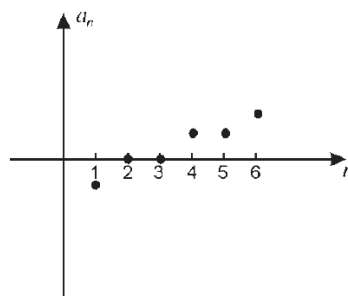
- อันดับทางจิตวิทยา

นักเรียนกลุ่มนี้มีแนวคิดเกี่ยวกับลำดับว่า ลำดับทำให้คิดถึงเกี่ยวกับบางสิ่งที่คงตัวและคาดเดาได้ และกราฟในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 ทำให้เกิดความไม่สบายใจ ไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 แต่นักเรียนยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 สถานการณ์ในรูปที่ 4 และ 5 ตอนที่ 2

$$(q) a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$$



รูปที่ 4



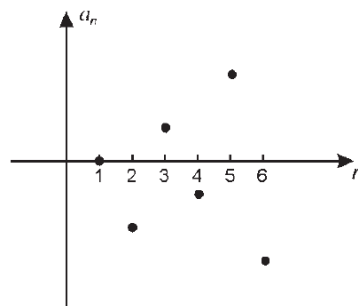
รูปที่ 5

• อันดับทางความต่อเนื่อง

นักเรียนกลุ่มนี้อธิบายภาพรวมของลำดับด้วย บางสิ่งบางอย่างต่อเนื่อง บางสิ่งตามมาด้วยบางสิ่ง ลำดับมาจากพจน์ก่อนหน้า ลำดับจำเป็นต้องเป็นอนันต์แสดงด้วยสัญลักษณ์ “...” และลำดับเป็นกระบวนการที่ไม่สิ้นสุด นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 6 ตอนที่ 2

(f) 2, 7, 0, 4, 1, 2

(g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$



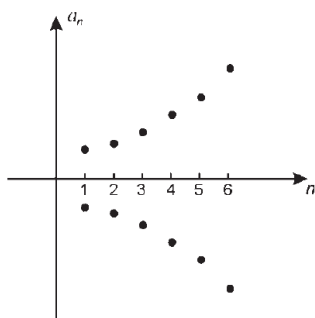
รูปที่ 6

• อันดับในความหมายทางภาษาศาสตร์

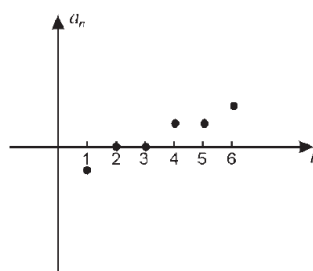
นักเรียนกลุ่มนี้อธิบายว่า ลำดับ คือ ทุกสิ่งที่ได้รับการทำให้กระจ่างและเราจะไม่ข้ามทุกสิ่ง เหมือนกับว่าลำดับถูกจัดไว้แล้ว ลำดับยังถูกใช้อธิบายด้วยคำที่ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น ลำดับคือทุกสิ่งที่ชัดเจน ลำดับจัดเรียงกันได้ โดยไม่ได้อ้างอิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ และยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 สถานการณ์ในรูปที่ 4 และ 5 ตอนที่ 2 ยอมรับสถานการณ์ข้อ (p) โดยอธิบายว่าสมาชิกตัวหลังมีเพียงผลไม้ หรือมีเพียงแอปเปิล เช่น มีลูกแพสสองลูก และแอปเปิลสองลูก

(q)  $a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$

(p)  $\{(1, \Delta), (2, \text{ธ}), (3, \text{อ}), (4, \text{อ})\}$



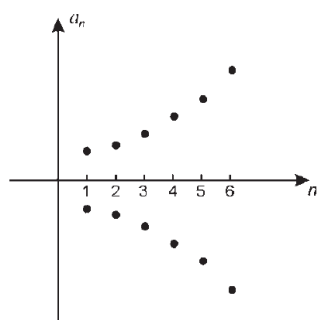
รูปที่ 4



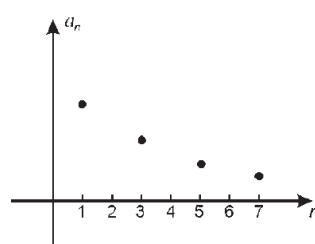
รูปที่ 5

## 2.7 ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน

นักเรียนกลุ่มนี้จะระบุลำดับด้วยการเรียงกันอย่างต่อเนื่องของค่าตามลำดับของจำนวนจำกัดและจำนวนอนันต์ โดยยอมรับสถานการณ์ของลำดับที่เป็นกราฟ และสถานการณ์ที่ยอมรับว่าเป็นลำดับที่พบค่อนข้างบ่อยคือแผนภาพลูกศรหรือตาราง นักเรียนยังตระหนักถึงการเรียงกันของค่าของพจน์ที่ต่อเนื่อง แต่ไม่สามารถอ้างอิงถึงเซตของกลุ่มอันดับได้ โดยนักเรียนยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 4 และ 7 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ



รูปที่ 4



รูปที่ 7

## บทที่ 4

### ผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย อำเภอท่าวังพา จังหวัดน่าน ประชากรคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์- คณิตศาสตร์ ที่ผ่านการเรียนเรื่องลำดับมาแล้ว จำนวน 345 คน จากโรงเรียนมัธยมศึกษาสังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน จำนวน 4 โรงเรียน ได้แก่ โรงเรียนท่าวังพาพิทยาคม โรงเรียนหนองบัวพิทยาคม โรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร และโรงเรียนสารธรรมวิทยาคาร และมีนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 335 คน ผู้วิจัยได้วิเคราะห์รูปแบบของหมโนทัศน์ของนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย และได้มีการนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล โดยแบ่งผลการวิจัยออกเป็น 3 ตอน ได้แก่

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับโดยเกณฑ์ของมอลโกลซาต้า ฟรีเซนนิโอสโล

ตอนที่ 2 ผลการตรวจแบบทดสอบเรื่องหมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของกลุ่มตัวอย่าง

ตอนที่ 3 ผลการสัมภาษณ์นักเรียนผู้ทำแบบทดสอบเรื่องหมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

**ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับโดยเกณฑ์ของมอลโกลซาต้า ฟรีเซนนิโอสโล**

ผู้วิจัยนำแบบทดสอบของนักเรียนที่ทำแบบทดสอบจำนวน 335 คน มาตรวจและทำการวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

ผลการวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับด้วยเกณฑ์การวิเคราะห์หมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของมอลโกลซาต้า ฟรีเซนนิโอสโล แสดงได้ดังตารางที่ 4-1

ตารางที่ 4-1 แสดงจำนวนนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่ม

ประเภทของมโนทัศน์	จำนวน	ร้อยละ
รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน	61	18.21
มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ	246	73.43
ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้	28	8.36
<b>รวม</b>	<b>335</b>	<b>100</b>

จากตารางที่ 4-1 ผลของการวิเคราะห์ประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับจากนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 335 คน พบว่า สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้จำนวน 307 คน แบ่งนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่มีมโนทัศน์รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน มีจำนวน 61 คน คิดเป็นร้อยละ 18.21 ของจำนวนผู้ทำแบบทดสอบทั้งหมด กลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับของสมาชิกมีจำนวน 246 คน คิดเป็นร้อยละ 73.43 ของจำนวนผู้ทำแบบทดสอบทั้งหมด และกลุ่มที่สามคือกลุ่มที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 28 คน คิดเป็นร้อยละ 8.36 ของจำนวนผู้ทำแบบทดสอบทั้งหมด

จากการแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย พบว่ามีนักเรียนที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ 307 คน และสามารถแบ่งออกเป็นสองกลุ่มดังต่อไปนี้

1. กลุ่มที่ 1 มโนทัศน์รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน

นักเรียนตอบแบบทดสอบโดยให้เหตุผลจากบทนิยามลำดับ นักเรียนตอบแบบทดสอบว่า สถานการณ์ข้อ (g) ตอนที่ 1 เป็นลำดับ รูปที่ 9 ตอนที่ 2 และสถานการณ์ข้อ (f) ตอนที่ 1 ไม่เป็นลำดับ อธิบายรูปที่ 3 – 9 ตอนที่ 2 ด้วยการใช้นิยามลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ และให้เหตุผลลำดับที่เกี่ยวข้องกับลิมิต ลำดับอนันต์ นักเรียนตอบว่าสถานการณ์ข้อ (m) ตอนที่ 1 เป็นลำดับ และตอบว่าสถานการณ์รูปที่ 7 ตอนที่ 2 เป็นลำดับ ด้วยการใช้นิยามลำดับ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนนับ ขาดความเข้าใจการใช้สัญลักษณ์แทนลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots$  และขาดความเข้าใจว่าโดเมนต้องเป็นจำนวนนับที่ต่อเนื่องกัน

แสดงผลการวิเคราะห์ประเภทมโนทัศน์ของกลุ่มที่รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน และสามารถแบ่งมโนทัศน์ออกเป็น 4 กลุ่มย่อย ดังตารางที่ 4 – 2

ตารางที่ 4 – 2 แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มที่รับรู้ว่าคุณค่าเป็นฟังก์ชัน

ประเภทของมโนทัศน์ แบ่งออกเป็น 4 ประเภทได้แก่	จำนวน	ร้อยละ
รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ	2	3.28
รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ	9	14.75
ลำดับต้องเป็นอนันต์	18	29.51
ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ	32	52.46
<b>รวม</b>	<b>61</b>	<b>100</b>

จากตารางที่ 4 – 2 จะเห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้มีจำนวน 61 คน คิดเป็น คิดเป็นร้อยละ 18.21 ของจำนวนผู้ทำแบบทดสอบทั้งหมด ซึ่งเป็นจำนวนที่น้อยเมื่อเทียบกับจำนวนนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยทั้งหมด อันดับต่อไปเป็นเหตุผลที่นักเรียนกลุ่มที่รับรู้ว่าคุณค่าเป็นฟังก์ชัน แบ่งออกเป็น 4 ประเภท ดังนี้

#### 1.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ

นักเรียนรู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 3.28 ของนักเรียนที่รับรู้ว่าคุณค่าเป็นฟังก์ชัน พิจารณาจากสถานการณ์ข้อ (l) - (m) ตอนที่ 1 นักเรียนตอบไม่เป็นลำดับ เหตุผลเช่น ข้อ (l) เพราะ “โดเมน 1 ตัว จับกับเรนจ์ 2 ตัว” ข้อ (m) เพราะ “โดเมนไม่เรียงกันเป็นจำนวนนับ”, “โดเมนไม่เป็นจำนวนนับ 1, 2, 3, 4, ...” ข้อ (n) “โดเมนไม่เป็นสมาชิกของ  $I^+$ ”, “โดเมนไม่ใช่จำนวนเต็มบวก” ส่วนตอนที่ 2 รูปที่ 7 ตอบว่าไม่เป็นลำดับ เพราะ “โดเมนไม่เป็นจำนวนนับ”, “โดเมนไม่เป็นจำนวนนับ 1, 2, 3, 4, ...” และรูปที่ 8 ไม่เป็นลำดับ เพราะ “โดเมนไม่เป็น  $I^+$  ทั้งหมด (มีเศษส่วนด้วย)” เป็นต้น

#### 1.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ

นักเรียนรู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ มีจำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 14.75 ของนักเรียนที่รับรู้ว่าคุณค่าเป็นฟังก์ชัน พิจารณาจากสถานการณ์ข้อ (m) ตอนที่ 2 นักเรียนให้เหตุผลว่าไม่เป็นลำดับ เพราะ “โดเมนข้าม 3 ไป ต้องเป็น 1, 2, 3, ...”, “ไม่เป็นฟังก์ชัน”, “โดเมนไม่เป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวก”, “โดเมนไม่เรียงลำดับ” ข้อ (g) ตอนที่ 1 นักเรียนไม่ยอมรับว่าเป็นลำดับ โดยให้เหตุผลว่า “โดเมนต้องเป็นจำนวนเต็มบวก”, “ผลต่างไม่เท่ากัน”, “ไม่เป็นฟังก์ชัน”, “ไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก”, “ไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ”

นักเรียนมีความขัดแย้งทางเหตุผลที่ตอบในข้อ (g) เนื่องจากนักเรียนยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 9 ตอนที่ 2 จากเหตุผลว่า เพราะ “เป็นฟังก์ชัน (ลู่อเข้า) เป็นลำดับลู่อเข้า”, “ลิมิตลู่อเข้า 0”, “เป็นฟังก์ชัน”,

“ไม่เป็นฟังก์ชัน”, “มีค่าเข้าใกล้ 0”, “จำนวนนับข้างต้นอยู่ในรูปของจำนวนเต็มบวก”, “โดเมนเรียงลำดับ” เป็นต้น

### 1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์”

นักเรียนมีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์” มีจำนวน 18 คน คิดเป็นร้อยละ 29.51 ของนักเรียนที่รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน พิจารณาได้จากการเขียนตอบสถานการณ์ในตอน ที่ 2 รูปที่ 3 – 9 ยกตัวอย่างเช่น รูปที่ 7 ตอบว่าเป็นลำดับ เพราะ “ค่า  $n$  เข้าใกล้ศูนย์มากขึ้นเมื่อเพิ่มค่า  $n$  ขึ้น”, “เป็นลำดับอนันต์”, “อนุกรมลู่เข้า”, “อนุกรมลู่ออก”, “ลิมิตลู่เข้าสู่ศูนย์”, “ลิมิตเข้าใกล้ 0”, “เป็นลำดับจำกัด”, “ลู่ออก”, “เป็นลำดับจำกัด”, “ $a_n = \frac{1}{n}$  จะเห็นว่าค่า  $n$  ยิ่งมากทำให้  $a_n$  เข้าใกล้ 0 ดังนั้นเป็นลำดับลู่เข้า” และ “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $a_n$  จะมากเมื่อเข้าใกล้ 0”, “นับไปเรื่อย ๆ”

เป็นต้น

### 1.4 มโนทัศน์มีพื้นฐานของความเชื่อ “ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนเป็นสับเซตของจำนวนนับ”

นักเรียนมีพื้นฐานของความเชื่อ “ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนเป็นสับเซตของจำนวนนับ” มีจำนวน 32 คน คิดเป็นร้อยละ 52.46 ของนักเรียนที่รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน พิจารณาจากการที่นักเรียนยอมรับสถานการณ์ข้อ (m) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ ให้เหตุผลว่า “โดเมนไม่ซ้ำกัน”, “เป็นฟังก์ชัน”, “คู่อันดับไม่ซ้ำกันเลย”, “โดเมนคู่กับเรนจ์ตัวเดียว”, “โดเมนมีเรนจ์”, “โดเมนคู่กับเรนจ์ตัวเดียว”, “มีโดเมนต่างกัน”, “เป็นฟังก์ชันจึงเป็นลำดับ”, “โดเมนเป็นจำนวนเต็มบวกเริ่มจาก 1 เพิ่มขึ้น 2 เท่า คงที่”, “โดเมนเรียงจากน้อยไปมาก” เป็นต้น เมื่อพิจารณาสถานการณ์รูปที่ 7 ตอนที่ 2 นักเรียนกลุ่มนี้ตอบว่าเป็นลำดับ โดยให้เหตุผลว่า “ลากขนานแกน Y เส้นตัดหนึ่งจุดเป็นฟังก์ชัน”, “เป็นฟังก์ชัน”, “ $D = n$ ”, “ $D_r$  ไม่ซ้ำ”, “จุดไม่ตัดกัน”, “กราฟเป็นฟังก์ชัน”, “มีจุดตัดแกน Y หนึ่งจุด”, “ลากเส้นแล้วตัด 1 จุด เป็นฟังก์ชัน”, “เมื่อลากเส้นเชื่อมจุดหลังจากเส้นตรงขนานแกน Y แล้ว มีจุดตัด 1 จุด” เป็นต้น

## 2. กลุ่มที่ 2 มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ

นักเรียนตอบว่าสถานการณ์ข้อ (h) ตอนที่ 1 ไม่เป็นลำดับ พิจารณาข้อ (i) – (p) ตอนที่ 1 มีข้อที่ตอบว่าไม่เป็นลำดับ นักเรียนตอบว่าสถานการณ์ข้อ (o) ตอนที่ 1 ไม่เป็นลำดับ ไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (p) ตอนที่ 1 นักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์รูปที่ 9 – 10 ตอนที่ 2 นักเรียนไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) แต่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (c) ตอนที่ 1 หรือยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) แต่ไม่ยอมรับสถานการณ์ข้อ (c)

ต่อไปเป็นตารางแสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ และสามารถแบ่งมโนทัศน์ออกเป็น 7 กลุ่มย่อย ดังตารางที่ 4 – 3

ตารางที่ 4 – 3 แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ

ประเภทของมโนทัศน์ แบ่งออกเป็น 7 ประเภทได้แก่	จำนวน	ร้อยละ
ความสัมพันธ์ของคำว่า “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”	54	21.95
ลำดับทางเดียว	23	9.35
ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน	64	26.07
พจน์ต้องเป็นสูตร	5	2.03
พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ	3	1.22
พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน	30	12.20
ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน	67	27.24
<b>รวม</b>	<b>246</b>	<b>100</b>

จากตารางที่ 4 – 3 จะเห็นว่านักเรียนกลุ่มที่มีมโนทัศน์ลำดับเชื่อมโยงกับอันดับ มีจำนวน 246 คน คิดเป็น คิดเป็นร้อยละ 73.43 ของจำนวนผู้ทำแบบทดสอบทั้งหมด ซึ่งเป็นจำนวนที่มากที่สุดจากจำนวนนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยทั้งหมด ต่อไปนี้เป็นเหตุผลที่นักเรียนกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ และสามารถแบ่งออกเป็น 7 ประเภท ดังนี้

#### 2.1 มโนทัศน์มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”

นักเรียนที่มีมโนทัศน์ของลำดับที่มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า” มีจำนวน 54 คน คิดเป็นร้อยละ 21.95 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ พิจารณาได้จากสถานการณ์ข้อ (d) – (e) ตอนที่ 1 สถานการณ์ข้อ (d) นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ เพราะ “มีการเรียงของตัวเลขจากน้อยไปมาก”, “เพิ่มทีละ 2”, “มีการเรียงลำดับ”, “เลขไม่ซ้ำ”, “เป็นลำดับ”, “เพิ่มขึ้นเท่า ๆ เดิม”, “เพิ่มเท่ากัน”, “เพิ่ม/ลดเท่ากัน”, “มีการเพิ่มขึ้นคงที่  $w$ ”, “เรียงตามเส้นจำนวน”, “เป็นตัวเลขเรียงลำดับ”, “เรียงกันไม่ซ้ำ”, “เรียงจากน้อยไปมาก”, “ผลต่างร่วมเท่ากัน”, “เป็นเลขคณิตที่เรียงกัน”, “เลข 6 เป็นเลขสุดท้าย”, “-4 เรียงเพิ่มขึ้นทีละ 2 จนถึง 6”, “มีการเรียงเลขที่ถูกต้อง” เป็นต้น สถานการณ์ข้อ (e) นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับเพราะ “ไม่ได้เพิ่มขึ้นและไม่ได้ลดลง”, “เพิ่มขึ้นและคงที่ที่ -5”, “ไม่ได้มีการลดลงอย่างเป็นลำดับ”, “เลขซ้ำ  $w$ ”, “เพิ่มไม่เท่ากัน”, “ค่าไม่คงที่”, “เพิ่มไม่เท่ากัน”, “เพิ่ม/ลดไม่เท่ากัน”, “ค่าไม่ได้ลดลงอย่างต่อเนื่อง” เป็นต้น แล้วยัง



สามารถพิจารณานักเรียนกลุ่มนี้ได้จาก ข้อ (i) – (o) ตอนที่ 1 เช่น “เป็นคู่อันดับอยู่ใน  $\{ \}$ ” และ “ $D_r$  เรียงจากน้อยไปมาก”, “เป็นคู่อันดับ”, “คู่อันดับไม่เรียงกัน”, “คู่อันดับเรียงเลขไม่ซ้ำกัน” เป็นต้น และนักเรียนยอมรับสถานการณ์ในรูปที่ 1, 2, 7 และ 8 ตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ ตัวอย่างการให้เหตุผล ได้แก่ “ค่า  $x$  และ  $y$  เพิ่มขึ้นทีละ 1”, “มีการเรียงลำดับเพิ่มมากขึ้นที่ 1”, “ลดลงทีละสอง”, “ลดลงเท่ากัน”, “มีผลต่างร่วมคงที่”, “มีการเรียงลำดับที่ดีและถี่มาก”, “ค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ”, “คงตัว” เป็นต้น

## 2.2 มโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”

นักเรียนมีมโนทัศน์ของลำดับที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว” มีจำนวน 23 คน คิดเป็นร้อยละ 9.35 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ นักเรียนตอบว่ารูปที่ 7 และ 8 ตอนที่ 2 เป็นลำดับ เหตุผลที่ใช้อธิบายเช่น “กราฟเป็นเส้นตรง”, “เป็นเส้นโค้ง”, “กราฟเป็นเส้น”, “จุดมีการเรียงตัวกันเป็นเส้นโค้งลง”, “มีความลดลงเรื่อย ๆ”, “เป็นกราฟแสดงถึงความลดลงเรื่อย ๆ”, “สามารถจับคู่เรียงลำดับ” เป็นต้น นักเรียนยังตอบว่า ข้อ (l)–(n) ตอนที่ 1 ว่าเป็นลำดับ เหตุผลเพราะ “เพิ่มขึ้น”, “ไม่เพิ่มขึ้น”, “โดเมนและเรนจ์เพิ่มขึ้น”, “เป็นคู่จับคู่ได้”, “อยู่ในเซต”, “เป็นเซตคำตอบ”, “ค่าเพิ่มขึ้น”, “ค่าไม่กระจาย” เป็นต้น

## 2.3 มโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน”

นักเรียนมีมโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน” มีจำนวน 64 คน คิดเป็นร้อยละ 26.02 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ นักเรียนตอบว่ารูปที่ 3 ตอนที่ 2 เป็นลำดับ เหตุผลได้แก่ “เรียงตามลำดับเลขคณิต”, “คู่ลำดับ  $(x, y)$  สามารถระบุตำแหน่งลำดับได้”, “ความห่างของตัวเลขเท่ากัน”, “ตัวเลขห่างเท่ากัน 2 เลข”, “ค่า  $y$  เท่ากัน”, “ความถี่  $x, y$  คงที่”, “เป็นเพราะมีผลต่างร่วมเท่ากัน และเป็นสมาชิกของ  $N$ ”, “มีความสัมพันธ์เป็นลำดับกวดแกว่ง”, “เพิ่มลดเท่ากันทุกช่วง”, “เป็นลำดับเรขาคณิต” เป็นต้น รูปที่ 5, 7 และ 8 ตอนที่ 2 ตัวอย่างเหตุผลเช่น “ผลต่างร่วม”, “มีอัตราส่วนร่วม”, “เพิ่มขึ้นทีละ 2”, “ผลต่างคงที่”, “เป็นลำดับเลขคณิต”, “ตัวเลขแต่ละตัวห่างเท่ากัน”, “ความห่างของค่า  $y$  เท่ากัน” เป็นต้น

## 2.4 มโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”

นักเรียนที่มีมโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร” มีจำนวน 5 คน คิดเป็นร้อยละ 2.03 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ รูปที่ 2, 7 และ 8 ตอนที่ 2 ตอบว่าเป็นลำดับเพราะ “ลำดับเลขเรียงกันตามกราฟสามารถหาค่าได้”, “ $a_n = A n$  คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6”, “หาพจน์ที่  $n$  ได้”, “ $a_n$  เรียงเป็นลำดับ”, “มีพจน์ที่  $n$ ”, “พจน์ที่  $n$  ของลำดับ คือ  $a_n = n$ ” เป็นต้น

## 2.5 มโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ”

นักเรียนที่มีมโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ” มีจำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 1.22 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ นักเรียนตอบว่าข้อ (q) ตอนที่ 1 เป็นลำดับ เหตุผลได้แก่ “เพิ่มเท่ากัน”, “ $a_n$  เป็นจำนวนจริง” เป็นต้น รูปที่ 4 ตอนที่ 2 นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ เพราะ “เพิ่มและลดลงสม่ำเสมอ”, “เพิ่มทีละ 1” เป็นต้น รูปที่ 5 ตอนที่ 2 นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ เพราะ “มีการเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ”, “มีการลดลงอย่างสม่ำเสมอ” เป็นต้น

## 2.6 มโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน”

นักเรียนที่มีมโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” มีจำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 24.39 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ โดยพิจารณาจากข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 เป็นหลัก และพิจารณารูปที่ 6 ตอนที่ 2 นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ ยังสามารถแยกเป็น 5 ประเภทดังต่อไปนี้

- อันดับทางคณิตศาสตร์

นักเรียนที่มีมโนทัศน์อันดับทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 43.33 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์พื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” ซึ่งมีจำนวนมากที่สุด นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับใน ข้อ (h), (l) - (n) ตอนที่ 1 และรูปที่ 4 ในตอนที่ 2 ตัวอย่างการเขียนตอบ เช่น “เลข 2 น่าจะเป็นเลข 3”, “เลขน้อยเกินไป”, “เลขต่างกันเกินไป”, “คู่อันดับไม่สอดคล้อง”, “กราฟไม่สอดคล้องกับลำดับ” รูปที่ 6 ตอนที่ 2 ตัวอย่างการให้เหตุผล เช่น “ลำดับสลับ”, “ข้อมูลกระจัดกระจาย”, “อนุกรมลู่ออกแบบพินปลา”, “กราฟพาลาโบล่า” เป็นต้น และข้อ (f), (g), (k) ตอนที่ 1 โดยนักเรียนเขียนอธิบายเหตุผลเช่น “ลำดับไม่มี 0”, “ลำดับไม่มีเศษส่วนที่ไม่ลงตัว”, “รูปแบบไม่แน่นอน”, “ค่า  $\pi$  ไม่คงที่เป็นค่าประมาณ” เป็นต้น รูปที่ 8 ตอนที่ 2 ตอบว่าเป็นลำดับโดยอธิบายว่า “กราฟลู่ออกสู่ศูนย์”, “เป็นลำดับคู่เข้า” เป็นต้น

- อันดับทางปรัชญา

นักเรียนที่มีมโนทัศน์อันดับทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 23.33 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์พื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับในข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 นักเรียนเขียนเหตุผลเช่น “ไม่มีการจัดเรียงตัวของจุดเป็นระเบียบ”, “เลขกระจัดกระจายหลายทิศทาง” เป็นต้น

- **อันดับทางจิตวิทยา**

นักเรียนที่มีมโนทัศน์อันดับทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 20 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์พื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” กราฟในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 และข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 ตอบว่าไม่เป็นลำดับ โดยให้เหตุผลว่า “มีการกระโดดข้าม” แต่นักเรียนยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 สถานการณ์ในรูปที่ 4 และ 5 ตอนที่ 2 ตัวอย่างการเขียนเช่น “จุดไม่แน่นอน(เดี่ยวบนเดี่ยวล่าง)”, “เป็นการสะท้อน”, “ไม่เป็นระเบียบ” เป็นต้น

- **อันดับทางความต่อเนื่อง**

นักเรียนที่มีมโนทัศน์อันดับทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 20 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์พื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับในข้อ (f) และ (g) ตอนที่ 1 และสถานการณ์ในรูปที่ 6 ตอนที่ 2 ตัวอย่างเหตุผลเช่น “ไม่ต่อเนื่องกัน”, “หาลำดับไม่ได้”, “ไม่เพิ่มขึ้นต่อเนื่อง”, “ไม่เรียงกัน”, “ไม่มีการจัดเรียงตัวของจุดเป็นระเบียบ”, “เลขกระจัดกระจาย” เป็นต้น

- **อันดับในความหมายทางภาษาศาสตร์**

นักเรียนที่มีมโนทัศน์อันดับทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์พื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน” ยอมรับสถานการณ์ข้อ (q) ตอนที่ 1 ตัวอย่างการเขียนเหตุผลเช่น “ผมไม่เคยเห็นที่จะทำแบบนี้” เป็นต้น รูปที่ 4 และ 5 ตอนที่ 2 ตอบว่าไม่เป็นลำดับ เหตุผลคือ “เป็นเส้นสมดุลกัน”, “เป็นเส้นไขว้ลาดชัน”, “มีกราฟ”, “มีจุดกำกับ” เป็นต้น นักเรียนตอบว่าข้อ (p) ไม่เป็นลำดับโดยอธิบายว่า “เป็นผลไม้ต้องอยู่ในสวนเท่านั้น”, “จะไม่มีรูปผลไม้” เป็นต้น

### 2.7 มโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”

นักเรียนที่มีมโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”

มีจำนวน 67 คน คิดเป็นร้อยละ 27.24 ของนักเรียนที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ นักเรียนตอบว่ารูปที่ 4 และ 7 ตอนที่ 2 เป็นลำดับ ตัวอย่างการเขียน เช่น “เป็นกราฟ”, “เรียงลำดับ”, “กราฟมีค่าลดลงตามลำดับ”, “เพิ่มขึ้นเท่ากัน”, “ได้เรียง”, “เรียงลำดับอย่างถูกต้อง”, “อยู่ในช่วงที่เรียงจากเลขมากไปเลขน้อย”, “เป็นกราฟเอกซ์โพเนนเชียล”, “กราฟมีค่าลดลงตามลำดับ” เป็นต้น

### 3. นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้

นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ กลุ่มนี้มีจำนวน 28 คน คิดเป็น 8.36% ของนักเรียนที่เข้าร่วมงานวิจัยทั้งหมด นักเรียนกลุ่มนี้จะมีแนวทางการเขียนตอบ โดยรวมแล้วใช้เพียงแค่ค่าของจำนวนเต็ม หรือจำนวนนับ ในการตัดสินใจว่าสถานการณ์ใดเป็นลำดับ เขียนเหตุผลด้วยประโยคต่อไปนี้เช่น “ข้อความข้างต้นเป็นจริง”, “คิดว่าเป็น”, “เป็นจำนวนนับ”, “เพราะเป็นลำดับ”, “ได้คำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ” เป็นต้น

### ตอนที่ 2 ผลการตรวจแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของกลุ่มตัวอย่าง

ผู้วิจัยนำแบบทดสอบจากกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับโดย เกณฑ์ของมอลโกชาด้า ฟรีเซนนิ โอสโล มีจำนวน 307 คน นำมาวิเคราะห์จำนวนข้อที่ตอบถูกและ ข้อที่ตอบผิด โดยตอบถูกให้ 1 คะแนน ตอบผิดให้ 0 คะแนน โดยไม่มีการพิจารณาเหตุผลจากการ เขียนตอบ แบ่งออกเป็นสองกลุ่ม ได้แก่ นักเรียนที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ได้ จำนวน 307 คน และนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ จำนวน 28 คน ดัง หัวข้อต่อไปนี้

1. กลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ แสดงการตอบแบบทดสอบ ตอนที่ 1 (จำนวน 18 ข้อ) ได้ดังตารางที่ 4 – 4

ตารางที่ 4 – 4 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 1 (18 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของ  
ลำดับของกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้  
จำนวน 307 คน

ข้อที่	ตอบแบบทดสอบ		ไม่ตอบแบบทดสอบ	
	ตอบถูก	ตอบผิด	ไม่ตอบ	ไม่แสดงผล
a	117	218	-	-
b	185	150	-	-
c	150	185	-	-
d	272	63	-	-
e	101	234	-	-
f	103	232	-	-
g	87	248	-	-
h	294	41	-	-
i	252	83	-	-
j	238	97	-	-
k	143	192	-	-
l	147	188	-	-
m	128	207	-	-
n	124	211	-	-
o	169	165	1	-
p	184	151	-	-
q	169	165	1	-
r	191	143	1	1

จากตารางที่ 4 – 4 ผู้วิจัยพิจารณาจากจำนวนข้อที่ตอบถูกมากที่สุดโดยไม่ได้พิจารณาจากเหตุผลในการเขียนตอบ ตอนที่ 1 ข้อที่นักเรียนตอบถูกมากกว่า 200 คน จากจำนวนนักเรียนที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ ดังต่อไปนี้

- (d) -4, -2, 0, 2, 4, 6
- (h)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- (i)  $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots\}$
- (j)  $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots\}$

เหตุผลที่นักเรียนกลุ่มที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ตอบถูกในข้อ (d), (h), (i) และ (j) มาก อาจเป็นเพราะนักเรียนมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเกี่ยวข้องกับการเรียงกันของจำนวนเท่านั้น และทั้งสี่ข้อนี้มีลักษณะที่คล้ายคลึงกันคือ การเรียงลำดับจำนวนจากน้อยไปหามาก โดยที่นักเรียนมองข้ามโดเมนของลำดับโดยพิจารณาเฉพาะค่าของตัวเลขที่มากขึ้นเท่านั้น และข้อที่นักเรียนตอบผิดมากที่สุดมากกว่า 200 คน จากจำนวนนักเรียนที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ ดังนี้

- (a)  $x \rightarrow \sqrt{2}, x \in \mathbb{N}$
- (e) -1, -3, -5, -5, -5, ...
- (f) 2, 7, 0, 4, 1, 2
- (g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$
- (m)  $\{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$
- (n)  $\left\{\left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \dots\right\}$

เหตุผลที่นักเรียนตอบผิดในข้อ (a) อาจเป็นเพราะนักเรียนไม่คุ้นเคยกับสัญลักษณ์  $x \rightarrow \sqrt{2}$  จึงตอบว่าไม่เป็นลำดับโดยลืมพิจารณาว่ามีเงื่อนไข  $x \in \mathbb{N}$  ทำให้ชัดเจนว่าข้อ (a) เป็นลำดับ และในข้อ (e), (f), (g) อาจเป็นเพราะนักเรียนมีแนวคิดว่าลำดับคือค่าของตัวเลขที่มากขึ้นเท่านั้นเมื่อพิจารณาจากข้อ (e) นักเรียนเห็นจำนวน -5, -5, -5, ... เป็นค่าคงที่จึงไม่ยอมรับว่าเป็นลำดับ ข้อ (f) นักเรียนน่าจะยึดติดกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเลขคณิต โดยจะพิจารณาลำดับจากค่าของผลต่างร่วมระหว่างพจน์ ( $r = a_n - a_{n-1}$ ) ซึ่งเป็นนิยามของลำดับเลขคณิต ข้อ (g) เป็นไปได้ว่านักเรียนเห็นสัญลักษณ์  $\pi$  ซึ่งไม่น่าจะมีความเกี่ยวข้องกับลำดับ จึงไม่ยอมรับว่าข้อ (g) เป็นลำดับ

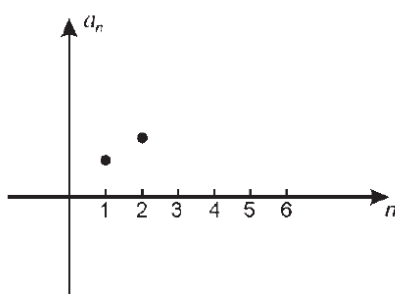
ข้อ (m) และ (n) แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่านักเรียนส่วนใหญ่ไม่พิจารณาลำดับจากโดเมน โดยสังเกตเฉพาะค่าของตัวเลขที่เพิ่มขึ้นเท่านั้น

อันดับต่อไปเป็นตารางแสดงการตอบตอนที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้

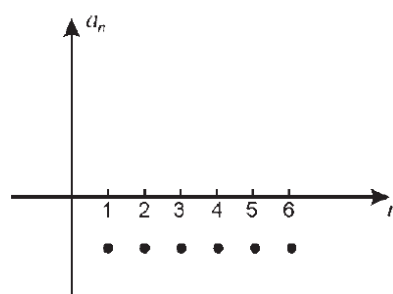
ตารางที่ 4 – 5 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 2 (10 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 307 คน

รูปที่	ตอบแบบทดสอบ		ไม่ตอบแบบทดสอบ	
	ตอบถูก	ตอบผิด	ไม่ตอบ	ไม่แสดงเหตุผล
1	265	70	-	-
2	219	116	-	-
3	183	152	-	-
4	115	218	2	-
5	142	193	-	1
6	108	226	1	-
7	50	285	-	1
8	42	293	-	-
9	237	96	2	2
10	187	148	-	-

จากตารางที่ 4 – 5 แสดงให้เห็นว่ามีนักเรียนมากกว่า 200 คน ตอบกราฟในตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ  
ได้แก่ รูปที่ (1), (2) และ (9)



รูปที่ 1



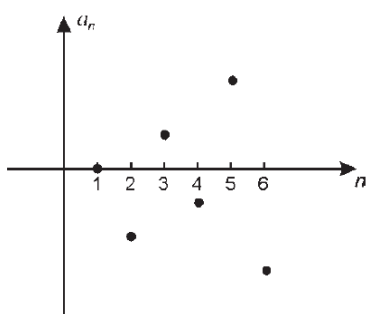
รูปที่ 2

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9

นักเรียนตอบว่ารูปที่ 1 และรูปที่ 2 เป็นลำดับ แสดงให้เห็นถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ  
ของนักเรียนกลุ่มนี้ ยึดติดกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับกับค่าของพจน์ที่ต้องเพิ่มขึ้น และ  
จัดเรียงกันอย่างเป็นระเบียบ นักเรียนตอบว่ารูปที่ 9 เป็นลำดับ อาจเป็นเพราะนักเรียนมีการเรียนรู้ว่า  
ค่าของพจน์เพิ่มขึ้นทำให้เป็นลำดับ โดยไม่ได้มีการพิจารณาโดเมน พิจารณาเฉพาะค่าของตัวเลขที่  
เพิ่มขึ้นทั้งค่าของ  $n$  และค่าของ  $X_n$  (พิจารณาเฉพาะตัวส่วน 4, 5, 6, 7, 8) รูปที่นักเรียนตอบผิดมาก  
ที่สุดได้แก่ รูปที่ (6) , (7) และ (8)





รูปที่ 6

นักเรียนตอบว่ารูปที่ 6 เป็นลำดับ อาจเป็นเพราะนักเรียนยังคงมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเกี่ยวข้องกับวลีที่ว่า “ลำดับต้องเรียงกันแบบเพิ่มขึ้น” นักเรียนกลุ่มนี้ยังตอบว่ารูปที่ 7 และ 8 เป็นลำดับ อาจเป็นเพราะมีการเรียงกันของลำดับจากมากไปน้อย โดยขาดการพิจารณาโดเมนของลำดับแนวทางของคำตอบที่ตอบถูกหรือตอบผิดของการตอบแบบทดสอบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ สอดคล้องกับจำนวนนักเรียนกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ โดยที่นักเรียนส่วนใหญ่ถูกจัดอยู่ในกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับของสมาชิกมากที่สุด

## 2. นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้

ผู้วิจัยได้ทำการแยกคำตอบเป็นรายชื่อของนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ ของคำตอบในตอนต้นที่ 1 (18 ข้อ) ตามตารางที่ 4-6 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4 – 6 แสดงคำตอบแบบทดสอบตอนที่ 1 (18 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของ  
 ลำดับของนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้  
 จำนวน 28 คน

ข้อที่	ตอบแบบทดสอบ		ไม่ตอบแบบทดสอบ	
	ตอบถูก	ตอบผิด	ไม่ตอบ	ไม่แสดงเหตุผล
a	12	16	-	-
b	10	18	-	-
c	19	9	-	-
d	22	6	-	-
e	13	15	-	-
f	15	13	-	-
g	10	18	-	-
h	26	2	-	-
i	19	9	-	-
j	20	8	-	-
k	7	21	-	-
l	9	19	-	-
m	9	19	-	-
n	15	13	-	-
o	26	2	-	-
p	14	14	-	-
q	9	19	-	-
r	14	14	-	-

จากตารางที่ 4 – 6 พบว่าในตอนที่ 1 ข้อที่นักเรียนตอบถูกมากที่สุด ได้แก่

$$(h) \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$(o) \{(1, 2)\}$$

นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ โดยเหตุผลส่วนใหญ่ที่ตอบมาได้แก่ “เป็นจำนวนเต็ม”, “นับได้”, “เป็นเซตคำตอบ”, “เป็นคู่อันดับ”, “เป็นจำนวนเต็มบวก”, “มีเลขไม่ซ้ำกัน”, “เป็นจำนวนนับ”, “เป็นจำนวนจริง เป็นต้น ข้อที่นักเรียนตอบผิดมากที่สุด ได้แก่ข้อ

$$(k) \left\{ \left(1, \frac{1}{5}\right), (2, 3), (3, \pi), \dots \right\}$$

นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ เหตุผลส่วนใหญ่ที่นักเรียนเขียนมาได้แก่ “ไม่เป็นจำนวนเต็ม”, “เขียนอยู่ในรูปเศษส่วน”, “ไม่ได้เป็นจำนวนนับ”, “ $\pi$  ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ”, “เป็นคู่อันดับของจำนวนอตรรกยะ” เป็นต้น และอีก 3 ข้อที่ตอบผิดมากในตอนที่ 1 คือ ข้อ (l), (m), (q)

$$(l) \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$$

$$(m) \{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$$

$$(n) \left\{ \left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \dots \right\}$$

$$(q) a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$$

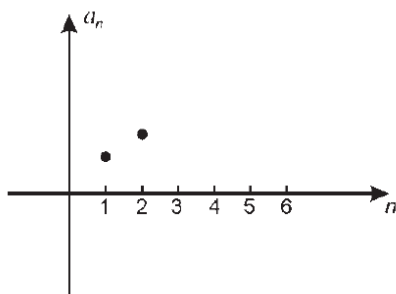
นักเรียนตอบข้อ (l) – (n) ว่าเป็นลำดับถึง 19 คน จากจำนวนนักเรียนกลุ่มที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ โดยมีเหตุผลในการเขียนตอบว่า “ข้อความข้างต้นไม่ถูกต้อง”, “คิดว่าเป็น”, “นับได้”, “เป็นจำนวนเต็ม”, “เขียนอยู่ในรูปคู่อันดับ”, “เป็นสับเซต”, “เป็นจำนวนจริง”, “เป็นเศษส่วน” เป็นต้น

ต่อไปเป็นตารางแสดงคำตอบของตอนที่ 2 จำนวนข้อที่นักเรียนตอบถูกและผิดมากที่สุดตามตารางที่ 4 – 7 ดังต่อไปนี้

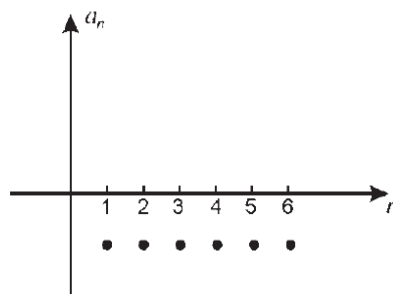
ตารางที่ 4 – 7 แสดงการตอบแบบทดสอบตอนที่ 2 (10 ข้อ) เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของ  
ลำดับของนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้  
จำนวน 28 คน

รูปที่	ตอบแบบทดสอบ		ตอบแบบทดสอบ	
	ตอบถูก	ตอบผิด	ไม่ตอบ	ไม่แสดงผล
1	22	6	-	-
2	21	7	-	-
3	17	11	-	-
4	13	15	-	-
5	10	18	-	-
6	13	15	-	-
7	9	19	-	-
8	15	13	-	-
9	15	13	-	-
10	13	15	-	-

จากตารางที่ 4 – 7 พบว่าในตอนที่ 2 รูปที่นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับมากที่สุด คือ รูปที่ 1 รองลงมา  
คือรูปที่ 2 ส่วนใหญ่ให้เหตุผลว่า “เป็นจำนวนนับ”, “นับได้”, “อยู่บนจุดจำนวนนับ”, “เป็นจำนวน  
เต็มบวก”, “เป็นจำนวนเต็ม”, “เรียงขึ้นบนและเรียงเป็นแถว”, “เป็นจำนวนจริง” รูปที่นักเรียนตอบ  
ว่าเป็นลำดับมากที่สุดคือรูปที่ 7 (คำตอบที่ถูกต้อง คือ ไม่เป็นลำดับ) และให้เหตุผลคล้ายคลึงกันกับ  
เหตุผลในรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ในตอนที่ 2



รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากการสังเกตของผู้วิจัย จะเห็นว่ากราฟในรูปที่ 1 จุดเรียงขึ้น แต่กราฟรูปที่ 2 จุดเรียงแบบคงที่ แต่ นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ก็ยังคงตอบว่าเป็นลำดับ นักเรียนอาจมองแค่การเรียงกันของจุดที่เพิ่มขึ้นเท่านั้น

### ตอนที่ 3 ผลการสัมภาษณ์นักเรียนผู้ทำแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

ในการวิจัยครั้งนี้หลังจากทำการวิเคราะห์แบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับเป็นโดยใช้เกณฑ์การวิเคราะห์ของมอล โกลซาต้า ฟรีเซนนิโอสโล สามารถแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน และกลุ่มที่เชื่อมโยงมโนทัศน์กับอันดับ ผู้วิจัยจึงทำการสัมภาษณ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง เครื่องมือที่ใช้คือแบบสัมภาษณ์ที่ผ่านผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเป็นที่เรียบร้อยแล้ว และได้มีการบันทึกเสียงการสนทนาเอาไว้ โดยมีหลักในการเลือกนักเรียนในการสัมภาษณ์จากแนวการเขียนตอบแบบทดสอบทั้งตอนที่ 1 และตอนที่ 2 เพื่อเป็นการยืนยันการวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ และจากการวิจัยยังพบว่ามโนทัศน์ที่นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ โดยการสัมภาษณ์นักเรียนที่มีแนวทางการเขียนที่ไม่ชัดเจนไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ ผลการสัมภาษณ์มีดังนี้

#### 1. กลุ่มที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับได้

กลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับได้จากแนวทางการเขียนตอบแบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ ทั้ง 2 กลุ่มดังนี้

1.1 ตัวอย่างของการสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 มโนทัศน์รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน

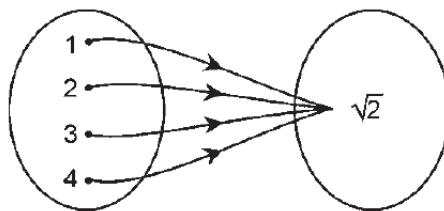
ครู : ข้อ (f) 2, 7, 0, 4, 1, 2 กับข้อ (g)  $\frac{1}{5}$ ,  $-\frac{1}{7}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{1}{3}$  นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ

นักเรียน : เพราะผลต่างร่วมมันกระโดดข้ามไม่เท่ากัน มันกระจัดกระจายไปเรื่อย ๆ

ครู : รูปที่ 9 กับรูปที่ 10 นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ เพราะอะไรคะ

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9



รูปที่ 10

นักเรียน : รูปที่ 9 มันเป็นฟังก์ชัน รูปที่ 10 โดเมนมันไม่ซ้ำกัน

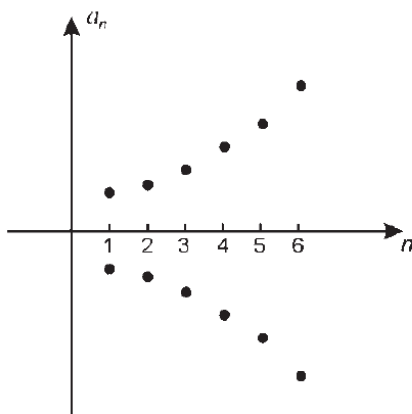
ครู : โดเมนไม่ซ้ำกัน หมายความว่าอย่างไรคะ

นักเรียน : คือว่า โดเมนในแต่ละคู่อันดับ โดเมนมันต้องไม่เหมือนกัน เช่น (1, 2), (2, 3) ประมาณนี้  
คือ โดเมนต้องไม่มีทิก

ครู : ถ้าอย่างนั้นลำดับต้องเป็นฟังก์ชันใช่ไหมคะ

นักเรียน : ใช่แล้วมันต้องมีความสัมพันธ์อะไรกันบางอย่าง

ครู : แล้วในรูปที่ 4 นักเรียนบอกว่าเป็นลำดับ เพราะอะไรคะ



รูปที่ 4

นักเรียน : เพราะมันเพิ่มขึ้นอย่างละเท่า ๆ กัน คือจาก 1 ไป 2 ไป 3 ไป 4 มันเพิ่มขึ้นทีละ 1

ครู : ให้นักเรียนบอกโดเมนกับเรนจ์ในข้อ (f) และ (g) รูปที่ 9 และรูปที่ 10

นักเรียน : ก็มันมี 0 ไง ข้อ (f) เป็นเรนจ์ โดเมนเป็น (g) โดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก แต่มันมีค่าที่ติดลบ และค่า  $\pi$

ครู : ข้อ (l)  $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$   
 (m)  $\{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$   
 (n)  $\left\{\left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \dots\right\}$

นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ เพราะอะไรคะ

นักเรียน : ข้อ (l) โดเมนซ้ำกัน ข้อ (m) มันมีการกระโดดข้าม โดเมนมันข้ามไป และในข้อ (n) โดเมนไม่ใช่จำนวนเต็มเป็นเศษส่วนเป็น  $\frac{1}{5}$  ไม่เป็นจำนวนเต็ม

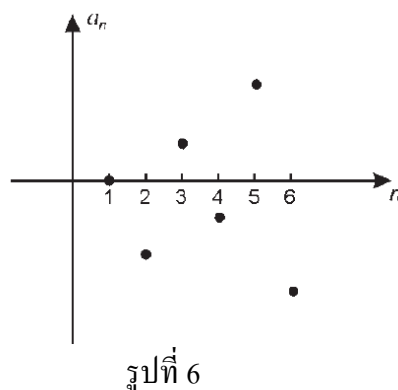
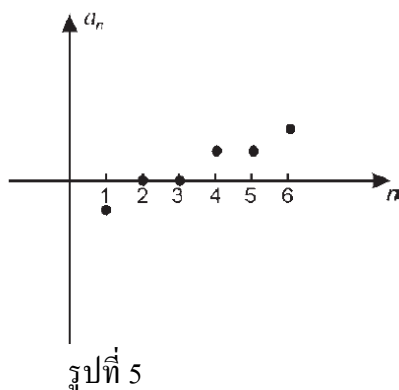
ครู : รูปที่ 9 นักเรียนบอกว่าเป็นลำดับ แล้วโดเมนคืออะไรคะ

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9

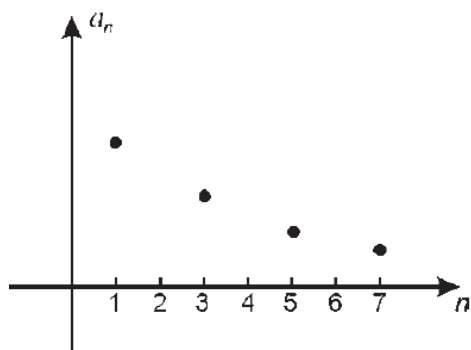
นักเรียน : โดเมนคือ 1, 2, 3, 4, 5 เรนจ์เป็นเศษส่วนได้

ครู : ในรูปที่ 5 และ 6 มีเหตุผลในการตอบอย่างไรคะ

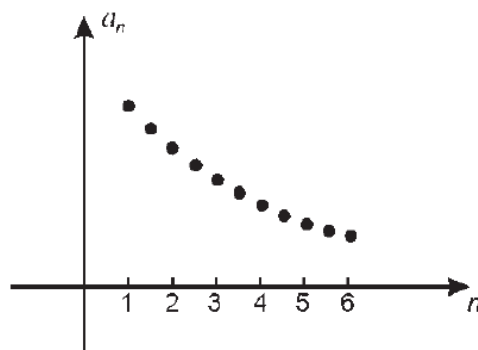


นักเรียน : รูปที่ 5 อย่างที่ผมบอก โดเมนเป็นจำนวนเต็มบวกและเพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กัน มันไม่ขาดมันต่อกันเป็นช่วง ๆ และรูปที่ 6 ก็แนวเดียวกัน โดเมนเป็น 1, 2, 3 เหมือนกัน

ครู : รูปที่ 7 และ 8 นักเรียนให้คำอธิบายว่าอย่างไรคะ



รูปที่ 7



รูปที่ 8

นักเรียน : ไม่เป็นลำดับเพราะรูปที่ 7 ดูแกนนอนมันกระโดด และรูปที่ 8 แกนนอนมีเศษส่วน มี  $\frac{1}{2}$  มันไม่ใช่จำนวนเต็ม

จากบทสนทนาจะเห็นว่านักเรียนมีมโนทัศน์ของลำดับว่า “เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนนับ” จะขาดพจน์ใดพจน์หนึ่งไม่ได้ แต่ยังเกิดความสับสนในการตอบข้อ (f) ในตอนที่ 1 จะเห็นว่านักเรียนคิดว่า มี 0 อยู่ในข้อ (f) นั่นคือ 0 ไม่เป็นจำนวนนับ จึงคิดว่าไม่เป็นลำดับ แต่จากการสนทนายุโรปในตอนที่ 2 นักเรียนยอมรับรูปที่ 9 และตอบได้อย่างชัดเจน ว่าโดเมนเป็นจำนวนนับ นั่นคือนักเรียนถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มของรูบ์ทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ

### 1.2 ตัวอย่างของการสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ

ครู : ข้อ (a)  $x \rightarrow \sqrt{2}$ ,  $x \in \mathbb{N}$  ไม่เป็นลำดับเพราะไม่มีพจน์ที่  $n$  ( $a_n$ ) แต่ขัดแย้งกับ

ข้อ (c)  $x_n = \frac{1}{n}$  ที่บอกว่าเป็นลำดับ

นักเรียน : ไม่มีพจน์ที่  $n$  คือมันจะไม่เป็นสมการ

ครู : ข้อ (b)  $a_n = \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  กับ (c)  $x_n = \frac{1}{n}$  เป็นสมการหรือไม่

นักเรียน : ใช่คะ เพราะมี  $a_n$  กับ  $x_n$  หนูก็คิดว่ามันน่าจะเป็นลำดับ

ครู : ข้อ (e)  $-1, -3, -5, -5, -5, \dots$  กับ (f)  $2, 7, 0, 4, 1, 2$  นักเรียนตัดสินใจอย่างไร

นักเรียน : ไม่เป็นลำดับเพราะมี  $-5$  มันซ้ำ ข้อ (f) มันเลขไม่เรียง 2 แล้วก็เพิ่มเป็น 7 มันกระโดด เหมือนมันเป็นกราฟ แบบไปเรื่อย ๆ

ครู : ข้อ (g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$  นักเรียนคิดอย่างไร

นักเรียน : ดูเหมือนข้อ (f)



ครู : ข้อ (l)  $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$ ,  
 (m)  $\{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$ ,  
 (n)  $\left\{\left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \dots\right\}$

ให้นักเรียนอธิบายคำตอบด้วยคะ

นักเรียน : ข้อ (l) เป็นลำดับเพราะหาคู่เลขตัวหน้า คูโดเมน คือ หนึ่งโดเมนจะมีสองเรนจ์ไม่ได้

ข้อ (m) ไม่เป็นลำดับ เหมือนมันหนึ่ง หนึ่ง สอง สอง มันข้าม ตัวที่สามไป

ข้อ (n) โดเมนไม่เป็นจำนวนเต็ม

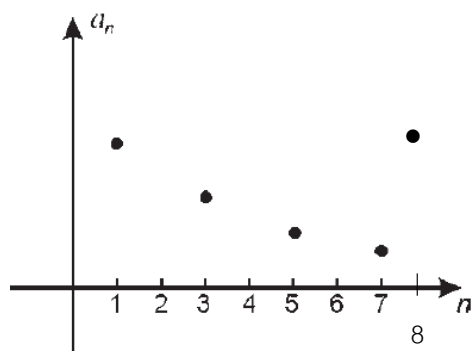
ครู : แต่ในข้อ (o)  $\{(1, 2)\}$  นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ เพราะอะไรคะ

นักเรียน : เพราะมีแค่ตัวเดียว มันน่าจะมีมากกว่าหนึ่งตัว

ครู : รูปที่ 4 หนูตัดสินใจอย่างไรว่าไม่เป็นลำดับคะ

นักเรียน : รูปที่ 4 ไม่เป็นลำดับเพราะมีเรนจ์ 2 ตัว

ครู : รูปที่ 7 เป็นลำดับเพราะอะไร ถ้าครูเพิ่มตัวที่ 8 ให้เรนจ์เพิ่มแบบนี้ยังเป็นลำดับอยู่หรือไม่คะ



รูปที่ 7

นักเรียน : ไม่ค่ะ คิดว่ากราฟมันน่าจะเป็นเส้น เหมือนรูปที่ 6 เหมือนสมการที่เป็นลบยกกำลังเลขที่  
 รูปที่ 9 เป็นลำดับ เพราะเลขมันเรียงกัน ดูทั้ง  $n$  และ  $X_n$  เพราะมันมีค่าเพิ่มขึ้นทั้งคู่  
 และรูปที่ 10 เป็นลำดับเพราะ หนูคิดว่ามี  $a_n = \sqrt{2}$  มันจึงเป็นลำดับ

จากบทสนทนาผู้วิจัยจัดให้นักเรียนคนนี้อยู่ในกลุ่มที่ 2 มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับและ  
 มีมโนทัศน์ที่มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร” นักเรียนคิดถึงแต่พจน์ทั่วไปของลำดับ  
 เท่านั้น จากแนวทางการสนทนานักเรียนจะพยายามหาพจน์ทั่วไปให้กับทุกสถานการณ์ทาง  
 คณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ นั่นคือนักเรียนมีแนวคิดว่าเป็นลำดับต้องมีพจน์ทั่วไป แม้ว่าจะตอบว่า

โดเมนและเรนจ์ประกอบการตัดสินใจด้วยก็ตาม โดยพิจารณาจากรูปที่ 7 เมื่อผู้วิจัยเติมพจน์ที่ 8 แต่นักเรียนก็ยังคงคิดถึงพจน์ทั่วไปของรูปที่ 7 จากคำตอบที่ว่า “เหมือนสมการที่เป็นลบยกกำลังเลขี่” และก็ยังยืนยันจากรูปที่ 10 ตอนที่ 2 ว่าต้องมีพจน์ทั่วไป

1.3 ตัวอย่างของการสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้

ครู : ครูสงสัยว่าตอนที่ 1 ข้อ (a)  $x \rightarrow \sqrt{2}$ ,  $x \in \mathbb{N}$  นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับเพราะมี  $\sqrt{2}$  อธิบายคำตอบด้วยคะ

นักเรียน : ก็ตอนนั้นผมคิดว่าลำดับคือมันน่าจะนับได้ เป็น 1, 2, 3 แต่ถ้ามันเป็น  $\sqrt{2}$  จะเป็น 1.414 ประมาณนี้ครับ ก็เลยคิดว่าถ้ามันเป็นลำดับมันต้องเป็น 1, 2, 3, 4 นับได้ครับ

ครู : ในข้อ (a), (b)  $a_n = \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  และ (c)  $x_n = \frac{1}{n}$  นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับทุกข้อ เพราะว่ามันนับไม่ได้ใช่หรือไม่คะ

นักเรียน : ครับ ในตอนนั้นผมคิดแบบนั้น

ครู : ในข้อ (d)  $-4, -2, 0, 2, 4, 6$

ข้อ (e)  $-1, -3, -5, -5, -5, \dots$

และข้อ (f)  $2, 7, 0, 4, 1, 2$

สามข้อนี้นักเรียนคิดอย่างไรคะ

นักเรียน : ก็เข้าใจว่ามันเป็นนับได้อย่างนี้ครับ แบบมันเป็น 2, 4, 6 มันเป็นบวกครับครู ผมคิดแบบนั้น

ครู : ข้อ (e) นักเรียนตัดสินใจอย่างไรคะว่าไม่เป็นลำดับ

นักเรียน : ก็มันเป็นลบครับ คิดว่ามันนับไม่ได้ ผมก็เลยตัดสินใจว่าไม่เป็นลำดับครับ

ครู : ในทำนองเดียวกันข้อ (g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$  นักเรียนก็คิดว่าไม่เป็นลำดับเช่นกัน

นักเรียน : ครับ

ครู : เพราะมันไม่ใช่จำนวนนับใช่ไหมคะ

นักเรียน : ใช่ครับ เพราะมันไม่ใช่จำนวนเต็มครับ ไม่ใช่ 1, 2

ครู : แต่ในข้อ (h)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  นักเรียนก็คงยังตอบว่าไม่เป็นลำดับเหมือนกันในกลุ่มที่เป็นเซต ข้อ (h) - (o)

นักเรียน : ... คือมันอาจติดอันนี้ครับครู { } มีปีกกาครับ

ครู : แต่บางข้อนักเรียนก็ตอบว่าเป็นลำดับ บางข้อนักเรียนก็ตอบว่าไม่เป็นลำดับ นักเรียนพิจารณาจากอะไรคะ

นักเรียน : อ้อ...

ครู : อย่างเช่น ข้อ (i)  $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots\}$  นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ เพราะว่าเป็นจำนวนเต็ม นักเรียนดูตัวหน้าหรือตัวหลัง หรือดูทั้งคู่

นักเรียน : ผมดูทั้งคู่เลยเลยครับ ... (เปลี่ยนใจ) ดูข้างหน้าครับ

ครู : ข้อ (k)  $\{(1, \frac{1}{5}), (2, 3), (3, \pi), \dots\}$  นักเรียนคิดอย่างไรคะ

นักเรียน : ผมคิดว่าไม่เป็นจำนวนเต็ม ( $\pi$ ) ก็เลยคิดว่าไม่ใช่

ครู : ในทำนองเดียวกันข้อ (n)  $\{(\frac{1}{5}, 1), (\frac{1}{3}, 2), (\frac{1}{2}, 3), \dots\}$  ข้างหน้าก็เป็นเศษส่วนใช่หรือไม่คะ

นักเรียน : ใช่ครับ มันไม่เป็นลำดับครับ เพราะมัน ไม่ใช่จำนวนเต็มครับ

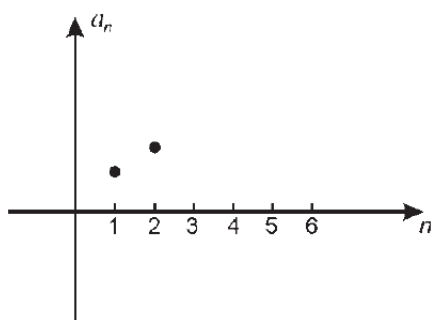
ครู : แต่ข้อ (p)  $\{(1, \Delta), (2, \mathcal{E}), (3, \mathcal{U}), (4, \mathcal{O})\}$  นักเรียนบอกว่าไม่เป็นลำดับ เพราะไม่เป็นตัวเลข

นักเรียน : ก็มันคิดสัญลักษณ์ไงครับครู ตอนนั้นผมคิดว่าไม่น่าจะเป็นได้

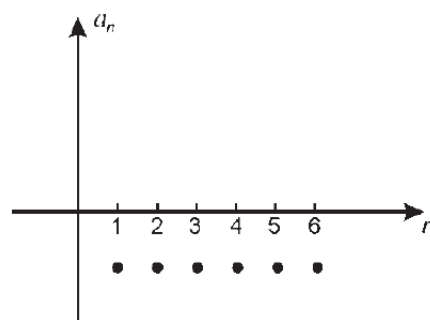
ครู : ในข้อ (q)  $a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$  นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ เพราะมันเป็นจำนวนมากเกินไป หมายความว่าอย่างไรคะ

นักเรียน : ... คิดว่า ถ้ามันจะเป็นจำนวนนับได้ เราก็น่าจะนับได้ มันต้องไม่มากเกินไป

ครู : แสดงว่ามันเป็นจำนวนอนันต์ไม่ได้ใช่ไหมคะตอนที่ 2 รูปที่ 1 และ รูปที่ 2  
นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ



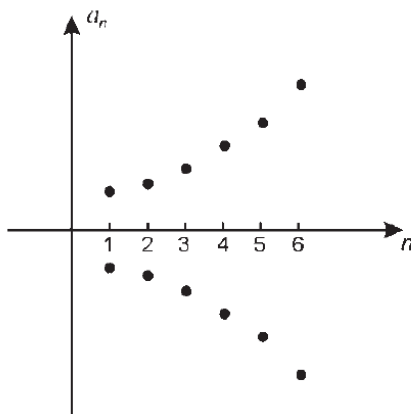
รูปที่ 1



รูปที่ 2

นักเรียน : ก็แบบจุดมันไม่ได้ทับกัน หรือยังงั้นครู น่าจะจุดไม่ได้ทับกัน มันมีสองจุด อันนี้ก็อันนี้ มันน่าจะเป็นลำดับ

ครู : แต่ในรูปที่ 4 นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับเช่นกัน



รูปที่ 4

นักเรียน : ตอนคิดว่า เส้นนี้อยู่ด้านบน เส้นนี้อยู่ด้านล่าง

ครู : อ้อ มันไม่ทับกัน

นักเรียน : ใช่ครับ

ครู : อ้อ อันนี้ใช้เกณฑ์เดียวกันหมดเลยใช่ไหมคะ

นักเรียน : ครับ

ครู : คือ ดูว่ามันเป็นคู่อันดับ (1, จุดแรก), (2, จุดที่สอง), ... และจุดมันไม่ทับกัน

นักเรียน : ใช่ครับ

ครู : แต่รูปที่ 9 นักเรียนตอบว่าไม่เป็นลำดับ นักเรียนใช้เกณฑ์เดียวกันไหมคะ

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9

นักเรียน : อันนี้เพราะมันเป็นเศษส่วนไม่เป็นจำนวนนับ

ครู : แสดงว่านักเรียนดูตัวหลัง ดูเรนจ์ ใช่ไหมคะ

นักเรียน : ใช่ครับ ดูตัวที่เป็นจำนวนนับ มันเป็นจำนวนนับได้ มันไม่เป็นเศษส่วน

- ครู : สรุปว่าลำดับในความคิดของนักเรียนคืออะไรคะ
- นักเรียน : ลำดับก็คือจำนวนนับที่นับได้ เป็นจำนวนเต็มบวก ไม่เป็นเศษส่วน เป็นจุดไม่ทับกัน
- ครู : แสดงว่าข้อแรก ลำดับต้องเป็นจำนวนนับ และข้อสองคือ ...
- นักเรียน : ถ้าเป็นจุด จุดต้องไม่ซ้ำกันครับ
- ครู : ถ้ามันอยู่ในรูปคู่อันดับก็ถือว่าเป็นลำดับ
- นักเรียน : ครับ
- ครู : สรุปให้ครูฟังหน่อยคะ ว่าลำดับในความคิดของนักเรียนคืออะไร
- นักเรียน : ลำดับคือ จำนวนนับที่นับได้หรือจำนวนเต็มบวก และไม่เป็นเศษส่วน  
แล้วเวลาวาดกราฟมาจุดก็ต้องไม่ทับกัน

จากบทสนทนาจะเห็นว่านักเรียนมีแนวความคิดของลำดับ เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม หรือจำนวนนับเท่านั้น นักเรียนไม่ยอมรับเศษส่วนจากรูปที่ 9 ตอนที่ 2 เนื่องจากพิจารณาเฉพาะเรนจ์เท่านั้น และก็ไม่ยอมรับว่าเซตเป็นลำดับ ยังคงติดกับความคิดที่ว่าลำดับต้องนับได้ จากแนวการตอบข้อ (q) ตอนที่ 1 ว่าลำดับต้องนับได้ แนวทางการเขียนเหตุผลด้วยการตัดสินจากจำนวนเต็มหรือจำนวนนับนี้ยังเป็นเหตุผลหลักที่นักเรียนกลุ่มนี้ใช้ในการตัดสินลำดับ

## บทที่ 5

### สรุปผลและอภิปรายผล

การดำเนินการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ห่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย จังหวัดน่าน ผู้เข้าร่วมการวิจัยครั้งนี้คือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์- คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ห่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 โรงเรียนมัธยมศึกษาในอำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน ทั้งหมด 4 โรงเรียน ได้แก่ โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม โรงเรียนหนองบัวพิทยาคม โรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร และโรงเรียนสารธรรมวิทยาคาร และเป็นนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 345 คน โดยมีนักเรียนประสงค์เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 335 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ 1) แบบทดสอบอัตนัยเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ มีทั้งหมด 2 ตอน จำนวน 28 ข้อ โดยการสร้างและพัฒนาขึ้นของมอลโกชาติต้า ฟรีเซนนิโอสโล ผู้วิจัยนำมาแปลเป็นภาษาไทยและไม่มีการแก้ไขแบบทดสอบ 2) แบบสัมภาษณ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งที่ผ่านผู้เชี่ยวชาญเป็นที่เรียบร้อยแล้ว โดยผู้วิจัยเป็นผู้สัมภาษณ์ด้วยตนเอง และมีการบันทึกการสัมภาษณ์

### สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1. การวิเคราะห์ห่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ ของนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ 5 และ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน จำนวน 335 คน โดยสามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับได้จำนวน 307 คน และไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 28 คน ซึ่งนักเรียนที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้แสดงสามารถยกออกเป็นสองกลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 ระบุว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน และกลุ่มที่ 2 มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ แสดงผลการวิเคราะห์ดังตารางที่ 5 – 1

ตารางที่ 5 – 1 ตารางแสดงจำนวนนักเรียนที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้จากเกณฑ์  
ของมอลโกชาติ้า ฟรีเซนนิโอสโล

ประเภทของมโนทัศน์	จำนวน	ร้อยละ
<b>รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน แยกได้ 4 ประเภทได้แก่</b>	<b>(61)</b>	<b>(19.87)</b>
รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ	2	0.65
รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ	9	2.93
ลำดับต้องเป็นอนันต์	18	5.86
ปราศจากกฎเกณฑ์โคเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ	32	10.42
<b>มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ แยกได้ 7 ประเภทได้แก่</b>	<b>(246)</b>	<b>(80.13)</b>
ความสัมพันธ์ของคำว่า “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”	54	17.59
ลำดับทางเดียว	23	7.49
ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน	64	20.85
พจน์ต้องเป็นสูตร	5	1.63
พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ	3	0.98
พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน แยกได้ 5 ประเภทได้แก่	(30)	(9.77)
อันดับทางคณิตศาสตร์	13	4.23
อันดับทางปรัชญา	7	2.28
อันดับทางจิตวิทยา	2	0.65
อันดับทางความต่อเนื่อง	6	1.95
อันดับในความหมายทางภาษาศาสตร์	2	0.65
ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน	67	21.82
<b>รวม</b>	<b>307</b>	<b>100</b>

จากตารางที่ 5 – 1 จากผลการวิเคราะห์แบบทดสอบผู้วิจัยพบว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของนักเรียนที่ประสงค์เข้าร่วมการวิจัย มีเรียนที่มีมโนทัศน์รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชันเพียงร้อยละ 19.87 ของจำนวนนักเรียนที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ ซึ่งมีความสอดคล้องกับงานวิจัยของมอลโกชาติ้า ฟรีเซนนิโอสโล พบว่ามีนักเรียนอยู่ในกลุ่มรับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชันมีจำนวนน้อย คิดเป็นร้อยละ 9.30 ของจำนวนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด และ พบว่า

กลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับมีมากถึงร้อยละ 80.13 ของจำนวนนักเรียนที่แยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ สอดคล้องกับงานวิจัยเรื่องลำดับและอนุกรมของธารรัตน์ แก้วพะเนาว์ พบว่านักเรียนมีความบกพร่องของเนื้อหาโดยเฉพาะการใช้สูตรหรือนิยาม และยังได้สอดคล้องกับงานวิจัยของคมสันต์ เอ็นคะวัน พบว่านักเรียนนักเรียนขาดความเข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับที่กำหนดให้

2. นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ มีจำนวน 28 คน ของจำนวนผู้เข้าร่วมการวิจัยทั้งหมด สาเหตุที่ผู้วิจัยไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้เพราะเหตุผลในการเขียนตอบแบบทดสอบของนักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถจัดให้เข้าทั้งกลุ่มรับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชันและกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ อีกประการหนึ่งคือผู้วิจัยได้แปลแบบทดสอบเป็นภาษาไทย อาจเป็นไปได้ว่านักเรียนอ่านแบบทดสอบแล้วเกิดความไม่เข้าใจในรูปแบบของข้อคำถาม

## อภิปรายผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้นำผลการวิจัยมาอภิปรายผล ตามลำดับ ดังนี้

จากตัวอย่างทั้งหมดจำนวน 335 คน แบ่งออกเป็นสามกลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่ 1 กลุ่มที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับรับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน จำนวน 61 คน กลุ่มที่ 2 กลุ่มที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเชื่อมโยงกับอันดับมีจำนวน 246 คน และกลุ่มที่สามนักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ มีจำนวน 28 คน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. **กลุ่มที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ “รับรู้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน”** มีจำนวน 61 คน ซึ่งเป็นนักเรียนส่วนน้อยของกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ เหตุผลที่นักเรียนถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มที่ 1 เพราะนักเรียนใช้บทนิยามของลำดับในการเขียนแสดงเหตุผลทั้งตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สามารถบอกได้ว่าความสัมพันธ์ในข้อ (1) ตอนที่ 1 และรูปที่ (7) ตอนที่ 2 ไม่เป็นฟังก์ชัน แสดงให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจเรื่องฟังก์ชันในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนที่จะเรียนเรื่องลำดับต่อในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการสนทนากับนักเรียนกลุ่มนี้ พบว่านักเรียนให้บทนิยามเกี่ยวกับลำดับได้อย่างถูกต้อง เช่น “ลำดับคือโดเมนหนึ่งตัวจับกับเรนจ์หนึ่งตัว แล้วโดเมนต้องเรียงกัน และโดเมนจะเป็นเศษส่วนไม่ได้ โดเมนต้องเป็นจำนวนเต็มบวก”, “ฟังก์ชันมันเป็นลำดับอยู่แล้ว ฟังก์ชันมันเหมือนกับใหญ่กว่าลำดับ” เป็นต้น เมื่อแยกประเภทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับออกเป็นกลุ่มย่อยอีก 4 กลุ่ม พบว่า กลุ่มที่มีจำนวนนักเรียนมากที่สุดคือ “ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ” มีจำนวน 32 คน แสดงว่านักเรียนใช้นิยามของลำดับเพียงแคโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนนับ เช่น ข้อ (m) ตอนที่ 1 และรูปที่ 7 ตอนที่ 2



นักเรียนตอบว่าเป็นลำดับ โดยนักเรียนมองว่าข้อ (m) โดเมน คือ  $\{1, 2, 4, \dots\}$  และรูปที่ 7 โดเมนคือ  $\{1, 3, 5, 7\}$  ซึ่งเป็นสับเซตของจำนวนนับ โดยนักเรียนมองข้ามว่าโดเมนข้อ (m) ยังขาด  $\{3\}$  และโดเมนรูปที่ 7 ยังขาด  $\{2, 4, 6\}$

2. กลุ่มที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ “เชื่อมโยงกับอันดับ” มีจำนวน 246 คน ซึ่งเป็นนักเรียนส่วนใหญ่ของกลุ่มที่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ เหตุผลที่นักเรียนส่วนใหญ่ถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มที่สองนี้เพราะ นักเรียนกลุ่มนี้มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับไปในแนวทาง “ลำดับคือจำนวนที่เรียงกัน” โดยไม่ได้พิจารณาลำดับจากโดเมนของลำดับ เห็นได้ชัดเจนว่านักเรียนไม่สามารถนำนิยามของลำดับมาใช้ได้ จากการสนทนากับนักเรียนกลุ่มนี้พบว่า นักเรียนให้นิยามของลำดับดังตัวอย่างต่อไปนี้ “ลำดับเรียงจากน้อยไปมาก 1, 2, 3, 4, ...”, “ลำดับต้องเรียงลำดับ”, “ลำดับจะต้องเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่านั้น”, “จำนวนสองจำนวน โยงกันได้ จะต้องเพิ่มขึ้นหรือลดลง”, “ถ้ามันเพิ่มขึ้นหรือลดลงก็เป็นลำดับ เท่ากันหรือเรียงกันไปเลยก็ได้”, “ถ้าเพิ่มขึ้นก็เพิ่มขึ้นในจำนวนที่เท่า ๆ กัน ถ้าลดลงก็ลดลงในจำนวนที่เท่า ๆ กัน” เป็นต้น ผู้วิจัยยังสนใจว่านักเรียนส่วนใหญ่ตอบข้อ (m), (n) และ (l) ในตอนที่ 1 และรูปที่ 4, 7 และ 8 ในตอนที่ 2 ว่าเป็นลำดับ แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่านักเรียนยังขาดความเข้าใจเรื่องฟังก์ชัน การที่นักเรียนมีความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับไปในทาง “การเรียงกันของจำนวน” มีอีกเหตุผลอีกประการหนึ่งที่มีความสำคัญไม่แพ้กันคือ เหตุผลจากครูผู้สอนเองที่ยังขาดการให้ความสำคัญของการสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ และสังเกตได้จากการสอบที่มีเรื่องลำดับและอนุกรม โดยอ้างอิงกับแบบทดสอบ O-NET, วิชาสามัญ และ PAT1 ส่วนใหญ่เน้นเฉพาะการคำนวณหาพจน์ทั่วไปของลำดับ, การหาพจน์ถัดไปของลำดับ และ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม ทำให้ครูผู้สอนเน้นเนื้อหาของลำดับและอนุกรมเฉพาะส่วนการคำนวณ ไม่เน้นการให้เหตุผลที่ใช้นิยามลำดับ เหตุผลของการที่นักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในกลุ่มที่มีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับมีความสับสนของการแยกความสัมพันธ์ว่าเป็นลำดับหรือไม่ อาจมีส่วนมาจากตัวเนื้อหาในแบบเรียน เรื่องลำดับเองที่เริ่มบทเรียนด้วยความหมายของลำดับ แต่ไม่ได้เน้นถึงความสำคัญของนิยามให้มากพอ มีการเริ่มต้นบทเรียนด้วยการยกตัวอย่างลำดับด้วยรูปจุด และตารางของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน แต่ยังขาดการยกตัวอย่างลำดับด้วยกราฟ และขาดตัวอย่างที่ให้นักเรียนแยกลำดับกับความสัมพันธ์

จากการให้นิยามของลำดับว่า “ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกหรือเป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวกในรูป  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  เรียกว่า ลำดับ” อาจทำให้นักเรียนเกิดความสับสนว่าถ้าในกรณีที่โดเมนเป็นเซตอันดับ  $\{1, 2, 3, \dots\}$  เป็นลำดับได้หรือไม่ กรณีที่นักเรียนสับสนว่า “ลำดับต้องเป็นสูตร” อาจเกิดจากการยกตัวอย่างในหนังสือเรียน คือ  $1, 2, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$  ทำให้นักเรียนเข้าใจได้ว่าลำดับต้องสามารถหาพจน์ทั่วไปได้ทุกลำดับ ซึ่งนักเรียนอาจได้รับ

มโนทัศน์มาจากแนวคิด “ลำดับคือจำนวนที่เรียงลำดับภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง” และการที่นักเรียนไม่เข้าใจมโนทัศน์ของลำดับอาจมีอีกหนึ่งสาเหตุคือ นักเรียนไม่เข้าใจเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สังเกตได้จากคำตอบแบบทดสอบในตอนต้นที่ 1 จะพบการเขียนตอบสถานการณ์ในข้อ (1) และจากรูปที่ 4 ตอนที่ 2 โดยไม่ได้คำนึงว่าความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชันจึงไม่เป็นลำดับ จะเห็นว่าสถานการณ์ที่เป็นลำดับตอนที่ 1 ได้แก่ (a), (b), (d) – (k), (o) – (r) ยกเว้นสถานการณ์ 4 ข้อที่ไม่เป็นลำดับ ได้แก่ ข้อ (c) เพราะโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง ข้อ (l) เพราะไม่เป็นฟังก์ชันดังนั้นจึงไม่เป็นลำดับ ข้อ (m) เพราะโดเมนคือ  $\{1, 2, 4, \dots\}$  ขาด 3 จึงไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และข้อ (n) เพราะโดเมนไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก สถานการณ์ตอนที่ 2 รูปที่เป็นลำดับ ได้แก่ 1, 2, 3, 5, 6, 9 และ 10 สถานการณ์ที่ไม่เป็นลำดับ ได้แก่ รูปที่ 4 เพราะไม่เป็นฟังก์ชันจึงไม่เป็นลำดับ ส่วนสถานการณ์ในตอนต้นที่ 2 ที่ไม่เป็นลำดับได้แก่รูปที่ 7 เพราะ โดเมนคือ  $\{1, 3, 5, 7\}$  ขาด พจน์ที่ 2, 4 และ 6 ดังนั้นจึงไม่เป็นลำดับ และรูปที่ 8 เพราะ โดเมนคือ  $\{1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 6\}$  ไม่เป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวก

สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในแบบทดสอบ แสดงให้เห็นว่า ถ้านักเรียนใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในการแยกว่าสถานการณ์ใดเป็นลำดับวิธีที่ง่ายที่สุดคือ การพิจารณาโดเมนของลำดับ จากการวิเคราะห์ยังพบว่า นักเรียนบางส่วนใช้ลิมิตของลำดับซึ่งเป็นเพียงสมบัติบางประการของลำดับมาใช้ตัดสินสถานการณ์ที่กำหนดให้ว่าเป็นลำดับหรือไม่ อาจเป็นเพราะนักเรียนเกิดความสับสนกับกราฟของลำดับเรื่องลิมิตของลำดับที่มีการใช้กราฟในการแสดงว่าลำดับมีลิมิตหรือไม่ พบได้บ่อยครั้งที่นักเรียนพยายามลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดของกราฟในตอนต้นที่ 2 อีกกลุ่มที่น่าสนใจคือ กลุ่ม “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน” กลุ่มนี้เป็นกลุ่มที่มีจำนวนนักเรียนมากที่สุดอาจเป็นเพราะว่านักเรียนมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับว่า “ลำดับต้องเป็นอันดับที่เรียงกันไปให้เป็นระเบียบตามตำแหน่งและต่อเนื่องกัน” ข้อสังเกตที่พบส่วนใหญ่จะเกิดจากตัวอย่างลำดับในหนังสือเรียนที่มีการเรียงเพิ่ม หรือเรียงลดของลำดับ แล้วให้หาพจน์ถัดไป หรือพจน์ที่ต้องการ รองลงมาคือนักเรียนกลุ่มที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน” นักเรียนกลุ่มนี้จะใช้ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตในการตัดสินว่าสถานการณ์ที่ให้เป็นลำดับหรือไม่ สังเกตได้จากคำตอบจะต้องพยายามหาผลต่างร่วมหรืออัตราส่วนร่วมให้ได้จึงจะเป็นลำดับ กลุ่มที่มีจำนวนนักเรียนมากเป็นอันดับสาม คือ “ความสัมพันธ์ของค่ามากกว่า และ น้อยกว่า” อาจเป็นเพราะนักเรียนใช้ความรู้สึกคุ้นเคยกับการเปรียบเทียบค่าของพจน์ ( $a_n$ ) ต้องเรียงเป็นค่าที่ต่อเนื่อง มีแนวคิดเกี่ยวกับลำดับว่า ลำดับต้องระบุได้ด้วยการเรียงกันของจำนวนจำกัดหรือจำนวนอนันต์

### 3. นักเรียนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ จำนวน 28 คน

ในจำนวนนี้ จำนวน 27 คน เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และอีก 1 คนเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นักเรียนกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลในการตัดสินลำดับที่หลากหลาย โดยมีข้อสังเกตว่าส่วนใหญ่จะใช้เหตุผลของจำนวนนับ และไม่สามารถใช้นิยามของลำดับในการตัดสินว่าสถานการณ์ที่กำหนดให้เป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับได้ และจากสนทนากับนักเรียนกลุ่มนี้ นักเรียนอธิบายว่า “ลำดับจะเป็นเลขไม่ซ้ำกัน และมีตัวแปรไม่มาก เช่น  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  ตัวแปรอื่นไม่เป็นลำดับมีแต่ตัวเลข”, “เหมือนเลขที่ไม่ซ้ำกันหรือเรียงกัน”, “มีแบบไล่ขึ้นไล่ลง”, “จำนวนหรือตัวเลข จำนวนเต็มที่เรียงกันแบบสมมาตร”, “ลำดับมันคล้าย ๆ จำนวนนับ นับเริ่มตั้งแต่จำนวนที่น้อยกว่าไปเรื่อย ๆ จนถึงจำนวนที่มากขึ้น”, “ให้จุดทุกจุดเรียงตรงกันเสมอ ถ้าจุดกระจายกันอยู่มันก็ไม่ใช่ลำดับ”, “จำนวนนับที่นับได้หรือจำนวนเต็มบวก และไม่เป็นเศษส่วน แล้วเวลาวาดกราฟมาจุดก็ต้องไม่ทับกัน” เป็นต้น จะเห็นว่าจากบทสนทนานักเรียนให้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเกี่ยวข้องกับจำนวน อาจเป็นเพราะนักเรียนไม่รู้นิยามของลำดับจึงไม่สามารถนำไปใช้ได้ นักเรียนกลุ่มนี้ยังไม่สามารถแยกเขตจำกัดกับเซตอนันต์ได้ และไม่สามารถแยกจำนวนตรรกยะกับจำนวนอตรรกยะได้ บางคนตอบว่าไม่เป็นลำดับเพราะให้เหตุผลว่าข้อความข้างต้นไม่ถูกต้อง หรือคิดว่าไม่เป็นลำดับซึ่งเป็นการตอบที่ใช้ความรู้สึกในการตัดสินใจ แนวทางการเขียนของนักเรียนกลุ่มนี้มีดังต่อไปนี้ ตอนที่ 1 ในข้อ (e) ส่วนใหญ่ตอบว่าไม่เป็นลำดับ เพราะไม่เรียงกันอย่างมีแบบแผน บางคนจะตอบว่า “มีเลขซ้ำ”, “เรียงไม่เท่ากัน”, “เป็นจำนวนเต็มลบ” แต่มีบางคนให้เหตุผลในการยอมรับว่าเป็นลำดับ เพราะว่า “เป็นจำนวนเต็ม”, “เป็นจำนวนนับ” (โดยเฉพาะค่าของเรนจ์) , “เป็นจำนวนจริง”, “เป็นจำนวนตรรกยะ” จากข้อ (h) – (o) ตอนที่ 1 ตอบว่าเป็นลำดับโดยให้เหตุผลว่า “เป็นเซตคำตอบ” หรือบางคนให้เหตุผลว่า “เป็นสับเซต”, “เป็นคู่อันดับ” บางคนใช้เหตุผลของการเป็นเศษส่วนของโดเมนและเรนจ์มาเป็นข้อตัดสินว่าไม่เป็นลำดับ ในข้อ (p) ตอนที่ 1 ตอบว่าไม่เป็นลำดับ เพราะ “ไม่ใช่สัญลักษณ์”, “ผลไม้มันไม่สามารถบอกตัวเลขได้”, “ไม่อยู่ในรูปจำนวน” บางคนที่ยอมรับว่าข้อ (p) ตอนที่ 1 ตอบว่าเป็นลำดับ เพราะ “นับได้”, “มีเลขไม่ซ้ำกัน”, “เป็นจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนตรรกยะ” เป็นต้น

ในรูปที่ 4 ตอนที่ 2 มีนักเรียนจำนวน 14 คน ยอมรับว่าเป็นลำดับให้เหตุผลดังนี้ เป็นคู่อันดับ, กราฟเป็นตามลำดับ, เป็นเซตคำตอบ, นับได้, เขียนรูปเป็นพาลาโบล่า, อยู่บนจุด  $n$  และเป็นจำนวนนับ, จำนวนเต็ม, เป็นจุดกลับหรือภาพเหมือนที่เป็นจำนวนจริง, หาค่าได้ และอีก 14 คน ตอบว่ารูปที่ 4 ไม่เป็นลำดับ โดยใช้เหตุผลดังนี้ คิดว่าเป็น เรียงขึ้นลง มีเลขซ้ำกัน เป็นเศษส่วน ติดลบ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ไม่ใช่จำนวนนับ เป็นตรรกยะ เป็นพาลาโบล่า

ส่วนใหญ่จะตอบว่ารูปที่ 7 หรือรูปที่ 8 เป็นลำดับ ให้เหตุผลว่า เป็นคู่อันดับ, เป็นจำนวนเต็ม, เป็นรูปพหุคูณ, เรียงตามลำดับ และมีนักเรียน 7 คน ที่ตอบว่ารูปที่ 7 และรูปที่ 8 ไม่เป็นลำดับ เพราะว่าการกราฟไม่เป็นตามลำดับ, ค่าไม่เท่ากัน, คิดว่านะ, เป็นจำนวนนับ, ไม่เป็นจำนวนเต็ม ไม่เป็นจำนวนนับ

### ข้อเสนอแนะ

#### 1. ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

การวิจัยครั้งนี้ข้อมูลที่ได้แสดงให้เห็นถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ในอำเภอท่าวังพวา จังหวัดน่าน สิ่งที่ค้นพบจากการวิจัยคือ ส่วนใหญ่นักเรียนมีมโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ ดังนั้นครูผู้สอนควรมีการยกตัวอย่างลำดับที่แตกต่างจากแบบเรียนให้หลากหลาย เช่นลำดับที่ไม่ใช่จำนวน, ลำดับที่อยู่ในรูปกราฟ, ตาราง, แผนภาพ โดยครูควรใช้แนวทางการจัดกิจกรรมเรียนที่เน้นให้นักเรียนเกิดกระบวนการสังเกตและสรุปบทนิยามลำดับ อาจใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย หรือการใช้แบบฝึกทักษะที่เน้นการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับกับฟังก์ชัน เพื่อนำไปสู่การสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลำดับที่ถูกต้องให้กับนักเรียนต่อไปได้

#### 2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

การศึกษานี้พบว่ามโนทัศน์ของนักเรียนจำนวน 28 คนที่ไม่สามารถแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับได้ ผู้วิจัยคิดว่าควรมีการพัฒนาเครื่องมือ และเกณฑ์ในการแยกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับให้สอดคล้องมากขึ้น

PK! Wu [Content\_Types].xml (Mo0  
][0 [eçD  
i?N?F.l?5?  
H?U?`8?v?X)??"pJ?f;Hz?r?  
?  
v?f-b?y?-X?\*?J?H?qÃ? ? ? ? ? ? ?  
?!8,?`?gh?`q?D?&?f? ?  
h)?H?S?\`CE???!?#?'??  
?Qj?VP?\_?%??=?=T?e&8}?hc|?  
??j\?B??&??5\#گ?C??3?vz  
QØ?)?>w?l??  
tO??i@ç?H??پ  
R??1??§?r?\_?H<  
?x??%j?Jg!??1??-q??{q?Cmr-?  
?q??P??Y??  
??D/s3?d??h??Wl?0,??  
?nt?94;??M:j??u??PK!??N\_rels/.rels ?  
(??JA??a?}7?  
"?H?w"??w.د??  
?P?^??O,??;?<?aY:'`G?kxm??  
PY?[?g  
Güino?/<??<?1??A\$>"f3??\?XT??I  
S??W??Y

ig@X6\_]7~  
f^-ao.b\*lrj),l0%b  
6iD\_ ,|uZ^tγyž;!Y,  
{C/h>PK!`'  
word/\_rels/document.xml.rels (O  
w\$C O :@l "E U  
گd tg \_ ,/w D? F? 4  
/K DR=db  
Q n Pěb ìk) PT1  
<X". TVJ ) ^o ö  
h&c 06 ?YV ? 6Z 4 ? i ? Y) ? ? ?  
S Fv> ? ? ? ? 2 ? \Ï ? R ? '{ ? ? ? ? G4 ? s ?  
^B ? ; ^ : 0 ? ? Tc) ? ? ? ? 8d ? e ? ? Q~o-  
h ? ? } & ? , ? ? ? ! ? ? ? = ? ? ? ? G ? ; ? ? Ww ?  
N ? DX ? ? ` ] ? ? ? ? ? 'HX ? q ? Mi\* ? ? t  
e ? ? f ? % ? E ? \_ Tj ?  
 ? ? fB ? ? ? & ? U)W ? ? \$. ? Lb  
 ? @ ? sk ? rn5 [ ? ? ? بي ? < 2 & ? ? J ? i ? Q ? w  
 ? dQw ? ? ? D ? A ? XO ? U ? ? ? ? } ? ? PK! ? e/s ?  
word/document.xml ? ]o6 ? ? ? ? @ ? j ? X ? l ?  
+ ? ? wg ? v.r ?  
e1 ? H ? ? ? 8W ? l ? l# ? L,y ? ? l0 ? Đf ? ` ? ? ? C ?  
" ? \$O ? ? " ? ? ? ? ) ? ? nz

T j Tu v V/W+ & OL  
MJ b r / \_ D (V  
+ J gR}' o?[ . \* 6  
M,7ks j ~b P K  
 Ry 4 Q -  
N LMO Z P O w dk  
 T b G\} ( (   
w is Ze k G S t Z .  
 p | d B ry {æ  
 l t; &n 6, O s \_ B )  
 ] ' ] 8 = w 3 E % : m w  
 . e 5 # g Z 9 k v r s -  
 Gh i < St ^ [ . &  
 s o V Z 1 } 9 1 Y . Q  
 s s S S g N 9 z z S S ' f . }  
 y ; / + W | W j \_ }  
 9 ( + N L ^ ` '   
 8 T { k ج ز Q W \_ -  
 Z X V m Y > \_ ; ? X 7 Я  
 Oy S " o ; V ,  
 β z F M ث 1 n 4 c 1 n l 7 v v E  
 l 7 ε ] u h C V g g V K ʻ

F] } J i V O Q P m ¥ :  
 t  
 R V L 4 7 W [ - ÿ  
 < k v 8 ; q N  
> < ! g F = / b X Y i C u T h  
( j S r N  
 G k R T ] D ! g ÷ > ) B e j G  
 m 7 v a n ~ n C  
 P d a F + { B  
 ù W = | n \  
 l n . z 1 8 e w 9 Q [ ' H  
 [ m # J F  
 ) v n m l 2 f K g \$ S n O / j ! 4  
 0 5 < / š M < z G [ I Y A b ^ b  
 V R C C O y : a , W 8 C 2 c c \_  
 = Z H Ж \$ i - V B f \$  
 J - J 2 G - y y ~ í П Ъ -  
' ~ o \_ d / ( < k q ! . O  
 0 g " T K 8 )  
 ? , ? 6 T ? w e ? A ? W ?  
 F \$ v = R \ ? s ? k ? \$ ó 6 Z ? B ? { ?  
' ? p A % ? e  
 ? @ " H ? O 9 Q 0 ?



Iپ 4 E \ (FwJ lz; J~"RHg  
 PRsR m ĚJ\*m  
S:u f Ry 7 G v238 > , Zg u  
a\ (O9eWR}X K9 )  
>b p \ \ e ù ) s y cgt2  
 + 5Rv  
Z U GZ 2  
Lv ~\_3 S @: J d k J  
i\_ R fh 5 m N 3ah -  
 A } % B  
 uF T 0 4]w -&\$ < ~ , =D  
 v G (o L |4 ` \*  
 v H \_ ` S ^ f %P , Ç  
 ~4:&Πb @ z s { J a e  
 \$" ` = # \_ RR DD G \_  
 #R Ψ1 9 7O 7 ] buD  
 8 t d r ! ; w  
 w H & I  
bzx AKd Q > | q [س c  
 w6I?3 # ^ # ^ ~iN" 7Fp R  
 f7u P \B VG ,I  
 1 %6 } ` gT; ) z ~h1 g-  
&ăo / j R .

?\I?nl4!<d(q ex3G?\_?  
u#B?j\zG\\$4?b3tV??u?  
@8&??jت?3?6?o?aÈWm%9|  
d'a?Y?Š?O?|`??4?????,c[??  
t?q??5?l#`??=?y?f?lw?N?R?(  
ks?3??|??fFm?aR?;??+??&  
??QS??X?  
W?K??d'Ea?w??QK?qR??`??z9??(=  
??M??b??+??2??Dr?N?:s?  
M?v??C?\$j?&Q?6H?F????  
}&??bA?x??>??Pn\_??\$??  
??2?UKR??)??Û~??3?Y??r??y)??tfW>  
?????  
??CB??!58?Om??za??\_??)??A??  
d?l??U?h!??H?O?}N????O?]ي?  
'x??y??Au  
??EČ?;J??Q??.\x2?qO?  
K??gp4yd?D?!%¥JjB??4?Z??7?0??TFΦ  
Ls}\$ê\_v=BH\$hĥ?F"K?3h?Q?Zv?????"r?  
\_S??c?)??m^g\_?evÛp/<?  
5?~?@?,?M??'@?v?>K?m&  
??L?u[\$~2??T6??\*??m?`?  
3<f\_

◆Zo◆◆n9`|Jc{◆◆Yr◆}!◆◆%◆◆O◆  
◆?◆◆X◆Ykf◆◆J◆L◆ج◆E("\jzeRB◆◆◆B◆e  
◆b◆#◆◆4b◆φ◆◆◆◆CN◆3<◆◆  
b◆/◆◆◆◆a,◆◆◆◆◆4F◆9◆◆◆◆g28◆X◆  
◆6◆◆◆◆sX◆◆D◆y◆◆◆)◆{PIC◆D◆?◆◆◆G  
P3|◆%◆:◆  
q"|◆◆◆◆η◆◆◆a8◆◆◆/◆{◆◆◆◆"◆e◆q◆◆◆g◆◆  
3\_◆K(>◆◆◆◆◆#ə◆◆◆4Z"◆4m◆◆◆[◆5;◆◆◆C  
◆}◆`T◆3I2◆◆◆eb◆^7"◆X◆◆◆v.3◆◆◆CSf  
'◆A7◆◆◆◆◆r:◆◆◆nR̈W◆d@◆I?K◆◆◆`  
G◆M◆sL}f◆◆◆<◆◆◆◆◆V◆§◆◆◆◆◆z◆8M,◆  
đ◆◆◆]}5#uBW'◆◆◆t\◆◆◆H5;\$◆]◆  
◆◆◆<◆◆◆To◆\*◆G}◆y%◆`◆Wdxî-  
y◆H◆◆◆◆(◆◆◆◆)◆!a?◆q◆#◆4◆Oh◆◆◆  
}◆◆◆FH◆◆◆◆q◆mf◆◆◆A◆#=(,9◆◆◆◆◆x◆◆◆◆  
◆◆  
◆w9jg◆O◆;◆◆◆◆:◆◆◆x◆◆◆+◆b  
◆y◆◆◆3◆◆◆◆◆'◆6◆0◆ü2◆◆◆◆^◆"◆S%R1◆◆◆  
◆=8◆R◆j◆◆◆◆>◆◆◆b!&=KQ◆◆◆◆  
◆&◆◆◆GFDq◆◆◆\◆a◆,◆◆◆(\MW◆◆◆Z◆  
◆◆◆◆◆H◆j\_^y†0s(◆◆◆◆#c◆Q◆◆◆◆◆  
2◆o◆◆◆◆◆;f◆@lBoġ7#~56  
#v'+◆◆◆◆◆g◆z◆◆◆◆\$◆◆◆h◆]◆

??@&I2??M?3% ?;:u , ?N?)??@5?8?[S  
` ?u?9. <?q?A)??u?O???' ?  
?c?P??)Aپش/H-?~Y??I??Y?Yپ'??):??  
?;?v?پ<ٱ|?Y\*:??s?8?)e&k  
?"n?~PL?}?p?L?7?/5)?,?Ak?"y  
?(\$}???3??L:~O?Xo\~UK??  
??I?T??0\$|?/m  
gIe?A3??d?[?8\_?X"?r?#-  
?V?IZ??+??+E%()B!1??5Ab[1?  
XE\_iL?6?t?'?g|<?-?=5?  
?†?J?W?Y?z??7)?~?|}Ž??L<??  
T?\?"|??~OV8;N????C?,)  
!??چ?vU?A-UIP??  
}?Cr??G?8{B?/9??.?YT  
Ж?U????ZW??J++?ZCO?S??~  
1)??U?X??t6?be1?&?  
?}(??ML}?r E??0u?  
???"?0??PV???(d??o?<vXf  
D=?b?o<??4??o??ü??r?Qt91E??#?  
?WT-N?X?č??\$??G??)???)?Ê  
g&??  
TG?H?P\$?)?E??Fh????K?ôz?  
?OCSB4F?{0x?"xu?l??W??S??D?

H\*3I?Lp0W`o5  
Z?|?jL?p[=a7\$pIhK?  
43\_65M/u'5]m?(p[\*\$  
Z  
;z&ks?]?0?c?+?M?  
?@TQ?2?\S%Z;  
?f?wI'?r?(?3?  
g?H\$?C?Zb?ytX?/?\_M?  
+?V?I?.?w?~4wvd:?^?B)h'?p?OI?  
?Z?d&#?  
]?].?I?P5gc3?C2Z?Vfd?S?  
<B?B?\_A!H\*X"?  
?#E?y+?>7E?H?%?o?8?<1?  
?]?9?z?  
?%y?"|?-  
?m4?w?oVG?  
?4O?Xh?B?  
e?N`?j?:?m?1?#?JO5vj?  
?d?ma?VT3?I?P?6?@?  
?V\|B?|?~3I`?5?9?8T?n?o  
+`!L?6?6?j?cZ  
7-N}?=00?v/m?mu?;?I?@?%?p  
?L?P\*?4?|\_=?3Iu

+Byh;u/l  
=M}.5e  
Ë0,yimbF'kZpz  
7  
Wl!\*VdJ>  
Ot:i7k,b'6]^  
=A}hml|0fk  
tqL2WHyVR74"II)  
EnTz;0AvF?"B(Pp\*A  
dDđc+/\~MwZ  
4D'Ea[>f:T-  
rSTI?#p84FuR  
m0'r\$:3ə&T\_@p\ (PAa  
PG^#x(kRBpH~WyIk}1KE  
л91>`zSEgOI  
MN<sup>c</sup>  
h@60=Qm7n7Vx(Y&:  
;cEnU2^#2a5~,>{O]س  
3sO~\_ZYt(7J7.(Y  
`+Fz74ū\_&  
f  
rQ?Qh,O?T?^j?Q4~4)V  
\z^!+jld5h'bbJr{v0

gu??#\_W\oT?7??]??j??N??fU?]  
?)?w?xH??S'?N=5+%??6?g  
??'??E/w??~??Z?Vltp+9?q?cb?sNj,?  
?3?\?M??c??y?[?P  
??wT?u4?Z??τ?M??Nc>  
n|w9F??~?Q=h??X2?+?9??<??v??}  
??kNr?&\\_?j?jdf??e?řS?7W?W??P?  
?:??;V?%??q?X[??  
??fb&w?b\7??r??G'?)  
??j2??L??>7?/?  
%?f?Zvə)???@V?5?B?27bl\$G/G?  
[\?,?.?\*Z?6W^<7Q??xV??r?Q??971=?  
?P  
?R>?U??@V??|L,?ǉ?G??K??/\*  
??wSU?O??G?  
??8??\$??℥???:?/?D??  
??t??3??!?!?[?s? ??d?"%?m??  
??p??xig&  
;z₁@??<H#?0Nǧ?@Y?[M?y?&W??L  
?7Q??1?"qNR??]??p?k?'?9H??  
??T\*mM??;?7??  
??@κ?Zo?t C?]PY?34??-?'`cSn?).??  
6?7?f;(??A??S-??~

\$j>P+.bP<(P-<  
%+~n0@y08  
xx.xv(tšW I= >e?<  
<OV5p r=4  
) ^ %b| p ` X H NDQ  
?l w &1\$5 Yw M G S (h  
t6w sD \ B|ā - Z ^9 #U æ  
6 B 'N > kA7 \ qd R , Ozo  
55 | -  
S/^ zZi 5 ^ A@KMhh"u  
I ~ ` J LR[ g ] N  
XQ 1'Oue 8ZA y'OD [ E?,  
DŽ }y% W M L z V @  
t H0 yS k r K #zg6 c  
S6d ! E{ } p F  
Ob s # 6' c # z\*I  
\$ o Pz Pz ] | > +UWK  
μ [ Zq ü PX. D ] " sF  
: < x | + ~ % ? J x 3 ! [ U  
 = z & 2 ah U ; j X G / Y \* : p b  
94 ECg z - { (= 6i G, g  
v ICΣ 1j 'n W | ; μ E 5 @ 8 ( <  
. Y < f | Ú 7 1 5 X



|?}?#?)Sz?B?9]??q?w  
?K?yd?H/?@/a??.??.??.(?>5?f?z?  
6?=?h?{?-??.??.??.3J??.M??.??.??.'\_سH??.  
?m">?h??.??.??.??.??.??.??.}'  
O<??.??.??.??.p&S??.??.0??.??.A??.??.D??.??.??.X?  
??.??.|w0??.j??.k??.??.87??.P??.K  
??.??.R??.7??.??.[??.VZ??.R??.Y??.??.V\*Y  
X??.i'nm??.??.??./??.??.??.X??.??.m??.+??.??.??.??.}???.??.(2?  
??.iV??..]???.??.??.}  
Y??.#~I??.t??.a>a]??.Z??.Sn??.`??.db??.2??.??./?  
%ey(4F??.??.??.@??.=??.5t??.??.??.2??.'?'?"qBm&?  
??.)???.??.x??.??.k??.??.??.~??.B??.??.??.??.O??.\_??.??.??.??.??.\_??.e??.??.  
??.u??.??.O??.??.??.??.YC??.??.9??.2??.??.??.??.  
z??.n??.??.@??.{??.??.??.??.??.??.??.??.2] z??.??.??.??.??.M??.??.??.??.{ ?  
??.??.O??.V?  
??.w??.6??.@/??.' {??.??.??.>K??.#??.??.,  
??.??.I??.gt??.??.??.|??.??.??.??.??.V??.a@HF,/ ??.8H??.! ??.Tس??.8p  
??.??.??.??.s??.! ??.??.a>??.??.! ??.! ??.1 ??.Y?  
b??.??.??.??.??.??.??.??.??.??.??.W??.??.Z@  
9??.??.??.??.pSidfS(??.??.??.??.??.??.kn-??.>tk  
+(ej??.??.bc??.??.d??.c~??.l??.XcT  
??.??.g??.??.9??.X^h??.??.??.??.b??.N??.??.??.~/!K  
??.??.??.??.s??.)???.??.??.xT6??.%(~??.??.??.&??." ??.q??.8yzvfFO-

o-} < Ng7 !hf7 M "z kI  
3S k D% ' Fv A cΓN'H I  
l 3 ` b B2 1] S  
ÖFY M O ` N sy j M TI O  
F IA O m4 8] ] p q 72f2  
o O , ; } N ~ | ů |  
[ 1 j % vKjz@ \$  
!x ! Hbg cr;;  
[ 4X e L5y 9 4K7 -  
U a Ò-6 ' q Op  
# v ; . ( O 9 Āc X & < , W  
2q ` 4 & ` l > 1 F > 84q  
L ت H N & 7 \_ G8 > j o  
C 9 4  
x UT@ n [ / LPw 3 (y 9 90  
> ` \_ a \$ ) H  
. na9 } 6 s : Zo  
Gh \$ i i7g i H5  
jUT ~ { L q s l  
^ q yR < G | TI | Б Yg  
l { b a f ; ) Q b  
\$ L , O D = 9 ) & L . E > \_  
e y4 = dhZ ri ` h r

?\;G?Q;zbC=J?n?  
+]k?vSN?C?  
d=y|\_%?m?  
?u?t?I?qO?\*?Q?p ?C  
1\5h?L=?Ki~?O=-U?E?  
0?V\_?  
|?`I?=b#?x(?B5?#aL?`?aI?~#IP  
\_?)&?E?L?\$?oW+?9?Z?[M?  
?{?u©?(?hTi.?r3\  
?k?+?B?He ?4?9\_j?T?JLHI  
??#?&?xĚrH?9?0R?  
??UC?~?3?\_?#&?fOZ??FD?Q/  
?7?k?4 ??"?"?9?;9?-?Ö9?  
?\E?+Ş?;(,+ex?dzg?\_W  
1??  
???"C?H?c+?qxt?^V?/  
??]o?H?WFy@?Hm7?K?ف{?  
??\$?i?}Z??VÄ?  
??N=?Kf?t?S?M??7c?0k?j\_w  
?)??#?>?ف#?\_x  
?R?4?F?V??pX?W?  
>tlu??J/?i`?EH??g3kc3S?  
zIj?j??O?W\_

{u??/?/W?/?/?{?Y??=?C?7??P?q  
u2l6?{??c?\?G`  
??b??j??o??\_?n?Z??  
\_??-??u?  
??\??i{5?e^Z??^  
?\?I?+~?Mf?Z?]~?Z??←??[?  
?w\$0?[??W??  
?3??CH`??ku??.C?\$J?/?/  
o??Q?#??>?0W7??;{??  
?~、??J?  
?mlR?{??i@?cC?v?%(?  
Y??!0?/8??\<??1??  
??f??6E??)??A??yf?(?!5NZ??u??  
??O(??iB??8\??Rv?g?  
%fjI?iy?j??#??j??`j??/+  
?hD?5??d?A;?N??{A?7??Zs??  
?K?2mt?-}a-\t??u?б?ub?'9?o??>r  
??  
?+??F??  
`??g{??T?j???Ä??X??ñ?F  
h\$?.!??m??F?т?}CM??m??\_  
??z?wD??c?1h?6?=\$r!  
?,ń^??V?|??7?H?9???,G

?:jd1zMu~=Yi%\$z  
G9u\EMAN\x,':  
?H  
möl#l pfb` pR  
"vj?lPY;u\$PVD  
Ui.-z^F=i  
W\{~qǎx[vFW#y  
6\hDd)  
F1\$~}n2D\$|E  
\_~rSoF\  
gt)u dpV&\$rk}jj1 '  
hŁLKR^#  
XS Lu kS Bg VK'g +  
&K^#NYA'y'Kǔ  
kjIE,&0"X-  
[RAj+|h8Λb  
'Vb;  
S Ce TJ P M =ran  
r]R  
S'rCIV%D32SHn  
2q  
17ب!D+0t2hM#rVEmz#  
Zm+X.S9rlqNt/.}H

??L?EuY??/R?Jq?پ?z?..?PI??  
j)?[m<V?C?H????R?y?S????y~5!>ya  
?A(??Eo??s??r??A?"?vj?.:??zG  
??f??s??9????&nv7??a??k?\$??  
?Om?F?????l?c?<\$S??n))?'  
??xHi.?\$Z?SVH??nw??^<c  
??fLjž?ZF?  
?ğ7??5?xtN??Z??b??k?.?a??k?U  
??CXb?nr?"?{??C{?b#X??w?wrh??7  
Z6??Q?;85????6Q@E?",?}:?V(r#?|Y/  
#??I?SM??6\$?.???'-?s\_|?h?(?mv?#a  
?Y2?)W?????  
?:cSn??Mp???,&?@j}?  
?}F?y{??c??%?Q.??\*  
B?:Γ@?,[J?I?\_????qB?SP?sh??  
a}Eb??xD??'xy????]B?a1??TWt  
J?D??bYD3E?dz?0@Qk??\$?y?  
\$?18?T?B??(u????k\$Pt@uqI?Wb  
Ñ??L?Yg?}??Dx??u?(?p?  
??WL?"|??E??>?  
?!?6]o,?%?nDm???\??H?[m??  
o^??d?k?D??<tE2"??w\*  
^?s8??hs&?\*!'@u;G?oh-??[?OvR????

zpn<sup>4</sup>2b

'z|;

>:rIv!,z±oEn

e/,l\oqPuP+|>=h:-

UyjaCgo]b[|

u1:%1x@

JVM7m" \$x[g

tl/g&Ia78

5XPoB|MZ` s3

bZ} = x6 \$ #

Q` # < k : Б YP j B

\$7 wz y g k@[ '

FgN[S]Hя(nHR\$w x

Z qxi2 \_9 i \$ ?

t d n + a9 zCr < Л

O c { | D

i ( 0 | 3 S&r y شgP c B

/& k YSU R U # 'f 6

z 86l

` T E 4 ' ) p ; \$ 2 77

œ2

+ W

O Y : , EVU - ;

V)"#l?E?x?qakSEi-?  
m{c?Q?<?Lo??N?  
6(w?y??C(?[R8d?%;QE^?I  
6??r?s?sñ?C?.?R??i??gc?/?  
0P?mx/??w?m??IB??'?(  
Z?!?\_??q̄~??R??{9??d??=  
F?\???6?\*?dl8)??GjD???'?:??n??  
??

?(??C?+88K??g?  
?P%???Öw?dF??QkQf?,  
?vz

S??P??BRVG-??p??-?X?ي??'  
D?Q4qb??VP6?κ?d?"?  
??L,?"U?O???"?|?)0?T???'?n3  
?(?|?

?<??q??b~R??Kl-?1?#?b??+?Ns  
wL2??Z??2l??muĩQu,S??{/  
??Y??FE0??8??a?pazh??  
?[d?)dv{?u?J-??H??  
6?GG|?@9D???'??A?xay5Dy  
?U3???

j?O'1??u??7??3?=???ltyx??)??t??  
?o??sfw??Û}?j=??ă?ك?N[??b?



W IX + I s ls Cvz g φ p  
dM'8 LOfج /e 1 &  
PK! v! Fword/endnotes.xml UM 0  
W @ ' 6  
Y E[ m 1 Z l 1 d[ h? {7 e  
TA eB" TB  
f D QU /ä[r a \U  
B( qN qly % K)  
[2 1t` < T U &x6 U{j  
N @s j0 : %50 ^ N< V  
b'Y tF GB w GB W 03g% Nr -r  
e O2 @iI ^ \ , \$ %5(  
' dT l < /b \s 8 1  
I ` Öx i -v & , ` dC = f\_  
Ok jN" □ C[dh H 9  
A 4 t8 q è \$Iç, ^  
5 Z7 / v VS i 8 5  
>o O jZl; ωvH Y } G #  
; rBu 8 Ai2r r C Y Dc `   
PK! ` u  
~ Lword/footnotes.xml T n 0} 0 2o0  
}+ TY Z  
/ P 9 D;n U t +

⬢P̂⬢~⬢⬢}'⬢uT⬢⬢⬢⬢⬢\⬢>Zvy⬢  
8n#⬢P6⬢4+H⬢⬢⬢;⬢Kj⬢R0\*7g  
c⬢\*⬢x)⬢\$M⬢/m⬢qk1⬢O⬢vJ⬢⬢⬢⬢⬢  
sU`⬢\$uvfKj⬢[=CtM⬢x⬢p{⬢N⬢i⬢⬢⬢f#!⬢⬢⬢  
a&\*⬢⬢"⬢⬢Zc⬢3O7⬢⬢⬢⬢⬢>⬢x+J⬢⬢⬢⬢%;⬢  
⬢N⬢⬢I⬢Q⬢Kz⬢6⬢⬢V'pg⬢QA⬢  
⬢⬢⬢{⬢⬢⬢⬢irI,#b⬢⬢  
⬢⬢L\$j⬢y[iN⬢⬢#⬢⬢⬢⬢@⬢G:Z⬢  
⬢N=⬢X~2\_⬢,⬢⬢⬢;⬢f\_0⬢jN"⬢⬢C⬢  
dn⬢⬢⬢H⬢:⬢Q⬢⬢⬢⬢S⬢55d!heAfi⬢⬢  
⬢Q⬢)H⬢⬢o⬢⬢⬢⬢{⬢5⬢h^⬢[7}⬢rf\_⬢{⬢ZM⬢f  
⬢⬢⬢8ظ⬢⬢^W⬢⬢g⬢z⬢⬢u@⬢⬢2⬢r=⬢  
⬢⬢p⬢6⬢⬢?⬢<⬢⬢⬢rB⬢⬢FxAk2⬢⬢⬢⬢6  
!⬢,⬢K⬢⬢⬢v⬢⬢⬢PK!M⬢⬢⬢⬢  
word/header1.xml⬢V[o⬢0}⬢⬢⬢`⬢i⬢  
I⬢B!\*T⬢R⬢⬢⬢o{1⬢⬢⬢Ml⬢6⬢⬢⬢⬢s.@  
⬢z⬢Ti/⬢⬢w⬢⬢⬢pt⬢⬢⬢hA⬢f⬢⬢⬢⬢t1⬢<!⬢q  
⬢NO⬢⬢!<\$⬢⬢T⬢⬢⬢⬢/G⬢⬢⬢  
⬢5⬢~.⬢N⬢⬢⬢⬢⬢⬢⬢Jh⬢f 2GD⬢⬢:{⬢⬢  
;⬢D@⬢⬢!⬢⬢q⬢m⬢I9pEBe⬢⬢P⬢⬢u?⬢  
@⬢İK⬢Y⬢ŝaD⬢⬢+A⬢⬢k⬢⬢⬢P[^⬢⬢--  
OD0⬢(7⬢⬢h  
⬢⬢k7.&⬢⬢⬢KN,⬢⬢⬢^⬢.⬢⬢-⬢⬢.⬢⬢⬢"9⬢b

#ai?el~?Y}/9Se?B?4?F?c?ZIF  
\_?/?4??f?H}??.?>?v??WX?'?m  
??~?V??\$DR???.?Pd???.?;@?"q?  
M?L?ش??=?n??u:IP  
??n?4&iJn6??y6??M?D"B?  
#?[?~?)?:?a??J%??p?  
n87?Ë[??]w?g??p}uB#2O??KaQb??Li-  
??R?]P?\*'?T?:j  
?D?c?cM8A?4??z?'???.?CkTs?"?{  
\$??B???.?p?n??w?zyo~?(BP!E=L?G  
?u7p?Us?J?aB,s??.%4?0\[?>C  
?ق)}0??`<B  
???.F???.?`j?n??.\*?K?3Q?TE?  
H?w?ZU???.?C??D=?Z?  
Dm???.?Y??~??Ff|c?3???.?R?r?\*7ly,  
?od?/?PK!1?&??  
word/theme/theme1.xml?Y?o5  
G?8??M??Z:5i??j??=:?ÿ?|??vy??  
\$\$?@???.?h0i?Z?D\*???.?م?  
&XT59???.?\_?.^?Rg  
sAXTw??K??#??I???.?E}DY???  
??س\D?2?!v`}\$VQ?  
??W??H?g1?`n?x?\$<r???.?>?

??b???"?N?B ;0

?'{??7??b?&/?d?`2~>?k)?

")dGyGq??[V1Mj=D?.?g?]|G?EB?D?-

?vq?&??6???JdAwQ??~/cZnWj62?

@?,??j5[ ?

M?,y??J??'??Y??R?T??9?K32?

?F??b?j??Y??+?^?:??4,e

?A?<?o\_?-Wl??D?3h??v;??A?n?W

?RJ?SDC]?l·Er^??6?m( E?D??x?<?&

{? ??b??1C??R??q' ?v?

a??|??s??ÃLJ?

{x?!d??D??\_??j???

/??\_??>)B?L?y??\_?|??G?}w?

??Q/?wvX?i??n?H~?z?!t'?~K??

??;

I[?&??Q?<?m??P??W??n1F?Z??3sw

??0??Ah??wE?[??f??[bnSI??

KGr]???E?e?-

?q&?@:??@??\$]x?i?h??Q??o?6[

7??EZo?=Y?h??]L-3^FC??]"?e??"?q/?k

??1eN??(Zs??9?\_AP?

سEG??#7?n3@a\??(c??

??f??Q??u?M?-w\_

n i j f | y 3 + ~ ; # : @ X ( V I w  
n ( C \_ Z a \* B # z  
h y n 2 ' ~ u @ h  
C B n Q | > < P U / b  
m v s # G \_ 0 ) N a q ? U &  
s 8 w : i / / e p b & i + < 4  
5 b \* @ r N - ) % E , \$ D A  
a V V B [ Y - S Y X j 0 Y Z ! 2 \\  
( p A R h / D 8 { G e 4 V f  
Q z ` P  
c V S d \_ I g W . x ) t  
Q > 9 i Z u :  
3 B p I n d Y > f -  
U N 2 \ } ( l 2 D ` B C O % ! @ # s X  
d R , @ 0 k R m { 2 y L J )  
J ; A ! A ~ O  
A = ش s t 1 3 J J 4  
\ L t + ] + w z U t L \* 0 } X +  
x p s ^ 2 2 . U ( 8  
A = m r i  
H C | g d 1 b d 2 \$ i B H G T N \ { x  
y j o w B ] W h  
U j d :

Y{0Uz<{iUI  
Z/( )ZSf4^g5!  
Q` #mPlj//1s?pt4=h\_  
&EO6i;?c+N?S;klvV.  
[6csM  
=04H21-ZMGo;?!Bz  
H~Q/]PK!kĪ)aword/settings.xmlWn8}  
`8P?eM[\$A~-6J(\*  
SÇz?G\* [&nIkAB?>/?/2?  
"uI?∪?z??\*b?  
6?uR?W?8ь?7?50BVD?VW?  
],D??3uY9??F?N??X!E+  
J??p`??f&??-?\$??k?  
??h?iy|-?NJOrgd?&9?{?|??B#EA?  
T!??y/?S}??^  
W  
εf[?B?P??|/?  
??ñ?94?y?[BT?s?PY@??Fv?  
??YpJ?%??@?uJz W?d?S??G  
>Gv0@'"I??5??|?+??Bm?K%\$q?8  
?j??R?4?@??kk??Fr??j?ti]?@?  
?k?s?8?!?i~I%%??[???)?D?d  
??v??O?A+?U??bH?"YI?

??~?r?c\_iR??V18??

^s?????'??/

?)QT?2?7L?YsG?C]B??1

?pG??.?^|?f??`?n?tè??;

4q?m'?k?x?:&?b?FN?'?(?:?

?????ت?????w??p??9N??<p?%F

?u}|??<H??7f?wQ?

??o??M?a?O7F;??IQ? \9;?p??

(??FN?s<8?Bس?9Yj?O?x80s\?e? ~DFN

?3?-H??U]o??u??n?ha??

i?P0]??h

??U??X?@\$@p?L?&??G??(4Vn

??3??M?\$??qCd??o?,G62vb?ÕdF?1

N?9غô<S?\$?!?Ac??\*O?ms?o

;?????#??d?a??E5<?

R?%#?;=?SX?{??z?)?{ň?O??r`?

?<?adb?\_??m2z?a??w??F\*>??

E??Rt?`?,I3<N?9?y#??-&z??w?V

??w??.?=J

??s??#K??z?e?

?=+a?P??{?O?;??@?`??E?

??xRH?(??o?Gg?9=v??oH??q?

?%H??N4w??<<?y3h?L?

◆X◆?◆?◆?◆LO◆R◆  
◆sq◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆^◆?◆?◆\$◆?'◆P(◆?◆?◆U◆?◆?◆D◆  
◆?◆?◆]◆<◆?◆?◆&aZ2?b  
++◆?◆?◆i◆?◆?◆Q◆?◆?◆?◆?◆Jx◆?◆F◆?◆?◆?◆uQE@◆?◆?◆2T  
&◆?◆k\_◆?◆qI9◆?◆T◆?◆y4◆?◆?◆U;◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆y◆?◆7|◆  
◆?◆?◆PK!◆?◆ad°◆?◆Hword/stylesWithEffects.xml◆?◆\[S◆?◆?◆  
~OU◆?◆?◆?◆?◆o`v◆?◆xS,◆?◆@e◆?◆!k◆?◆?◆,◆?◆c◆?◆B◆?◆(◆?◆?◆%  
◆?◆?◆?◆?◆HcY◆?◆X◆?◆H[◆?◆T◆?◆?◆?◆2◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆L◆?◆?◆?◆?◆  
◆?◆?◆yI◆?◆?◆h>◆  
yr◆?◆GO◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆fn◆?◆r  
◆?◆?◆?◆U◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆Ođ4{  
D(◆?◆?◆?◆?◆|◆?◆jn◆?◆b8L◆?◆?◆?◆?◆?◆]◆?◆{◆?◆L◆?◆:◆{◆?◆?◆p(◆?◆k◆?◆  
íLV◆?◆?◆h<◆?◆Dz"m◆?◆m^◆?◆tP◆  
◆?◆?◆d,"◆?◆Z◆?◆\$t◆?◆?◆L◆?◆?◆?◆?◆?◆<◆?◆?◆  
H◆?◆?◆?◆\_◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆#◆?◆<◆?◆.  
◆?◆N◆?◆Bj^V◆?◆?◆(W\$  
+◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆Ce◆?◆8LD:◆?◆(◆?◆?◆?◆?◆'O◆?◆J7◆?◆J/njx  
◆?◆?◆m<>m◆?◆?◆)1◆?◆N◆?◆-◆?◆b'◆?◆!◆?◆3VzQh?◆?◆?◆?◆Z◆?◆8  
3◆?◆?◆?◆at◆?◆?◆?◆?◆?◆Yj◆?◆~d|◆?◆5U◆?◆B=t◆?◆?◆\_  
◆?◆?◆F◆?◆?◆?◆?◆&◆?◆.z6◆?◆TY24t,◆?◆?◆?◆]◆?◆X◆?◆л◆?◆{◆?◆d◆?◆.  
◆?◆h;>uTF>U◆?◆?◆w-◆?◆nd◆?◆?◆L◆?◆e◆?◆?◆?◆?◆pS◆?◆?◆?◆<◆?◆:  
◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆n◆?◆]◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆X◆?◆?◆Q◆?◆ÁEض/i◆?◆?◆?◆?◆eã~  
◆?◆?◆g◆?◆s◆?◆?◆?◆?◆?◆n◆?◆T◆?◆?◆?◆?◆?◆|`n-◆?◆`g◆?◆?◆?◆?◆[%l◆?◆



??K?=??

U?]p?u&??N?N???\??3Y??

??°??X?X-2x0 ?|??O|???

>(L??VB??c??W?=??b???

2s!ry??sL? ]??bH?\*?\_??/G

??6?F

o?UB?u?l??B??@eQ?

??u?]?iwg?E` ?v??yw-` ?5":7\*YI

j&=?|U?L?IY??E?+IF??#?+)O???

o]шo?F8???\\$?zM??~?ZdM;R]?j?{?O?

o?S?j#?E??h?"???,Y"?N??#]

o??\_?x?>|?δ:??A?z?\_v?-Pg:??6?6?` ?

\Old??2??B?2Z??

??&s` C?Zn+??t?'??~?>8??g

Sč?b8??]??b??a??nd???

?x?E?\*D?"n?B?b?n|

P>A?\??U?)??V?F?

?u?z?|`??e3?5|??]W2?:?h??sv?

? "6?I\$qñ?= ?t.=~s??);;e??áQ??

?R??1?"v?jXV7?e

?I??x??f?,m??<?xZi

?g.??=???yT???.I?CC?Z\*??V??w?

wk|?n?µ2?,?a??H??XIZ6]M,??lf6@?

◆S◆\$◆,◆kuf◆\$◆?◆?◆?◆vtj◆?◆?◆?◆MVo}◆?◆?◆e◆?◆  
U9◆c◆oV◆?◆?◆N◆`◆Q◆?◆M@◆?◆?◆7◆?◆;y◆?◆?◆?◆G◆?,67  
N◆?◆?◆7\_◆?◆?◆?◆o◆?◆?◆?◆Mbs◆f◆?◆?◆;◆?◆?◆?◆?◆?◆@◆?  
v◆?◆?◆?◆M@aG◆F◆?,|◆?◆?◆5,Cu◆~t◆?◆y◆?◆?◆!oP?◆?◆M  
@◆?◆ı◆?◆?◆&`◆?◆?◆?◆pj◆?◆?◆@lz0@U◆&◆?◆+  
n8H◆X◆?◆?◆(◆?◆5ε◆N◆P◆&◆?◆?◆?◆P  
:7\_◆?◆\$C◆?◆?◆?◆?◆1◆?◆?◆&X◆?◆y◆?◆?◆!oP?◆?◆M◆N◆?◆?  
◆?◆?◆7◆?◆?

◆S◆?◆?◆MbK◆?◆?◆7◆?◆?  
◆?◆?◆?◆7◆?◆?◆&yP◆?◆?◆?◆9;@5,C◆?◆,,◆?◆?◆M◆?◆W◆?  
ı◆?◆?◆&X◆?◆y◆?◆?◆!oPw◆?◆nXln0◆?◆Z%o◆?◆P◆?◆?  
@ln8H◆X#◆?◆(◆?◆5ε◆N◆P  
y◆?◆?◆?◆a◆?◆#`◆?◆C◆?◆L◆?◆?◆?◆M◆?◆W◆?◆?◆U◆?◆S?◆?◆M◆?◆?  
◆?◆&u'◆?◆v◆?◆?◆t◆?◆?◆?◆éU◆?◆&◆?◆?◆?◆Uε◆?◆?◆u◆?◆?◆?◆?◆?◆-  
I@=gP◆?◆j N,A◆?◆~k◆?◆?◆@◆?◆h?◆?◆?◆?◆?◆?◆hI  
◆?◆?◆?◆?◆|vh◆?◆?◆?◆!C◆?◆?◆?◆?◆x◆?◆?◆O◆?◆T◆?◆?◆G&  
◆?◆?◆rn◆?◆Lc◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆x◆?◆=◆?◆?◆Fv◆?◆?◆d◆?◆?  
Bj◆?◆?◆?◆q◆?◆;\*◆?◆z◆?◆b5◆?◆/◆?◆PUq◆?◆n[◆?◆?◆n◆?◆?◆P◆?  
◆?◆<◆?◆?◆:Ux7g◆?◆?◆{◆?◆r\*d◆?◆j◆?◆?◆w{(◆?◆?◆?◆<sup>a</sup>zg◆?◆\$◆?  
◆?◆?◆?◆Q9◆?◆?◆?◆jSA◆?◆B◆?◆?◆4◆?◆?◆- =b  
?◆?◆E+◆?◆p[Lg◆?◆`◆?◆?◆?◆Z<◆?◆A◆?◆i◆?◆?◆?◆b◆?◆?◆?  
v◆?◆?◆?◆?◆?◆?◆2◆?◆?◆'x@59\$  
κ◆?◆?◆?◆TF◆?◆?◆\$◆?◆åH◆?◆?◆?◆T◆?◆'◆?◆?◆SR◆?◆u◆?◆?

??v??r??-?R?}?  
?vOP??v??9??\_?Yo?  
(r4??4???.f a.S??nnT>gj?;\$??  
4~??gw??l5\_/b5??\*?(??(  
?J^f/?V'?\_??<>?c?P?8?  
?%?:??\*?0vzz6.?T??W??W>?&??Y  
??>??.?AO??a??Q  
Ë???)u#??"??ج??ج+?\$Ek/?<?\*\_??P  
g??1τ? ]Dj??w3??{H??  
?"??|??pj??k}??Z??{v??  
v??s??|?٢??OnH?  
Z?!?3=?I?PJ~?o}?:??s??{i0?X?  
?|?\_@??vpX?O??B.{??}??a  
?W??{?X?fw?-  
?kQ??<??'??ج??ncWwv?C?co??.P  
?gkS??g:J?v??G??{,??Npش  
??^>?#,??PK!,?H8?E  
word/styles.xml?\mo?6?>`?A??oI?  
s?4Y?`]???Y??X?\$z??4??;%Z?L?.R?  
lXy??9:??F?E?Y(??;y=v??2  
?Dž?p??d??^\$?p?E??  
~z:??HdH??\_??<?F??  
??[??Lc/???q{??/?0

??t<>s1)E\C\_I\$??TD  
Q&f'?'T"@8b/L??ICP  
?:  
^FJ,??S?N??>&2V?ir?eko  
zL??x??2?3?????0\??7??  
9??n????,????;??"??B?r?>  
Y?g??\_??/^?pgS??T?  
c??<?c"y????ncU  
v?yu??P??gE????[?z>?p?u. <N  
???!T??ç?2????e??\*  
kO0??Y??b?A??E????E,|??KC?B|.o&  
.EA T?c?&??\_??<d"ğ??y?q\_H???.?a?gs?(~?  
?X?xj??pG7????5T????hE?O%????o  
B?w??J??(??Y'?E?????  
J????;5????  
fo[BV?hDQ?F?t?h?H?FHt?hD@  
?;W4?9????U??Z????a  
??&=??(5????n  
US??n#??n?[,?t?r?\?L;-  
2?i?bN?%?n?,?R??=M?<ii  
tB??k?ı?%?.?|??Q R?^|?  
e??(??>etn??[?Yn??v??Y?n??  
??!????tfQ?K8#g????]

..MC8i>g[I7щrQ3;P\_?  
Oث..|ŭRBBBBe3?  
|\_uH5gdEetÜ;|I?  
|@ " 77J}Q  
)5پس04b;5e`Zt?/u?  
Kfg: ,D:Cy zj<\*m  
.HCCY2Vēw+|~л2, a?H\_  
XIZ6UÎs63 ^n\_ BnPjM  
;Zf&kIT  
Q]7@ \$@h&  
C atκA#oVεS8\_  
P@lnIWΨ{(M@a;I  
wlM)Ha#`  
C at4y!o0MO Ñ7?  
S MbĴ7p(yc w& \$o  
;5B5T A5,C, 0Mh&  
C atκA#oVεHT%o7&w'o  
AM&S#T s, jX X/εS^  
h&h4y!oP Xln0Z%oP?  
@ln8J#(I5εNP  
y a#`  
C M)/,i&h4y  
w7pMbs\*y`M

bs??g?E??S'? ? ?3(o5??'Q? ??H??Jt??  
Xj?@??U??R~vh?g?!C??(?x??o?T  
f?N???.??X?!ux??B..? ?`??  
Zv??r%  
TKW??q??T??U?&bSU1??-P?3  
??&? ?, :?Z??^w?[n??F?-  
?6??3??wpG?u?g?)?j#?h?67  
?Y??V?n1??IB ??L;3??iQ??RD??  
6??rk??u??N?Xk?V2?el\_??q??1  
??G??=N?]?)tx??T?;?CR?u??  
??I?H??>76?[Zy?a??j??:?  
{?<r?dh}U??"?? ?  
?2U??~?x|}?l??K??jT??l?Q  
??`g7??I9\_Ob??ÈV3K?X?U\_(?  
?%J^fO?N#?/?N?>>?m??  
?K@u[W??VB??XR??S?g??JyY??h=1  
ÛA?Ï??V??^\$??x?G?U?{]A\$?[  
??2??\*  
u??X??C??{??H{|7J??0ö?+?|x??k  
?V??Üx?+?<w?  
5?+V?dz~?7??L<??H???)??  
5NhW?R??s?? ? ?u?f??u>?  
??e??\$8?rYC&o?

M??Rt??mn??y?:??oN3?  
??I??]??^?U?f?pu=ON??  
??7??C?\$\$nh??v",φب??PK!t?9z?(  
customXml/\_rels/item1.xml.rels (??1  
?;??x??xY??t23?iS?(?O+,?1  
????-??S4?T5(??zG??  
???)??'2??=?l?,??D60??&  
?+J?d??2?:Yw?#?u]ot?m@?a?Co ?  
??J??6  
?w?E?0??X(\?|'?6?(?`x??  
?k??PK!zO!?U(customXml/itemProps1.xml  
?\$(? ??j?0?C??u?f?\?  
'M?'1??\$??S:??};uə?'!}?\*?7=%W  
??v?B"??2??@?7??  
??c??Pt??}??N??Il?X?'  
\_??ZV?(??=?T?0?5  
?~C?&??^?Rs??4q?[?y??l?^  
y?b??%?\?n??mq  
??L???'??T+??PK!?ö?B?  
word/fontTable.xml'?n?0??O?;D?\_?@)j??  
mZ5M+{c?پso ??w?Ĉ??\$?%??  
??\*?4:%Q??@hn?R?R?}>??  
J??,7Z?d'?<??%?^?P? ,?!?P:?

3c+ ]??U?R.d.]S?'?m?b?Lr??  
??C+rt4?[?f2vYX??k?T̃>?Dj??  
0Y??  
?G??|?#?\*JETC??3??  
.?6 "??eyJhL'?G)M??KB??^(i-  
gL?|?W??@!K??[f??V=r?XД?#|  
??H?D)qO?io?(1n?9??1/2N?h4?9??a  
n??ü?ra?3\$?3?]M?J?7  
?gG\$?NIn"\$??@Y?>?I|U??(??iI?:  
??ED??F6<?ÜDn?7!2?+'?9&??O  
??9??:;\$+<|z[  
q?k  
??jX0??G0?La?'gH?p?!qa??m?]H  
??đIJ??>??B?L\?@  
??=?3?|V`??PK!??Us?docProps/core.xml  
?(?|?n?0??vX  
QR?S?PQ?f?'`5q"?m??E=:3?23I:;y?  
ŕRO?Q??Tz7E??#??:?%?K  
St?f??U\*?D??86?\$mQM?\*!Ĉ=  
??C{q[??;4;Rq??w@bJG?  
?%w?4@\uDtFJ?!?w??r(@;KX??/S?/?  
??Y(w?|?s?K?'?s  
??u]??~??3?2Z??X?f+(K?H??J???



ó' ) x | s ~  
y{ 6J , ç I o b C5 + κ [ ( @ f1e  
cL 8 Y I  
5 a SZ o vi M ~ 3 Y  
سB[ X k O > \$ d ! - PK!  
 \ (customXml/item1.xml \$( I  
 /-JN-VN IM.IM. I U qpϣ QR % bJ  
 9y VI J%%V z  
 y@ (]??--  
39 %? 475 D L?)3)'3? ( j  
U { } PK! N  
word/webSettings.xml J1 ; , " t  
R " ivv d Lj Oo ڪ ^z \$ @ \_  
 f ^  
 S / \$ 00: Q b  
 gH (AZ ق [ n ) B( # 1 TJ 4  
 ~ ř % & . U ] \_ o Qh  
 ; ; [ ] - e ! 2Y  
 ) y h \ e e X , O U پس x B \*  
 } P } br > a M | . X K d  
 PK! t l doc Props / app.xml ( T Mo @ # ,  
 ; V ( % I R F 8 Ya v QÉ  
 3 g - 8 ä C } l v ~ \_ W

WF( #Jfu, <  
]hh[9-  
PphxhIjGT T)  
R V)K% Ç4&Y &p (NI?0 &N7 C#  
?o-, VtQa fI e AQ >NS\* ! [  
x>aIçq, IC"; ^([)])tλ  
V(`u 8KwN a\*  
7'VNص, 0C 9i KQy` !.A. " |  
?  
H4. mxG,  
FR0uA + \aE -  
q @;f h 6 f p  
w\_ 8 9 \*IP B P I  
@ 'x\_ QsS[ ÑG " i ?o  
VH2 i) f <  
k ` yW S] b {! y d  
y #O \_5 PK-! Wu  
[Content\_Types].xmlPK-! N \_rels/.relsPK-! `'  
word/\_rels/document.xml.relsPK-! e/s  
word/document.xmlPK-! v! F 9  
word/endnotes.xmlPK-! `u  
~ L ;word/footnotes.xmlPK-! M  
=word/header1.xmlPK-! 1 & @

word/theme/theme1.xmlPK-!kÎ)aG  
word/settings.xmlPK-!ad°H.M  
word/stylesWithEffects.xmlPK-!,H8EW  
word/styles.xmlPK-!t?9z(L`  
customXml/\_rels/item1.xml.relsPK-!zO!URb  
customXml/itemProps1.xmlPK-!Bc  
word/fontTable.xmlPK-!Usf  
docProps/core.xmlPK-!\h  
customXml/item1.xmlPK-!Ni  
word/webSettings.xmlPK-!ljd docProps/app.xmlPK  
n

ภาคผนวก

## ภาคผนวก ก

ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

- รายนามผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย
- หนังสือขอความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย

1. ดร.สมคิด อินเทพ                      อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์  
คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยบูรพา
2. ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์            อาจารย์ประจำภาควิชาการจัดการเรียนรู้  
คณะศึกษาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยบูรพา
3. นายณพิวิศว์ พลทิพย์                ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์  
โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม  
อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน



## บันทึกข้อความ

ส่วนงาน คณะวิทยาศาสตร์ สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา โทร. ๓๐๘๕

ที่ ศธ ๖๒๑๔/ ๑๘๕๒

วันที่ ๒๖ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์บุคลากรตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผนก ก หลักสูตรการศึกษาไม่เต็มเวลา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ ดร.สมคิด อินเทพ ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์





## บันทึกข้อความ

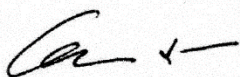
ส่วนงาน คณะวิทยาศาสตร์ สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา โทร. ๓๐๘๕  
ที่ ศธ ๖๒๑๔/ว ๑๘๔๐ วันที่ ๒๖ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน ดร.สมคิด อินเทพ

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผนก ก หลักสูตรการศึกษาไม่เต็มเวลา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนาง ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)  
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์





## บันทึกข้อความ

ส่วนงาน คณะวิทยาศาสตร์ สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา โทร. ๓๐๘๕

ที่ ศธ ๖๒๑๔/ ๑๘๔๑

วันที่ ๒๖ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขออนุมัติคราะห์บุคลากรตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน คณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ด้วยนางจุริเชช บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผนก ก หลักสูตรการศึกษาไม่เต็มเวลา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยมศึกษา ตอนปลาย จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขออนุมัติคราะห์ ดร.พรพนทิพา พรหมรักษ์ ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์



## บันทึกข้อความ

ส่วนงาน คณะวิทยาศาสตร์ สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา โทร. ๓๐๘๕  
ที่ ศธ ๖๒๑๔/ว ๑๗๘๐ วันที่ ๒๖ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์

ด้วยนางจุรีเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก หลักสูตรการศึกษาไม่เต็มเวลา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยมศึกษา ตอนปลาย จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนาง ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์





ที่ ศธ ๖๒๑๔/ ๐๘๑๓

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา  
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๗ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขออนุมัติคราะห์บุคลากรตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก หลักสูตรการศึกษาไม่เต็มเวลา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยมศึกษา ตอนปลาย จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขออนุมัติคราะห์ นายณพวิศว์ พลทิพย์ ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)  
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๗๕๕๘๔๖



ที่ ศธ ๖๒๑๔/ ๐๘๐๗

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา  
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๖ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน นายณพวิศว์ พลทิพย์

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผนก ก หลักสูตรการศึกษาไม่เต็มเวลา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยมศึกษา ตอนปลาย จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)  
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๗๕๕๘๔๖

## ภาคผนวก ข

การขอใช้เครื่องมือวิจัยและผลการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือวิจัย

11/5/2559

Rightslink® by Copyright Clearance Center



RightsLink®

Home

Account  
Info

Help

Taylor & Francis  
Taylor & Francis Group**Title:** Conceptions of a sequence  
formed in secondary schools**Author:** M. Przenioslo**Publication:** International Journal of  
Mathematical Education in  
Science & Technology**Publisher:** Taylor & Francis**Date:** Oct 15, 2006

Copyright © 2006 Taylor &amp; Francis

Logged in as:  
rujirek bunmapa

LOGOUT

**Thesis/Dissertation Reuse Request**

Taylor & Francis is pleased to offer reuses of its content for a thesis or dissertation free of charge contingent on resubmission of permission request if work is published.

BACK

CLOSE WINDOW

Copyright © 2016 Copyright Clearance Center, Inc. All Rights Reserved. [Privacy statement](#). [Terms and Conditions](#).  
Comments? We would like to hear from you. E-mail us at [customercare@copyright.com](mailto:customercare@copyright.com)

**แบบประเมินความเหมาะสมของแบบสัมภาษณ์**  
**เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ อำเภอท่าวังผา จังหวัดน่าน**

แบบประเมินฉบับนี้เป็นแบบประเมินความเหมาะสมของแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ จัดทำขึ้นเพื่อให้ท่านซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญได้กรุณาพิจารณาข้อความในการสัมภาษณ์ ให้ข้อความถูกต้อง และภาษาที่ใช้เหมาะสมกับผู้ให้ข้อมูล โดยการทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่านมากที่สุด และเขียนข้อเสนอแนะอื่น ๆ

แบบประเมินมีอยู่ทั้งหมด 2 ตอน คือ

1. แบบประเมินความเหมาะสมของแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ
2. แบบสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติมเกี่ยวกับแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

ข้อมูลส่วนตัว

ชื่อผู้เชี่ยวชาญ.....

ประสบการณ์การทำงาน.....ปี

สถานที่ทำงานปัจจุบัน .....

ตารางที่ ข – 1 แสดงประเด็นการประเมินตอนที่ 1 แบบประเมินความเหมาะสมของแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ของลำดับ

คำชี้แจง หลังจากพิจารณาแบบสัมภาษณ์ แล้ว ขอให้ท่านพิจารณาข้อความคำถามในการสัมภาษณ์ของแบบสัมภาษณ์ ในข้อต่อไปนี้มีเหมาะสมมากน้อยเพียงใด

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วย				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
<b>1. ข้อคำถามถูกต้องและเหมาะสม</b>					
1.1 ระบุทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ					
1.2 ระบุทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ					
1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์”					
1.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ไม่มีกฎโดเมนของลำดับเป็นลักษณะของจำนวนนับ”					
2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”					
2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”					
2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน”					
2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”					
2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ”					
2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน”					
2.6.1 อันดับทางคณิตศาสตร์					
2.6.2 อันดับทางปรัชญา					
2.6.3 อันดับทางจิตวิทยา					
2.6.4 อันดับทางความต่อเนื่อง					
2.6.5 อันดับทางภาษาศาสตร์					
2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”					



## ตารางที่ ข – 1 (ต่อ)

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วย				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
<b>2. ภาษาที่ใช้เหมาะสมกับผู้ให้ข้อมูล</b>					
2.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ					
2.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ					
2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอันดับ”					
2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ไม่มีกฎโดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ”					
2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”					
2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”					
2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน”					
2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”					
2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ”					
2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน”					
2.6.1 อันดับทางคณิตศาสตร์					
2.6.2 อันดับทางปรัชญา					
2.6.3 อันดับทางจิตวิทยา					
2.6.4 อันดับทางความต่อเนื่อง					
2.6.5 อันดับทางภาษาศาสตร์					
2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”					

**ตอนที่ 2** แบบสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติมเกี่ยวกับแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทาง  
 คณิตศาสตร์ของลำดับ

**คำชี้แจง** โปรดแสดงความคิดเห็นหรือให้ข้อเสนอแนะอื่น ๆ เพื่อผู้วิจัยจะได้ปรับปรุง  
 แก้ไขแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับให้ดีขึ้น ก่อนที่จะนำไปทดลองใช้  
 ต่อไป

1. เนื้อหาแบบสัมภาษณ์ ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไรและคิดว่ามีจุดใดที่ควรแก้ไขบ้าง  
 (กรุณาช่วยพิจารณาการเขียนเนื้อหาในแต่ละประเภท พร้อมทั้งช่วยแก้ไขและเสนอแนะลงในแบบ  
 สัมภาษณ์)

.....

.....

.....

.....

.....

2. ความคิดเห็นเพิ่มเติมเพื่อความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นของแบบสัมภาษณ์

.....

.....

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะอื่น ๆ

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ผู้เชี่ยวชาญ  
 ( ..... )

ตารางที่ ข-2 แสดงผลการประเมินแบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

รายการประเมิน	คะแนนความคิดเห็นของ ผู้เชี่ยวชาญคนที่			$\bar{X}$	ความหมาย
	1	2	3		
<b>1. ข้อคำถามถูกต้องและเหมาะสม</b>					
1.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ	4	5	5	4.67	ดีมาก
1.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ	4	5	4	4.33	ดี
1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์”	5	5	4	4.67	ดีมาก
1.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ไม่มีกฎโคเมนของลำดับ เป็นลักษณะของจำนวนนับ”	4	5	4	4.33	ดี
2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”	4	5	3	4.00	ดี
2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”	4	5	3	4.00	ดี
2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้อง เท่ากัน”	4	5	4	4.33	ดี
2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”	4	5	4	4.33	ดี
2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความ สม่ำเสมอ”	4	5	4	4.33	ดี
2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่ กลมกลืนกัน”					
2.6.1 อันดับทางคณิตศาสตร์	4	5	4	4.33	ดี
2.6.2 อันดับทางปรัชญา	4	5	4	4.33	ดี
2.6.3 อันดับทางจิตวิทยา	4	5	3	4.00	ดี
2.6.4 อันดับทางความต่อเนื่อง	5	5	4	4.67	ดีมาก
2.6.5 อันดับทางภาษาศาสตร์	4	5	4	4.33	ดี
2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกัน ของจำนวน”	4	5	4	4.33	ดี

ตารางที่ ข-2 (ต่อ)

รายการประเมิน	คะแนนความคิดเห็นของ ผู้เชี่ยวชาญคนที่			$\bar{X}$	ความหมาย
	1	2	3		
<b>2. ภาษาที่ใช้เหมาะสมกับผู้ให้ข้อมูล</b>					
1.1 รู้บทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ	4	4	4	4.00	ดี
1.2 รู้บทนิยามแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ	4	4	4	4.00	ดี
1.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับต้องเป็นอนันต์”	5	4	4	4.33	ดี
1.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ไม่มีกฎโดเมนของลำดับ เป็นสับเซตของจำนวนนับ”	4	4	5	4.33	ดี
2.1 มีพื้นฐานมาจาก “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”	4	4	5	4.33	ดี
2.2 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”	4	4	5	4.33	ดี
2.3 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้อง เท่ากัน”	4	4	5	4.33	ดี
2.4 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”	4	4	5	4.33	ดี
2.5 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีความ สม่ำเสมอ”	4	4	5	4.33	ดี
2.6 มีพื้นฐานของความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่ กลมกลืนกัน”					
2.6.1 อันดับทางคณิตศาสตร์	4	4	5	4.33	ดี
2.6.2 อันดับทางปรัชญา	4	4	5	4.33	ดี
2.6.3 อันดับทางจิตวิทยา	4	4	5	4.33	ดี
2.6.4 อันดับทางความต่อเนื่อง	5	4	5	4.33	ดี
2.6.5 อันดับทางภาษาศาสตร์	4	4	5	4.33	ดี
2.7 มีพื้นฐานของความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกัน ของจำนวน”	4	4	5	4.33	ดี

จากตารางที่ ข-2 จะเห็นว่าแบบสัมภาษณ์เรื่องมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ มี  
คะแนนประเมินเฉลี่ย 4.32 คะแนน มีระดับคุณภาพดี และเหมาะสมที่จะนำไปใช้สัมภาษณ์

ภาคผนวก ค

หนังสือขอความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลงานวิจัย



ที่ ศธ ๖๒๑๔/ว ๐๕๕๘

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา  
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๘

พฤศจิกายน พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลงานวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยม จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนางุ ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วย ความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ขออนุญาตให้นิสิตเข้าเก็บข้อมูล โดยใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ และมัธยมศึกษาปีที่ ๖ แผนการเรียนวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์ เป็นกลุ่ม ตัวอย่าง ในระหว่างวันที่ ๑๐ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙ ถึงวันที่ ๓๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ทั้งนี้ หากมีข้อสงสัยประการใด สามารถติดต่อนิสิตได้ที่ ๐๘๖-๓๔๕๒๐๖๐ หรือ E-mail rujirekbunmapa@gmail.com

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๗๔๕๘๔๖



ที่ ศธ ๖๒๑๔/ว ๐๕๕๘

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา  
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๘

พฤศจิกายน พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลงานวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนหนองบัวพิทยาคม

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยม จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนากู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วย ความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ขออนุญาตให้นิสิตเข้าเก็บข้อมูล โดยใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ และมัธยมศึกษาปีที่ ๖ แผนการเรียนวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์ เป็นกลุ่ม ตัวอย่าง ในระหว่างวันที่ ๑๐ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙ ถึงวันที่ ๓๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ทั้งนี้ หากมีข้อสงสัยประการใด สามารถติดต่อนิสิตได้ที่ ๐๘๖-๓๔๕๒๐๖๐ หรือ E-mail [rujirekbunmapa@gmail.com](mailto:rujirekbunmapa@gmail.com)

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)  
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๗๔๕๕๔๖





ที่ ศธ ๖๒๑๔/ว ๐๕๕๘

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา  
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๘

พฤศจิกายน พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลงานวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนเมืองยมวิทยาคาร

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยม จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วย ความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ขออนุญาตให้นิสิตเข้าเก็บข้อมูล โดยใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ และมัธยมศึกษาปีที่ ๖ แผนการเรียนวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์ เป็นกลุ่ม ตัวอย่าง ในระหว่างวันที่ ๑๐ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙ ถึงวันที่ ๓๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ทั้งนี้ หากมีข้อสงสัยประการใด สามารถติดต่อนิสิตได้ที่ ๐๘๖-๓๔๕๒๐๖๐ หรือ E-mail rujirekbunmapa@gmail.com

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๗๔๕๘๔๖



ที่ ศธ ๖๒๑๔/ว ๐๕๕๘

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา  
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๘

พฤศจิกายน พ.ศ. ๒๕๕๙

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลงานวิจัย

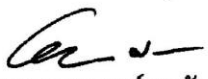
เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตธรรมวิทยาการ

ด้วยนางรุจิเรข บุญมาปะ รหัสประจำตัวนิสิต ๕๖๙๙๐๓๘๕ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับในโรงเรียนมัธยม จังหวัดน่าน โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในกรณีนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วย ความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ขออนุญาตให้นิสิตเข้าเก็บข้อมูล โดยใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ และมัธยมศึกษาปีที่ ๖ แผนการเรียนวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์ เป็นกลุ่ม ตัวอย่าง ในระหว่างวันที่ ๑๐ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๙ ถึงวันที่ ๓๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ทั้งนี้ หากมีข้อสงสัยประการใด สามารถติดต่อนิสิตได้ที่ ๐๘๖-๓๔๕๒๐๖๐ หรือ E-mail rujirekbunmapa@gmail.com

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)  
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี งานบริการการศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๗๔๕๘๔๖

## ภาคผนวก ง

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

- แบบทดสอบ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ
- แบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

แบบทดสอบ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

**แบบทดสอบเรื่องมโนทัศน์ของลำดับ**

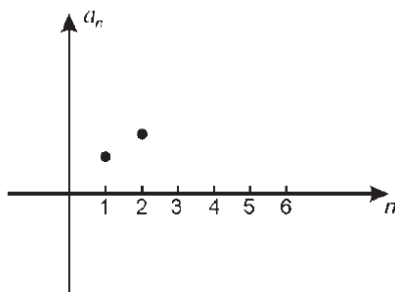
คำชี้แจง เป็นข้อสอบแบบอัตนัยเต็มคำตอบ แบ่งออกเป็น 2 ตอน รวมทั้งหมด 28 ข้อ จำนวน 3 หน้า เวลา 60 นาที  
ตอนที่ 1 จำนวน 18 ข้อ (ข้อ a – ข้อ r) และตอนที่ 2 จำนวน 10 ข้อ (รูปที่ 1 – รูปที่ 10)

ชื่อ – สกุล ..... ห้อง ..... เลขที่ .....

**ตอนที่ 1 :** ให้นักเรียนตอบว่า เป็นลำดับ หรือ ไม่เป็นลำดับ และอธิบายเหตุผลประกอบ

- (a)  $x \rightarrow \sqrt{2}, x \in \mathbb{N}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (b)  $a_n = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (c)  $x_n = \frac{1}{n}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (d) -4, -2, 0, 2, 4, 6      ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (e) -1, -3, -5, -5, -5, ...      ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (f) 2, 7, 0, 4, 1, 2      ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (h)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (i)  $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (j)  $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (k)  $\left\{\left(1, \frac{1}{5}\right), (2, 3), (3, \pi), \dots\right\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (l)  $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (m)  $\{(1, 1), (2, 2), (4, 3), \dots\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (n)  $\left\{\left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \dots\right\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (o)  $\{(1, 2)\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (p)  $\{(1, \Delta), (2, \text{อี}), (3, \text{อู๋}), (4, \text{อ๋อ})\}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (q)  $a_n = \begin{cases} 1, & 1000 \leq n \leq 10000 \\ 4 & \text{จำนวนนับอื่น} \end{cases}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_
- (r)  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n, n \in \mathbb{N}$       ตอบ \_\_\_\_\_ เพราะ \_\_\_\_\_

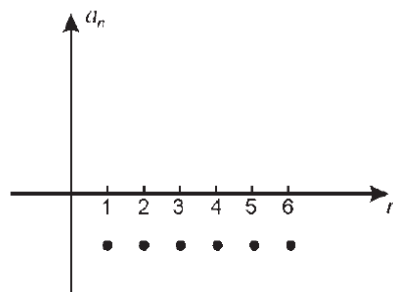
**ตอนที่ 2:** ให้นักเรียนตอบว่า เป็นลำดับ หรือ ไม่เป็นลำดับ และอธิบายเหตุผลประกอบ



รูปที่ 1

ตอบ \_\_\_\_\_

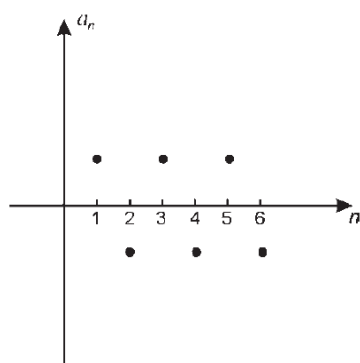
เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 2

ตอบ \_\_\_\_\_

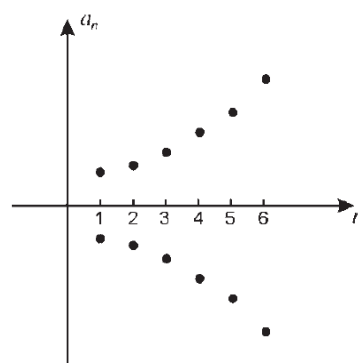
เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 3

ตอบ \_\_\_\_\_

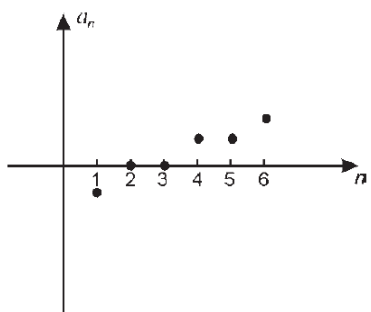
เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 4

ตอบ \_\_\_\_\_

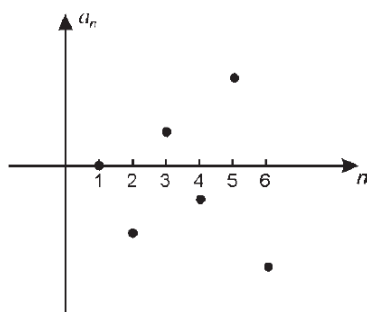
เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 5

ตอบ \_\_\_\_\_

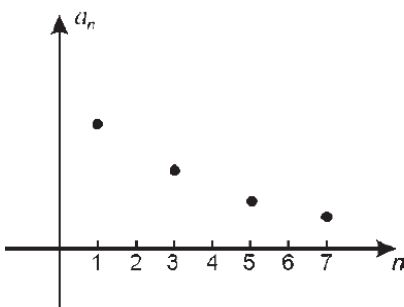
เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 6

ตอบ \_\_\_\_\_

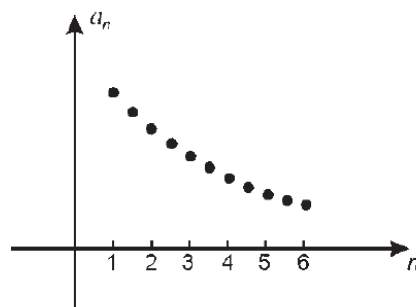
เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 7

ตอบ \_\_\_\_\_

เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 8

ตอบ \_\_\_\_\_

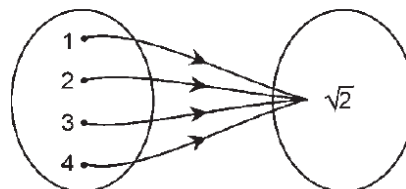
เพราะ \_\_\_\_\_

$n$	1	2	3	4	5
$X_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

รูปที่ 9

ตอบ \_\_\_\_\_

เพราะ \_\_\_\_\_



รูปที่ 10

ตอบ \_\_\_\_\_

เพราะ \_\_\_\_\_

เฉลยแบบทดสอบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

ตอนที่ 1 ข้อที่ไม่เป็นลำดับ ได้แก่

ข้อ (c) เพราะ โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง

ข้อ (l) เพราะ ไม่เป็นฟังก์ชันดังนั้นจึงไม่เป็นลำดับ

ข้อ (m) เพราะ โดเมนคือ  $\{1, 2, 4\}$  ขาด 3 ไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ข้อ (n) เพราะ โดเมนไม่เป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวก

ตอนที่ 2 รูปที่ไม่เป็นลำดับ ได้แก่

รูปที่ 4 เพราะ ไม่เป็นฟังก์ชันจึงไม่เป็นลำดับ

รูปที่ 7 เพราะ โดเมนคือ  $\{1, 3, 5, 7\}$  ขาด 2, 4, 6 ไม่เป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวก

รูปที่ 8 เพราะ โดเมนคือ  $\{1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 6\}$  ไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก



แบบสัมภาษณ์ เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

## แบบสัมภาษณ์

## เรื่อง มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับ

ผู้รับการสัมภาษณ์ ชื่อ – นามสกุล.....ชั้น.....

โรงเรียน.....สถานที่สัมภาษณ์.....

ทำการสัมภาษณ์ เมื่อวันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

เวลา.....น. ถึง.....น.

วัตถุประสงค์ในการสัมภาษณ์ เพื่อยืนยันมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับและแยกแยะมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับที่ยังไม่ชัดเจน

## วิธีการสัมภาษณ์

- 1) ผู้วิจัยเป็นผู้สัมภาษณ์และทำการจดบันทึกด้วยตัวเอง
- 2) ผู้วิจัยชี้แจงเกี่ยวกับการสัมภาษณ์ โดยการตอบคำถามไม่ได้เป็นการบ่งชี้ว่านักเรียนเก่งหรือไม่เก่ง เป็นเพียงการศึกษาเพื่อให้ทราบถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของลำดับเท่านั้น
- 3) ผู้เข้าร่วมการวิจัยจะถูกถามด้วยข้อความจากการเขียนคำตอบแบบอัตนัยหนึ่งหัวข้อ
- 4) เวลาที่ใช้ในการสัมภาษณ์ต่อคน 10 นาที ใช้ช่วงหลังเลิกเรียน

## ข้อมูลที่สรุปได้จากการสัมภาษณ์

.....

.....

.....

.....

ผู้สัมภาษณ์ นางรุจิเรข บุญมาปะ

ตำแหน่ง ครู

**ประเภทที่ 1** มโนทัศน์อยู่บนพื้นฐานของความเข้าใจว่าลำดับเป็นฟังก์ชัน

สามารถแยกมโนทัศน์ลำดับเป็นฟังก์ชัน ออกเป็น 4 ประเภท ดังนี้

**ประเภทที่ 1.1** ฐันทนิยามและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ

1. อธิบายบทนิยามของลำดับในความเข้าใจของนักเรียน

.....

.....

.....

2. ลำดับกับฟังก์ชันมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร

.....

.....

.....

3. นักเรียนมีวิธีการแยกแยะได้อย่างไร ว่าสถานการณ์ใดบ้างที่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. นักเรียนใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ในการแยกแยะว่าสถานการณ์ที่กำหนดให้เป็นหรือไม่เป็นลำดับอย่างไร

.....

.....

.....

5. จาก ข้อ (c)  $x_n = \frac{1}{n}$  ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

6. จาก ข้อ (l), (m) และ (n) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อเหล่านี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

7. จาก รูปที่ 4, 7 และ 8 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

### ประเภทที่ 1.2 รัฐบาลนิยมแต่แทบจะไม่มีประสิทธิภาพ

1. จากข้อ (g)  $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \pi, \frac{1}{3}$  ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. จากรูปที่ 9 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

3. จากข้อ (f) 2, 7, 0, 4, 1, 2 ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ในข้อ (g) และข้อ (f) ในตอนที่ 1 รูปที่ 9 ในตอนที่ 2 คืออะไร

.....

.....

.....

### ประเภทที่ 1.3 ลำดับต้องเป็นอนันต์

1. ให้นักเรียนอธิบายความหมายของ ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนอธิบายแนวคิดของคำตอบ ของรูปที่ 3 ถึงรูปที่ 9 ในตอนที่ 2

.....

.....

.....

3. นักเรียนคิดว่าลำดับมีความเกี่ยวข้องกับลิมิตอย่างไร

.....

.....

.....

4. นักเรียนคิดว่าลำดับมีความเกี่ยวข้องกับลำดับอนันต์อย่างไร

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 1.4** ปราศจากกฎเกณฑ์โดเมนของลำดับเป็นสับเซตของจำนวนนับ

1. ให้นักเรียนอธิบายถึงการเขียนลำดับ โดยเขียนเฉพาะเรนจ์

.....

.....

.....

2. จากข้อ (m) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

3. จากรูปที่ 7 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ในข้อ (m) ในตอนที่ 1 และรูปที่ 7 ในตอนที่ 2 คืออะไร

.....

.....

.....

5. ให้นักเรียนอธิบายสัญลักษณ์  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ว่าเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอะไร และในความเข้าใจของนักเรียนสัญลักษณ์ดังกล่าวมีความหมายว่าอย่างไร

.....

.....

.....

## ประเภทที่ 2 มโนทัศน์เชื่อมโยงกับอันดับ

### ประเภทที่ 2.1 มโนทัศน์มีฐานมาจากความสัมพันธ์ของคำว่า “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”

1. จากข้อ (d) และ (e) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ของคำว่า “มากกว่า” และ “น้อยกว่า”

.....

.....

.....

2. จากข้อ (i) – (o) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ว่าเป็นอย่างไร

.....

.....

.....

3. จากข้อ (n) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. จากรูปที่ 1, 2, 7 และ 8 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

5. ให้นักเรียนพิจารณาลำดับ  $3, 3, 3, 3, \dots$  ว่าเป็นลำดับหรือไม่ และอธิบายเหตุผลประกอบ

.....

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 2.2 มโนทัศน์อยู่บนฐานความเชื่อ “ลำดับทางเดียว”**

1. ให้นักเรียนอธิบายความหมายของคำ “เพิ่มขึ้น, ไม่ลดลง, ลดลง และไม่เพิ่มขึ้น” ในความเข้าใจ  
ของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับลำดับ

.....

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนลองยกตัวอย่างลำดับทางเดียว

.....

.....

.....

.....

3. จากรูปที่ 7 และ 8 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

.....

4. จากข้อ (l), (m), (n) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

.....

5. ถ้าจุดบนกราฟแตกออกจากเส้นนักเรียนคิดว่าจะเป็นลำดับหรือไม่ เพราะอะไร

.....

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 2.3 มโนทัศน์อยู่บนฐานความเชื่อ “ผลต่างระหว่างพจน์ต้องเท่ากัน”**

1. ให้นักเรียนอธิบายผลต่างระหว่างพจน์ว่าเป็นอย่างไร เช่น ลำดับ 1, 2, 3, 4, ...

.....

.....

.....

2. จากรูปในตอนต้นที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายระยะระหว่างจุดที่อยู่ติดกัน ว่าเป็นอย่างไร

.....

.....

.....

3. จากรูปที่ 3 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. รูปที่ 5, 7 และ 8 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 2.4 มโนทัศน์อยู่บนฐานความเชื่อ “พจน์ต้องเป็นสูตร”**

1. จากรูปที่ 2, 7 และ 8 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. นักเรียนมีความคิดเห็นอย่างไร เมื่อครูเขียนสูตร  $a_n = \frac{1}{n}$  เป็นลำดับหรือไม่

.....

.....

.....



3. จากสูตร  $a_n = \frac{1}{n}$  ให้นักเรียนลองแทนค่า  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  ได้ผลลัพธ์เป็นเช่นไร ตรงกับกราฟในรูปที่ 2, 7 และ 8 ในตอนที่ 2 หรือไม่

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 2.5 มโนทัศน์อยู่บนฐานความเชื่อ “พจน์ต้องมีความสม่ำเสมอ”**

1. จากข้อ (q) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. จากรูปที่ 4 และ 5 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

3. จากข้อ (q) ในตอนที่ 1 ถ้าเพิ่มสมาชิกอีก 1 ค่า เช่น เพิ่มพจน์แรก คือ 0

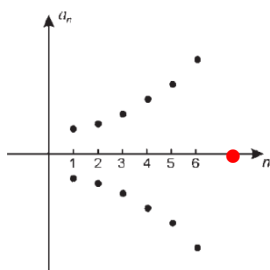
นักเรียนคิดว่ายังเป็นลำดับอยู่หรือไม่ ให้นักเรียนอธิบายเหตุผล

.....

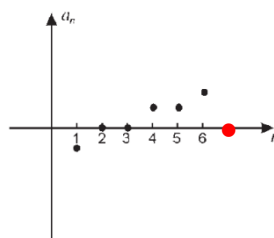
.....

.....

4. จากรูปที่ 4 และ 5 ในตอนที่ 2 ถ้าเพิ่มจุดตรงพจน์ที่เจ็ดอีกหนึ่งจุดดังรูป นักเรียนคิดว่ายังเป็นลำดับอยู่หรือไม่ ให้นักเรียนอธิบายเหตุผล



รูปที่ 4



รูปที่ 5

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 2.6 มโนทัศน์อยู่บนฐานความเชื่อ “พจน์ต้องมีบางส่วนที่กลมกลืนกัน”**

สามารถแยกออกเป็นประเภทย่อยได้อีก 5 ประเภทด้วยกัน ได้แก่

**2.6.1 อันดับทางคณิตศาสตร์**

1. จากข้อ (h), (l), (m) และ (n) ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. จากข้อ (f), (g) และ (k) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

3. จากรูปที่ 4 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. จากรูปที่ 6 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

5. จากรูปที่ 8 ในตอนที่ 2 เป็นลำดับ เกี่ยวกับการเข้าใกล้ 0 หรือไม่ อธิบายเหตุผล

.....

.....

.....

### 2.6.2 อันดับทางปรัชญา

1. จากข้อ (f) และ (g) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อเหล่านี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. จากรูปที่ 6 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

### 2.6.3 อันดับทางจิตวิทยา

1. จากข้อ (f) และ (g) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อเหล่านี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. จากรูปที่ 6 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปนี้ถึงไม่เป็นลำดับ

.....

.....

.....

3. จากข้อ (q) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. จากรูปที่ 4 และ 5 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

#### 2.6.4 อันดับทางความต่อเนื่อง

1. ให้นักเรียนอธิบายเกี่ยวกับสัญลักษณ์สามจุด “...”

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนอธิบายเกี่ยวกับความต่อเนื่องเกี่ยวข้องกับลำดับอย่างไร

.....

.....

.....

#### 2.6.5 อันดับทางภาษาศาสตร์

1. จากข้อ (q) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

2. จากรูปที่ 4 และ 5 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

3. จากข้อ (p) ในตอนที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมข้อนี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

**ประเภทที่ 2.7 มโนทัศน์อยู่บนฐานความเชื่อ “ลำดับเป็นการเรียงกันของจำนวน”**

1. ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่า ทำไมจึงยอมรับว่า ลำดับสามารถอยู่ในรูปกราฟ แผนภาพลูกศร หรือตารางได้

.....

.....

.....

2. ความเหมือนหรือความแตกต่างระหว่างลำดับจำกัด ลำดับอนันต์ และลำดับที่เป็นการเรียงกันของจำนวน เป็นอย่างไรให้นักเรียนอธิบายเหตุผล

.....

.....

.....

3. จากรูปที่ 4 และ 7 ในตอนที่ 2 ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมรูปเหล่านี้ถึงเป็นลำดับ

.....

.....

.....

4. ให้นักเรียนบอกเซตของคู่อันดับของรูปที่ 4 และ 7 ในตอนที่ 2

.....

.....

.....