รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ
เทคนิคการแยกส่วนสำหรับการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์
เชิงเศษส่วนคอนฟอเมเบิล

A Decomposition Technique for Solving Conformable
Fractional Differential Equations

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม
ดร.อารยา วิวัฒน์วานิช
ดร.ชาติไทย ไทยประยูร

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้
จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน)
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561

รหัสโครงการ 1570
สัญญาเลขที่ 173/2561

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ
เทคนิคการแยกส่วนสำหรับการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอเมเบิล

A Decomposition Technique for Solving Conformable Fractional Differential Equations

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม
ดร.อารยา วิวัฒน์วานิช
ดร.ชาติไทย ไทยประยูร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561 มหาวิทยาลัยบูรพา ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 173/2561

Acknowledgment

This work was financially supported by the Research Grant of Burapha University through National Research Council of Thailand (Grant no. 173/2561).

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีการใหม่เพื่อหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล โดยการนำอนุกรมกำลังเชิงเศษ-ส่วนเข้ามาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิลหลายสมการ เช่น สมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน สมการ ปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่ได้พัฒนาขึ้นนั้นสามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยได้เป็นอย่างดี

Abstract

In this research, a new method is developed for solving the conformable fractional differential equations. A general form of fractional power series is introduced in the sense of the conformable fractional derivative, with corresponding convergence property. To illustrate the functionality of the proposed expansion, we apply the corresponding iterative power series scheme to several fractional (integro-) differential equations. Our results are shown to demonstrate the efficiency of the proposed method.

สารบัญ

1 บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์รูปแบบหนึ่งที่นำไปใช้อย่างแพร่หลายในการอธิบายปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ ปัญหาเกี่ยวกับการสลายตัวของสารเคมี และปัญหาเกี่ยวกับปฏิกิริยาเคมี เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามแบบจำลองในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นนั้นจะมีความซับซ้อนแตกต่างกันตามปัญหาที่นำไปอธิบาย ทำให้การหาผลเฉลยมีความยุ่งยากและซับซ้อนตามไปด้วย ด้วยเหตุนี้ จึงมีนักวิจัยที่พยายามคิดค้นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) เพื่อนำไปอธิบายปรากฏการณ์ตามแบบจำลองที่ได้สร้างขึ้น ซึ่งสำหรับบางสมการ ไม่ว่าจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear differential equations) สมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (fractional differential equations) เป็นต้น การหาผลเฉลยวิเคราะห์ทำได้ยากและมีขั้นตอนในการคำนวณค่อนข้างซับซ้อน ด้วยเหตุนี้ จึงมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยวิเคราะห์ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นี้ออกมาอย่างมากมาย

ในปี ค.ศ. 1970 George Adomian นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกา คิดค้นวิธีการ เรียกว่า วิธีการแยกอโดเมียน (Adomian decomposition method, ADM) สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ที่เป็นเชิงเส้น (linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear) ต่อมา วิธีการแยกอโดเมียนถูกนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง เช่น ปัญหาทางฟิสิกส์ ชีววิทยา และเคมี ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากวิธีการแยกอโดเมียนจะอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ และผลเฉลยที่ได้จะเป็นการประมาณค่าผลเฉลยวิเคราะห์ (approximation analytical solution) สำหรับการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียนในสมการเชิงอนุพันธ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นจะมีการคำนวณมีความยุ่งยากและมีความซับซ้อน ดังนั้น จึงได้มีนักวิจัยมากมายพยายามที่จะปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน เพื่อที่จะทำให้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้มีความซับซ้อนน้อยลง ลดขั้นตอนในการคำนวณ และได้ผลเฉลยที่ถูกต้อง รวดเร็ว

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอเมเบิลในรูปแบบไม่เชิงเส้น
2. เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ในการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอเมเบิล
3. เพื่อลดขั้นตอนและความซับซ้อนของวิธีการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอเมเบิลให้ง่ายขึ้น
4. ตีพิมพ์เผยแพร่ผลงานวิจัยในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ ที่มีผู้ประเมินอิสระและเป็นที่ยอมรับในวงวิชาการ

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

ในงานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการปรับปรุงการแยกอโดเมียน เพื่อหาผลเฉลยของสมการสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอเมเบิล

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดวิธีการดำเนินการ ดังนี้

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล
2. รวบรวมความรู้พื้นฐานและข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า เพื่อหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล โดยมีแนวคิดดังนี้
3. นำองค์ความรู้ที่ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์กับวิธีที่ใช้ในปัจจุบัน เช่น วิธีการแยกอโดเมียน เป็นต้น

4. รวบรวมผลของการวิจัยในโครงการที่ได้เพื่อเขียนและสรุปผลงานวิจัย รวมทั้งเตรียมเอกสารสำหรับส่งตีพิมพ์และเขียนรายงานการวิจัย

5. ส่งรายงานเพื่อตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติและส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ด้านวิชาการ
   ได้องค์ความรู้ใหม่ที่เป็นทางเลือกของนักวิจัยในการเลือกใช้วิธีการผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน อีกทั้งเป็นแนวทางในการพัฒนาวิธีการผาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบอื่น ๆ ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

2. เป็นองค์ความรู้ในการวิจัยต่อไป
   ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป

3. การเผยแพร่ผลงาน
   ผู้วิจัยจะนำเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการและส่งผลงานตีพิมพ์ในรูปแบบวารสารระดับนานาชาติ

2 วิธีดำเนินการวิจัย

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้อง กับสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน
2. ศึกษาความรู้เกี่ยวกับนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวกับการใช้วิธีการแยกอโดเมียนหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง
3. ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และเอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ
4. โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 2. - 3. หาแนวทางในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนคอนฟอเมเบิล ซึ่งขั้นตอนวิธีเป็นดังต่อไปนี้

Generalized conformable fractional power series

นิยาม Generalized fractional power series (GFPS) จุดศูนย์กลาง $t = t_0$ อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}(t-t_0)^{i\alpha+j} = c_{00} + c_{01}(t-t_0)^1 + c_{10}(t-t_0)^{\alpha} + c_{02}(t-t_0)^2 + c_{11}(t-t_0)^{\alpha+1} + c_{20}(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots ,$$

เมื่อ c_{ij} เป็นสัมประสิทธ์ของอนุกรม และ $i, j \in \mathbb{N}, t \geq 0$

โดยทั่วไปแล้วเมื่อ $\alpha = 1,$ จะได้ว่า $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$ เมื่อ $c_k = \sum_{i+j=k} c_{ij}$

นอกจากนี้ GFPS สามารถเขียน Cauchy product แทนด้วย

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}(t-t_0)^{i\alpha+j} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^{i\alpha}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j(t-t_0)^{j}\right)$$

เมื่อ $c_{ij} = a_i b_j$.

GFPS จุดศูนย์กลาง $t_0 = 0$ เขียนแทนด้วย

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = c_{00} + c_{01}t^1 + c_{10}t^{\alpha} + c_{02}t^2 + c_{11}t^{\alpha+1} + c_{20}t^{2\alpha} + \cdots ,$$

ดังนั้น Cauchy product แทนด้วย

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i\alpha}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j}\right),$$

เมื่อ $c_{ij} = a_i b_j$.

Convergence of generalized conformable fractional power series

บทแทรก ถ้า $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\alpha}$ ลู่เข้า สำหรับ $t = a > 0$ แล้ว อนุกรมนี้จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolutely convergence) สำหรับ $t \in (0, a)$

ทฤษฎีบท ถ้า $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\alpha}$ และ $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k}$ ที่ทำให้ A ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สู่ a สำหรับ $t = t_a > 0$ และ B ลู่เข้าสู่ b สำหรับ $t = t_b > 0$ แล้ว Cauchy product of A และ B ลู่เข้าสู่ ab สำหรับ $t = t_c > 0$ เมื่อ $t_c = min\{t_a, t_b\}$.

Generalized conformable fractional power series method

จาก

$$T^{\alpha}[t^p] = pt^{p-\alpha} \text{ สำหรับ ทุก ๆ } \quad p \in \mathbb{R}.$$

ถ้า

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha+j}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
1.\ T^{\alpha}[y(t)] \quad = \quad & \alpha c_{10} + 2\alpha c_{20} t^{\alpha} + 3\alpha c_{30} t^{2\alpha} + \cdots \\
& + c_{01} t^{1-\alpha} + (\alpha+1) c_{11} t + (2\alpha+1) c_{21} t^{\alpha+1} + (3\alpha+1) c_{31} t^{2\alpha+1} + \cdots \\
& + 2c_{02} t^{2-\alpha} + (\alpha+2) c_{12} t^{2} + (2\alpha+2) c_{22} t^{\alpha+2} + (3\alpha+2) c_{32} t^{2\alpha+2} + \cdots \\
& + 3c_{03} t^{3-\alpha} + (\alpha+3) c_{13} t^{3} + (2\alpha+3) c_{23} t^{\alpha+3} + (3\alpha+3) c_{33} t^{2\alpha+3} + \cdots \\
& + 4c_{04} t^{4-\alpha} + (\alpha+4) c_{14} t^{4} + (2\alpha+4) c_{24} t^{\alpha+4} + (3\alpha+4) c_{34} t^{2\alpha+4} + \cdots \\
& \vdots
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} (i\alpha) c_{i0} t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} (j) c_{0j} t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty} [(i+1)\alpha + j + 1] c_{i+1,j+1} t^{i\alpha+j+1}.$$

$$\begin{aligned}
2.\ T^{2\alpha}[y(t)] \quad = \quad & (\alpha)(2\alpha) c_{20} + (2\alpha)(3\alpha) c_{40} t^{\alpha} + (3\alpha)(4\alpha) c_{40} t^{2\alpha} + (4\alpha)(5\alpha) c_{50} t^{3\alpha} + \cdots \\
& + (1-\alpha) c_{01} t^{1-2\alpha} + (\alpha+1) c_{11} t^{1-\alpha} + (2\alpha+1)(\alpha+1) c_{21} t + \cdots \\
& + 2(2-\alpha) c_{02} t^{2-2\alpha} + 2(\alpha+2) c_{12} t^{2-\alpha} + (2\alpha+2)(\alpha+2) c_{22} t^{2} + \cdots \\
& + 3(3-\alpha) c_{03} t^{3-2\alpha} + 3(\alpha+3) c_{13} t^{3-\alpha} + (2\alpha+3)(\alpha+3) c_{23} t^{3} + \cdots \\
& + 4(4-\alpha) c_{04} t^{4-2\alpha} + 4(\alpha+4) c_{14} t^{4-\alpha} + (2\alpha+4)(\alpha+4) c_{24} t^{4} + \cdots \\
& \vdots
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} T^{2\alpha}[y(t)] &= \sum_{i=2}^{\infty}((i-1)\alpha)(i\alpha)c_{i0}t^{(i-2)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j-\alpha)(j)c_{0j}t^{j-2\alpha} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty}(j)(j+\alpha)c_{1j}t^{j-\alpha} \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\infty}[((i+2)\alpha+j+1)((i+1)\alpha+j+1)]c_{i+2,j+1}t^{i\alpha+j+1}, \end{aligned}$$

เมื่อ $T^{2\alpha} = T^{\alpha}T^{\alpha}$

Generalized conformable fractional power series method to differential equations

จากการหาผลเฉลยแบบอนุกรมของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ นำมาสู่แนวคิดการผลเฉลยแบบอนุกรมเชิงเศษส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล ดังนี้ ให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล แทนด้วย

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}(t-t_0)t^{i\alpha+j}$$

เมื่อ c_{ij} แทนสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า
ในงานวิจัยนี้ สนใจที่จะหาผลเฉลยรอบจุด $t = t_0$ นั่นคือ ผลเฉลยจะอยู่ในรูปของ

$$y = c_{00} + c_{01}t^1 + c_{10}t^{\alpha} + c_{02}t^2 + c_{11}t^{\alpha+1} + c_{20}t^{2\alpha} + \cdots = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j}$$

โดยจะทำการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล

$$T^{2\alpha}y(t) + aT^{\alpha}y(t) + by(t) = g(t),$$

และสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิลand (fractional integro-differential equations)

$$T^{\alpha}[y(t)] = g(t) + \lambda \int_0^1 k(t,\tau)[y(\tau)]^q d\tau, \;\; q \geq 1,$$

พร้อมเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y^{(i)}(0) = a_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, r-1, \;\; r-1 < \alpha \leq r, \;\; r \in \mathbb{N}.$$

5. นำวิธีการที่ได้จากข้อ 4. หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนคอนฟอเมเบิล
6. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ ส่งตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

3 ผลการวิจัย

จากวิธีการวิจัยที่ได้พัฒนาขึ้นนั้น สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนคอนฟอเมเบิล ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 แสดงการหาผลเฉลยของ

$$T^{\alpha}[y(t)] = \lambda y(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; t > 0. \tag{1}$$

วิธีทำ ให้

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha + j}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (1)
แทนค่า

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1},$$

ลงในสมการ (1) จะได้

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} = \lambda \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j}. \tag{2}$$

นำ $\lambda \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j}$ ลบออกทั้งสองข้างของสมการ (2) จะได้

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} - \lambda \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = 0. \tag{3}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} = \sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha + j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} - \sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}. \tag{4}$$

แทนสมการ (4) ลงในสมการ (3) จะได้

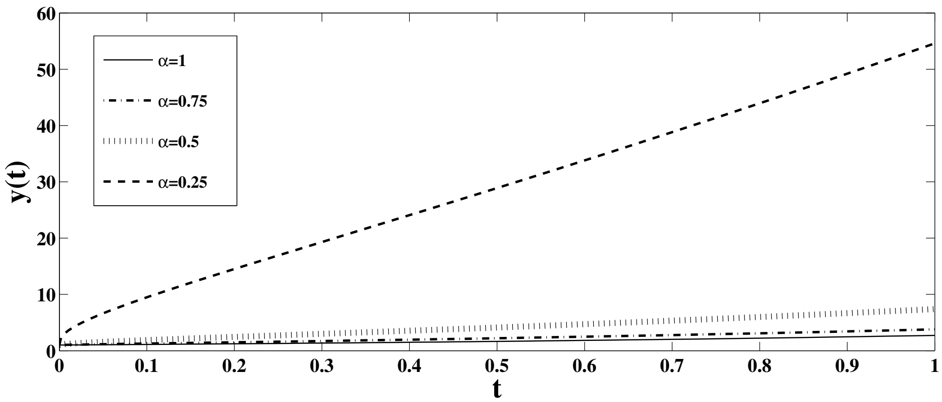
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha + j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} & \\ - \sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} - \lambda \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} & = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

พิจารณาพจน์ที่ 1 ของสมการ (5) เขียนแทนพจน์ที่ 1 ด้วย $i = 2$ และ เขียนแทนพจน์สุดท้ายด้วย $i = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} \alpha c_{10} + \sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha + j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} & \\ - \sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} - \lambda c_{00} - \lambda \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} & = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

นั่นคือ
$$\alpha c_{10} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha + j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} - \lambda c_{00} - \lambda \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = 0.$$
เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีเลขยกกำลังของ t ที่เท่ากัน จะได้
$$c_{10} = \frac{\lambda}{\alpha}c_{00}, \tag{7}$$
และ
$$c_{i+1,j} = \frac{\lambda c_{ij}}{[(i+1)\alpha + j]}, \text{ for } i+j \geq 1. \tag{8}$$
เรียกสมการ (7) และสมการ (8) ว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) และจะได้
$$c_{20} = \frac{\lambda^2 c_{00}}{(2)\alpha^2}, \quad c_{30} = \frac{\lambda^3 c_{00}}{(2\cdot 3)\alpha^3}, \quad c_{40} = \frac{\lambda^4 c_{00}}{(2\cdot 3\cdot 4)\alpha^4}, \dots.$$
เขียนให้อยู่ในรูปพจน์ทั่วไป จะได้
$$c_{i0} = \frac{\lambda^i c_{00}}{i!\alpha^i}, \ \ i = 0, 1, 2, 3, \dots.$$
ดังนั้น
$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i y_0}{\alpha^i i!}; & i \geq 0, j = 0, \\ \\ 0; & \text{otherwise.} \end{cases}$$
จาก
$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j},$$
ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ
$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i0}t^{i\alpha} = c_{00}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{\alpha^i i!}t^{i\alpha} = c_{00}e^{\lambda(\frac{t^\alpha}{\alpha})}. \tag{9}$$
จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = y_0$
$$y_0 = c_{00}e^0 = y_0$$
ดังนั้น
$$c_{00} = y_0.$$
ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1) คือ
$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i0}t^{i\alpha} = y_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{\alpha^i i!}t^{i\alpha} = y_0e^{\lambda(\frac{t^\alpha}{\alpha})}.$$
ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดแสดงได้ดังรูปที่ 1 เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$, $y_0 = 1$ และ $\lambda = 1$ □

ตัวอย่างที่ 2 แสดงการหาผลเฉลยของ
$$T^\alpha[y(t)] - \lambda y(t) = t^{2-\alpha}, \ \ y(0) = y_0, \tag{10}$$



รูปที่ 1: ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดของตัวอย่างที่ 1 เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$, $y_0 = 1$ และ $\lambda = 1$

เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$ และ $t \geq 0$
วิธีทำ ให้

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha+j}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (10)
จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น สามารถเขียนผลเฉลยให้อยู่ในรูปของ

$$y(t) = y_0 + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha+j}. \tag{11}$$

จาก

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1},$$

แทนสมการ (10) จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} & \\ -\lambda\sum_{i+j=0}^{\infty}c_{ij}t^{i\alpha+j} &= t^{2-\alpha}\end{aligned} \tag{12}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} = \sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha + j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} - \sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}. \tag{13}$$

แทนสมการ (13) ลงในสมการ (12) จะได้
ดังนั้น
เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีเลขยกกำลังของ t ที่เท่ากัน จะได้

$$c_{10} = \frac{\lambda c_{00}}{\alpha}, \;\; c_{02} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}+\sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha}+\sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha+j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} & \\ -\sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}-\lambda\sum_{i+j=0}^{\infty}c_{ij}t^{i\alpha+j} &= t^{2-\alpha} \\ \alpha c_{10}+\sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha}+\sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha+j]c_{i+1,j}t^{i\alpha+j} & \\ -\lambda c_{00}-\lambda\sum_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}t^{i\alpha+j} &= t^{2-\alpha}.\end{aligned} \tag{14}$$

และ

$$c_{i+1,j}=\frac{\lambda c_{ij}}{[(i+1)\alpha+j]},\text{for } i+j\geq 1$$

จะได้

$$c_{12}=\frac{\lambda}{2(\alpha+2)},\ \ c_{22}=\frac{\lambda^2}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)},\ \ c_{32}=\frac{\lambda^3}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)(3\alpha+2)},\ldots,$$

และ

$$c_{20}=\frac{\lambda^2 y_0}{(2)\alpha^2},\ \ c_{30}=\frac{\lambda^3 y_0}{(2\cdot 3)\alpha^3},\ \ c_{40}=\frac{\lambda^4 y_0}{(2\cdot 3\cdot 4)\alpha^4},\ldots.$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด แทนด้วย

$$c_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^i}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)(3\alpha+2)\cdots(i\alpha+2)}; & i\geq 0, j=2,\\[2ex] \dfrac{\lambda^i y_0}{\alpha^i i!}; & i\geq 1, j=0,\\[2ex] 0; & \text{ค่าอื่น ๆ}\end{cases}$$

จาก

$$y(t)=y_0+\sum_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}t^{i\alpha+j}$$

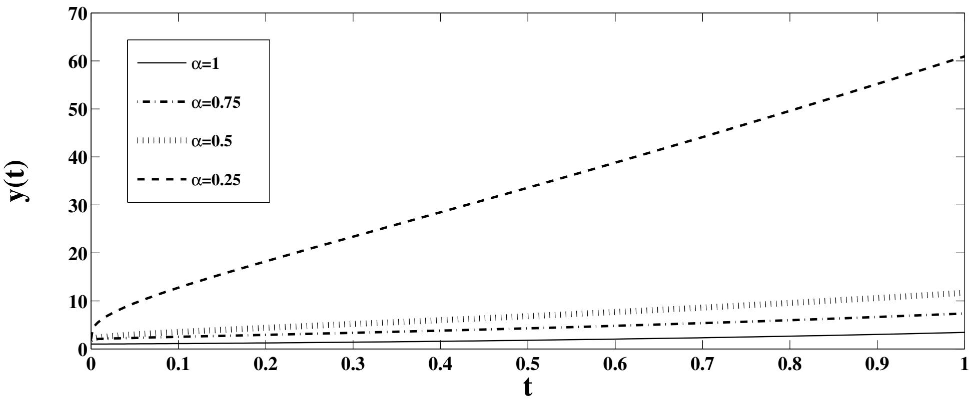
ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (10) คือ

$$y(t)=y_0+\frac{\lambda}{\alpha}y_0t^{\alpha}+\frac{1}{2}t^2+\sum_{i=1}^{\infty}c_{i2}t^{i\alpha+2}+\sum_{i=2}^{\infty}c_{i0}t^{i\alpha}. \tag{15}$$

□

เมื่อแทน $\alpha=1$ ลงในสมการ (10) จะได้

$$y'-\lambda y=t,\ \ y(0)=y_0. \tag{16}$$



รูปที่ 2: ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดของตัวอย่างที่ 2 เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$, $y_0 = 1$ และ $\lambda = 1$

ซึ่งมีผลเฉลย เป็น

$$y(t) = y_0 + \lambda y_0 t + \frac{1}{2}t^2 + \sum_{i=1}^{\infty} c_{i2}t^{i+2} + \sum_{i=2}^{\infty} c_{i0}t^i, \tag{17}$$

เมื่อ $c_{i2} = \frac{\lambda^i}{(i+2)!}$, for $i \geq 1$ and $c_{i0} = \frac{\lambda^i y_0}{i!}$, for $i \geq 2$.
จาก

$$e^{\lambda t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!},$$

ดังนั้น ผลเฉลยสมการ (16) แทนด้วย

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda}.$$

ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดแสดงได้ดังรูปที่ 2 เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$, $y_0 = 1$ และ $\lambda = 1$ □

ตัวอย่างที่ 3 แสดงการหาผลเฉลยของ

$$T^{2\alpha}[y(t)] - 2T^{\alpha}[y(t)] + y(t) = (2-\alpha)t^{2-2\alpha}, \;\; 0 < \alpha \leq 1, \;\; t \geq 0. \tag{18}$$

วิธีทำ ให้

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} \tag{19}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (18) จาก

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1},$$

และ

$$\begin{aligned} T^{2\alpha}[y(t)] &= \sum_{i=2}^{\infty}((i-1)\alpha)(i\alpha)c_{i0}t^{(i-2)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j-\alpha)(j)c_{0j}t^{j-2\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)(j+\alpha)c_{1j}t^{j-\alpha} \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\infty}[((i+2)\alpha + j + 1)((i+1)\alpha + j + 1)]c_{i+2,j+1}t^{i\alpha+j+1}, \end{aligned}$$

แทนลงในสมการ (18) จะได้

$$\alpha(2\alpha)c_{20}+\sum_{i=3}^{\infty}(i\alpha)(i-1)\alpha c_{i0}t^{(i-2)\alpha}+\sum_{j=1}^{\infty}(j)(j-\alpha)c_{0j}t^{j-2\alpha}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}(j)(j+\alpha)c_{1j}t^{j-\alpha}$$

$$+\sum_{i+j=0}^{\infty}[((i+2)\alpha+j+1)((i+1)\alpha+j+1)]c_{i+2,j+1}t^{i\alpha+j+1} \quad = \quad (2-\alpha)t^{2-2\alpha}.$$

$$-2\alpha c_{10}-2\sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}-2\sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha}$$

$$-2\sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha+j+1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1}+c_{00}+\sum_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}t^{i\alpha+j}$$

เลื่อนดัชนีของพจน์ที่มีเลขชี้กำลัง $i\alpha$ จะได้

$$\alpha(2\alpha)c_{20}+\sum_{i=1}^{\infty}[(i+2)\alpha][(i+1)\alpha]c_{i+2,0}t^{i\alpha}+\sum_{j=1}^{\infty}(j)(j-\alpha)c_{0j}t^{j-2\alpha}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}(j)(j+\alpha)c_{1j}t^{j-\alpha}$$

$$+\sum_{i+j=0}^{\infty}[((i+2)\alpha+j+1)((i+1)\alpha+j+1)]c_{i+2,j+1}t^{i\alpha+j+1} \quad = \quad (2-\alpha)t^{2-2\alpha}.$$

$$-2\alpha c_{10}-2\sum_{i=1}^{\infty}[(i+1)\alpha]c_{i+1,0}t^{i\alpha}-2\sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha}$$

$$-2\sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha+j+1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1}+c_{00}$$

$$+\sum_{i+j=0}^{\infty}c_{i,j+1}t^{i\alpha+j+1}+\sum_{i=1}^{\infty}c_{i0}t^{i\alpha}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีเลขชีกำลังของ t ที่เท่ากัน จะได้

$$c_{20}=\frac{2\alpha c_{10}-c_{00}}{\alpha(2\alpha)}, \tag{20}$$

$$c_{i+2,0}=\frac{2[(i+1)\alpha]c_{i+1,0}-c_{i0}}{[(i+2)\alpha][(i+1)\alpha]}, \text{ สำหรับ } i\geq 1, \tag{21}$$

$$c_{02}=\frac{1}{2}, \tag{22}$$

$$c_{12}=\frac{1}{\alpha+2}, \tag{23}$$

และ

$$c_{i+2,j+1} = \frac{2[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1} - c_{i,j+1}}{[(i+2)\alpha + j + 1][(i+1)\alpha + j + 1]}, \text{ for } i + j \geq 0. \tag{24}$$

และ

$$c_{i0} = \frac{i\alpha c_{10} - (i-1)c_{00}}{\alpha^i i!},$$
$$c_{2i,2} = \frac{2i+1}{2[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i)\alpha+2)]},$$
$$c_{2i+1,2} = \frac{i+1}{[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i+1)\alpha+2)]},$$

สำหรับ $i \geq 0$ และ $c_{ij} = 0$ ค่าอื่น ๆ
จาก

$$y(t) = y_0 + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha + j},$$

ผลเฉลยของสมการ (18) คือ

$$\begin{aligned} y(t) &= c_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\alpha c_{10} - (i-1)c_{00}}{\alpha^i i!} t^{i\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i+1}{2[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i)\alpha+2]} t^{2i\alpha+2} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i+1)\alpha+2]} t^{(2i+1)\alpha+2}. \end{aligned}$$

แทนค่า $\alpha = 1$ ลงในสมการ (18) จะได้

$$y'' - 2y' + y = 1. \tag{25}$$

และมีผลเฉลยแทนด้วย

$$\begin{aligned} y(t) &= c_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ic_{10} - (i-1)c_{00}}{i!} t^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i+1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(2i+2)} t^{2i+2} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(2i+3)} t^{2i+3}. \\ &= c_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ic_{10} - (i-1)c_{00}}{i!} t^i + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(i-1)}{i!} t^i. \end{aligned}$$

จาก

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!},$$

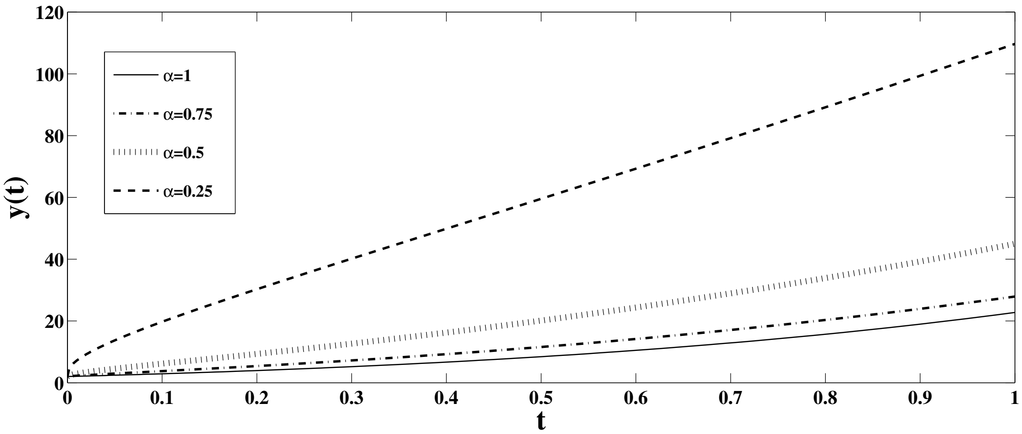
ดังนั้นผลเฉลยสมการ (25) แทนด้วย

$$y(t) = (c_{10} - c_{00} + 1)te^t + (c_{00} - 1)e^t + 1.$$

รูปที่ 3 ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัด เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$, $c_{00} = 2$ และ $c_{01} = 8$ □

ตัวอย่างที่ 4 แสดงการหาผลเฉลยของ fractional Fredholm integro-differential equation

$$T^{\alpha}[y(t)] = te^t + e^t - t + \int_0^1 ty(\tau)d\tau, \;\; 0 < \alpha \leq 1, \;\; 0 \leq t < 1, \;\; y(0) = 0. \tag{26}$$



รูปที่ 3: ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดของตัวอย่างที่ 3 เมื่อ $0 < \alpha \le 1$, $c_{00} = 2$ และ $c_{01} = 8$

วิธีทำ ให้

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha+j}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (26)
จาก

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha + j + 1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1}, \tag{27}$$

ให้

$$y(\tau) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}\tau^{i\alpha+j}.$$

จาก $y(\tau)$ ลู่เข้า ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(\tau)d\tau &= \int_0^1 \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}\tau^{i\alpha+j}d\tau \\
&= \int_0^1 \left[c_{00} + c_{01}\tau + c_{10}\tau^{\alpha} + c_{02}\tau^2 + c_{11}\tau^{\alpha+1} + c_{02}\tau^{2\alpha} + \cdots\right] d\tau \\
&= c_{00} + \frac{c_{01}}{2} + \frac{c_{10}}{\alpha+1} + \frac{c_{02}}{3} + \frac{c_{11}}{\alpha+2} + \frac{c_{20}}{2\alpha+1} + \cdots \\
&= \sum_{i+j=1}^{\infty} \frac{c_{ij}}{[i\alpha+j+1]},
\end{aligned} \tag{28}$$

เมื่อ $c_{00} = 0$
แทนสมการ (27) และสมการ (28) ลงในสมการ (26) จะได้

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}+\sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha}+\sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha+j+1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} = -t.$$

$$-t\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}-t\sum_{i+j=1}^{\infty}\frac{c_{ij}}{[i\alpha+j+1]} \tag{29}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\alpha c_{10}+\sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha}+\sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha}+c_{11}(\alpha+1)t$$

$$+\sum_{i+j=1}^{\infty}[(i+1)\alpha+j+1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1} = -t.$$

$$-t-t\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}-1-t-\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}-t\sum_{i+j=1}^{\infty}\frac{c_{ij}}{[i\alpha+j+1]}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์พจน์ที่มีเลขชี้กำลังของ t ที่เท่ากัน จะได้

$$c_{10}=\frac{1}{\alpha}, \tag{30}$$

$$c_{11}=\frac{\alpha+2}{\alpha^2+3\alpha+1}\left[\sum_{i+j=1}^{\infty}\frac{c_{ij}}{[i\alpha+j+1]}+1\right],\ \text{where}\ i\neq 1\ \text{and}\ j\neq 1, \tag{31}$$

และ

$$c_{1j}=\frac{j+1}{j!(\alpha+j)},\ \text{for}\ j=2,3,4,5,\ldots. \tag{32}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด สมการ (31) จะได้

$$c_{11}=\frac{\alpha+2}{\alpha^2+3\alpha+1}\left[\frac{\alpha(\alpha+1)+1}{\alpha(\alpha+1)}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{j+1}{j!(\alpha+j)(\alpha+j+1)}\right],$$

$$c_{1j}=\frac{j+1}{j!(\alpha+j)}\ \text{for}\ j=0,2,3,4,5,\ldots,$$

และ $c_{ij}=0$ ค่าอื่น ๆ
จาก

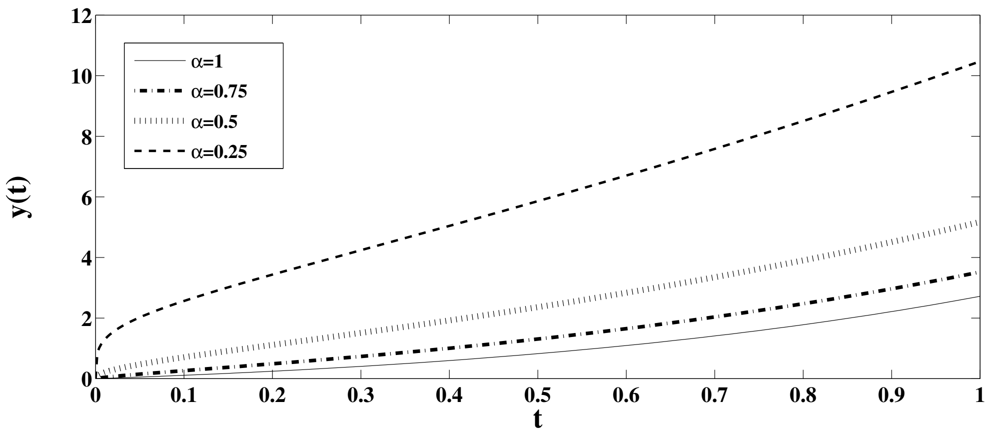
$$y(t)=\sum_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}t^{t^{i\alpha+j}},$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (26) จะได้

$$y(t)=c_{11}t^{\alpha+1}+\frac{t^\alpha}{\alpha}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{j+1}{j!(\alpha+j)}t^{\alpha+j}, \tag{33}$$

เมื่อ

$$c_{11}=\frac{\alpha+2}{\alpha^2+3\alpha+1}\left[\frac{\alpha(\alpha+1)+1}{\alpha(\alpha+1)}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{j+1}{j!(\alpha+j)(\alpha+j+1)}\right].$$



รูปที่ 4: ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดของตัวอย่างที่ 4 เมื่อ $0 < \alpha \leq 1$.

$\square$

ให้ $\alpha = 1$, ในสมการ (26) จะได้

$$y' = te^t + e^t - t + \int_0^1 ty(\tau)d\tau, \;\; y(0) = 0. \tag{34}$$

ซึ่งมีผลเฉลยคือ

$$y(t) = c_{11}t^2 + t + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{j!}, \tag{35}$$

เมื่อ $c_{11} = \frac{3}{5}\left[\frac{3}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j+1}{(j+2)!}\right]$.

จาก $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j+1}{(j+2)!} \simeq \frac{1}{6}$ และ $e^t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}$, ดังนั้น ผลเฉลยสมการ (34) แทนด้วย

$$y(t) = t^2 + t + t\sum_{j=2}^{\infty} \frac{t^j}{j!} = te^t$$

ผลการเปรียบเทียบคำตอบโดยประมาณกับคำตอบชัดแสดงได้ดังตัวอย่างที่ 4 สำหรับ $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ $\square$

4 สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีการใหม่เพื่อหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิล โดยการนำอนุกรมกำลังเชิงเศษส่วนเข้ามาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเศษส่วนแบบคอนฟอเมเบิลหลายสมการ เช่น สมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่ได้พัฒนาขึ้นนั้นสามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยได้เป็นอย่างดี

5 ข้อเสนอแนะ

วิธีการที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำพัฒนาต่อยอดในการนำไปใช้ หาผลเฉลยของระบบสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน ซึ่งเป็นสมการที่สำคัญอย่างยิ่งทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

6 ผลผลิต (Output)

6.1 ผลงานตีพิมพ์

ผลงานวิจัยได้ถูกตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ ในฐานข้อมูล SCOPUS SJR Q_4 แล้ว ดังนี้

- Thanompolkrang, S., & Poltem, D. (2019). Generalized fractional power series for solving nonlinear fractional integro-differential equations. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, *111*(1), 133-144.

ผลงานวิจัยได้ถูกตีพิมพ์ในวารสารสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับนานาชาติ แล้ว ดังนี้

- Thanompolkrang, S., & Poltem, D. (2018). Generalized fractional power series to conformable fractional differential equations. *In Proceedings of International Conference in Mathematics and Applications Mahidol University (ICMA-MU 2018)* (pp. 135-142). Bangkok, Thailand.

6.2 การผลิตบัณฑิต

1. นางสาวสิรัญญา ถนอมพลกรัง
   นิสิตระดับปริญญาโท ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา สำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา ๒๕๖๑
2. นางสาวชนินันท์ บรรเทากิจ
   นิสิตระดับปริญญาโท ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา สำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา ๒๕๖๑
3. นายวรชาติ อิ่มเล็ก
   นิสิตระดับปริญญาโท ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา คาดว่าจะสำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา ๒๕๖๒

7 บรรณานุกรม (Bibliography)

[1] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.

[2] Ahmad, J., Bibi, Z., & Noor, K. (2014) Laplace decomposition method using he's polynomial to bergers equation, Journal of science and arts, 2(27), 131-138.

[3] Akulut, A., & Kaplan, M. (2018). Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative. Computers and Mathematics with Applications, 75, 876-882.

[4] Belgacem & Karaballi. (2015). Sumudu transform fundamenfal properties investigations and applications, Journal of Applied Mathematics and stochastic Analysis, 1-23

[5] Cenesiz, Y., & Kurt, A. (2015). The solutions of time and space conformable fractional heat equations with conformable Fourier transform. Mathematica, 7(2), 130-140.

[6] Chen, C., & Jiang, Y.-L. (2018). Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative. Computers and Mathematics with Applications.

[7] Elzaki, T. M., Elzaki, S. M. & Eman M. A. Hilal. (2012). Elzaki and Sumudu transform for solving some differential equations, Global Journal of pure and Applied Mathematics, 8(2), 167-173

[8] Eslami, M. (2016). Exact traveling wave solutions to the fractional coupled nonlinear schrodinger equations. Applied Mathematics and Computation, 285, 141-148.

[9] Eslami, M., & Rezazadeh, H. (2016). The first integral method for wu-zhang system with conformable time-fractional derivative. Iran: Springer.

[10] Hammad, I. A., & Khalil, R. (2014). Fractional Fourier series with applications. American Journal of Computational and Applied Mathematics, 4(6), 187-191.

[11] Hashemi, M. S. (2018). Invariant subspace admitted by fractional differential equations with conformable derivatives. Chaos, Solitons and Fractals, 107, 161-169.

[12] Hosseini, K., Bekir, A., & Ansari, R. (2017). New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–allen and Cahn-hilliard equations using the modified Kudryashov method. Optik, 132, 203-209.

[13] Hosseini, K., Mayeli, P., & Ansari, R. (2017). Modified kudryashov method for solving the conformable time-fractional klein-gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities. Optik, 130, 737-742.

[14] Iyiola, O. S., & Nwaeze, E. R. (2016). Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D' Alambert approach. An International Journal, 2(2), 115-122.

[15] Iyiola, O. S., Tasbozan, O., Kurt, A., & Cenesiz, Y. (2017). On the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1-d diffusion. Chaos, Solitons and Fractals, 94, 1-7.

[16] Jaradat, I., Al-Dolat, M., Al-Zoubi, K., & Alquran, M. (2018). Theory and applications of a more general form for fractional power series expansion. Chaos, Solitons and Fractals, 108, 107-110.

[17] Khan, M., Hussain, M., Jafari, H., & Khan, Y. (2010) Application of laplace decomposition method to solve nonlinear coupled partial differential equations, World applied sciences journal 9 (special issue of applied math), 13-19.

[18] Khalil, R., & Abu-Shaab, H. (2015). Solution of some conformable fractional differential equations. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 103(4), 667-673.

[19] Khalil, R., Horani, M. A., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.

[20] Khan, Y. & Wu, Q. (2011). Homotopy Perturbation transform method for nonlinear equations using He's Polynomial, Journal homepage:www.elsevier.com /locate/camma, 1963-1967

[21] Khudair, A. R., Haddad, S. A. M., & Khalaf, S. L. (2017). Restricted fractional differential transform for solving irrational order fractional differential equations. Chaos, Solitons and Fractals, 101, 81-85.

[22] Lamb, GL. (1995) Introductory Applications of Partial Differential Equations with Emphasis on Wave Propagation and Diffusion, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1995.

[23] Myint, UT. (1980) Differential Equations of Mathematical Physics, American Elsevier, New York, NY, USA.

[24] Nuruddeen, R. I. (2018). Multiple soliton solutions for the (3+1) conformable space-time fractional modified Korteweg-de-Vries equations. Journal of Ocean Engineering and Science, 1-8.

[25] Rawashdeh, M. S., & Maitama, S. (2014) Solving coupled system of nonlinear pde's using the natural decomposition method, International journal of pure and applied mathematics, 92(5), 757-776.

[26] Rawashdeh, M.S. & Maitama, S. (2015). Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM, Journal of Applied Analysis and Computation, 5(1), 77-88.

[27] Rezazadeh, H., & Ziabary, B. P. (2016). Sub-equation method for the conformable fractional generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. Computational Research Progress in Applied Science and Engineering, 2(3), 106-109.

[28] Shaallal, M. A., Jabbar, H. N., & Ali, K. K. (2018). Analytic solution for the space-time fractional Klein-Gordon and coupled conformable Boussinesq equations. Results in Physics, 8, 372-378.

[29] Unal, E., & Gokdogan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. Optik, 128, 264-273.

[30] Ziane, D., & Cherif, H. (2015) Resolution of nonlinear partial differential equations by elzaki transform decomposition method, Journal of approximation theory and applied mathematics, 5, 17-30.

8 ภาคผนวก (Appendix)

1. Thanompolkrang, S., & Poltem, D. (2019). Generalized fractional power series for solving nonlinear fractional integro-differential equations. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, *111*(1), 133-144.

2. Thanompolkrang, S., & Poltem, D. (2018). Generalized fractional power series to conformable fractional differential equations. *In Proceedings of International Conference in Mathematics and Applications Mahidol University (ICMA-MU 2018)* (pp. 135-142). Bangkok, Thailand.

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)

http://www.pphmj.com
http://dx.doi.org/10.17654/MS111010133
Volume 111, Number 1, 2019, Pages 133-144 ISSN: 0972-0871

A GENERALIZED FRACTIONAL POWER SERIES FOR SOLVING NONLINEAR FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sirunya Thanompolkrang and Duangkamol Poltem*

Department of Mathematics
Faculty of Science
Burapha University
Thailand
e-mail: duangkamolp@buu.ac.th

Abstract

In this paper, an analytical solution to nonlinear fractional integro-differential equations based on a generalized fractional power series expansion is presented. The fractional derivatives are of the conformable type. The new approach is a modified form of the well-known Taylor series expansion. Illustrative examples are presented to demonstrate the accuracy and effectiveness of the proposed method.

1. Introduction

Fractional calculus and differential equations have been widely explored due to their great importance in scientific and engineering problems. For example, fractional calculus is applied in fluid-dynamic traffic modeling

Received: October 10, 2018; Revised: November 30, 2018; Accepted: December 5, 2018
2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 45B05, 35C10.
Keywords and phrases: fractional power series, integro-differential equations, conformable derivative.

*Corresponding author

Communicated by E. Thandapani

[10], signal processing [19], control theory [5], and economics [3]. For more details and applications of fractional derivatives, we refer the reader to [21, 15, 7, 6]. Several types of fractional derivatives have been introduced to date. The most popular of which are Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives, but these two kinds of derivatives do not satisfy the product rule. Recently, Khalil et al. [13] introduced a new definition of fractional derivative, called *conformable fractional derivative*, which satisfies the product rule. The basic properties of the conformable fractional derivative have been obtained [1, 22]. Real-world phenomena often are modeled by the linear and nonlinear fractional differential equations [4, 25]. Many mathematical formulations contain nonlinear integro-differential equations with fractional order. However, integro-differential equations are usually difficult to solve analytically, so it is necessary to obtain an efficient approximate solution. Rawashdeh [20] applied a collocation method to study the integro-differential equations of fractional order, and the authors of [24] applied a spectral collocation method to solve stochastic fractional integro-differential equations. Momani and Noor [16] applied the Adomian decomposition method (ADM) to approximate solutions for fourth-order integro-differential equations of fractional order. Nawaz [17] applied the variational iteration method and homotopy perturbation method for fourth-order fractional integro-differential equations, and the authors of [26] presented a computational method based on the second kind Chebyshev wavelet to solve fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations. In [11], an approximated solution of fractional integro-differential equations using the Taylor expansion method is presented. Among these methods, the Taylor expansion method is the most attractive. To date, several fractional power series expansions have been presented in the literature [8, 9, 18, 2, 23, 14, 12]. In [2], a new algorithm for obtaining a series solution for a class of fractional differential equations was presented. Syam [23] investigated a numerical solution of fractional Lienard's equation by using the residual power series method. In [14], a new method, called the *restricted fractional differential transform metho*d (*RFDTM*), was developed to solve rational- or irrational-order fractional differential

equations. Recently, Jaradat et al. [12] proposed a new method based on a Taylor series expansion to solve fractional (integro-)differential equations and compared numerical solutions with exact solutions. A new series expansion was proposed to obtain closed-form solutions of fractional (integro-)differential equations of the Caputo type. This expansion provides a more integrated representation of the fractional power series with a related convergence theorem called a *generalized fractional power series* (*GFPS*).

In this paper, we adopt the conformable fractional derivative with GFPS and apply it to solve nonlinear integro-differential equations:

$$T^{\alpha}[y(t)] = h(t) + \int_0^1 k(t, \tau)[y(\tau)]^q d\tau, \quad q \geq 1 \tag{1}$$

subject to the initial condition

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $0 < \alpha \leq 1$, $k(t, \tau)$ and $h(t)$ are smooth functions. The derivative used is the conformable fractional derivative. The paper is organized as follows. In Section 2, some preliminaries used in this work details the proposed method, which is the GFPS in the conformable fractional derivative are presented. Some analytical and numerical results are presented in Section 3. Section 4 gives the conclusions of the paper.

2. The Generalized Conformable Fractional Power Series Method

In this section, definitions and properties of the conformable fractional derivative and the GFPS are presented. The derivative in equation (1) is the conformable fractional derivative which was defined in [13]. Throughout the rest of this section, it is assumed that $\alpha \in (0, 1]$.

Definition 2.1. Given a function $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, the *conformable fractional derivative* of f order α is defined by

$$T^{\alpha}[f(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{3}$$

for all $t > 0$.

Theorem 2.2. *If f and g are α-differentiable at a point where* $t > 0$, *then*

$$T^{\alpha}[af + bg] = aT^{\alpha}[f] + bT^{\alpha}[g],$$

for all $a, b \in \mathbb{R}$.

The power rule of the conformable fractional derivative is as follows.

Theorem 2.3. *The conformable fractional derivative of the power function is given by*

$$T^{\alpha}[t^{p}] = pt^{p-\alpha},$$

for all $p \in \mathbb{R}$.

The generalized fractional power series (GFPS) [12] was implemented to solve equation (1), starting with the following definition and properties related to the GFPS.

Definition 2.4. A generalized fractional power series of the form

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = c_{00} + c_{01}t^{1} + c_{10}t^{\alpha} + c_{02}t^{2} + c_{11}t^{\alpha+1} + c_{20}t^{2\alpha} + \cdots \quad (4)$$

was used, where $t > 0$, is called the *generalized fractional power series* (*GFPS*) about $t = 0$. c_{ij} denotes the coefficients of the series, where $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Moreover, the GFPS can be naturally obtained as a Cauchy product of a fractional power series and a power series as follows:

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i}t^{i\alpha}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{j}t^{j}\right), \quad (5)$$

where $c_{ij} = a_{i}b_{j}$.

Proposition 2.5. *If* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\alpha}$ *converges for some* $t = a > 0,$ *then it converges absolutely for* $t \in (0, a).$

Proof. See [12].

Corollary 2.6. *If* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ *converges for some* $t = b > 0,$ *then it converges absolutely for* $t \in (0, b).$

Proof. See [12].

Theorem 2.7. *Consider the two power series* $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\alpha}$ *and* $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ *such that A converges absolutely to a for* $t = t_a > 0,$ *and B converges to b for* $t = t_b > 0.$ *Then the Cauchy product of A and B converges to ab for* $t = t_c > 0,$ *where* $t_c = \min\{t_a, t_b\}.$

Proof. See [12].

Theorem 2.8. *If* $y(t)$ *is a generalized fractional power series,* $y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha + j},$ *then the conformable fractional derivative of* $y(t)$ *of order* α *within the interval of convergence of* $t > 0$ *is given by*

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i0}(i\alpha) t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{0j}(j) t^{j-\alpha}$$

$$+ \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{i+1,\, j+1}[(i+1)\alpha + j + 1] t^{i\alpha + j + 1}. \tag{6}$$

Proof. Since $y(t)$ converges, the conformable fractional derivative of order α can be operated term-by-term within the interval of convergence of $t > 0.$ Then equation (6) is obtained.

To solve problems (1) and (2), we assumed that solution $y(t)$ takes the form

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha + j}, \tag{7}$$

where $y(0) = y_0$ and c_{ij} are constants to be determined. Clearly, $c_{00} = y_0$.

The proposed expansion (6) is utilized to introduce a parallel scheme to the power series solution method. Illustrative examples are presented to demonstrate the accuracy and effectiveness of the proposed method in Section 3.

3. Numerical Results

In this section, three examples of the nonlinear integro-differential equations are presented to exhibit the usefulness of the expansion (6). It should be noted here that all the necessary calculations and graphical analyses were done with MATLAB 2017a.

Example 3.1. Consider the nonlinear Fredholm fractional integro-differential equation

$$T^{\alpha}[y(t)] = te^t + e^t - t + \int_0^1 ty(\tau)d\tau, \quad 0 \le t < 1, \ 0 < \alpha \le 1 \tag{8}$$

subject to the initial condition, $y(0) = 0$.

In accordance with the previous discussion and using the initial condition, the proposed generalized fractional power series solution to equation (8) has the form

$$y(t) = \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} t^{i\alpha + j}. \tag{9}$$

By substituting equation (9) into equation (8), the coefficients c_{ij}, $i + j \ge 1$, are determined by equating the coefficients of like powers of t through determining a formal recurrence relation. This obtains

$$c_{11} = \frac{\alpha + 2}{\alpha^2 + 3\alpha + 1}\left[\frac{\alpha(\alpha + 1) + 1}{\alpha(\alpha + 1)} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{j + 1}{(\alpha + j)(\alpha + j + 1)j!}\right], \tag{10}$$

$$c_{1j} = \frac{j + 1}{(\alpha + j)j!} \text{ for } j = 0, 2, 3, 4, ..., \tag{11}$$

and $c_{ij} = 0$ otherwise. Therefore, the exact solution of equation (8) is

$$y(t) = c_{11}t^{\alpha+1} + \frac{t^{\alpha}}{\alpha} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{j + 1}{(\alpha + j)j!}t^{\alpha+j}, \tag{12}$$

with c_{11} as in equation (10). Particularly, with $\alpha = 1$, the exact solution for the classical version of equation (8) is thus obtained as

$$y(t) = t^2 + t + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{t^{j+1}}{j!} = te^t. \tag{13}$$

Figure 1 illustrates the approximate solutions for $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ in $I \in [0, 1)$.

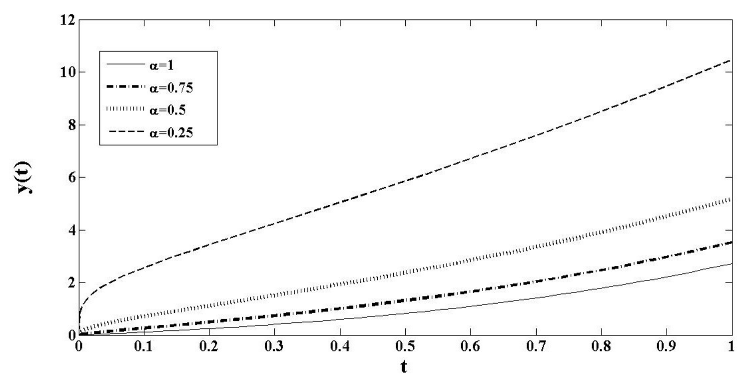


Figure 1. The approximate solution of Example 3.1 for $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

Example 3.2. Consider the Volterra integro-differential equation

$$T^{\alpha}[y(t)] = 1 - \int_0^t y(\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le 1, \;\; 0 < \alpha \le 1, \;\; y(0) = 0. \tag{14}$$

Upon substituting all the relevant quantities into equation (14) and collecting powers of t, we have

$$c_{10} = \frac{1}{\alpha}, \tag{15}$$

$$c_{i+1,i} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{(-1)^i}{(\alpha+1)(2\alpha+1)\cdots(i\alpha+i)((i+1)\alpha+i)}\right] \text{ for } i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

where $c_{ij} = 0$ otherwise. Then the exact solution is

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}t^{\alpha} + \sum_{i=1}^{\infty} c_{i+1,i}t^{(i+1)\alpha+i}, \tag{17}$$

where $c_{i+1,i}$ satisfies equation (16).

Particularly, we can see the approximate solutions for $\alpha = 1$, which are derived for different values of t. Then the exact solution in a closed form is $y(t) = \sin t$. Figure 2 shows the effect of α on the solution for $\alpha =$ $0.25, 0.5, 0.75, 1$ in $I \in [0, 1)$.

Example 3.3. Consider the nonlinear Fredholm fractional integro-differential equation

$$T^{\frac{1}{2}}[y(t)] = 2t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{1260} + \int_0^1 t\tau[y(\tau)]^4 d\tau \tag{18}$$

subject to the initial condition, $y(0) = 0$.

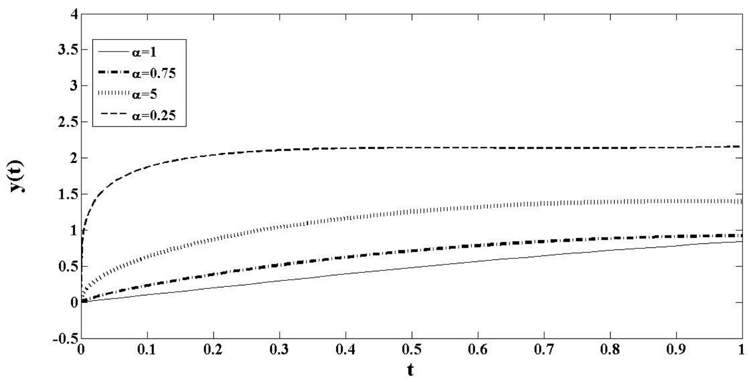


Figure 2. The approximate solution of Example 3.2 for $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

Since the definite integral in equation (18) completely depends on the variable τ, the solution is spanned by the monomials $\{t, t^{\frac{3}{2}}, t^2\}$. That is,

$$y(t) = c_{01}t + c_{11}t^{\frac{3}{2}} + c_{02}t^2 \tag{19}$$

with

$$T^{\frac{1}{2}}[y(t)] = c_{01}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}c_{11}t + 2c_{02}t^{\frac{3}{2}}. \tag{20}$$

By substituting all the relevant quantities into equation (18) and equating the coefficients of like powers of t from both sides, we obtain $c_{01} = -1$, $c_{02} = 1$, and c_{11} satisfies

$$c_{11}\left(c_{11}^3 - \frac{128}{255}c_{11}^2 + \frac{4}{21}c_{11} - \left(\frac{1024}{20995} + 12\right)\right) = 0. \tag{21}$$

Subsequently, we have exact solutions of the form $y(t) = t^2 - t + c_{11}t^{\frac{3}{2}}$, where c_{11} satisfies equation (21).

4. Conclusions

In this paper, the analytical solution to nonlinear integro-differential equations based on the GFPS was demonstrated. Three numerical examples were presented. Figures 1 and 2 showed that as α increases, the approximate solution decreases. The results reveal that exact solutions are obtained in the form of a rapidly convergent series with an easily computable component. In conclusion, the proposed scheme could be used further to study identical applications. It could be extended to solve a variety of fractional differential and integral equations in the science and engineering fields.

Acknowledgement

The authors are grateful to the reviewers for their valuable suggestions which improved the quality of the paper. This research was funded by Burapha University through National Research Council Thailand grant no. 173/2561 and the Science Achievement Scholarship of Thailand.

References

[1] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, J. Comput. Appl. Math. 279 (2015), 57-66.

[2] M. Al-Refai, M. A. Hajji and M. I. Syam, An efficient series solution for fractional differential equations, Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 891837. DOI:10.1155/2014/891837.

[3] R. T. Baillie, Long memory processes and fractional integration in econometrics, J. Econom. 73 (1996), 5-59.

[4] H. Batarfi, J. Losada, J. J. Nieto and W. Shammakh, Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations, J. Funct. Spaces 2015, Art. ID 706383, 6 pp. DOI:10.1155/2015/706383.

[5] G. W. Bohannan, Analog fractional order controller in temperature and motor control application, J. Vib. Control. 14 (2008), 1487-1498.

[6] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petras, Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications, World Scientific, Singapore, 2010.

[7] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer, New York, NY, USA, 2010.

[8] A. El-Ajou, O. Abu Arqub, Z. Al Zhour and Z. Momani, New results on fractional power series: theories and applications, Entropy 15 (2013), 5305-5323.

[9] A. El-Ajou, O. Abu Arqub and M. A. Al-Smadi, A general form of the generalized Taylor's formula with some applications, Appl. Math. Comput. 256 (2015), 851-859.

[10] J. H. He, Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations, Bull. Sci. Technol. 15 (1999), 86-90.

[11] L. Huang, X. F. Li, Y. Zhao and X. Y. Duan, Approximate solution of fractional integro-differential equations by Taylor expansion method, Comput. Math. Appl. 62 (2011), 1127-1134.

[12] I. Jaradat, M. Al-Dolat, K. Al-Zoubi and M. Alquran, Theory and applications of a more general form for fractional power series expansion, Chaos Solitons Fractals 108 (2017), 107-110.

[13] R. Khalil, M. A. Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, J. Comput. Appl. Math. 264 (2014), 65-70.

[14] A. R. Khudair, S. A. M. Haddad and S. L. Khalaf, Restricted fractional differential transform for solving irrational order fractional differential equations, Chaos Solitons Fractals 101 (2017), 81-85.

[15] A. Kilbas, M. H. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Application of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[16] S. Momani and M. A. Noor, Numerical methods for fourth order fractional integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 182 (2006), 754-760.

[17] Y. Nawaz, Variational iteration method and homotopy perturbation method for fourth-order fractional integro-differential equations, Comput. Math. Appl. 61 (2011), 2330-2341.

[18] Z. Odibat and N. Shawagfeh, Generalized Taylor's formula, Appl. Math. Comput. 186 (2007), 286-293.

[19] R. Panda and M. Dash, Fractional generalized splines and signal processing, Signal Process. 86 (2006), 2340-2350.

[20] E. A. Rawashdeh, Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method, Appl. Math. Comput. 176 (2006), 1-6.

[21] G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.

[22] F. S. Silva, D. M. Moreira and M. A. Moret, Conformable Laplace transform of fractional differential equations, Axioms (2018), DOI:10.3390/2018/axioms7030055.

[23] M. I. Syam, A numerical solution of fractional Lienard's equation by using the residual power series method, Comput. Math. Appl. (2018). DOI:10.3390/math6010001.

[24] Z. Taheri, S. Javadi and E. Babolian, Numerical solution of stochastic fractional integro-differential equation by the spectral collocation method, J. Comput. Appl. Math. 321 (2017), 336-347.

[25] W. Zhong and L. Wang, Basic theory of initial value problems of conformable fractional differential equations, Adv. Differ. Equ. 2018, Paper No. 321, 14 pp. DOI:10.1186/s13662-018-7778-5.

[26] L. Zhu and Q. Fan, Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17 (2012), 2333-2341.

ICMA-MU 2018 Book on the Conference Proceedings

GENERALIZED FRACTIONAL POWER SERIES TO CONFORMABLE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sirunya Thanompolkrang[1] and **Duangkamol Poltem**[1,2]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Science*
Burapha University,
Chonburi 20131, Thailand
email: 59910295@go.buu.ac.th

[2] *Centre of Excellence in Mathematics*
Bangkok 10400, Thailand
email: duangkamolp@buu.ac.th

Abstract

In this paper, a new general form of fractional power series is introduced in the sense of the conformable fractional derivative, with corresponding convergence property. To illustrate the functionality of the proposed expansion, we apply the corresponding iterative power series scheme to several fractional differential equations. Our results illustrate the power, efficiency, simplicity, and reliability of the proposed method.

1 Introduction

Fractional calculus has attracted much attention in the past twenty years. Fractional calculus and fractional differential equations (FDEs) are widely explored subjects thanks to the great importance of many applications in both pure and applied science. The definition of fractional derivatives have been many definitions. Most popular definitions are the Riemann-Liouville and Caputo definitions, we refer to reader to [1–3]. In [4] the authors gave a new definition of factional derivative and fractional integral. The new definition seems to be a natural extension of the usual derivative called conformable fractional derivative. This new definition satisfies formulas of derivative of product and quotient of two functions and has a simpler the chain rule. Abdeljawad [5]

Key words: fractional power series, fractional differential equation, conformable derivative.
(2010) Mathematics Subject Classification: 26A33; 35C10

proceed on to develop the definitions there and set the basic concepts in this new simple interesting conformable fractional calculus. He provided left and right conformable fractional derivatives, fractional integrals of higher orders concepts. Moreover, he presented the fractional chain rule, the fractional integration by parts formulas, Gronwall inequality, the fractional power series expansion and the fractional Laplace transform definition.

Recently, many researchers got interested in looking at FDEs as new model equations for many engineering problems. However, many of these such FDEs do not possess exact solutions. So it is required to obtain an efficient approximate solution. Some works in this field are with regard to the power series solutions around an ordinary point and a regular-singular point homogeneous sequential linear conformable fractional differential equations of order 2α in the case of variable coefficients [6,7]. Several fractional power series expansions have been presented in the literature [8–11]. However, they all lack sufficient integer exponents. Jaradat [12] provided a more integrated representation of the fractional power series with a related convergence theorem, called a generalized fractional power series (GFPS) in the Caputo sense.

In this work, we adopt the conformable fractional derivative with GFPS and apply it to solve FDEs. The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce some necessary definitions and mathematical preliminaries of conformable fractional calculus. In Section 3 the GFPS in conformable type is presented. In Section 4 we present some numerical results, which demonstrate the accuracy of the proposed method. Also, a conclusion is given in Section 5.

2 Preliminaries

In this section, we present some definitions of the conformable fractional derivative and GFPS.

Definition 1. [4] Given a function $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, where the conformable fractional derivative of f order α is defined by

$$T^\alpha[f(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \forall t > 0,\ \alpha \in (0, 1]. \tag{2.1}$$

If f is α-differentiable in the interval $(0, a)$, $a > 0$, and $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ exists, the define $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$.

Theorem 2.1. *[4] Let $\alpha \in (0, 1]$ and f, g be α-differentiable at a point $t > 0$. Then*

1. $T^\alpha[af + bg] = aT^\alpha[f] + bT^\alpha[g]$, *for all $a, b \in \mathbb{R}$.*
2. $T^\alpha[t^p] = pt^{p-\alpha}$, *for all $p \in \mathbb{R}$.*
3. $T^\alpha[\lambda] = 0$, *for all constant functions λ.*

4. $T^\alpha[fg] = fT^\alpha[g] + gT^\alpha[f]$.

5. $T^\alpha[f/g] = (gT^\alpha[f] - fT^\alpha[g])/g^2, \quad g \neq 0$.

6. In addition, if f is differentiable, then

$$T^\alpha[f(t)] = t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}.$$

Definition 2. [12] A generalized fractional power series (GFPS) centered at $t_0 = 0$ is an infinite series of the form

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = c_{00} + c_{01}t^1 + c_{10}t^\alpha + c_{02}t^2 + c_{11}t^{\alpha+1} + c_{20}t^{2\alpha} + \cdots, \quad (2.2)$$

where $i, j \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ is a variable of indeterminate and c_{ij}'s are the coefficients of the series.

Moreover, the GFPS is naturally obtained as a Cauchy product of two power series, as follows,

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i\alpha}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right), \quad (2.3)$$

where $c_{ij} = a_i b_j$.

Proposition 2.2. *[12] If $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\alpha}$ converges for some $t = a > 0$, then it converges absolutely for $t \in (0, a)$.*

Corollary 2.3. *[12] If $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ converges for some $t = b > 0$, then it converges absolutely for $t \in (0, b)$.*

Theorem 2.4. *[12] Consider the two power series $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\alpha}$ and $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ such that A converges absolutely to a for $t = t_a > 0$ and B converges to b for $t = t_b > 0$. Then, the Cauchy product of A and B converges to ab for $t = t_c > 0$ where $t_c = \min\{t_a, t_b\}$.*

3 Main Results

In this section, we introduce a GFPS in the conformable fractional derivative sense. A direct computation yields $T^\alpha[t^p] = pt^{p-\alpha}$, $\forall p \in \mathbb{R}$. Thus, by term-by-term differentiation within the interval of convergence of $t > 0$,

$$y(t) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j},$$

then

$$T^{\alpha}[y(t)] = \sum_{i=1}^{\infty}(i\alpha)c_{i0}t^{(i-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)c_{0j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[(i+1)\alpha+j+1]c_{i+1,j+1}t^{i\alpha+j+1}, \quad (3.1)$$

and

$$T^{2\alpha}[y(t)] = \sum_{i=2}^{\infty}(i\alpha)(i-1)c_{i0}\alpha t^{(i-2)\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)(j-\alpha)c_{0j}t^{j-2\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty}(j)(j+\alpha)c_{1j}t^{j-\alpha} + \sum_{i+j=0}^{\infty}[((i+2)\alpha+j+1)((i+1)\alpha+j+1)]c_{i+2,j+1}t^{i\alpha+j+1}, \quad (3.2)$$

where $T^{2\alpha} = T^{\alpha}T^{\alpha}$.

4 Numerical Results

In this section, we have dealt with three FDEs to exhibit the usefulness of GFPS expansion.

Example 4.1. Consider the conformable fractional initial value problem:

$$T^{\alpha}[y(t)] = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

where $0 < \alpha \leq 1$.

In the previous discussion and using the initial condition, the proposed generalized fractional power series solution to equation (4.1) has the form

$$y(t) = y_0 + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}t^{i\alpha+j}. \quad (4.2)$$

By substituting equations (4.2) and (3.1) into (4.1) and equating the coefficient of like powers of t from both sides, the following recursive formula is obtained

$$c_{i+1,j} = \frac{\lambda c_{ij}}{[(i+1)\alpha+j]} \quad \text{for } i+j \geq 1.$$

This implies

$$c_{i0} = \frac{\lambda^i y_0}{\alpha^i i!}, \quad \text{for } i \geq 0 \quad \text{and} \quad c_{ij} = 0, \quad \text{otherwise.}$$

Therefore, the exact solution of equation (4.1) is given by

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i y_0}{\alpha^i i!} t^{i\alpha} = y_0 e^{\lambda t^\alpha/\alpha}.$$

Particularly, with $\alpha = 1$, it can be obtained that the exact solution for the classical version of (4.1) is

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

The comparison of the exact solution and the approximate solution for different values of $0 < \alpha \leq 1$ is shown in Figure 1 by using $y_0 = 1$ and $\lambda = 1$.

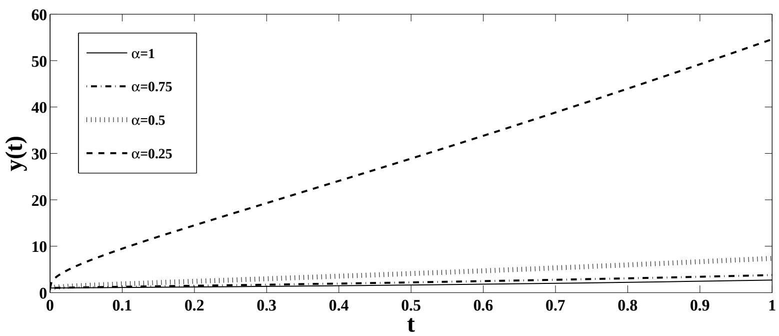


Figure 1: The approximate solution of Example 4.1 for some $0 < \alpha \leq 1$.

Example 4.2. Consider the following fractional initial value problem:

$$T^\alpha[y(t)] - \lambda y(t) = t^{2-\alpha}, \quad y(0) = y_0, \tag{4.3}$$

where $0 < \alpha \leq 1$ and $t \geq 0$.

Substituting equations (2.2) and (3.1) into (4.3), the coefficients c_{ij}, $i + j \geq 0$, are determined by equating coefficients of like powers of t through determining a formal recurrence relation, we obtained

$$c_{i2} = \frac{\lambda^i}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)(3\alpha+2)\cdots(i\alpha+2)} \quad \text{for } i \geq 0,$$
$$c_{i0} = \frac{\lambda^i y_0}{i!\alpha^i}, \quad \text{for } i \geq 0 \quad \text{and} \quad c_{ij} = 0, \quad \text{otherwise}.$$

Then, the exact solution of equation (4.3) is

$$y(t) = y_0 + \frac{\lambda}{\alpha} y_0 t^\alpha + \frac{1}{2} t^2 + \sum_{i=1}^{\infty} c_{i2} t^{i\alpha+2} + \sum_{i=2}^{\infty} c_{i0} t^{i\alpha}.$$

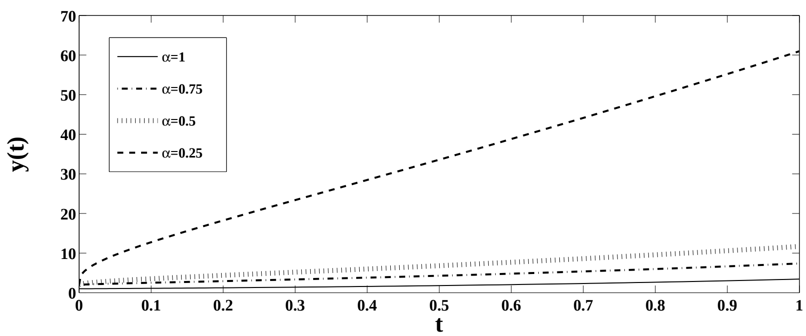


Figure 2: The approximate solution of Example 4.2 for some $0 < \alpha \leq 1$.

In particular when $\alpha = 1$, the exact solution for the classical version of equation (4.3) is given by

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{\lambda^2}\right) e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda}.$$

Figure 2 shows graphically the comparison between the exact solution and the approximate solutions for various values of α with $y_0 = 1$ and $\lambda = 1$.

Example 4.3. Consider the following fractional differential equation:

$$T^{2\alpha}[y(t)] - 2T^{\alpha}[y(t)] + y(t) = (2-\alpha)t^{2-2\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1,\ t \geq 0. \tag{4.4}$$

By substituting equations (2.2), (3.1) and (3.2) into (4.4) and equating the coefficients of like powers of t from both sides, we have

$$\begin{aligned} c_{i0} &= \frac{i\alpha c_{10} - (i-1)c_{00}}{\alpha^i i!}, \\ c_{2i,2} &= \frac{2i+1}{2[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i)\alpha+2)]}, \\ c_{2i+1,2} &= \frac{i+1}{[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i+1)\alpha+2)]}, \end{aligned}$$

for $i \geq 0$, and $c_{ij} = 0$ otherwise. Substituting the resulting coefficients back into the equation (4.4) gives the following exact solution

$$\begin{aligned} y(t) = c_{00} &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\alpha c_{10} - (i-1)c_{00}}{\alpha^i i!} t^{i\alpha} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i+1}{2[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i)\alpha+2]} t^{2i\alpha+2} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{[\alpha+2][2\alpha+2][3\alpha+2]\cdots[(2i+1)\alpha+2]} t^{(2i+1)\alpha+2}. \end{aligned}$$

Particularly, when $\alpha = 1$, the exact solution for the classical version of equation (4.4) can be obtained as

$$y(t) = (c_{10} - c_{00} + 1)te^t + (c_{00} - 1)e^t + 1.$$

Figure 3 illustrates the approximate solutions for various values of $0 < \alpha \leq 1$ with $c_{00} = 2$ and $c_{01} = 8$.

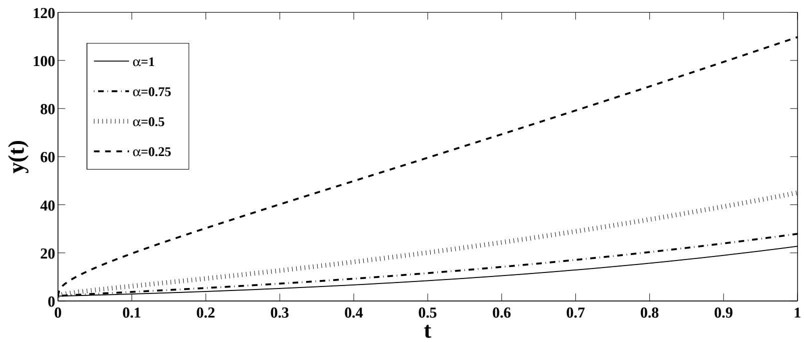


Figure 3: The approximate solution of Example 4.3 for some $0 < \alpha \leq 1$.

5 Conclusions

In this paper, the GFPS in the conformable fractional derivative was successfully used to find the exact solution of fractional differential equations. The results reveal that the exact solutions are obtained in the form of a rapidly convergent series with easily computable component. The proposed method could be used to study identical applications and it can be expanded to solve integral equations in mathematical and physical sciences.

Acknowledgment
The authors are grateful to the reviewers for valuable suggestion in improving the quality of the paper. This research is financially supported by Burapha University through National Research Council of Thailand (NRCT) (No. 173/2561) and Science Achievement Scholarship of Thailand (SAST).

References

[1] A. Anatolii Aleksandrovich Kilbas, Hari Mohan Srivastava, and Juan J. Trujillo. Theory and Application of Fractional Differential Equations. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[2] G. Samko, A. A. Kilbas, and Marichev. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. In: North Holland Mathematics Studies, 2006.

[3] I. Podlubny. Fractional Differential Equations. Academic Press, USA, 1999.

[4] R. Khalil, M.A. Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics. 264:65–70, 2014.

[5] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus. Optik. 128:264–273, 2017.

[6] E. Unal, A. Gokdogan, and E. Celik. Solutions of sequential conformable fractional differential equations around an ordinary point and conformable fractional Hermite differential equation. British Journal of Applied Science & Technology. 10(2):1–11, 2015.

[7] E. Unal, A. Gokdogan, and E. Celik. Solutions around a regular α singular point of a sequential conformable fractional differential equation. arXiv preprint arXiv:1505.06245, 2015.

[8] A. El-Ajou, O.A. Arqu, Z.A. Zhour, and S. Momani. New results on fractional power series: theories and applications. Entropy, 15:5305-5323, 2013.

[9] A. El-Ajou, O.A. Arqu, and M. Al-Smadi. A general form of the generalized Taylor's formula with some applications. Applied, Mathematics and Computation. 256:851–859, 2015.

[10] J. Truilljo, M. Rivero, and B. Bonilla. On Riemann-Liouville generalized Taylor's formula. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 231:255–265, 1999.

[11] Z.M. Odibat and N.T. Shawagfehb. Generalized Taylor's formula. Applied, Mathematics and Computation. 186(1):286–293, 2007.

[12] I. Jaradat, M. Al-Dolat, K. Al-Zoubi, and M. Alquran. Theory and applications of a more general form for fractional power series expansion. Chaos Solitons Fractals, 108:107–110, 2018.