



รายงานฉบับสมบูรณ์สำหรับงานวิจัยเรื่อง

การวิเคราะห์ความไม่เสถียรของโซลิตอนแบบบีบในโฟโตนิกส์คริสตอลจากซิลิกอน

The unstable analysis of soliton compression in Silicon photonic crystal

โดย

ศรัณย์ ภิบาลขันธ์

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้
(เงินอุดหนุนจากรัฐบาล) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561
มหาวิทยาลัยบูรพา

รายงานฉบับสมบูรณ์

การวิเคราะห์ความไม่เสถียรของโซลิตอนแบบบีบในไฟโตนิกส์คริสตอลจากซิลิกอน

ศรัณย์ ภิบาลขันธ์

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์

มหาวิทยาลัยบูรพา

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล
(งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561 มหาวิทยาลัยบูรพา
ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 222/2561

บทคัดย่อ

ผลเฉลยโซลิตอนของสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่มีการรบกวนสำหรับบรรยายคลื่นที่เคลื่อนที่ในโฟโตนิกคริสตัลจะสามารถได้จากวิธีการกระจายไซดโกร์ดอนซึ่งจะสามารถหาโซลิตอนแบบ สว่าง และ มืดได้ ความไม่เสถียรของโซลิตอนจากการรบกวนในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่นจะแสดงได้จากอัตราการเพิ่ม

Soliton solution to the perturbed nonlinear Schrödinger equation, for describing the wave in the photonic crystal, can be found by the sine-Gordon expansion method. This method provides both bright and dark soliton solutions. The instability of the perturbed soliton in the perpendicular direction to the wave motion will be shown from the growth rate.

สารบัญ

1	บทนำ	3
1.1	โซลิตอน	3
1.2	การชนกันระหว่างโซลิตอนสองตัว	5
2	การหาผลเฉลยโซลิตอนเชิงสัญลักษณ์	9
3	การรบกวนของจากคลื่นความยาวสูงในแนวตั้งฉาก	14

สารบัญรูป

1.1	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25, x_0 = 0, V = 0.25$. . .	4
1.2	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$. . .	4
1.3	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$. . .	5
1.4	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ KdV โดยใช้ $\eta_1 = 0.25, x_{01} = 0, V_1 = 0.25, \eta_2 = 0.4, x_{02} = -20, V_2 = 0.64$	6
1.5	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.4, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$	6
1.6	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.5, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$	7
1.7	แสดงมุมมองแนวสูงโดยใช้เงื่อนไขเดียวกับรูป 1.6	7
2.1	การวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลย (2.5) โดย $c = \eta = 0.5$	12
2.2	การวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลย (2.6) โดย $c = \eta = 0.5$	12
2.3	การวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลย (2.5) 2 ตัว โดยทั้งสองใช้ $c = 0.65, \eta = 0.5$	13
3.1	ผลอัตราการเพิ่ม	16

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการรายงานภาพรวมของโซลิตอนที่อยู่ในโฟโตนิกส์คริสตอล และ โมเดลที่ใช้บรรยายโซลิตอน

1.1 โซลิตอน

คลื่นน้ำที่เกิดจากการรบกวนอย่างแรงจะมีโอกาสเกิดคลื่นที่เคลื่อนที่โดยไม่มีการลดลงของความสูงของคลื่นตลอดการเคลื่อนที่ หลังจากถูกรบกวนแล้ว ซึ่งเป็นการค้นพบครั้งแรกโดย John Scott Russell [1] ซึ่งต่อมาได้มีนักวิทยาศาสตร์ได้สร้าง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการบรรยายคลื่นดังกล่าว และ เรียกนี้ว่า Korteweg-de Vries (KdV) ตามชื่อผู้นำเสนอ [1] โดยมีลักษณะเป็น

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

โดยตัวห้อย t และ x แสดงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา และ อวกาศ (space) เทอมที่สองแสดงความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinearity) และ เทอมสุดท้ายแสดง ลักษณะการกระจายตัว (dispersion) ของคลื่น นอกจากนี้จะสามารถหาได้จากคลื่นน้ำ บริเวณชายฝั่ง แล้ว (1.1) ยังสามารถหาได้จากตัวกลางพลาสมาเช่นกัน [2] ผลเฉลยของสมการ KdV (1.1) แสดงถึงการวิวัฒน์ตามเวลาของความสูงของคลื่น KdV แบบ traveling wave สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi(x, t) = 12\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x_0)$$

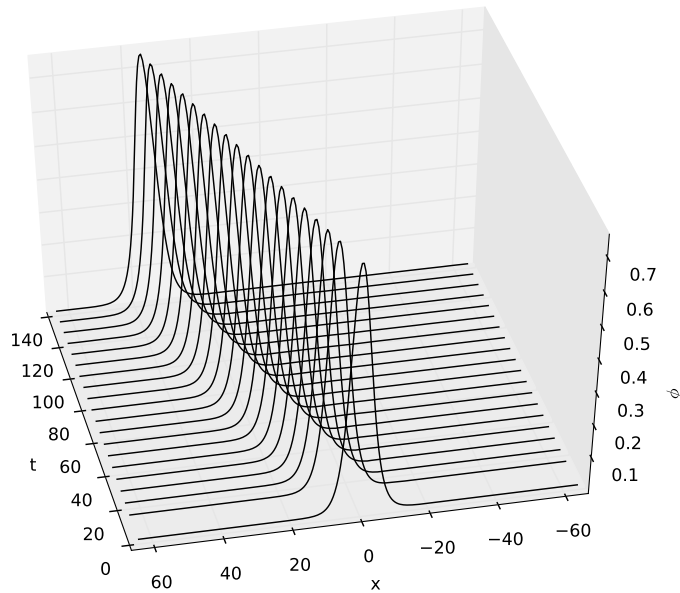
ซึ่ง η เป็นค่าคงที่ และ V แสดงอัตราเร็วของคลื่น รูปที่ 1.1 แสดงการเคลื่อนที่ของโซลิตอนจากสมการ (1.1) ที่ความสูงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะเคลื่อนที่ นอกจากนี้สมการ KdV แล้วยังมีสมการไม่เชิงเส้นอีกรูปหนึ่งซึ่ง สามารถให้ผลเฉลยในรูปของฟังก์ชันที่บรรยายคลื่นโซลิตอนซึ่งรู้จักในชื่อ สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้น (nonlinear Schrödinger equation) ซึ่งจะถูกใช้ในการบรรยายคลื่นโซลิตอนในไฟเบอร์ โยแก้วนำแสง โดยสมการจะถูกเรียกว่า cubic nonlinear Schrödinger equation (cnLS) [3]

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0 \quad (1.2)$$

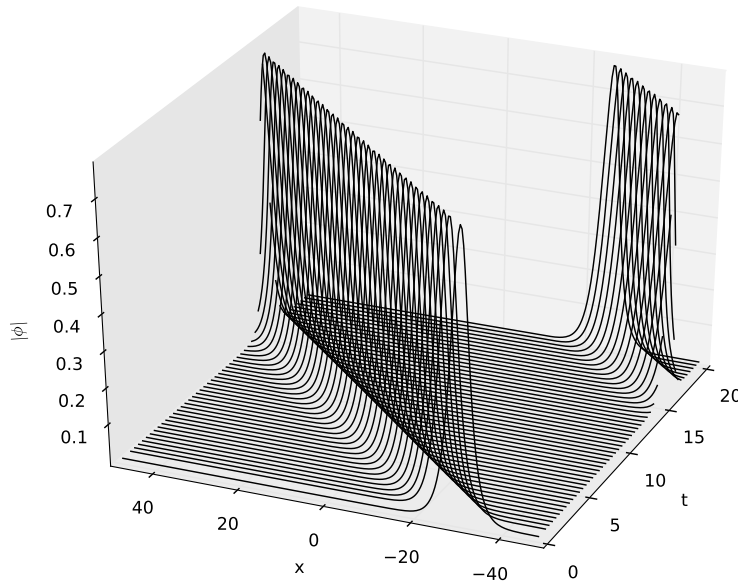
ผลเฉลยของสมการ (1.2) ในรูปของ traveling wave จะเขียนได้เป็น

$$\phi(x, t) = \sqrt{2}\eta \operatorname{sech} \eta(x - Vt - x_0) e^{i(xV/2 - Vt)}$$

โดย V แสดงอัตราเร็วของโซลิตอน และ η เป็นค่าคงที่ รูปที่ 1.2 แสดงการวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลยของสมการ cnLS ด้วย



รูปที่ 1.1: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25, x_0 = 0, V = 0.25$



รูปที่ 1.2: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$

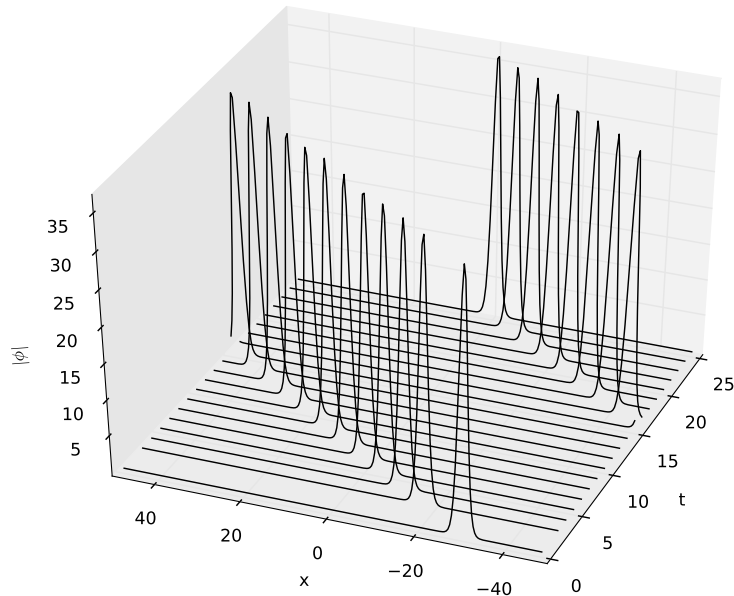
วิธีการหาผลเฉลยแบบ traveling wave solution จะทำให้เราสามารถหารูปของ ผลเฉลยที่เป็นโซลิตอนออกมาได้ สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่บรรยายการสั่นของประจุบวก ในสถานพลาสมาที่มีประจุลบวิ่งอยู่รอบๆ [4] จะเขียนอยู่ในรูป

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^{1/2}\phi = 0 \quad (1.3)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.3) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\phi(x, t) = 400\eta^4 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x_0) e^{i(xV/2 - Vt)}$$

และ การวิวัฒน์ของโซลิตอนนี้แสดงในรูป 1.3 สำหรับการที่เราจะเรียกคลื่นโซลิตอนว่าโซลิตอน เราจะต้องแสดงให้เห็นว่าคลื่น



รูปที่ 1.3: การวิวัฒนาการของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$

ดังกล่าว มีคุณสมบัติความเป็นอนุภาค กล่าวคือเมื่อคลื่นวิ่งชนกันแล้ว (การรวมกันแบบไม่เชิงเส้น) จะกลับมาเป็นคลื่นแบบเดิม และ การแสดง คุณสมบัติลักษณะนี้เราสามารถทำได้ง่าย ๆ โดยการให้คลื่นวิ่งชนกันในแบบจำลอง

1.2 การชนกันระหว่างโซลิตอนสองตัว

ปรากฏการณ์อย่างหนึ่งที่สำคัญซึ่งทำให้โซลิตอนแตกต่างจากคลื่นแบบอื่น ๆ คือการชนกัน (collision) โดยจะได้โซลิตอนลักษณะเดิมกลับมาหลังจากชนกันแล้ว ดังแสดงให้ดูตามรูปที่ 1.4 โดยใช้ เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

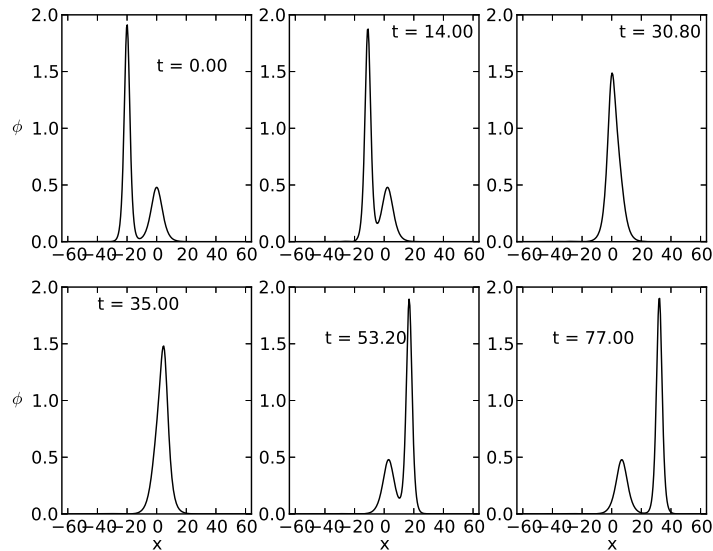
$$\phi(x, t) = 12\eta_1^2 \operatorname{sech}^2 \eta_1(x - V_1t - x_{01}) + 12\eta_2^2 \operatorname{sech}^2 \eta_2(x - V_2t - x_{02})$$

จากค่าเริ่มต้นต่างๆ อัตราเร็วของคลื่นโซลิตอนไม่เร็วมากทำให้มีเวลาในการศึกษาพฤติกรรมระหว่างชนกันนาน ขึ้น โดยจะสังเกตเห็นว่าการชนกันระหว่างคลื่นโซลิตอนในช่วงเวลาที่ 30.8 ถึง 35 ไม่ใช่เป็นการ รวมกันแบบ superposition เหมือนคลื่นเชิงเส้นทั่วไป เพราะความสูงของคลื่นทั้งสองขณะชนกัน ($t = 30.8$) นำความสูงของคลื่นทั้งสองมารวมกัน ความสูงของคลื่นจะลดลง แต่หลังจากชนกันแล้ว ความสูงของคลื่นโซลิตอนจะกลับมาเป็นแบบเดิม ลักษณะการชนแบบนี้เราจะเรียกว่าชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision) และทำให้เราเรียกคลื่นโซลิตอนอีกชื่อหนึ่งว่าคลื่นโซลิตอนนั่นเอง สำหรับสมการ cNLS เราจะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

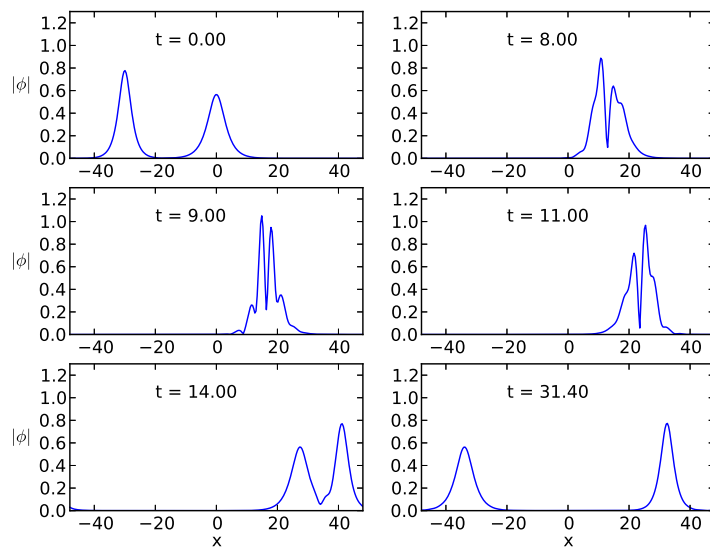
$$\phi(x, t) = \sqrt{2}\eta_1^2 \operatorname{sech} \eta_1(x - x_{01}) e^{ixV_1/2} + \sqrt{2}\eta_2^2 \operatorname{sech} \eta_2(x - x_{02}) e^{ixV_1/2}$$

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะแสดงในรูป 1.5 สำหรับเงื่อนไขนี้ความสูงของคลื่นโซลิตอนไม่ขึ้นกับอัตราเร็ว เราจำเป็นต้องกำหนด อัตราเร็วของคลื่นเอง และ สมการที่เราสนใจในกรณีหนึ่งมิติ จะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$\phi(x, t) = 400\eta_1^4 \operatorname{sech}^4 \eta_1(x - x_{01}) e^{ixV_1/2} + 400\eta_2^4 \operatorname{sech}^4 \eta_2(x - x_{02}) e^{ixV_1/2}$$

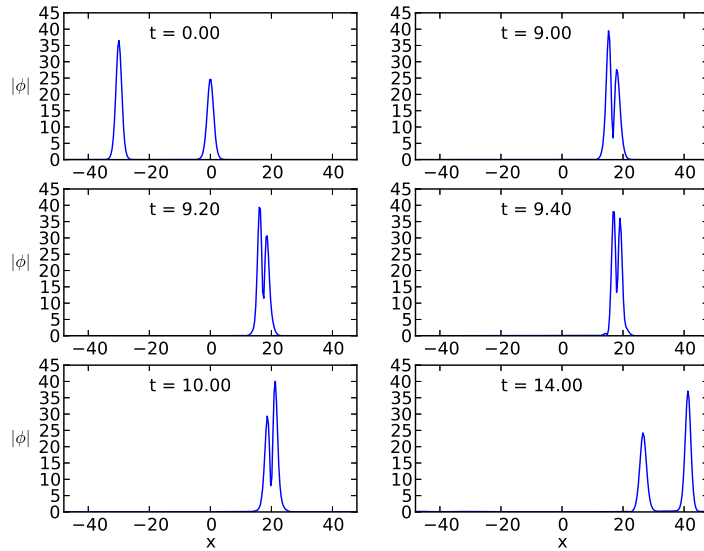


รูปที่ 1.4: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ KdV โดยใช้ $\eta_1 = 0.25, x_{01} = 0, V_1 = 0.25, \eta_2 = 0.4, x_{02} = -20, V_2 = 0.64$

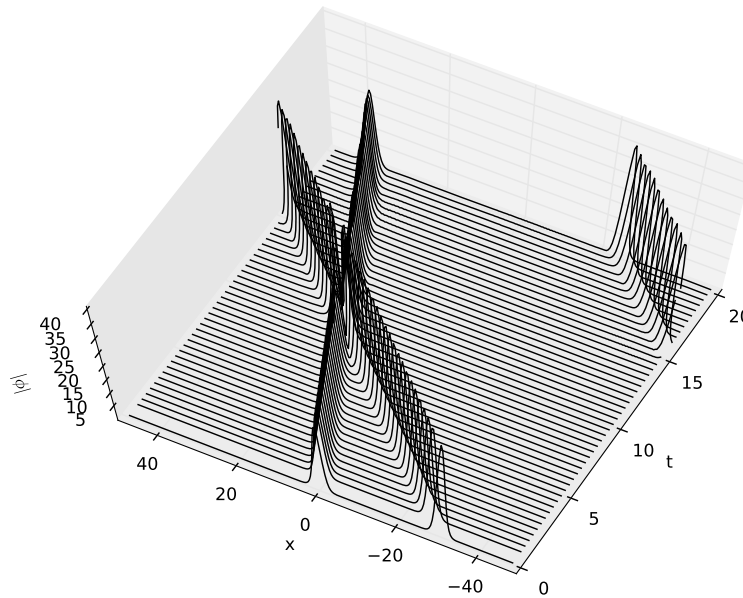


รูปที่ 1.5: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.4, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการชนกันจะแสดงในรูป 1.6 สำหรับรูปที่ 1.7 แสดงเหตุการณ์ทั้งหมดใน 3 มิติ เราจะพบว่าสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นถูกใช้บรรยายสัญญาณที่อยู่ในใยแก้วนำแสง ซึ่งถ้าเราสามารถนำสัญญาณในรูปของโซลิตอน หรือ คลื่นโซลิตารีใส่ เข้าไปในใยแก้วนำแสง ก็จะมีโอกาสที่จะทำให้สัญญาณ หรือ ข้อมูลที่ถูกส่งไปไม่สูญเสียระหว่างการเดินทาง หรือ เพิ่มระยะทางการกระตุ้นสัญญาณให้ยังคงเป็น โซลิตอนเพื่อลดค่าใช้จ่าย หรือ ด้วยเหตุผลอื่นๆทางวิศวกรรม นอกเหนือจากนี้การประยุกต์ใช้สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นในการบรรยายพฤติกรรมของแสงที่วิ่งอยู่ในระบบที่



รูปที่ 1.6: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.5, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$



รูปที่ 1.7: แสดงมุมมองแนวสูงโดยใช้เงื่อนไขเดียวกับรูป 1.6

มีพลังงานศักย์แบบมีคาบ (periodic potential energy) [5, 6, 7] เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าวิ่งเข้าไป ในบริเวณที่มีการเรียงกันของศักย์แบบมีคาบ โดยใช้การบรรยายแบบฟังก์ชัน Bloch (Bloch function) จะทำให้ได้สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้น [8] เมื่อตัวกลางมีค่าดัชนีหักเหเป็นแบบมีคาบ

$$ia_t(z, t) + a_{zz}(z, t) + |a(z, t)|^2 a(z, t) = 0$$

เมื่อ $a(z, t)$ เป็นความสูงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ เคลื่อนที่ในใยแก้ว และ สำหรับการทดลองที่ แสดงว่ามีโซลิตอนในโฟโตนิกส์คริสตอล [9] และ การหาสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นในรูปแบบที่ใกล้

เคียงกับระบบจริงๆ [10]

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\alpha_1}{2}A - i\frac{\beta_2}{2}A_{tt} + \frac{\beta_3}{6}A_{ttt} + (i\gamma_{\text{eff}} - \alpha_{\text{TPA,eff}})|A|^2A + (ik_0k_{c,\text{eff}} - \frac{\sigma_{\text{eff}}}{2})N_cA$$

โดยตัวแปรต่างๆเป็นค่าคงที่ตามเงื่อนไขการทดลอง [9] และ A เป็นความสูงของสัญญาณ นอกจากนี้การพิจารณาโซลิตอนในโฟโตนิกส์คริสตอล โดยที่พิจารณาศักย์ในแบบของ Kronig-Penney [11] จะทำให้ได้สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นใน 1 มิติ เขียนอยู่ในรูปของ

$$i\psi_t + \psi_{xx} + W(x)(1 + |\psi|^2)\psi = 0$$

โดย $w(x)$ เป็นฟังก์ชันของระยะห่างของโครงสร้าง สมการนี้จะอธิบายได้คล้ายกับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่มีการรบกวน เพื่อให้ง่ายแต่ยังเป็นโครงสร้าง ที่ใช้อธิบายโซลิตอนในโฟโตนิกส์คริสตอล เราจะพิจารณา [12]

$$i\psi_t + \psi_{xx} + (1 + |\psi|^2)\psi = 0. \quad (1.4)$$

สำหรับศึกษาผลเฉลยเชิงสัญลักษณ์ของสมการ (1.4) ที่ทำให้เป็นไม่มีมิติ (dimensionless) และการรบกวนเพื่อดูว่าความยาวช่วงใดที่จะทำให้ผลเฉลยไม่เสถียร รวมทั้งมีโอกาสที่จะผลเฉลยจะเสถียรหรือไม่ตามเงื่อนไขการรบกวน

บทที่ 2

การหาผลเฉลยโซลิตอนเชิงสัญลักษณ์

การหาผลเฉลยโซลิตอนของสมการไม่เชิงเส้นวิวัฒนาการตามเวลา (time evolution nonlinear equation) สามารถทำได้โดยการแทนฟังก์ชันที่บรรยายชนิดของโซลิตอนไม่ว่าจะเป็น pulse และ kink ซึ่งการหาผลเฉลยในลักษณะนี้เราอาจเรียกกระบวนการนี้ว่าเป็นการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ (symbolic computation) โดยหลักการจะเหมือนกับการใช้อนุกรม (series) แทนค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ในตรงกัน แนวคิดนี้ได้ถูกเสนอจาก Malfliet [13] โดยการใช้ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเป็นฟังก์ชันของอนุกรม อย่างไรก็ตามเราจะใช้แนวคิดของ [14] ซึ่งใช้ผลเฉลยของสมการ sine-Gordon [15] มาเป็นฟังก์ชันของอนุกรม

สมการ sine-Gordon และ การหาผลเฉลย

$$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin(u) \quad (2.1)$$

โดย $u = u(x, t)$ และ m เป็นค่าคงที่ หนึ่งในผลเฉลยของสมการนี้เป็นฟังก์ชันที่สามารถใช้บรรยายโซลิตอนได้ ทำให้ได้รับความสนใจจากนักวิทยาศาสตร์หลายคน การหาผลเฉลยโซลิตอนของสมการ (2.1) จะใช้การแปลงตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\xi = \eta(x - ct)$$

เมื่อ c เป็นอัตราเร็วของคลื่น เมื่อแทนลงในสมการ (2.1) จะพบว่า

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{m^2}{\eta^2(1 - c^2)} \sin u$$

อินทิเกรตเทียบกับ u หนึ่งครั้งจะพบว่า

$$\left(\frac{u_\xi}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{\eta^2(1 - c^2)} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) + d$$

โดย d เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต เมื่อพิจารณาเงื่อนไขของโซลิตอน ($u = 0, u_\xi = 0$) จะพบว่า $d = 0$ ก่อนที่จะหาผลเฉลย เราจะเปลี่ยนตัวแปรอีกครั้ง เพื่อความสะดวก โดย $a^2 =$

$m^2/(\eta^2(1 - c^2))$ และ $w = u/2$ ดังนั้น

$$\left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 = a^2 \sin^2 w$$

เมื่ออินทิเกรตเทียบกับ ξ อีกครั้งจะพบว่า

$$\csc w + \cot w = e^{-a(\xi - \xi_0)}$$

เมื่อ ξ_0 เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต หรือ

$$\cot \frac{w}{2} = e^{-a(\xi - \xi_0)}$$

จากความสัมพันธ์นี้ จะทำให้เราสามารถบรรยาย w ในเทอมของ ξ ได้เป็น

$$\sin w = \operatorname{sech} a(\xi - \xi_0)$$

$$\cos w = \tanh a(\xi - \xi_0)$$

เราสามารถเขียนอนุกรมในเทอมของฟังก์ชัน ไฮเปอร์โบลิกผ่านทางฟังก์ชันตรีโกณฯ และ เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้ $a = 1$ ดังนั้น อนุกรมสำหรับคำตอบของ สมการจะสามารถเขียนได้เป็น

$$u(w) = \sum_{j=1}^n n \cos^{j-1} w [B_j \sin w + A_j \cos w] + A_0 \quad (2.2)$$

การหาค่า n จะใช้การเท่ากันของอันดับ (degree) ระหว่างเทอมที่มีอนุพันธ์สูงสุดกับ อันดับของเทอมที่เป็นไม่เชิงเส้น ถ้ากำหนดให้ D แทนค่าของอันดับของ ฟังก์ชันใดๆ

$$D(\sin^2 w + 3 \cos w) = 2$$

เพราะอันดับสูงสุดของฟังก์ชันนี้เป็น 2 ในขณะที่ฟังก์ชันที่มี

$$D\left(\frac{d^2}{dw^2}(\sin^2 w + 3 \cos w)\right) = 4$$

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณฯเมื่อหาอนุพันธ์ จะไม่ทำให้อันดับลดลงไป แต่จะเพิ่มขึ้นตามจำนวนครั้งที่หาอนุพันธ์ ต่อไปจะพิจารณาสมการ (1.4) โดยพิจารณาการแปลงตามความสัมพันธ์

$$\xi = \eta(x - ct)$$

และ

$$\psi(x, t) = u(\xi) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.3)$$

แทน (2.3) ใน (1.4) โดยจะแบ่งออกเป็นเทอมที่เป็นจำนวนจินตภาพจะเขียนได้เป็น

$$k = \frac{c}{2}$$

และ เทอมที่เป็นจำนวนจริง

$$\eta^2 u_{\xi\xi} + (1 + |u|^2)u - (\omega + k^2)u = 0. \quad (2.4)$$

เมื่อพิจารณาการทำกันของอันดับ (degree) ของเทอมแรก และ เทอมที่สามของ (2.4) เมื่อแทน (2.2) จะพบว่า

$$D(u_{\xi\xi}) = n + 2 \quad \text{และ} \quad D(u^3) = 3n$$

และ ทำให้ $n = 1$ หรือ อนุกรมที่เราจะต้องใช้ในกรณีนี้คือ

$$u(\xi) = B_1 \sin(w(\xi)) + A_1 \cos(w(\xi)) + A_0$$

จะเทียบสัมประสิทธิ์ในหน้าฟังก์ชันตรีโกณฯ ซึ่งจะพบว่า ค่าคงที่

$$A_0 + A_0^3 + 3A_0B_1^2 - A_0k^2 + A_0\omega = 0$$

$\cos(w(\xi))$:

$$-A_1 + 3A_0^2A_1 + 3A_1B_1^2 - A_1k^2 - 2A_1\eta^2 + A_1\omega = 0$$

$\sin(w(\xi))$:

$$B_1 + 3A_0^2B_1 + B_1^3 - B_1k^2 - B_1\eta^2 + B_1\omega = 0$$

$\sin(w(\xi)) \cos(w(\xi))$:

$$6A_0A_1B_1 = 0$$

$\cos^2(w(\xi))$:

$$3A_0A_1^2 - 3A_0B_1^2 = 0$$

$\sin(w(\xi)) \cos^2(w(\xi))$:

$$3A_1^2B_1 - B_1^3 + 2B_1\eta^2 = 0$$

$\cos^3(w(\xi))$:

$$A_1^3 - 3A_1B_1^2 + 2A_1\eta^2 = 0$$

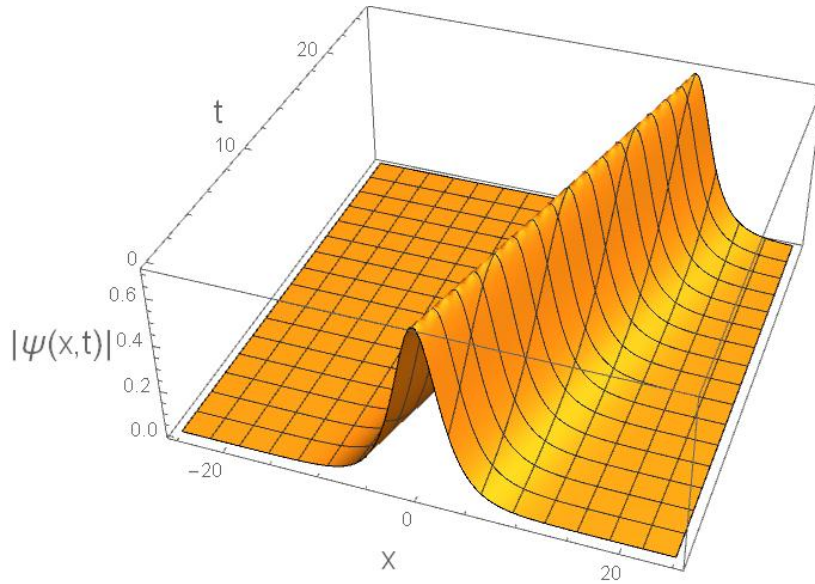
เราสามารถเลือกค่า A_1 หรือ B_1 เป็นศูนย์ได้ โดยจะเลือกให้ A_1 เป็นศูนย์ก่อน จะทำให้ได้

$$A_0 = 0, \quad B_1 = \eta\sqrt{2}, \quad \omega = c^2/4 - \eta^2 - 1$$

ดังนั้นผลเฉลยของ (1.4) จะเขียนได้เป็น

$$\psi(x, t) = \eta\sqrt{2} \operatorname{sech} \eta(x - ct) e^{i(cx/2 - \{c^2/4 - \eta^2 - 1\}t)} \quad (2.5)$$

การวิวัฒนาการตามเวลาจะแสดงได้ดังรูป 2.1 ผลเฉลยมีลักษณะเป็น pulse หรือ เรียกว่า bright soliton



รูปที่ 2.1: การวิวัฒนาการตามเวลาของผลเฉลย (2.5) โดย $c = \eta = 0.5$

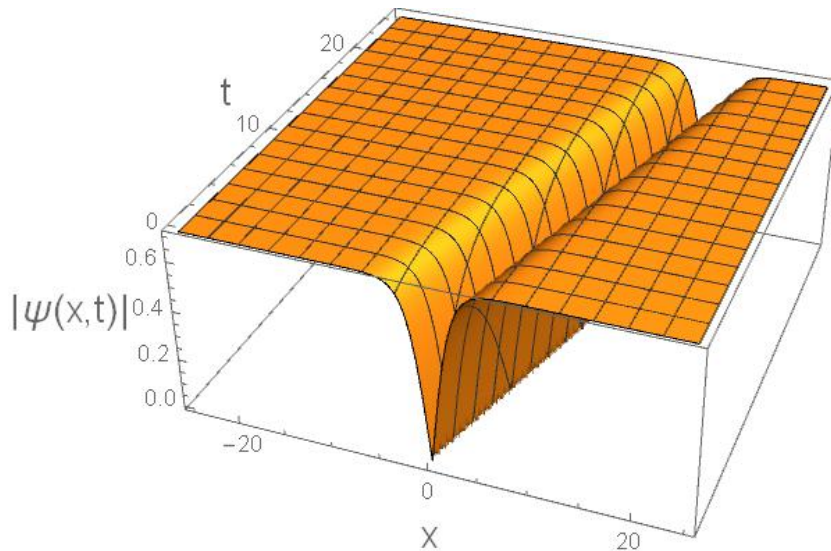
โดยจะวิ่งเหนือตัวกลาง และ อีกเงื่อนไขหนึ่งคือ กรณีที่ $B_1 = 0$ จะพบว่า

$$A_0 = 0, \quad A_1 = i\eta\sqrt{2}, \quad \omega = (c^2/4 + 2\eta^2 - 1)$$

ผลเฉลยของ (1.4) จะเขียนได้เป็น

$$\psi(x, t) = i\eta\sqrt{2} \tanh(\eta(x - ct)) e^{i(cx/2 - \{c^2/4 + 2\eta^2 - 1\}t)} \quad (2.6)$$

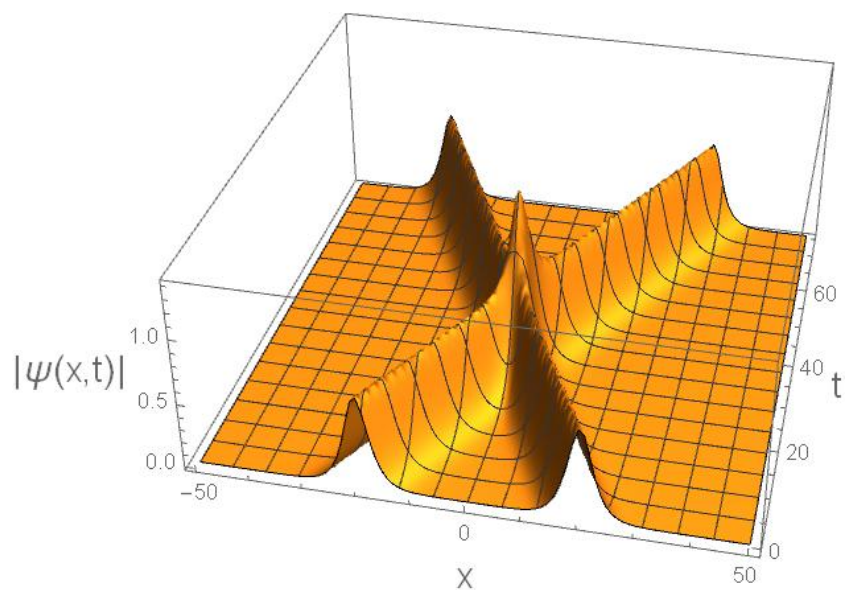
การวิวัฒนาการตามเวลาจะแสดงได้ดังรูป 2.2 ซึ่งจะเป็น pulse อยู่ใต้ตัวกลางที่เคลื่อนที่ โดยเราจะเรียก



รูปที่ 2.2: การวิวัฒนาการตามเวลาของผลเฉลย (2.6) โดย $c = \eta = 0.5$

คลื่นลักษณะนี้ว่า dark soliton และ จากผลเฉลยทั้งสองแบบจะเป็นคลื่นที่เคลื่อนที่โดยไม่มีการลดลงของความสูงของคลื่นซึ่งเป็นลักษณะของ คลื่นโซลิตารี และ เมื่อนำคลื่นแต่ละแบบมาวิ่งชน

กันจะพบว่าโครงสร้างของคลื่นกลับมาเหมือนเดิมหลังชน ดังแสดงได้จากรูป 2.3 ในลำดับถัดไปเรา



รูปที่ 2.3: การวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลย (2.5) 2 ตัว โดยทั้งสองใช้ $c = 0.65, \eta = 0.5$

จะพิจารณาความไม่เสถียรของ bright soliton ที่มีการรบกวน ในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่จาก ฟังก์ชันที่มีความยาวคลื่นสูงๆ และ เขียนอัตราการเพิ่ม ในเทอมของความยาวคลื่นที่นำมารบกวน

บทที่ 3

การรบกวนของจากคลื่นความยาวสูงในแนวตั้งฉาก

เราจะวิเคราะห์ความไม่เสถียรของผลเฉลยโซลิตอนจากการรบกวนด้วยคลื่นที่มีความยาวคลื่นสูง หรือ $\bar{k} = 2\pi/\lambda \ll 1$ ซึ่งเราจะใช้คลื่นที่รบกวนเป็นคลื่นฟังก์ชัน cosine โดย เฉลยของ (1.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$\psi_0(x, t) = u(\xi) e^{i(kx - \omega t)}$$

และ

$$u(\xi) = \eta\sqrt{2} \operatorname{sech}(\eta x)$$

จะเป็นผลเฉลยที่ยังไม่ได้ถูกรบกวน เมื่อใส่การรบกวนเข้าไปในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่น จะพบว่า

$$\psi = \left(u(\xi) + \epsilon n(\xi) e^{i\bar{k}y + \gamma t} \right) e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1)$$

โดย ϵ เป็นค่าที่เล็กมาก n เป็นฟังก์ชันที่บรรยายพฤติกรรมระหว่างการถูกรบกวน \bar{k} เป็นความยาวคลื่นที่นำมารบกวน และ γ แสดงค่าของอัตราการเพิ่ม ซึ่ง ถ้าค่า $\gamma > 0$ จะเกิด อัตราการเพิ่มสูงขึ้นตามเวลา ในขณะที่ $\gamma < 0$ จะเป็นเป็นการลดลง (decay) ตามเวลา ส่วน γ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะบอกถึงการสั่น (oscillation) ซึ่งสองค่าหลังเราไม่สนใจเพราะไม่ได้ ทำให้เกิดผลอะไร เนื่องจากเราพิจารณาการรบกวนในอีกแนวการเคลื่อนที่ ซึ่งต้องขยายมิติของ (1.4) ของแกน y อีก จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi_{yy} + (1 + |\psi|^2)\psi = 0 \quad (3.2)$$

เราจะแทนค่าสมการ (3.1) ลงใน สมการ (3.2) โดย เก็บค่าถึง ϵ กำลัง 1 ในส่วนของ ϵ^0 จะได้สมการตามในส่วนที่เป็นจำนวนจริง และ เชิงซ้อน ตามลำดับดังนี้

$$\begin{aligned} (\omega - k^2)u(\xi) + \eta^2 u_{\xi\xi} + |u(\xi)|^2 u(\xi) &= 0 \\ (-c + 2k)\phi_{0\xi} &= 0 \end{aligned}$$

สำหรับอันดับของ ϵ จะสามารถเขียนได้เป็น

$$in_t + \eta^2 n_{\xi\xi} + n^* u^2 + 2|u|^2 n + \omega n - k^2 n + n_{yy} = 0 \quad (3.3)$$

n^* เป็น complex conjugate ของ n และ สำหรับความเป็นไปได้ของฟังก์ชัน n เราจะกำหนดให้

$$\begin{aligned} n(\xi, y, t) &= r(\xi, y, t) + iv(\xi, y, t) \\ &\propto (w(\xi), v(\xi)) e^{iky+\gamma t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

เมื่อแทนค่า n ในสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.3) จะแยกพิจารณาเป็นค่าจริงได้เป็น

$$\eta^2 r_{\xi\xi} + (3u^2 + \omega + 1 - k^2 - \bar{k}^2)r(\xi) = \gamma v(\xi) \quad (3.5)$$

และ ส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะเขียนได้เป็น

$$\eta^2 v_{\xi\xi} + (u^2 + \omega + 1 - k^2 - \bar{k}^2)v(\xi) = -\gamma r(\xi) \quad (3.6)$$

จาก(3.5) และ (3.6) จะเขียนให้อยู่ในเทอมของ Lagrangian เพื่อสะดวกในการหาค่า v และ w จากการการใช้ฟังก์ชันทดลอง (trial function)

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dt \quad (3.7)$$

โดย

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\eta^2 r_{\xi}^2}{2} + \frac{\eta^2 v_{\xi}^2}{2} - \gamma vr + [(6\eta^2 \operatorname{sech}^2 \xi + 1 + \omega - k^2 - \bar{k}^2)] \frac{r^2}{2} \\ &\quad - [(2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \xi + 1 + \omega - k^2 - \bar{k}^2)] \frac{v^2}{2} \end{aligned}$$

สำหรับหาผลเฉลยของสมการ (3.5) และ (3.6) โดยคิดการแปรเปลี่ยน (variational method) จะต้องหาฟังก์ชันทดลองมาก่อน โดยเราสามารถกำหนดเป็นฟังก์ชันอะไรก็ได้ แต่ต้องปรับเปลี่ยนเพื่อให้ค่า \mathcal{S} มีค่าน้อยที่สุด เราจะใช้ผลเฉลยของ (3.5) และ (3.6) ในกรณีที่กำหนดให้ $\gamma = \bar{k} = 0$ เพราะว่าเป็นผลเฉลยที่เสถียรเนื่องจากสมการ (3.1) มีลักษณะเป็นการสั่น (oscillation) และจะใส่ค่าสำหรับการปรับเพื่อให้ได้ค่าที่ต่ำสุดหน้าฟังก์ชันโดย

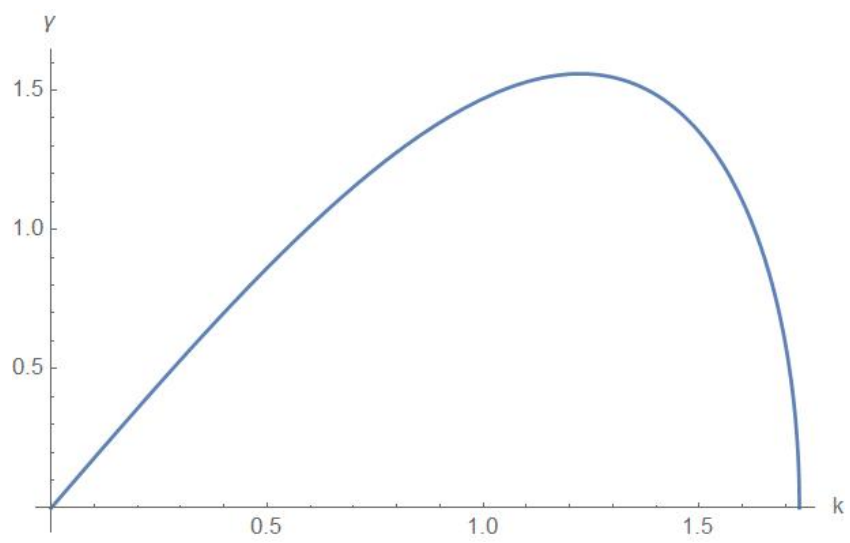
$$r(\xi) = \beta \operatorname{sech}^2(\xi)$$

$$v(\xi) = \alpha \operatorname{sech}(\xi)$$

โดย α และ β เป็นค่าคงที่ และเลือกให้ $\eta = 1$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ และฟังก์ชันทดลองเป็นผลเฉลยของสมการ ชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นอันดับที่สาม เราจะเขียนโปรแกรมสำหรับการคำนวณหาค่าอัตราการเพิ่มโดยใช้โปรแกรม Mathematica [16] ซึ่งจะสามารถหาค่าอัตราการเพิ่มที่เป็นผลจากการรบกวนด้วยคลื่นความยาวคลื่นสูงๆได้เป็น

$$\gamma^2 = \frac{32k^2(3 - \bar{k}^2)}{3\pi^2}$$

จะแสดงตามรูป 3.1 ในช่วงระหว่าง $\bar{k} \in [0, \sqrt{3}]$ จะเป็นช่วงที่ทำให้คลื่นโซลิตอนที่ถูกรบกวนไม่เสถียร



รูปที่ 3.1: ผลอัตรการเพิ่ม

บรรณานุกรม

- [1] E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [2] H. Washimi and T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996 (1966).
- [3] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th edn. (Academic Press, New York, 2007).
- [4] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 34th Congress on Science and Technology of Thailand*, p. D0029 (King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 2008).
- [5] E. Yablonovitch, *Journal of the Optical Society of America B* **10**, 283 (1993).
- [6] E. Yablonovitch, *Journal of Modern Optics* **41**, 173 (1994).
- [7] B. Maes, P. Bienstman, and R. Baets, *Journal of the Optical Society of America B* **22**, 613 (2005).
- [8] J. E. Sipe and H. G. Winful, *Optics Letters* **13**, 132 (1988).
- [9] A. Blanco-Redondo, C. Husko, D. Eades, Y. Zhang, J. Li, T. Krauss, and B. Eggleton, *Nature Communications* **5** (2014).
- [10] N. A. R. Bhat and J. E. Sipe, *Physical Review E* **64** (2001).
- [11] T. Mayteevarunyoo and B. A. Malomed, *Journal of the Optical Society of America B* **25**, 1854 (2008).
- [12] R. A. Hussein, M. F. O. Hameed, and S. S. A. Obayya, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **22**, 302 (2016).
- [13] W. Malfliet, *Am. J. Phys.* **60**, 650 (1992).
- [14] C. Yan, *Physics Letters A* **224**, 77 (1996).

[15] P. Drazin and R. Johnson, *Solitons. An introduction* (CUP, 1989).

[16] S. Wolfram, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd edn. (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991).