รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ โดยใช้การแปลงลาปลาซสตีลต์เชส

Solving Systems of (Integro -) Differential Equations by Laplace - Stieltjes Transform

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม

โครงการวิจัยประเภทเงินรายได้ส่วนงาน คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยบูรพา

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2562

สัญญาเลขที่ SC01/2562

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ โดยใช้การแปลงลาปลาซสตีลต์เชส

Solving Systems of (Integro -) Differential Equations by Laplace - Stieltjes Transform

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินรายได้ส่วนงาน คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2562 เลขที่สัญญา SC01/2562

Acknowledgment

This work was financially supported by the Research Grant of Faculty of Science, Burapha University (Grant no. SC01/2562).

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีการใหม่เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ ซึ่งเป็นระบบสมการที่ใช้อย่างแพร่หลายในสาขาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ โดยนำการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส มาช่วยในการหาผลเฉลย ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่ได้พัฒนาขึ้นนั้นสามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยได้เป็นอย่างดี

Abstract

In this research, a new method is developed for solving the systems of (integro -) differential equations which is widely used in science and enigineering by Laplace - Stieltjes transform. Our results are shown to demonstrate the efficiency of the proposed method.

สารบัญ

1 บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เป็นสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ปรากฏการณ์ทางกายภาพต่าง ๆ สามารถอธิบายออกมาในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงทั้งแบบเชิงเส้นและม่เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น นำไปใช้ในการอธิบายในด้านต่าง ๆ ในด้านกลศาสตร์ความร้อน ไฟฟ้า พลศาสตร์ ความเครียด และอื่น ๆ [8,10] นอกจากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแล้ว ยังมีระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ซึ่ง ถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายทั้งทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ประกันภัย ซึ่งปัญหาที่สำคัญคือการหาวิธีการที่จะหาผลเฉลยของสมการดังกล่าว ซึ่งผลเฉลยที่ได้อาจจะเป็นผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) หรืออาจจะเป็นผลเฉลยแบบประมาณ (approximate solution) [3] ดังนั้นจึงมีนักวิจัยมากมายศึกษาวิธีการต่าง ๆ ที่จะได้มาซึ่งผลเฉลยนี้ เช่น วิธีการแยกอโดเมียน (Adomian decomposition method) [11] วิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (homotopy purterbation) [7] รวมไปถึงการใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ (differential transform) และเชิงปริพันธ์ (integral transform) เช่น การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) [1,6,9] การแปลงเอลซากิ (Elzaki transform) [5,13] การแปลงซูมูดู (Sumudu transform) [2] การแปลงธรรมชาติ (natural transform) เป็นต้น เพื่อเข้ามาช่วยในการหาผลของสมการที่ได้กล่าวมาดังกล่าว

จากงานวิจัยของ Deshna Loonker และคณะ [4] ได้นำเสนอการแปลงเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ เรียกว่า การแปลงลาปลาซสตีลต์เชส (Laplace – Stieltjes transform) และนำเสนอคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส รวมถึงนำการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสร่วมกับปริพันธ์สังวัตนาการมาเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์

ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะนำวิธีการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสร่วมกับปริพันธ์สังวัตนาการมาเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ในการหาผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าวให้ง่ายขึ้น โดยมุ่งหวังที่จะลดขั้นตอนและความซับซ้อนของวิธีการ ให้นำไปสู่การหาผลเฉลยที่ง่ายขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์
2. เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์
3. เพื่อลดขั้นตอนและความซับซ้อนในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์
4. ตีพิมพ์เผยแพร่ผลงานวิจัยในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ ที่มีผู้ประเมินอิสระและเป็นที่ยอมรับในวงวิชาการ

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

งานวิจัยนี้แสดงการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสร่วมกับปริพันธ์สังวัตนาการ

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดวิธีการดำเนินการ ดังนี้

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์
2. นำเอาวิธีการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสร่วมกับปริพันธ์สังวัตนาการ ไปใช้เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์
3. รวบรวมผลของการวิจัยในโครงการที่ได้เพื่อเขียนและสรุปผลงานวิจัย รวมทั้งเตรียมเอกสารสำหรับส่งตีพิมพ์และเขียนรายงานการวิจัย
4. ส่งรายงานเพื่อตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติและส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ด้านวิชาการ

   ได้องค์ความรู้ใหม่ที่เป็นทางเลือกของนักวิจัยในการเลือกใช้วิธีการผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ อีกทั้งเป็นแนวทางในการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบอื่น ๆ ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

2. เป็นองค์ความรู้ในการวิจัยต่อไป

   ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป

3. การเผยแพร่ผลงาน

   ผู้วิจัยจะนำเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการและส่งผลงานตีพิมพ์ในรูปแบบวารสารระดับนานาชาติ

2 วิธีดำเนินการวิจัย

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้อง กับระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์
2. ศึกษาความรู้เกี่ยวกับนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวกับการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง
3. นำเอาข้อมูลที่ได้จากข้อ 2. ไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ซึ่งขั้นตอนวิธีเป็นดังต่อไปนี้
4. นำวิธีการที่ได้จากข้อ 3. หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนคอนฟอเมเบิล
5. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ ส่งตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

บทนำ

ในทางคณิตศาสตร์ การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) คือการแปลงเชิงปริพันธ์ที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง แสดงอยู่ในรูป $L[F(t)]$ คือ การดำเนินการของฟังก์ชันดั้งเดิม $F(t)$ นั้นสอดคล้องกับความสัมพันธ์กับการดำเนินการในรูปของ $F(s)$ การแปลงลาปลาซถูกประยุกต์ใช้ในงานสำคัญมากมายที่เป็นแนวคิดทางวิทยาศาสตร์ สำหรับชื่อลาปลาซนี้มาจากชื่อของปีแยร์-ซีมง ลาปลาซ (Pierre-Simon Laplace) ผู้ที่นำการแปลงนี้ไปใช้ในทฤษฎีความน่าจะเป็น ซึ่งมีนิยาม ดังนี้

นิยาม 1.1 ให้ $F(t)$ แทน ฟังก์ชันของ t เมื่อ $t \geq 0$ และ $s \in \mathbb{C}$ เรียก $L[F(t)] = F(s)$ ว่า การแปลงลาปลาซของ $F(t)$ กำหนดโดย

$$L[F(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{1}$$

จากงานวิจัยของ Deshna Loonker และคณะ [4] ได้นำเสนอการแปลงเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ เรียกว่า การแปลงลาปลาซสตีลต์เชส (Laplace – Stieltjes transform) และนำเสนอคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส รวมถึงนำการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสร่วมกับปริพันธ์ สังวัตนาการมาเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์ ซึ่งมีนิยาม ดังนี้

นิยาม 1.2 ให้ $F(t)$ แทน ฟังก์ชันของ t เมื่อ $t \geq 0$ และ $s \in \mathbb{C}$ เรียก $L_s[F(t)] = F^*(s)$ ว่า ลาปลาซสตีลต์เชสของ $F(t)$ กำหนดโดย

$$L_s[F(t)] = F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} d(F(t)) \tag{2}$$

คุณสมบัติที่สำคัญ

1. การแปลงลาปลาซสตีลต์เชสของอนุพันธ์ (Laplace - Stieltjes Transform of Derivative)

   กำหนดโดย

$$L_s(F'(t)) = s[F^*(s) - F(0)] \tag{3}$$

2. เมื่อ $F(t) = t^n$ จะได้ว่า

$$L_s[t^n] = \begin{cases} \dfrac{n!}{s^n} & , \quad n \in I^+, \ s > 0 \\ \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^n} & , \quad n > -1, \ s > 0 \end{cases}$$

3. เมื่อ $F(t)$ และ $G(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t และ α, β เป็นค่าคงที่ ลาปลาซสตีลต์เชสสามารถเขียนในรูปเชิงเส้น ดังนี้

$$L_s[\alpha F(t) + \beta G(t)] = \alpha F^*(s) + \beta G^*(s) \tag{4}$$

4. ความสัมพันธ์ระหว่าง การแปลงลาปลาซ กับ การแปลงลาปลาซสตีลต์เชส คือ

$$L_s[F(t)] = F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = s\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = sL[F(t)] \tag{5}$$

นอกจากนิยามของการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสแล้ว Deshna Loonker และคณะ [4] ได้ศึกษาทฤษฎีบทและคุณสมบัติเกี่ยวกับปริพันธ์สังวัตนาการ มาเพื่อช่วยหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.1 ให้ $L_s[F(t)] = F^*(s)$ และ $L_s[G(t)] = G^*(s)$ ลาปลาซสตีลต์เชสของสังวัตนาการของฟังก์ชัน $F(t)$ และ $G(t)$ กำหนดโดย

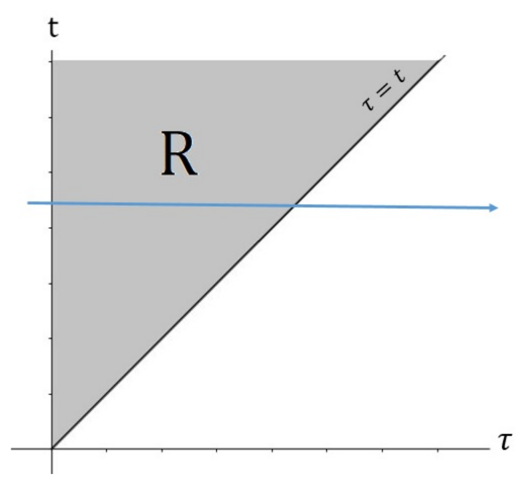
$$L_s[F(t) * G(t)] = \frac{1}{s}F^*(s)G^*(s)$$

พิสูจน์ สังวัตนาการ (convolution) ของฟังก์ชัน $F(t)$ และ $G(t)$ กำหนดโดย

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(t-\tau)G(\tau)d\tau$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส ดังสมการที่ (5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L_s[(F * G)] &= L_s\left[\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)d\tau\right] \\ &= sL\left[\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)d\tau\right] \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)d\tau\right)dt \\ &= s\int_0^\infty \int_0^t e^{-st}F(t-\tau)G(\tau)d\tau dt \end{aligned}$$



เมื่อเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตจากพื้นที่ R ในรูป จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L_s[(F * G)] &= s\int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st}F(t-\tau)G(\tau)dtd\tau \\ &= s\int_0^\infty G(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st}F(t-\tau)dt \end{aligned}$$

ให้ $u = t - \tau$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
L_s[(F * G)] &= s\int_0^\infty G(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)}F(u)du \\
&= s\int_0^\infty G(\tau)(e^{-s\tau})d\tau \int_0^\infty e^{-su}F(u)du \\
&= s\left(L[G(\tau)]\right)\left(L[F(u)]\right) \\
&= s\left(\frac{1}{s}L_s[G(\tau)]\right)\left(\frac{1}{s}L_s[F(u)]\right) \\
&= \left(\frac{1}{s}\right)L_s[G(\tau)]L_s[F(u)] \\
&= \left(\frac{1}{s}\right)G^*(s)F^*(s)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$L_s[(F * G)] = \frac{1}{s}F^*(s)G^*(s) \tag{6}$$

ซึ่งตัวอย่างผลการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสสรุปได้ดังตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 ตารางการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส

$f(t)$	$L_s[f(t)] = F^*(s)$
1	1
t	$\frac{1}{s}$
$t^n,\ n \in \mathbb{I}^+$	$\frac{n!}{s^n},\ s > 0$
$t^n,\ n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^n},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s^2}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{as}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$s[F^*(s) - f(0)]$
$f''(t)$	$s[s^2F^*(s) - sf(0) - f'(0)]$

วิธีการดำเนินการวิจัย

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

Boyce [3] ได้ให้นิยามของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในรูปตัวแปรตาม $x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_n$ เขียนแทนด้วยสมการในรูปของ

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \end{aligned} \tag{7}$$

และมีผลเฉลยคือ

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), ...,\ x_n = x_n(t) \tag{8}$$

ถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x_1(t_0) = k_1,\ x_2(t_{t_0}) = k_2, ...,\ x_n(t_0) = k_n \tag{9}$$

ระบบสมการร่วมกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ก็คือปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

จากสมการที่ (7) ถ้า $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนั้น สมการ (7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + ... + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + a_{n3}(t)x_3 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \tag{10}$$

เมื่อ a_{ij}, b_i เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ สมการที่ (10) เรียกว่า ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เรียก a_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ของระบบสมการ ถ้าทุกฟังก์ชัน b_i เป็นศูนย์แล้ว เราเรียกสมการที่ (10) ว่า **ระบบสมการเอกพันธุ์** และถ้ามีอย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชัน b_i ไม่เป็นศูนย์ เราเรียกว่า **ระบบสมการไม่เอกพันธุ์**

ในงานวิจัยนี้จะใช้ผลการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง อนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวสองสมการที่มี x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรตาม

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t)\\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t)\end{aligned} \tag{11}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x_1(0) = k_1,\ x_2(0) = k_2 \tag{12}$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสระบบสมการที่ (11) และให้

$$sX_1(s) = L_s[x_1],\ sX_2(s) = L_s[x_2],\ sB_1 = L_s[b_1(t)],\ sB_2(s) = L_s[b_2(t)]$$

จากระบบสมการที่ (11) ดำเนินการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส จะได้ว่า

$$\begin{aligned}s\left[sX_1(s) - x_1(0)\right] &= a_{11}[sX_1(s)] + a_{12}[sX_2(s)] + sB_1(s)\\ s\left[sX_2(s) - x_2(0)\right] &= a_{21}[sX_1(s)] + a_{22}[sX_2(s)] + sB_2(s)\end{aligned} \tag{13}$$

แทนค่าเงื่อนไขค่าเริ่มต้นสมการที่ (12) ลงในระบบสมการที่ (13) จะได้

$$\begin{aligned}s^2X_1(s) - sk_1 &= a_{11}[sX_1(s)] + a_{12}[sX_2(s)] + sB_1(s)\\ s^2X_2(s) - sk_2 &= a_{21}[sX_1(s)] + a_{22}[sX_2(s)] + sB_2(s)\end{aligned} \tag{14}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\begin{aligned}(s^2 - a_{11}s)X_1(s) + (-a_{12}s)X_2(s) &= sk_1 + sB_1(s)\\ (-a_{21}s)X_1(s) + (s^2 - a_{22}s)X_2(s) &= sk_2 + sB_2(s)\end{aligned} \tag{15}$$

ถ้า $s^4 - (a_{22} + a_{11})s^3 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})s^2 \neq 0$ แล้ว ระบบสมการที่ (14) จะสามารถหาผลเฉลยได้เป็น

$$X_1(s) = \frac{(sk_1 + sB_1(s))(s^2 - a_{22}s) - (a_{12}s)(sk_2 + sB_2(s))}{(s^2 - a_{11}s)(-a_{22}s) - (-a_{12}s)(-a_{21}s)} \tag{16}$$

และ

$$X_2(s) = \frac{(s^2 - a_{11}s)(sk_2 + sB_2(s)) - (sk_1 + sB_1(s))(-a_{21}s)}{(s^2 - a_{11}s)(-a_{22}s) - (-a_{12}s)(-a_{21}s)} \tag{17}$$

สามารถหาค่าของ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ ของระบบสมการที่ (11) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่ (12) ได้โดยดำเนินการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสผกผันของ $X_1(s)$ จากสมการที่ (16) และ $X_2(s)$ จากสมการที่ (17)

สำหรับระบบสมการเชิงปริพันธ์ก็จะทำได้ในทำนองเดียวกันกับที่ได้กล่าวมา ซึ่งตัวอย่างการหาผลเฉลยของระบบสมการ

เชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์

3 ผลการวิจัย

จากวิธีที่นำเสนอจะนำวิธีดังกล่าวมาใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการ เชิง (ปริพันธ์-) อนุพันธ์ โดยตัวอย่างที่ 1 และ ตัวอย่างที่ 2 เป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสอง ตามลำดับ และตัวอย่างที่ 3 เป็นการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ โดยการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 และคุณสมบัติของสังวัตนาการร่วมกับการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ

ตัวอย่างที่ 1 แสดงการหาผลเฉลย $x(t)$ และ $y(t)$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (Montri Thongmoon และ คณะ 2010)

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy}{dt} + x(t) + y(t) = 1 \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) + 2x(t) \end{aligned} \tag{18}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

วิธีทำ ดำเนินการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสทั้งสองข้างของระบบสมการที่ (18) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L_s[x'(t)] + L_s[y'(t)] + L_s[x(t)] + L_s[y(t) = L_s[1] \\ L_s[y'(t)] - 2L_s[x(t)] - L_s[y(t)] = L_s[0] \end{aligned} \tag{19}$$

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงลาปลาซกับการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sL[x'(t)] + sL[y'(t)] + sL[x(t)] + sL[y(t)] = sL[1] \\ sL[y'(t)] - 2sL[x(t)] - sL[y((t)] = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} s[sX(s) - x(0)] + s[sY(s) - y(0)] + sX(s) + sY(s) = s\left(\frac{1}{s}\right) \\ s[sY(s) - y(0)] - 2s[X(s)] - s[Y(s)] = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น และ ทำการจัดรูประบบสมการที่ (21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(s^2+s)X(s)+(s^2+s)Y(s)&=s+1\\(-2s)X(s)+(s^2+s)Y(s)&=s\end{aligned} \qquad (22)$$

หาค่า $X(s)$ และ $Y(s)$ จากระบบสมการที่ (22) โดยใช้กฎของคราเมอร์

จะได้ว่า

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix}s+1 & s^2+s\\ s & s^2-s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+s & s^2+s\\ -2s & s^2-s\end{vmatrix}}=\frac{-s^2-s}{s^4+2s^2+s^2}=-\frac{1}{s(s+1)}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s^2+s & s+1\\ -2s & s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+s & s^2+s\\ -2s & s^2-s\end{vmatrix}}=\frac{s^3+3s^2+2s}{s^4+2s^2+s^2}=-\frac{s+2}{s(s+1)}$$

ดำเนินการแยกเศษส่วนย่อยของ $X(s)$ และ $Y(s)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}X(s)&=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\\Y(s)&=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s(s+1)}\end{aligned}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซผกผันของ $X(s)$ และ $Y(s)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-t}-t\\y(t)&=-e^{-t}+2t\end{aligned}$$

เป็นผลเฉลยของระบบสมการที่ (18) ซึ่งมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากใช้วิธีการแปลงลาปลาซ (Montri Thongmoon และ คณะ 2010)

□

ตัวอย่างที่ 2 แสดงการหาผลเฉลย $x(t)$ และ $y(t)$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง (Montri Thongmoon และ คณะ 2010)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + y(t) = 1$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0 \tag{23}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$

วิธีทำ ดำเนินการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสทั้งสองข้างของระบบสมการที่ (23) จะได้ว่า

$$L_s[x''(t)] + L_s[y(t)] = L_s[1]$$
$$L_s[y''(t)] + L_s[x(t)] = L_s[0] \tag{24}$$

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงลาปลาซกับการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส

$$s(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + sY(s) = 1$$
$$s(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + sX(s) = 0 \tag{25}$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$ และจัดรูประบบสมการที่ (25) จะได้ว่า

$$s^3X(s) + sY(s) = 1$$
$$sX(s) + s^3Y(s) = 0 \tag{26}$$

หาค่า $X(s)$ และ $Y(s)$ จากระบบสมการที่ (26) โดยใช้กฎของคราเมอร์ และใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อยเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+1}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{s+1}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{s-1}) \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+1}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{s+1}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{s-1}) \end{aligned}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซผกผันของ $X(s)$ และ $Y(s)$ จะได้ว่า

$$x(t) = -\frac{1}{2}(\cos t) + \frac{1}{4}(e^{-t}) + \frac{1}{4}e^t$$
$$y(t) = 1 - \frac{\cos t}{2} - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{4}$$

เป็นผลเฉลยของระบบสมการที่ (23) ซึ่งมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรงโดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ (Montri Thongmoon และคณะ 2010)

□

ตัวอย่างที่ 4.3 แสดงการหาผลเฉลย $f(t)$ และ $g(t)$ ของระบบสมการเชิง(ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ (Montri Thongmoon และ คณะ 2010)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 + t + t^2 - g(t) - \int_0^t (f(\tau) + g(\tau))d\tau \\ g'(t) &= -1 - t + f(t) - \int_0^t (f(\tau) - g(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{27}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $f(0) = 1$, $g(0) = -1$

วิธีทำ จากสมการที่ (27) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 + t + t^2 - g(t) - \int_0^t f(\tau)d\tau - \int_0^t g(\tau)d\tau \\ g'(t) &= -1 - t + f(t) - \int_0^t f(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{28}$$

จากระบบสมการที่ (28) สามารถเขียนพจน์ของปริพันธ์ให้อยู่ในรูปสังวัตนาการได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 + t + t^2 - g(t) - (1 * f(t)) - (1 * g(t)) \\ g'(t) &= -1 - t + f(t) - (1 * f(t)) + (1 * g(t)) \end{aligned} \tag{29}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสทั้งสองข้างของระบบสมการที่ (29) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L_s[f'(t)] &= L_s[1] + L_s[t] + L_s[t^2] - L_s[g(t)] - L_s[1 * f(t)] - L_s[1 * g(t)] \\ L_s[g'(t)] &= L_s[-1] - L_s[t] + L_s[f(t)] - L_s[1 * f(t)] + L_s[1 * g(t)] \end{aligned} \tag{30}$$

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงลาปลาซกับการแปลงลาปลาซสตีลต์เชส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sL[f'(t)] &= sL[1] + sL[t] + sL[t^2] - sL[g(t)] - \left(\frac{1}{s}\cdot L_s[1]\cdot L_s[f(t)]\right) - \left(\frac{1}{s}\cdot L_s[1]\cdot L_s[g(t)]\right) \\ sL[g'(t)] &= sL[-1] - sL[t] + sL[f(t)] - \left(\frac{1}{s}\cdot L_s[1]\cdot L_s[f(t)]\right) + \left(\frac{1}{s}\cdot L_s[1]\cdot L_s[g(t)]\right) \end{aligned} \tag{31}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซและลาปลาซสตีลต์เชส ในระบบสมการที่ (31) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} s(sF(s) - f(0)) =& s\left(\frac{1}{s}\right) + s\left(\frac{1}{s^2}\right) + s\left(\frac{2}{s^3}\right) - sG(s) - \left[\frac{1}{s}\cdot s\left(\frac{1}{s}\right)\cdot sF(s)\right] - \left[\frac{1}{s}\cdot s\left(\frac{1}{s}\right)\cdot sG(s)\right] \\ s(sG(s) - g(0)) =& - s\left(\frac{1}{s}\right) - s\left(\frac{1}{s^2}\right) + sF(s) - \left[\frac{1}{s}\cdot s\left(\frac{1}{s}\right)\cdot sF(s)\right] + \left[\frac{1}{s}\cdot s\left(\frac{1}{s}\right)\cdot sG(s)\right] \end{aligned} \tag{32}$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $f(0) = 1,\ g(0) = -1$ และจัดรูประบบสมการที่ (32) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (s^2+1)F(s) + (s+1)G(s) &= 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + s \\ (s-1)F(s) + (1-s^2)G(s) &= s + 1 + \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{33}$$

หาค่า $F(s)$ และ $G(s)$ จากระบบสมการที่ (33) โดยใช้กฎของคราเมอร์ และใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อยเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1 และ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \\ G(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ และ $G(s)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(t) &= t + e^t \\ g(t) &= t - e^t \end{aligned}$$

เป็นผลเฉลยของระบบสมการที่ (27) ซึ่งมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรงโดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ (Montri Thongmoon และคณะ 2010) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเดียวกันคือ $f(0) = 1$, $g(0) = -1$

□

4 สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีการใหม่เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ โดยใช้วิธีการใช้การแปลงลาปลาซสตีลต์เชสร่วมกับคุณสมบัติที่สำคัญของสังวัตนาการคือการแปลงพจน์ของปริพันธ์ให้อยู่ในรูปของสังวัตนาการ และใช้ทฤษฎีบทความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงลาปลาซสตีลต์เชสกับสังวัตนาการ อีกทั้งยังใช้กฎของคราเมอร์ เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าว ซึ่งจากตัวอย่างที่ได้จากงานวิจัยนี้ ผลเฉลยที่ได้เป็นแบบแม่นตรง แต่อย่างไรก็ตาม

5 ข้อเสนอแนะ

วิธีการที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำพัฒนาต่อยอดในการนำไปใช้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิง (ปริพันธ์ -) อนุพันธ์ ที่มีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเท่านั้น ในกรณีที่เป็นเงื่อนไขค่าขอบ อาจใช้วิธีการอื่น ๆ เช่น วิธีเชิงตัวเลข หรือ วิธีการประมาณค่าของคำตอบ เป็นต้น

6 ผลผลิต (Output)

6.1 ผลงานตีพิมพ์

ผลงานวิจัยกำลังส่งตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ The Armenian Journal of Mathematics ในฐานข้อมูล SCOPUS SJR Q_4

6.2 การผลิตบัณฑิต

1. นางสาววิภาวี บริบูรณ์

   นิสิตระดับปริญญาตรี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังศึกษาชั้นปีที่ 4 ในปีการศึกษา 2563

7 บรรณานุกรม (Bibliography)

[1] Ahmad, J., Bibi, Z., & Noor, K. (2014) Laplace decomposition method using he's polynomial to bergers equation, Journal of science and arts, 2(27), 131-138

[2] Belgacem & Karaballi. (2015). Sumudu transform fundamenfal properties investigations and applications, Journal of Applied Mathematics and stochastic Analysis, 1-23

[3] Boyce, W. E., & Diprima, R. C. (2005). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (8th ed.). John Wiley & Son

[4] Deshna Loonker. (2016) Solution of integral equations and Laplace - Stieltjes transform, Palestine Journal of Mathematics, 5(1), 43 - 49

[5] Elzaki, T. M., Elzaki, S. M. & Eman M. A. Hilal. (2012). Elzaki and Sumudu transform for solving some differential equations, Global Journal of pure and Applied Mathematics, 8(2), 167-173

[6] Khan, M., Hussain, M., Jafari, H., & Khan, Y. (2010) Application of laplace decomposition method to solve nonlinear coupled partial differential equations, World applied sciences journal 9 (special issue of applied math), 13-19.

[7] Khan, Y. & Wu, Q. (2011). Homotopy Perturbation transform method for nonlinear equations using He's Polynomial, Journal homepage:www.elsevier.com /locate/camma, 1963-1967

[8] Lamb, GL. (1995) Introductory Applications of Partial Differential Equations with Emphasis on Wave Propagation and Diffusion, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1995.

[9] Montri Thongmoon. (2010) The numerical solutions of differential transform method and the Laplace transform method for a system of differential equations, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 4, 425 - 431

[10] Myint, UT. (1980) Differential Equations of Mathematical Physics, American Elsevier, New York, NY, USA

[11] Rawashdeh, M. S., & Maitama, S. (2014) Solving coupled system of nonlinear pde's using the natural decomposition method, International journal of pure and applied mathematics, 92(5), 757-776.

[12] Rawashdeh, M.S. & Maitama, S. (2015). Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM, Journal of Applied Analysis and Computation, 5(1), 77-88.

[13] Ziane, D., & Cherif, H. (2015) Resolution of nonlinear partial differential equations by elzaki transform decomposition method, Journal of approximation theory and applied mathematics, 5, 17-30.