รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์
(Existence of solutions of impulsive differential equations)

หัวหน้าโครงการ: ดร. ชาติไทย ไทยประยูร
ผู้ร่วมวิจัย: รองศาสตราจารย์ ดร. เจษฎา ธารีบุญ

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้
จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน)
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560
มหาวิทยาลัยบูรพา

รหัสโครงการ 2560A10802100

สัญญาเลขที่ 144/2560

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

(Existence of solutions of impulsive differential equations)

ชาติไทย ไทยประยูร

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

มีนาคม 2561

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560 มหาวิทยาลัยบูรพา ผ่านสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 144/2560

Acknowledgement

This work was financially supported by the Research Grant of Burapha University through National Research Council of Thailand (Grant no. 144/2560).

บทคัดย่อภาษาไทย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอร์เมเบิลแบบไม่เชิงเส้น โดยมีการสร้างกรีนส์ฟังก์ชันและหลักการเปรียบเทียบขึ้นใหม่สำหรับปัญหาค่าขอบแบบเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอร์เมเบิล พร้อมทั้งนิยามผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนเพื่อใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับวิธีการทำซ้ำทางเดียวและแสดงว่าลำดับที่เกิดขึ้นลู่เข้าสู่ผลเฉลยสุดขีดของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอร์เมเบิลแบบไม่เชิงเส้น นอกจากนี้ยังมีการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบในรูปปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา โดยใช้ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิ และทฤษฎีจุดตรึงของอริแกน

คำสำคัญ: ปัญหาค่าขอบ; อนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอนฟอร์เมเบิล; สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์; เทคนิคทำซ้ำทางเดียว; ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิ; ทฤษฎีจุดตรึงของอริแกน; ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา

Abstract

In this research, we investigate the existence of solutions for boundary value problems of nonlinear impulsive conformable fractional differential equations with delay. By establishing the associate Green's function and a comparison result for the linear impulsive problem, we obtain that the lower and upper solutions converge to the extremal solutions via the monotone iterative technique. Moreover, We applying Krasnoselskii’s and O’Regan’s fixed point theorems, in this research, we study the existence of solutions for a coupled system consisting from Langevin fractional differential equations of Riemann-Liouville type subject to the generalized nonlocal integral boundary conditions.

Keywords: Boundary value problem; conformable fractional derivative; impulsive differential equation; monotone iterative technique; Krasnoselskii’s fixed point theorem; O’Regan’s fixed point theorem; generalized fractional integral.

สารบัญเรื่อง

หน้า

สารบัญเรื่อง (ต่อ)

สารบัญภาพ

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อที่ใช้ในการวิจัย

สัญลักษณ์/คำย่อ	คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อที่ใช้ในการวิจัย
$\mathbb{R}$	จำนวนจริง
J	ช่วงปิด 0 ถึง T
t_k	จุดอิมพัลส์ สำหรับ $k = 1,\ldots,m$ โดย $t_0 = 0$ และ $t_{m+1} = T$
J^-	ช่วงปิด 0 ถึง T ที่ตัดจุดอิมพัลส์ออก
J_k	ช่วงเปิดซ้ายปิดขวา จาก t_k ถึง t_{k+1} สำหรับ $k = 1,\ldots,m$
J_0	ช่วงปิด จาก t_0 ถึง t_1
$x(t_k^+)$	ลิมิตขวาของ x ที่จุด t_k
$x(t_k^-)$	ลิมิตซ้ายของ x ที่จุด t_k
$\Delta x(t)$	ผลต่างของลิมิตขวาและลิมิตซ้ายของ x ที่จุด t_k
$C(A,B)$	เซตของฟังก์ชันต่อเนื่องจาก A ไป B
$C^n(A,B)$	เซตของฟังก์ชันที่อนุพันธ์อันดับที่ n ต่อเนื่องจาก A ไป B
$PC(A,B)$	เซตของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ จาก A ไป B

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์คือสมการที่ใช้อธิบายปัญหาหรือปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาณของสิ่งที่เราสนใจอย่างทันทีทันใด ซึ่งในปีที่ผ่านสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์ได้กลายเป็นเครื่องมือที่สำคัญมากในบางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการศึกษาปรากฏการณ์จริงทางระบบนิเวศ เช่น การควบคุมแมลงศัตรูพืชโดยการปล่อยศัตรูธรรมชาติและการฉีดพ่นยาฆ่าแมลง ระบบชีวภาพเช่น ระบบการไหลเวียนของเลือดภายใต้การเต้นของหัวใจ นอกจากนั้นยังสามารถประยุกต์ใช้ในทางฟิสิกส์ เทคโนโลยีเคมี การเปลี่ยนแปลงของประชากรและอื่น ๆ ดังนั้นจึงมีงานวิจัยจำนวนมากที่ศึกษาสมการนี้

แคลคูลัสเศษส่วนเป็นแคลคูลัสดั้งเดิมแบบหนึ่ง จากการที่ไลบ์นิซได้นิยามอนุพันธ์อันดับที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และในปี 1695 โลปิตาลได้เขียนจดหมายถึงไลบ์นิซ โดยถามว่าจะเกิดอะไรขึ้นถ้า $n=\frac{1}{2}$ ไลบ์นิซจึงตอบว่า " มันจะเกิดความขัดแย้งขึ้น" นี้จึงเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัส เศษส่วน ในช่วงหลายปีที่ผ่านมานี้จึงมีนักคณิตศาสตร์หลายคนให้ความสนใจในอนุพันธ์แบบเศษส่วน และนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน จากนั้นได้พัฒนาไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนที่มีอิมพัลส์

จะเห็นว่าแคลคูลัสทั้ง 2 แบบนี้เป็นเป็นแคลคูลัสที่สำคัญอย่างมากและสามารถนำไปประยุกต์ได้ในหลายๆ สาขาทางวิทยาศาสตร์

1.2 การทบทวนวรรณกรรม/สารสนเทศที่เกี่ยวข้อง

แคลคูลัสเศษส่วนเป็นสิ่งที่มีประโยชน์อย่างมากในช่วงหลายปีที่ผ่านมาเพราะเป็นเครื่องมือในการใช้งานต่างๆในวิทยาศาสตร์ประยุกต์เกือบทั้งหมด และสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเป็นเรื่องที่น่าสนใจเป็นอย่างมากจึงทำให้ได้รับการพัฒนาต่อมาอย่างเรื่อยๆ เนื่องด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนสามารถอธิบายสมบัติการจดจำลักษณะพิเศษของวัสดุ และกระบวนการต่างๆ ซึ่งมีการประยุกต์ใช้งานอย่างแพร่หลาย เช่น ในสาขาวิชาฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา ชีวเคมี-ฟิสิกคัล เศรษฐศาสตร์ พลศาสตร์อิเล็กโตรไดนามิคส์ของตัวกลางเชิงซ้อน โพลิเมอร์ วงจรไฟฟ้า การควบคุมระบบเชิงพลวัตร เป็นต้น

ในช่วงหลายปีที่ผ่านมานี้จึงมีนักคณิตศาสตร์หลายคนให้ความสนใจในอนุพันธ์แบบเศษส่วน และได้มีการนิยามอนุพันธ์แบบเศษส่วนหลายแบบ แต่ที่ได้รับความนิยมมากที่สุดคือ

1) นิยามของรีมันน์ ลียูวิลล์: ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก $n-1 \le \alpha < n$ อนุพันธ์อันดับ α ของ f จะอยู่ในรูป

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds$$

2) นิยามของคาปูโต: ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก $n-1 \le \alpha < n$ อนุพันธ์อันดับ α ของ f จะอยู่ในรูป

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} f(s)ds$$

3) นิยามของฮาดามาด: ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก $n-1 \le \alpha < n$ อนุพันธ์อันดับ α ของ f จะอยู่ในรูป

$$\left({}^{H}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds$$

4) นิยามของคาทูกัมโปลา: ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก $n-1 \le \alpha < n$ อนุพันธ์อันดับ α ของ f จะอยู่ในรูป

$$\left({}^{\rho}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{s^{\rho-1} f(s)}{(t^{\rho}-s^{\rho})^{\alpha-n+1}} ds$$

ซึ่งเป็นการพัฒนามาจากนิยามของรีมันน์ ลียูวิลล์ และของฮาดามาด โดยจะเห็นว่า
ถ้า $\rho = 1$ จะได้ว่า $\left({}^{1}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)(t)$
และ เมื่อ $\rho \to 0^+$ จะได้ว่า $\lim_{\rho\to 0^+}\left({}^{\rho}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \left({}^{H}D_a^{\alpha} f\right)(t)$
จากนิยามเหล่านี้พบว่ายังขาดคุณสมบัติบางประการ:

1. นิยามของรีมันน์ ลียูวิลล์ ไม่สอดคล้องกับ $D_a^{\alpha}(d) = 0$, เมื่อ d เป็นค่าคงที่ (${}^{C}D_a^{\alpha}(d) = 0$ เป็นจริงสำหรับนิยามของคาปูโต), ถ้า α ไม่เป็นจำนวนนับ.
2. ทุกนิยามของอนุพันธ์แบบเศษส่วน ไม่มีกฎอนุพันธ์ผลคูณ
3. ทุกนิยามของอนุพันธ์แบบเศษส่วน ไม่สอดคล้องสูตรของอนุพันธ์ผลหาร
4. ทุกนิยามของอนุพันธ์แบบเศษส่วน ไม่สอดคล้องกับกฎลูกโซ่
5. ทุกนิยามของอนุพันธ์แบบเศษส่วน ไม่สอดคล้องกับทฤษฎีค่ากลาง
6. ทุกนิยามของอนุพันธ์แบบเศษส่วน ไม่สอดคล้องกับ $D^{\beta}D^{\alpha} f = D^{\alpha+\beta} f$

ดังนั้นจึงเกิดการนิยามอนุพันธ์แบบส่วนคอนฟอเมเบิล ซึ่งอนุพันธ์แบบส่วนอันดับ α ของฟังก์ชัน $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ อยู่ในรูปแบบ

$$ {}_aD^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} $$

สำหรับทุก $t>0$ และ $\alpha\in(0,1)$ ถ้า f สามารถอนุพันธ์ได้ α ครั้งใน $(0,a)$ และ $a>0$ และ $\lim_{t\to 0^+} {}_aD^{\alpha} f(t)$ หาค่าได้ ซึ่งพบว่าอนุพันธ์แบบส่วนคอนฟอเมเบิลมีคุณสมบัติข้อ 1-5 แต่ยังขาดคุณสมบัติข้อ 6 ดังนั้นจึงมีนักคณิตศาสตร์หลายท่านให้ความสนใจที่จะพัฒนาอนุพันธ์แบบเศษส่วน ซึ่งเมื่อมีการสร้างอนุพันธ์แบบเศษส่วนขึ้นจึงเกิดคำถามถัดมาว่าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนนี้มีคำตอบหรือไม่

ในทางคณิตศาสตร์เป็นที่ทราบกันดีว่าสำหรับปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นการมีอยู่จริงของผลเฉลยนั้นถือเป็นเรื่องไม่ยากนัก แต่สำหรับปัญหาค่าขอบนั้นการมีอยู่จริงของผลเฉลยถือเป็นเรื่องที่ยากมากเพราะการที่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จะสอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบทั้ง 2 ข้างนั้นถือว่ายากมาก ดังนั้นจึงมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบต่างๆ เช่น

ในปี 2555 Ahmad ได้ศึกษาปัญหาค่าขอบของสมการเชิงผลต่างคิว

$$ D_q^2u(t) = f(t,u(t)), \qquad t\in I=[0,T] $$
$$ u(0)=\eta u(T), \quad D_q^2u(0)=\eta D_qu(T) $$

เมื่อ $f\in C([0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, $T\in q^{\mathbb{N}}$, $q^{\mathbb{N}}=\{q^n : n\in\mathbb{N}\}$, η เป็นค่าคงที่ และ D_q เป็นอนุพันธ์คิว

$$ D_q f(t) = \frac{f(t)-f(qt)}{(1-q)t} $$

และได้ศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของของปัญหานี้ได้

ในปี 2557 Tadeusz ได้ศึกษาการมีอยู่จริงของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$ x'(t) = f(t,x(t)), \qquad t\in J=[0,T] $$
$$ x(0)=\int_0^T x(s)dA(s) $$

เมื่อ $f:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $A:J\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ในปี 2558 Wenzhe ได้ศึกษาปัญหาค่าขอบสามจุดของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน

$$ D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, \qquad t\in[0,1] $$
$$ u(0)=0, \quad g(u(1),u(\eta))=0, \quad \eta\in(0,1), $$

เมื่อ $f \in C([0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ และ D_{0+}^{α} เป็นอนุพันธ์เศษส่วนแบบ Riemann-Liouville อันดับ $1<\alpha<2$

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dt}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}u(s)ds$$

และสามารถหาเงื่อนไขการมีอยู่จริงของผลเฉลยของของปัญหานี้ได้

ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะทำการวิจัยเพื่อสร้างทฤษฎีบทการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ในรูป

$$\begin{cases} D_{t_k}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),x(\theta(t))), & t\in J^{-}, \\ \Delta x(t_k)=I_k\left(x(t_k)\right), & k=1,2,\ldots,m \\ x(0)=\lambda x(T). & \end{cases} \tag{1.1}$$

โดยที่ $J=[0,T]$, $J'=J\setminus\{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_m<t_{m+1}=T$, $f\in C\left(J\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$, $I_k\in C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ และ λ เป็นค่าคงที่

และสร้างทฤษฎีบทการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูป

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{p_1}({}^{RL}D^{p_2}+\lambda_1)x(t)=f(t,x(t),y(t)), & 0<t<T, \\ {}^{RL}D^{q_1}({}^{RL}D^{q_2}+\lambda_2)y(t)=g(t,x(t),y(t)), & 0<t<T, \\ x(0)=0, \qquad x(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ {}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(\xi_i), & \\ y(0)=0, \qquad y(\kappa)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\ {}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(\zeta_j), & \end{cases} \tag{1.2}$$

เมื่อ $p_1,p_2,q_1,q_2>0$, $\gamma_i,\phi_j>0$, $\xi_i,\zeta_j\in(0,T)$, $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$ และ $f,g:[0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ λ_1,λ_2 เป็นค่าคงที่

1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

วัตถุประสงค์หลักของการศึกษานี้ คือ

1. คิดค้นทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ และระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน
2. นำทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่คิดค้นได้ไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ เพื่อก่อให้เกิดการประยุกต์ใช้ในแขนงวิชาอื่นๆ ต่อไป
3. เพื่อพัฒนากำลังคนให้มีคุณภาพระดับสูงในด้านการวิจัยพื้นฐาน ด้านเนื้อหาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

หาเงื่อนไขของการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (1.1) และปัญหาค่าขอบสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (1.2)

1.5 แนวความคิดที่นำมาใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการนำวิธีทำซ้ำทางเดียวมาใช้ในการพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (1.1) และใช้ทฤษฎีจุดตรึงในพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (1.2) ซึ่งวิธีทำซ้ำทางเดียวและทฤษฎีจุดตรึงเป็นที่นิยมอย่างมากในการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการและระบบสมการเชิงอนุพันธ์

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้องค์ความรู้และทฤษฎีใหม่ๆ ที่เกี่ยวกับการมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ และระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

2. การนำไปประยุกต์ใช้อย่างต่อเนื่องในแขนงวิชาอื่นๆ เนื่องจากการค้นพบองค์ความรู้ใหม่

บทที่ 2
นิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับแคลคูลัสเชิงเศษส่วน สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์ และทฤษฎีจุดตรึง

2.1 แคลคูลัสเชิงเศษส่วน (Fractional Calculus)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงของนิยามของอนุพันธ์เชิงเศษส่วน และนิยามปริพันธ์เชิงในรูปแบบต่างๆ

นิยาม 2.1 [Abdeljawad, 2015] อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอมฟอร์เมเบิลของฟังก์ชัน $f \in C\left([a,\infty),\mathbb{R}\right)$ ของอันดับ $0<\alpha \le 1$ คือ

$$ {}_aD^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} $$

เมื่อ $a=0$ เราสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D^{α}

ถ้า ${}_aD^{\alpha} f(t)$ หาค่าได้บนช่วง (a,b) แล้ว ${}_aD^{\alpha} f(a) = \lim_{t\to a^+}\left[{}_aD^{\alpha} f(t)\right]$

❑

ตัวอย่าง 2.1 จงหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลของ $f(t)=t$ โดยที่ $a=0$ และ $\alpha=\frac{1}{2}$

<u>**โดยใช้นิยาม**</u>

วิธีทำ จาก

$$ {}_aD^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} $$

$$ \begin{aligned} D^{1/2} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t+\varepsilon(t)^{1-\frac{1}{2}} - t}{\varepsilon} \\ &= t^{\frac{1}{2}} \end{aligned} $$

❑

ตัวอย่าง 2.2 จงหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลของ $f(t)=t^2$ โดยที่ $a=0.5$ และ $\alpha=0.3$ **โดยใช้นิยาม**

วิธีทำ จาก

$$ {}_aD^{\alpha} f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} $$

$$ \begin{aligned} {}_{0.5}D^{0.3} f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon(t-0.5)^{0.7})^2-t^2}{\varepsilon}. \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^2+2t\varepsilon(t-0.5)^{0.7}+\varepsilon^2(t-0.5)^{1.4}-t^2}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2t\varepsilon(t-0.5)^{0.7}+\varepsilon^2(t-0.5)^{1.4}}{\varepsilon} \\ &= 2t(t-0.5)^{0.7} \end{aligned} $$

❑

นอกจากการหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลโดยใช้สูตรแล้ว เรายังสามารถหาโดยใช้สูตรได้ทำนองเดียวกับอนุพันธ์แบบปกติดังนี้

บทตั้ง 2.2 [Abdeljawad, 2015] กำหนดให้ $f\in C\left([a,\infty),\mathbb{R}\right)$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$ {}_aD^{\alpha} f(t)=(t-a)^{1-\alpha} f'(t) $$

❑

ตัวอย่าง 2.3 จงหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลของ $f(t)=t$ โดยที่ $a=0$ และ $\alpha=\frac{1}{2}$ **โดยใช้สูตร**

วิธีทำ จาก

$$ {}_aD^{\alpha} f(t)=(t-a)^{1-\alpha} f'(t) $$

$$ D^{1/2} f(t)=(t-0)^{1-\frac{1}{2}}(1)=t^{\frac{1}{2}} $$

❑

ตัวอย่าง 2.4 จงหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลของ $f(t)=t^{-\frac{2}{3}}$ โดยที่ $a=1$ และ $\alpha=\frac{1}{3}$ **โดยใช้สูตร**

วิธีทำ จาก

$$ {}_aD^{\alpha} f(t)=(t-a)^{1-\alpha} f'(t) $$

$$ {}_1D^{\frac{1}{3}} f(t)=-\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{5}{3}} $$

❑

นิยาม 2.3 [Abdeljawad, 2015] ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอมฟอร์เมเบิลของฟังก์ชัน $f \in C([a,\infty),\mathbb{R})$ ของอันดับ $0<\alpha\le 1$ คือ

$$ {}_aI^{\alpha} f(t)=\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx $$

เมื่อ $a=0$ เราสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I^{α}

❑

ตัวอย่าง 2.5 จงหาปริพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลของ $f(t)=t^{\frac{1}{2}}$ โดยที่ $a=0$ และ $\alpha=\frac{1}{2}$

วิธีทำ จาก

$$ {}_aI^{\alpha} f(t)=\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx $$

$$ \begin{aligned} I^{1/2} f(t) &= \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^t 1dx \\ &= [x]_0^t = t \end{aligned} $$

❑

ตัวอย่าง 2.6 จงหาปริพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลของ $f(t)=t$ โดยที่ $a=0.2$ และ $\alpha=\frac{3}{4}$

วิธีทำ จาก

$$ {}_aI^{\alpha} f(t)=\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx $$

$$ \begin{aligned} {}_{0.2}I^{\frac{3}{4}} f(t) &= \int_{0.2}^t (x-0.2)^{-\frac{1}{4}} xdx \\ &= \left[\frac{4}{3}x(x-0.2)^{\frac{3}{4}}-\frac{16}{21}(x-0.2)^{\frac{7}{4}}\right]_{0.2}^t \\ &= \frac{4}{3}t(t-0.2)^{\frac{3}{4}}-\frac{16}{21}(t-0.2)^{\frac{7}{4}} \end{aligned} $$

❑

บทแทรก 2.1 [Abdeljawad, 2015] กำหนดให้ $f \in C([a,\infty),\mathbb{R})$ และหาอนุพันธ์ได้ ซึ่ง $0<\alpha\le 1$ สำหรับทุก $t>a$ แล้ว

$$ ({}_aI^{\alpha}\, {}_aD^{\alpha}) f(t) = f(t)-f(a) $$

❑

นิยาม 2.4 [Abdeljawad, 2015] ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคอมฟอร์เมเบิลของฟังก์ชัน $f \in C\left([a,\infty),\mathbb{R}\right)$ ของอันดับ $0<\alpha \le 1$ คือ

$$ {}_{a}I^{\alpha} f(t) = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx $$

เมื่อ $a=0$ เราสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I^{α}

❑

นิยาม 2.5 [Kilbas, 2006] ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ อันดับ $p>0$ ของฟังก์ชัน $f \in C\left((0,\infty),\mathbb{R}\right)$ จะกำหนดในรูป

$$ J^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{0}^{t} (t-s)^{p-1} f(s)ds $$

เมื่อ Γ คือ ฟังก์ชันแกมมา กำหนดในรูป $\Gamma(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-s} s^{p-1} ds$

❑

นิยาม 2.6 [Kilbas, 2006] อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ อันดับ $p>0$ ของฟังก์ชัน $f \in C\left((0,\infty),\mathbb{R}\right)$ จะกำหนดในรูป

$$ {}^{RL}D^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-p-1} f(s)ds $$

เมื่อ $n-1 \le p \le n$

❑

นิยาม 2.7 [Katugampola, 2015] ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา อันดับ $q>0$ และ $\rho>0$ ของฟังก์ชัน $f \in C\left((0,\infty),\mathbb{R}\right)$ จะกำหนดในรูป

$$ {}^{\rho}I^{q} f(t) = \frac{\rho^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_{0}^{t} \frac{s^{\rho-1} f(s)}{(t^{\rho}-s^{\rho})^{1-q}} ds $$

❑

บทตั้ง 2.3 [Kilbas, 2006] กำหนดให้ $p>0$ และ $x \in C(0,T) \cap L(0,T)$ แล้วสมการเชิงอนุพันธ์ ${}^{RL}D^{p} x(t) = 0$ มีผลเฉลยเป็น $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i t^{p-i}$ และได้ว่า $J^{p}\, {}^{RL}D^{p} x(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i t^{p-i}$ เมื่อ $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n$ และ $n-1 \le p < n$

❑

บทตั้ง 2.4 [Kilbas, 2006] กำหนดให้ $\alpha, \beta > 0$ และ $a \ge 0$ แล้วสูตรนี้จะเป็นจริง

$$ J^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1} $$

❑

บทตั้ง 2.5 [Thaiprayoon, 2015] กำหนดให้ $\rho, p, q > 0$ แล้วสูตรนี้จะเป็นจริง

$$^{\rho}I^{q}t^{p} = \frac{\Gamma\left(\frac{p+\rho}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+\rho q+\rho}{\rho}\right)}\frac{t^{p+\rho q}}{\rho^{q}}$$

❑

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์ (Impulsive Differential Equations)

ในการศึกษาปัญหาหรือปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ส่วนมากจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และในบางปัญหาที่เกิดสภาวะการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด ซึ่งปัญหานี้สามารถอธิบายได้โดยแบบจำลองในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์นั้นจะประกอบด้วย

1. สมการเชิงอนุพันธ์ โดยจะใช้ในการอธิบายในช่วงเวลาที่ไม่เกิดการกระตุ้น
2. เงื่อนไขอิมพัลส์ โดยจะใช้ในการอธิบายขณะเวลาที่มีการกระตุ้นซึ่งจะถูกนิยามในรูปของฟังก์ชันกระโดด(Jump function) ณ. จุดที่มีการกระตุ้น
3. เซตของจุดที่เกิดการกระตุ้น

ซึ่งมีสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์สามารถเขียนได้ในรูปทั่วไปคือ

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(t, x\left(t\right)\right), & t \neq t_k, t \in J, \\ \Delta x\left(t_k\right) = \varphi_k\left(x\left(t_k\right)\right), & k = 1, 2, ..., m, \end{cases}$$

โดยที่ $J = [0, T]$ เมื่อ $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m+1} = T$, $x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ $f \in C\left(J \times \Omega, \mathbb{R}^n\right)$, $\varphi_k \in C\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$, เมื่อ $k = 1, 2, ..., m$ และ $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-), k = 1, 2, ..., m$ และ φ_k แทน ฟังก์ชันกระโดด ณ. จุด t_k และ $x(t_k^+)$, $x(t_k^-)$ แทน ลิมิตขวาและลิมิตซ้ายของ x ที่จุด t_k ตามลำดับ

การจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

ในการจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์นั้นไม่ใช่เรื่องง่าย เพราะระบบขึ้นกับส่วนที่สำคัญสามส่วน คือ ส่วนของช่วงเวลาที่ต่อเนื่องของสมการเชิงอนุพันธ์ สมการอิมพัลส์ และจุดที่เกิดการอิมพัลส์ ดังนั้นในการแบ่งประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์จะต้องคำนึงถึงสามส่วนนี้ แต่โดยทั่วไปแล้วสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์จะแบ่งออกเป็นสามประเภท คือ

1. สมการที่มีการกำหนดเวลาที่จะมีการเปลี่ยนแปลง (Equations with fixed moments of the impulse effect) มีสมการดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad , \qquad t \neq t_k \ ,$$
$$\Delta x(t_k) = \varphi_k(x(t_k))$$

เมื่อ $\tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ..., k \in \mathbb{Z}$

เช่น สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

$$\frac{dx}{dt} = 0 \ , \qquad t \neq t_k ,$$
$$\Delta x(t_k) = \frac{1}{x-1} \ , \qquad t_k = k \ , \ k = 1,2,...$$

สังเกตได้ว่าที่เวลา $t = t_k = k = 1,2,\dots$ เป็นเวลาขณะที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด ซึ่งเป็นเวลาที่แน่นอน

2. สมการที่ไม่มีการกำหนดเวลาที่จะมีการเปลี่ยนแปลง (Equations with variable moments of the impulse effect) มีสมการดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \neq t_k(x)$$
$$\Delta x = \varphi_k(x), \qquad t = t_k(x)$$

เมื่อ $t_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ และ $t_k(x) < t_{k+1}(x), k \in \mathbb{Z}, x \in \Omega$

เช่น สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

$$\frac{dx}{dt} = 0 \ , \qquad t \neq t_k(x)$$
$$\Delta x = x^2 \operatorname{sgn} x - x, \qquad t = t_k(x)$$

เมื่อ $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ t_k(x) = x + 6k$ สำหรับ $|x| < 3$ และ $k = 0,1,2,..$ สำหรับตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าเวลาที่มีการกระตุ้นขึ้นอยู่กับผลเฉลยด้วย

3. สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์แบบอิสระ (Autonomous impulsive equations) ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \notin \sigma,$$
$$\Delta x = \varphi(x), \qquad x \in \sigma$$

เมื่อ $\sigma \subset \Omega$

เช่น สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

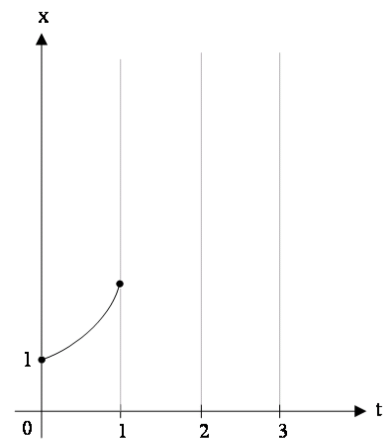
$$\frac{dx}{dt} = 3x, \qquad |x| > 1,$$
$$\Delta x = -1, \qquad |x| \leq 1$$

จะเห็นว่า ผลเฉลยไม่ได้เกิดการเปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่จะเกิดการกระตุ้นเมื่อผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น

โดยในงานวิจัยนี้เราจะทำการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์ที่มีการกำหนดเวลาที่จะมีการเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่าง 2.7 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์

$$x'(t) = x(t) \qquad ; t \neq t_k, t \in [0,3]$$
$$\Delta x(t_k) = -1 \qquad ; t_k = k, k = 1,2$$
$$x(0) = 1$$



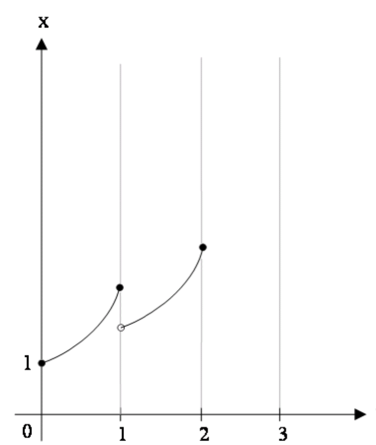
รูปที่ 1 แสดงกราฟของคำตอบในช่วงที่ 1

วิธีทำ จากการแก้สมการ

$$x(t) = Ae^t$$
$$x(0) = Ae^0 = A = 1$$
$$x(t) = e^t \qquad , 0 \leq t \leq 1$$

$$x(t_1^+) - x(t_1^-) = -1$$
$$x(t_1^+) - e = -1$$
$$x(t_1^+) = e - 1$$

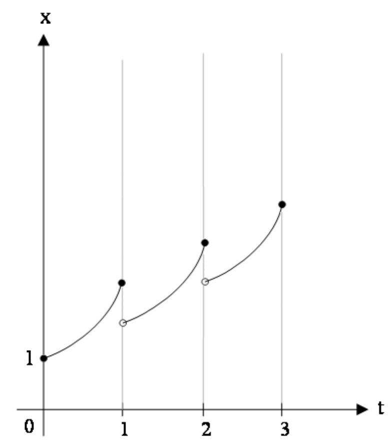
$$x(t) = Ae^t$$
$$x(t_1^+) = Ae = e - 1$$
$$A = \frac{e - 1}{e}$$
$$x(t) = \frac{e - 1}{e} e^t \qquad 1 < t \leq 2$$



รูปที่ 2 แสดงกราฟของคำตอบในช่วงที่ 2

$$x\left(t_2^+\right) - x\left(t_2^-\right) = -1$$
$$x\left(t_2^+\right) - e^2 + e \ = -1$$
$$x\left(t_2^+\right) = e^2 - e \ -1$$

$$x(t) = Ae^t$$
$$x\left(t_2^+\right) = Ae^2 = e^2 - e \ -1$$
$$A = \frac{e^2 - e - 1}{e^2}$$
$$x(t) = \frac{e^2 - e - 1}{e^2} e^t \qquad ,2 < t \le 3$$



รูปที่ 3 แสดงกราฟของคำตอบในช่วงที่ 3 ❑

2.3 ทฤษฎีจุดตรึง (Fixed point theorem)

ปัญหาในทาง ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา และเศรษฐศาสตร์ มักอยู่ในรูปของปัญหาแบบไม่เชิงเส้น(Nonlinear problems) ซึ่งปัญหานั้นอาจมีผลเฉลยหรือไม่มีผลเฉลยก็ได้ และวิธีหนึ่งที่ใช้ในการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลย คือ ทฤษฎีจุดตรึง ซึ่งสมการที่ศึกษาจะอยู่ในรูปสมการของตัวดำเนินการ

พิจารณาการแก้สมการของตัวดำเนินการ

$$u = Au, \quad u \in M \tag{2.1}$$

โดยใช้กระบวนการทำซ้ำ

$$u_{n+1} = A[u_n], \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.2}$$

โดยที่ $u_0 \in M$

ผลเฉลยของ (2.1) จะเรียกว่า **จุดตรึง** (Fixed point) ของตัวดำเนินการ A

ทฤษฎีบท 2.1 [Zeidler, 1995] (ทฤษฎีจุดตรึงของบานาค)

กำหนดให้

(i) M เป็นเซตปิดที่ไม่ที่ไม่ใช่เซตว่างในปริภูมิ $X \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ X เป็นปริภูมิบานาคและ

(ii) ตัวดำเนินการ $A : M \to M$ ที่มีคุณสมบัติ

$$\| A[u] - A[v] \| \le k \| u - v \| \qquad \text{ทุกๆ } u, v \in M \text{ และ } 0 \le k < 1$$

แล้ว (i) ผลเฉลยของ (2.1) จะมีเพียงหนึ่งเดียว (นั่นคือ A จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียวในเซต M)

(ii) แต่ละ $u_0 \in M$ ลำดับ $\{u_n\}$ ที่ได้จาก (2.2) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของ (2.1)

❑

ทฤษฎีบท 2.2 [Krasnoselskii, 1955] (ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิ)

กำหนดให้ M เป็นเซตปิด มีขอบเขต เป็นคอนเวกซ์เซต ที่ไม่ที่ไม่ใช่เซตว่างที่เป็นสับเซตของปริภูมิบานาค X และให้ตัวดำเนินการ A, B ซึ่ง

(i) $Ax + By \in M$ เมื่อ $x, y \in M$

(ii) A ตัวดำเนินการกระชับและต่อเนื่อง

(iii) B การส่งแบบหดตัว

แล้วจะมี $z \in M$ ซึ่ง $z = Az + Bz$

❑

ทฤษฎีบท 2.3 [O'Regan, 1996] (ทฤษฎีจุดตรึงของอริแกน)

กำหนดให้ U เป็นเซตเปิด ที่เป็นสับเซตของเซตปิด และคอนเวกซ์เซต C ของปริภูมิบานาค X สมมติให้ $0 \in U$ และให้ $F(\bar{U})$ มีขอบเขต ซึ่ง $F : \bar{U} \to C$ โดย $F = F_1 + F_2$ ซึ่ง $F_1 : \bar{U} \to X$ เป็นตัวดำเนินการต่อเนื่องและต่อเนื่องบริบูรณ์ และ $F_2 : \bar{U} \to X$ เป็นตัวดำเนินการหด

แล้ว (i) F จะมีจุดตรึง $u \in \bar{U}$ หรือ

(ii) จะมี $u \in \partial U$ และ $\lambda \in (0,1)$ ซึ่ง $u = \lambda F(u)$ เมื่อ $\bar{U}$ คือ ส่วนปิดคลุม และ ∂U คือขอบ

❑

ในส่วนต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญที่จะใช้ในการพิสูจน์ในบทที่ 3

ทฤษฎีบท 2.4 [Coster, 2006] (Arzela Ascoli Theorem)

กำหนดให้ $I \in \mathbb{R}$ เป็นช่วงปิด แล้ว $A \subset C(I, \mathbb{R})$ เป็นความสัมพันธ์กระชับ ถ้า

(i) A เป็น อีควิเบานด (นั่นคือ $\forall t \in I$, $\exists K > 0$, $\forall u \in A$, $|u(t)| < K$)

(ii) A เป็น อีควิคอนทินิวอัส (นั่นคือ $\forall t_0 \in I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall u \in A$, $\forall t \in I$, $|t - t_0| < \delta$ แล้ว $|u(t) - u(t_0)| < \varepsilon$)

❑

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัยและผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้เราจะทำการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์โดยใช้วิธีทำซ้ำทางเดียว และศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการโดยใช้ทฤษฎีบทจุดตรึงต่างๆ

3.1 การมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

ในหัวข้อนี้จะใช้วิธีทำซ้ำทางเดียวเพื่อศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยสุดขีดของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ (1.1)

$$\begin{cases} D_{t_k}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(\theta(t))), & t \in J^-, \\ \Delta x(t_k) = I_k\left(x(t_k)\right), & k = 1, 2, \ldots, m \\ x(0) = \lambda x(T). \end{cases} \tag{1.1}$$

โดยที่ $J = [0,T]$, $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T,$ และ $J_0 = [t_0, t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots m$

การดำเนินการวิจัยเริ่มต้นจากการกำหนดสูตรการทำซ้ำ และการนิยามผลเฉลยล่าง ผลเฉลยบนเพื่อใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในการทำซ้ำ จากนั้นทำการศึกษาการมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำ และศึกษาหาเงื่อนไขที่จะใช้ในการเปรียบเทียบลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำเพื่อนำไปใช้แสดงว่าลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำเป็นลำดับทางเดียว ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์โดยใช้วิธีการทำซ้ำทางเดียว

3.1.1 ผลเฉลยล่าง ผลเฉลยบน และสูตรการทำซ้ำ

ในหัวข้อนี้จะเป็นการนิยามผลเฉลยล่างและผลเฉลยบน และสูตรการทำซ้ำของปัญหาค่าขอบ (1-10) โดยผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนนี้จะใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการทำซ้ำ สำหรับการนิยามผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนนี้จะนิยามดังนี้

นิยาม 3.1 จะเรียกฟังก์ชัน $\alpha_0 \in PC$ ว่า**ผลเฉลยล่าง**ของปัญหาค่าขอบ (1.1) ถ้า

$$\begin{aligned} &D_{t_k}^{\alpha} \mu_0(t) \le f(t, \mu_0(t), \mu_0(\theta(t)) - a(t), \quad t \ne t_k, t \in J, \\ &\Delta \mu_0(t_k) \le I_k\left(\mu_0(t_k)\right) - \delta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{3.1}$$

นิยาม 3.2 จะเรียกฟังก์ชัน $\upsilon_0 \in PC$ ว่า**ผลเฉลยบน**ของปัญหาค่าขอบ (1.1) ถ้า

$$\begin{aligned} &D_{t_k}^{\alpha}\upsilon_0(t) \ge f(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(\theta(t)))+b(t), && t \ne t_k, t\in J, \\ &\Delta\upsilon_0(t_k) \ge I_k\left(\upsilon_0(t_k)\right)+\eta_k, && k=1,2,...,m \end{aligned} \tag{3.2}$$

เมื่อ

$$a(t)=\begin{cases} 0 & ;\mu_0(0)\le\lambda\mu_0(T), \\ \dfrac{(t-t_k)^{1-\alpha}+Mt+N\theta(t)}{\lambda T}\left[\mu_0(0)-\lambda\mu_0(T)\right] & ;\mu_0(0)>\lambda\mu_0(T). \end{cases}$$

$$\delta_k=\begin{cases} 0 & ;\mu_0(0)\le\lambda\mu_0(T), \\ \dfrac{L_k t_k}{\lambda T}\left[\mu_0(0)-\lambda\mu_0(T)\right] & ;\mu_0(0)>\lambda\mu_0(T). \end{cases}$$

และ

$$b(t)=\begin{cases} 0 & ;\upsilon_0(0)\ge\lambda\upsilon_0(T), \\ \dfrac{(t-t_k)^{1-\alpha}+Mt+N\theta(t)}{\lambda T}\left[\upsilon_0(0)-\lambda\upsilon_0(T)\right] & ;\upsilon_0(0)<\lambda\upsilon_0(T). \end{cases}$$

$$\eta_k=\begin{cases} 0 & ;\upsilon_0(0)\ge\lambda\upsilon_0(T), \\ \dfrac{L_k t_k}{\lambda T}\left[\upsilon_0(0)-\lambda\upsilon_0(T)\right] & ;\upsilon_0(0)<\lambda\upsilon_0(T). \end{cases}$$

❑

สำหรับสูตรการทำซ้ำที่จะใช้ในงานวิจัยนี้เราได้ทำการพิจารณาเทอมเชิงเส้นของ (1.1) :ซึ่งกำหนดสูตรการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} D_{t_k}^{\alpha}u_n(t)=f(t,u_{n-1}(t),u_{n-1}(\theta(t)))+M\left[u_{n-1}(t)-u_n(t)\right] \\ \qquad\qquad +N\left[u_{n-1}(\theta(t))-u_n(\theta(t))\right] \qquad , \qquad t\ne t_k, t\in J, \\ \Delta u_n(t_k)=I_k\left(u_{n-1}(t_k)\right)+L_k\left[u_{n-1}(t_k)-u_n(t_k)\right], \qquad k=1,2,...,m \\ u_n(0)=\lambda u_n(T). \end{cases} \tag{3.3}$$

จากสูตรการทำซ้ำนี้เมื่อนำผลเฉลยล่าง ผลเฉลยบนทำซ้ำจำทำให้เกิดลำดับของผลเฉลยโดยประมาณ $\{\mu_n\}$ และและลำดับของผลเฉลยโดยประมาณ $\{\upsilon_n\}$ ตามลำดับ

ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการพิสูจน์การมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของลำดับ $\{\mu_n\}$ และ $\{\upsilon_n\}$ ที่เกิดจากการทำซ้ำ

3.1.2 การมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำ

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาการมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำด้วยสูตร (3.3) นั่นคือการแสดงว่าลำดับ $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n,...$ และ $\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n,...$ มีอยู่จริงและมี

เพียงหนึ่งเดียว นั่นคือจะแสดงว่าการทำซ้ำแต่ละครั้งผลเฉลยโดยประมาณที่ได้มีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียว โดยจะแบ่งการพิสูจน์เป็นสองขั้นตอน คือ

1. แปลงปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์ (บทตั้ง 3.1)
2. แสดงว่าสมการเชิงปริพันธ์มีผลเฉลยอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวโดยใช้ทฤษฎีจุดตรึงของบานาค (บทตั้ง 3.2)

เพื่อให้ง่ายต่อการพิสูจน์เราจึงกำหนดให้ สำหรับ $a,b \in \{0,1,2,\ldots\}$ โดย $a \le b$

$$\phi(a,b) = \prod_{i=a}^{b} e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}} \left(1 - L_{i+1}\right) \tag{3.4}$$

เมื่อ $\prod_{i=b+1}^{b} \left(\cdot\right) = 1$ และสำหรับ $f(t) = f_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,m$

$$\int_a^b f(s)ds = \int_a^{t_p} f_{p-1}(s)ds + \int_{t_p}^{t_{p+1}} f_p(s)ds + \ldots + \int_{t_q}^{b} f_{p-1}(s)ds\,, \qquad a,b \in J \tag{3.5}$$

โดยที่ $a \le t_p < \ldots < t_q \le b$

บทแทรก 3.1 .ให้ $a \le c \le b \le d$ เป็นจำนวนจริงบวก แล้วความสัมพันธ์ต่อไปนี้จะเป็นจริง

i) $\phi(a,c)\phi(c+1,b) = \phi(a,b)$

ii) $\phi(a,b)\phi(c,d) = \phi(a,d)\phi(c,b)$

❑

จากสูตรการทำซ้ำ (3.3) เพื่อให้สะดวกในการแปลงปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์ จึงกำหนดให้

$$v(t) = f(t, u_{n-1}(t), u_{n-1}(\theta(t))) + Mu_{n-1}(t) + Nu_{n-1}(\theta(t))$$
$$\gamma_k = I_k\left(u_{n-1}(t_k)\right) + L_k u_{n-1}(t_k)$$
$$u(t) = u_n(t)$$

ดังนั้นจาก (3.3) จะได้สมการใหม่เป็น

$$\begin{cases} D_{t_k}^{\alpha} u(t) = -Mu(t) - Nu(\theta(t)) + v(t), & t \ne t_k, t \in J, \\ \Delta u(t_k) = -L_k u(t_k) + \gamma_k, & k = 1,2,\ldots,m \\ u(0) = \lambda u(T). & \end{cases} \tag{3.6}$$

เมื่อ $M > 0$, $N, L_k \ge 0$, γ_k, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,m$ และ $\lambda\phi(0,m-1) \ne e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}$ เป็นคงที่และ $v \in PC$

บทตั้ง 3.1 $u \in PC$ เป็นผลเฉลยของ (3.6) ก็ต่อเมื่อ u เป็นผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์ที่มีอิมพัลส์

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)p(s)\hat{d}s + \sum_{j=1}^{m} G_2(h,j),\ t \in t_h, h = 0,1,...,m, \tag{3.7}$$

เมื่อ $P(t) = -Nx(\theta(t)) + v(t)$ สำหรับบาง $W > 0$ และ

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-t_l)^{\alpha-1}\phi(l,h-1)e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^{\alpha}} e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} - \lambda\phi(0,m-1)} & ;0 \le s < t \le T \\ \dfrac{\lambda(s-t_l)^{\alpha-1}\phi(0,h-1)\phi(l,m-1)e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^{\alpha}} e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} - \lambda\phi(0,m-1)} & ;0 \le t < s \le T \end{cases} \tag{3.8}$$

และ

$$G_2(h,j) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_j\phi(j,h-1)e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} - \lambda\phi(0,m-1)} & ;0 \le j < h \le T \\ \dfrac{\lambda\gamma_j\phi(0,h-1)\phi(j,m-1)e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} - \lambda\phi(0,m-1)} & ;0 \le h < j \le T \end{cases} \tag{3.9}$$

เมื่อ $t_l = \max\{t_k \le s; k = 0,1,...,m\}$

พิสูจน์ ให้ u เป็นผลเฉลยของ (3.4) นำ $e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}}$ คูณสมการแรกของ (3.4) ทั้งสอง

$$e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}} D_{t_k}^{\alpha}u(t) + Me^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}}u(t) = e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}}P(t)$$

$$D_{t_k}^{\alpha}\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}}u(t)\right] = e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}}P(t) \tag{3.10}$$

หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α จาก 0 ถึง $t \in [0,t_1]$ ทั้งสองข้างของ (3.10)

$$I_0^{\alpha}D_0^{\alpha}\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}}u(t)\right] = I_0^{\alpha}\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}}P(t)\right]$$

$$e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}}u(t) - u(0) = \int_0^t (s-t_0)^{\alpha-1}\left[e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^{\alpha}}P(s)\right]ds$$

$$u(t) = e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}}u(0) + \int_0^t (s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^{\alpha}}P(s)ds$$

จาก $\Delta u(t_1) = -L_1u(t_1) + \gamma_1$

$$u(t_1^+) = u(t_1) - L_1u(t_1) + \gamma_1 = (1-L_1)u(t_1) + \gamma_1$$

$$u(t_1^+) = \left(1-L_1\right)\left[e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}u(0) + \int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^\alpha}P(s)ds\right] + \gamma_1$$

$$= e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}\left(1-L_1\right)u(0) + \left(1-L_1\right)\int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^\alpha}P(s)ds + \gamma_1$$

หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α จาก t_1 ถึง $t \in (t_1, t_2]$ ทั้งสองข้างของ (3.10)

$$I_{t_1}^\alpha D_{t_1}^\alpha\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_1)^\alpha}u(t)\right] = I_{t_1}^\alpha\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_1)^\alpha}P(t)\right]$$

$$e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_1)^\alpha}u(t) - u(t_1) = \int_{t_1}^t (s-t_1)^{\alpha-1}\left[e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_1)^\alpha}P(s)\right]ds$$

$$u(t) = e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_1)^\alpha}\left(1-L_1\right)\left[e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}u(0) + \int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^\alpha}P(s)ds\right] + e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_1)^\alpha}\gamma_1$$

$$+\int_{t_1}^t (s-t_1)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_1)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_1)^\alpha}P(s)ds, \quad ,t \in [t_1, t_2]$$

จาก $\Delta u(t_2) = -L_2 u(t_2) + \gamma_2$

$$u(t_2^+) = u(t_2) - L_2 u(t_2) + \gamma_2 = \left(1-L_2\right)u(t_2) + \gamma_2$$

$$u(t_2^+) = e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}\left(1-L_2\right)\left(1-L_1\right)\left[e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}u(0) + \int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^\alpha}P(s)ds\right]$$

$$+\left(1-L_2\right)\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_1)^\alpha}P(s)ds + e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}\left(1-L_2\right)\gamma_1 + \gamma_2$$

$$= e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}\left(1-L_2\right)\left(1-L_1\right)u(0)$$

$$+\left(1-L_2\right)\left(1-L_1\right)\int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^\alpha}P(s)ds$$

$$+\left(1-L_2\right)\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_1)^\alpha}P(s)ds + e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^\alpha}\left(1-L_2\right)\gamma_1 + \gamma_2$$

หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α จาก t_2 ถึง $t \in (t_2, t_3]$ ทั้งสองข้างของ (3.10)

$$I_{t_2}^\alpha D_{t_2}^\alpha\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^\alpha}u(t)\right] = I_{t_2}^\alpha\left[e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^\alpha}P(t)\right]$$

$$e^{\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^\alpha}u(t) - u(t_2) = \int_{t_2}^t (s-t_2)^{\alpha-1}\left[e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_2)^\alpha}P(s)\right]ds$$

$$u(t)=e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^{\alpha}}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^{\alpha}}\left(1-L_2\right)\left(1-L_1\right)u(0)$$
$$+\left(1-L_2\right)\left(1-L_1\right)\int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^{\alpha}}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_1-t_0)^{\alpha}}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^{\alpha}}P(s)ds$$
$$+\left(1-L_2\right)\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^{\alpha}}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_1)^{\alpha}}P(s)ds$$
$$+\int_{t_2}^{t}(s-t_2)^{\alpha-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^{\alpha}}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_2)^{\alpha}}P(s)ds+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^{\alpha}}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}}\left(1-L_2\right)\gamma_1+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_2)^{\alpha}}\gamma_2$$

ดังนั้นสำหรับ $t\in J_h=(t_h,t_{h+1}]$

$$u(t)=e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}u(0)\prod_{i=0}^{h-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}}\left(1-L_{i+1}\right)$$
$$+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\prod_{i=0}^{h-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}}\left(1-L_{i+1}\right)\int_0^{t_1}(s-t_0)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_0)^{\alpha}}P(s)ds$$
$$+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\prod_{i=1}^{h-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}}\left(1-L_{i+1}\right)\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_1)^{\alpha}}P(s)ds$$
$$+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\prod_{i=2}^{h-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}}\left(1-L_{i+1}\right)\int_{t_2}^{t_3}(s-t_2)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_2)^{\alpha}}P(s)ds$$
$$\ldots$$
$$+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\int_{t_h}^{t}(s-t_h)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^{\alpha}}P(s)ds$$
$$+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\gamma_1\prod_{i=1}^{h-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}}\left(1-L_{i+1}\right)+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\gamma_2\prod_{i=2}^{h-1}e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}}\left(1-L_{i+1}\right)$$
$$+\ldots+e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}\gamma_h$$

โดยใช้ (3.4)

$$\begin{aligned}u(t)=e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^{\alpha}}&\left\{\phi(0,h-1)u(0)+\sum_{j=0}^{h-1}\phi(j,h-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^{\alpha}}P(s)ds\right.\\&\left.+\int_{t_h}^{t}(s-t_h)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^{\alpha}}P(s)ds+\sum_{j=1}^{h}\gamma_j\phi(j,h-1)\right\}\end{aligned}\tag{3.11}$$

แทน $t=T$ ใน (3.11) ได้

$$\begin{aligned}u(T)=e^{-\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}&\left\{\phi(0,m-1)u(0)+\sum_{j=0}^{m}\phi(j,m-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^{\alpha}}P(s)ds\right.\\&\left.+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\phi(j,m-1)\right\}\end{aligned}$$

จากเงื่อนไขค่าขอบ $u(0)=\lambda u(T)$ ได้ว่า

$$u(0)=\frac{\lambda}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}-\lambda\phi(0,m-1)}\left\{\sum_{j=0}^{m}\phi(j,m-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}P(s)ds\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\phi(j,m-1)\right\}$$

ดังนั้นสำหรับ $t\in J_h=(t_h,t_{h+1}]$

$$u(t)=e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^\alpha}\left\{\left(\frac{\lambda\phi(0,h-1)}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}-\lambda\phi(0,m-1)}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\phi(j,m-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}P(s)ds\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\phi(j,m-1)\right)+\sum_{j=0}^{h-1}\phi(j,h-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}P(s)ds$$

$$\left.+\int_{t_h}^{t}(s-t_h)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^\alpha}P(s)ds+\sum_{j=1}^{h}\gamma_j\phi(j,h-1)\right\}$$

$$u(t)=\frac{\lambda e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^\alpha}}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}-\lambda\phi(0,m-1)}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m}\phi(0,h-1)\phi(j,m-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}P(s)ds\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\phi(0,h-1)\phi(j,m-1)\right)+\frac{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{h-1}\phi(j,h-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}P(s)ds\right.$$

$$\left.+\int_{t_h}^{t}(s-t_h)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^\alpha}P(s)ds+\sum_{j=1}^{h}\gamma_j\phi(j,h-1)\right)$$

$$-\sum_{j=0}^{h-1}\phi(0,m-1)\phi(j,h-1)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}P(s)ds$$

$$\left.-\phi(0,m-1)\int_{t_h}^{t}(s-t_h)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^\alpha}P(s)ds-\sum_{j=1}^{h}\gamma_j\phi(0,m-1)\phi(j,h-1)\right\}$$

จาก **บทแทรก 3.1** และ (3.5) ได้ว่า

$$u(t)=\left(\frac{\lambda e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^\alpha}}{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}-\lambda\phi(0,m-1)}\right)\left\{\int_{t}^{T}(s-t_l)^{\alpha-1}\phi(0,h-1)\phi(l,m-1)e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}P(s)\hat{d}s\right.$$

$$+\frac{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}}{\lambda}\int_{0}^{t}(s-t_l)^{\alpha-1}\phi(l,h-1)e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}P(s)\hat{d}s$$

$$\left.+\sum_{j=h+1}^{m}\gamma_j\phi(0,h-1)\phi(j,m-1)+\frac{e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}}{\lambda}\sum_{j=1}^{h}\gamma_j\phi(j,h-1)\right\}$$

❑

ใน**บทตั้ง 3.1** เราสามารถแปลงปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์เป็นสมการเชิงปริพันธ์ที่มีอิมพัลส์ได้ และในบทตั้งต่อไปเราจะนำทฤษฎีจุดตรึงของบานาคมาใช้ในการแสดงว่าสมการเชิงปริพันธ์ที่มีอิมพัลส์มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว ซึ่งจะได้ว่าปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอิมพัลส์มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว จาก PC เป็นปริภูมิบานาคโดยที่นอร์ม $\|x\| = \sup_{t\in J}|x(t)|$

จาก**บทตั้ง 3.1** เราจะกำหนดตัวดำเนินการ $A: PC \to PC$ ดังนี้

$$Au(t) = \int_0^T G(t,s)p(s)\hat{d}s + \sum_{j=1}^{m} G_2(h,j)$$

และให้

$$\Lambda = \frac{\max\{\lambda, e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}\} N \sum_{i=0}^{m}\left(e^{\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^\alpha} - 1\right)}{M\left|e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha} - \lambda\phi(0,m-1)\right|}$$

บทตั้ง 3.2 ให้ $\alpha \in (0,1]$ $M,\lambda > 0$, $N \ge 0$, $0 \le L_k \le 2$, $k = 1,2,\dots,m$ และ $\lambda\phi(0,m-1) \ne e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}$ ถ้า

$$\Lambda < 1 \tag{3.12}$$

แล้วปัญหาค่าขอบ (3.6) จะมีคำตอบเพียงหนึ่งเดียว

พิสูจน์ กรณีที่ 1 สำหรับ $0 \le s < t \le T$ จะได้

$$\left|(s-t_l)^{\alpha-1}\phi(l,h-1)e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha} e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha} e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^\alpha}\right| \le (s-t_l)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha} e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $0 \le t < s \le T$ จะได้

$$\left|\lambda(s-t_l)^{\alpha-1}\phi(0,h-1)\phi(l,m-1)e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha} e^{-\frac{M}{\alpha}(t-t_h)^\alpha}\right| \le \lambda(s-t_l)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}$$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2

$$G_1(t,s) \le \frac{\max\{\lambda, e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}\}(s-t_l)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}}{\left|e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha} - \lambda\phi(0,m-1)\right|}$$

จาก **บทตั้ง 3.1** เราสามารถเขียน (3.6) ในรูปปัญหาจุดตรึงดังนี้ $x = Ax$ และสำหรับ $x, y \in PC$ ได้ว่า

$$\left|Ax(t)-Ay(t)\right| \le \left\|x-y\right\| N\int_0^T G_1(t,s)\hat{d}s$$

$$\le \left\|x(s)-y(s)\right\| \frac{N\max\{\lambda, e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}\}}{\left|e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}-\lambda\phi(0,m-1)\right|}\int_0^T (s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^{\alpha}}\hat{d}s$$

$$\left|Ax(t)-Ay(t)\right| \le \Lambda\left\|x(s)-y(s)\right\|$$

โดยทฤษฎีจุดตรึงของบานาคตัวดำเนินการ A มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว ซึ่งเป็นผลเฉลยของ (3.5) และจากบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า (3.4) มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว

❑

จากบทตั้ง 3.2 เราจะได้ว่า (3.4) มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว ดังนั้นในการทำซ้ำแต่ละครั้งโดยใช้สูตร (3.3) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณออกมาเพียงฟังก์ชันเดียว นั่นคือ $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n,...$ และ $\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n,...$ มีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียว

ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการศึกษาหาเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการเปรียบเทียบลำดับเพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ว่าลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำ $\{\mu_n\}$ และ $\{\upsilon_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว

3.1.3 เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการเป็นลำดับทางเดียวและการเปรียบเทียบ

ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาเงื่อนไขเพียงพอเพื่อจะนำไปใช้ในการแสดงว่าลำดับที่เกิดจากการทำซ้ำ $\{\mu_n\}$ และ $\{\upsilon_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว นั่นคือ

$$\mu_0(t)\le\mu_1(t)\le...\le\mu_n(t)\le\upsilon_n(t)\le...\le\upsilon_1(t)\le\upsilon_0(t)$$

เช่นในการแสดงว่า $\mu_0(t)\le\mu_1(t)$ จะกำหนดให้ $u(t)=\mu_0(t)-\mu_1(t)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า $u(t)$ สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} &D_{t_k}^{\alpha}u(t)\le -Mu(t)-Nu(\theta(t))-B(t), && t\ne t_k, t\in J,\\ &\Delta u(t_k)\le -L_k u(t_k)-\Omega_k, && k=1,2,...,m \end{aligned}$$

เมื่อ

$$B(t)=\begin{cases}0 & ;u(0)\le\lambda u(T),\\ \dfrac{(t-t_k)^{1-\alpha}+Mt+N\theta(t)}{\lambda T}\left[u(0)-\lambda u(T)\right] & ;u(0)>\lambda u(T).\end{cases}$$

$$\Omega_k=\begin{cases}0 & ;u(0)\le\lambda u(T),\\ \dfrac{L_k t_k}{\lambda T}\left[u(0)-\lambda u(T)\right] & ;u(0)>\lambda u(T).\end{cases}$$

ดังนั้นเราจึงทำการแสดงว่า $u(t)\le 0$ แทน

บทตั้ง 3.3 สมมติให้ $u \in PC$

$$\begin{aligned} &D_{t_k}^{\alpha} u(t) \le -Mu(t) - Nu(\theta(t)), \quad t \ne t_k, t \in J, \\ &\Delta u(t_k) \le -L_k u(t_k), \qquad\qquad k = 1,2,...,m \\ &u(0) \le \lambda u(T). \end{aligned} \tag{3.13}$$

เมื่อ $M > 0$, $N > 0$, $0 \le L_k \le 1$, $k = 1,2,...,m$ และ $0 < \lambda \le e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}$ เป็นคงที่ ถ้า

$$\frac{N}{\phi(0,m-1)} \sum_{i=0}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s-t_i)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^{\alpha}} ds \le 1 \tag{3.14}$$

แล้ว $u(t) \le 0$ บน J

พิสูจน์ เราจะทำการพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง โดยกำหนดให้ $u(t) > 0$ สำหรับบาง $t \in J$ ดังนั้นเราสามารถแยกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

(1) มี $t^* \in J$ ซึ่ง $u(t^*) > 0$ และ $u(t) \ge 0$ สำหรับทุก $t \in J$

(2) มี $t^*, t_* \in J$ ซึ่ง $u(t^*) > 0$ และ $u(t_*) < 0$

กรณี (1) กำหนดให้ $v(t) = e^{M\frac{(t-t_k)^{\alpha}}{\alpha}} u(t)$ สำหรับ $t \in (t_k, t_{k+1}] = J_k$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} &D_{t_k}^{\alpha} v(t) \le -Ne^{\frac{M}{\alpha}\left[(t-t_k)^{\alpha} - (\theta(t)-t_k)^{\alpha}\right]} v(\theta(t)), \qquad t \ne t_k, t \in J \\ &\Delta v(t_k) \le -L_k v(t_k), \qquad\qquad k = 1,2,...,m \\ &v(0) \le \lambda e^{-M\frac{(T-t_m)^{\alpha}}{\alpha}} v(T) \end{aligned} \tag{3.15}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $v(t)$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกับ $u(t)$ พิจารณาอสมการแรกของ (3.7) จะได้ $D_{t_k}^{\alpha} v(t) \le 0$ และ $\Delta v(t_k) \le 0$ สำหรับ $k = 1,2,...,m$. ดังนั้น $v(t)$ เป็นฟังก์ชันลดบน J นั่นคือ $0 \le v(t^*) \le v(0)$

ถ้า $\lambda = e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}$ จะเห็นว่า $v(0) \le v(T)$ ดังนั้น $v(0) = v(T)$ ทำให้ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ ดังนั้น $u(t) = 0$ สำหรับทุก $t \in J$

กรณีที่ (2): ให้ $\inf\{u(t) : t \in J\} = -b < 0$ ดังนั้นจะมี $t_* \in J_i$, $i \in \{1,2,...,m\}$ ซึ่ง $u(t_*) = -b$ หรือ $u(t_i^+) = -b$ โดยในที่นี้เราจะพิจารณาเพียงกรณี $u(t_*) = -b$ สำหรับ $u(t_i^+) = -b$ จะทำการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จาก (3.13) จะได้

$$D_{t_k}^{\alpha}\left[e^{M\frac{(t-t_k)^{\alpha}}{\alpha}} u(t)\right] \le bNe^{\frac{M}{\alpha}(t-t_k)^{\alpha}} \tag{3.16}$$

เริ่มต้นเราจะแสดงว่า $u(T) \le 0$ ซึ่งเราจะพิสูจน์แบบข้อขัดแย้งโดยกำหนดให้ $u(T) > 0$ หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลอันดับ α จาก t_m ถึง T

$$I_{t_m}^{\alpha} D_{t_m}^{\alpha}\left[e^{M\frac{(t-t_m)^{\alpha}}{\alpha}} u(t)\right] \le I_{t_m}^{\alpha}\left[bNe^{\frac{M}{\alpha}(t-t_m)^{\alpha}}\right]$$

$$e^{M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}u(T) \le u(t_m^+) + bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^\alpha}\,ds$$

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}\left[u(t_m^+) + bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^\alpha}\,ds\right]$$

จากเงื่อนไขอิมพัลส์ $u(t_m^+) \le \left(1-L_m\right)u(t_m)$

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}\left[\left(1-L_m\right)u(t_m) + bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^\alpha}\,ds\right]$$

หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลอันดับ α จาก t_{m-1} ถึง t_m

$$I_{t_{m-1}}^{\alpha}D_{t_{m-1}}^{\alpha}\left[e^{M\frac{(t-t_{m-1})^\alpha}{\alpha}}u(t)\right] \le I_{t_{m-1}}^{\alpha}\left[bNe^{\frac{M}{\alpha}(t-t_{m-1})^\alpha}\right]$$

$$e^{M\frac{(t_m-t_{m-1})^\alpha}{\alpha}}u(t_m) \le u(t_{m-1}^+) + bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^\alpha}\,ds$$

$$u(t_m) \le e^{-M\frac{(t_m-t_{m-1})^\alpha}{\alpha}}\left[u(t_{m-1}^+) + bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^\alpha}\,ds\right]$$

จากเงื่อนไขอิมพัลส์ $u(t_{m-1}^+) \le \left(1-L_{m-1}\right)u(t_{m-1})$

$$u(t_m) \le e^{-M\frac{(t_m-t_{m-1})^\alpha}{\alpha}}\left[\left(1-L_{m-1}\right)u(t_{m-1}) + bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^\alpha}\,ds\right]$$

ดังนั้น

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}\left[\left(1-L_m\right)e^{-M\frac{(t_m-t_{m-1})^\alpha}{\alpha}}\left[\left(1-L_{m-1}\right)u(t_{m-1}) + bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^\alpha}\,ds\right]\right.$$
$$\left. + bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^\alpha}\,ds\right]$$

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}\left[\phi(m-1,m-1)\left(\left(1-L_{m-1}\right)u(t_{m-1}) + bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^\alpha}\,ds\right)\right.$$
$$\left. + bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^\alpha}\,ds\right]$$

หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนคอมฟอร์เมเบิลอันดับ α จาก t_{m-2} ถึง t_{m-1}

$$I_{t_{m-2}}^{\alpha}D_{t_{m-2}}^{\alpha}\left[e^{M\frac{(t-t_{m-2})^\alpha}{\alpha}}u(t)\right] \le I_{t_{m-2}}^{\alpha}\left[bNe^{\frac{M}{\alpha}(t-t_{m-2})^\alpha}\right]$$

$$e^{M\frac{(t_{m-1}-t_{m-2})^\alpha}{\alpha}}u(t_{m-1}) \le u(t_{m-2}^+) + bN\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}}(s-t_{m-2})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-2})^\alpha}\,ds$$

$$u(t_{m-1}) \le e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{m-1}-t_{m-2})^\alpha}\left(u(t_{m-2}^+) + bN\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}}(s-t_{m-2})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-2})^\alpha}\,ds\right)$$

จากเงื่อนไขขอบ $u(t_{m-2}^{+}) \le \left(1-L_{m-2}\right)u(t_{m-2})$

$$u(t_{m-1}) \le e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{m-1}-t_{m-2})^{\alpha}}\left(\left(1-L_{m-2}\right)u(t_{m-2})+bN\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}}(s-t_{m-2})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-2})^{\alpha}}ds\right)$$

ดังนั้น

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^{\alpha}}{\alpha}}\left[\phi(m-2,m-1)\left(\left(1-L_{m-2}\right)u(t_{m-2})+bN\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}}(s-t_{m-2})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-2})^{\alpha}}ds\right)\right.$$
$$\left.+\phi(m-1,m-1)bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^{\alpha}}ds+bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^{\alpha}}ds\right]$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^{\alpha}}{\alpha}}\left[\phi(i+1,m-1)u(t_{i+1}^{+})\right.$$
$$+\phi(i+1,m-1)bN\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}}(s-t_{i+1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{i+1})^{\alpha}}ds$$
$$+\phi(i+2,m-1)bN\int_{t_{i+2}}^{t_{i+3}}(s-t_{i+2})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{i+2})^{\alpha}}ds$$
$$\dots$$
$$+\phi(m-2,m-1)bN\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}}(s-t_{m-2})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-2})^{\alpha}}ds$$
$$+\phi(m-1,m-1)bN\int_{t_{m-1}}^{t_m}(s-t_{m-1})^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_{m-1})^{\alpha}}ds$$
$$\left.+bN\int_{t_m}^{T}(s-t_m)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_m)^{\alpha}}ds\right]$$

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^{\alpha}}{\alpha}}\left[\phi(i+1,m-1)u(t_{i+1}^{+})+bN\sum_{l=i+1}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^{\alpha}}ds\right]$$

จากเงื่อนไขอิมพัลส์ $u(t_{i+1}^{+}) \le \left(1-L_{i+1}\right)u(t_{i+1})$

$$u(T) \le e^{-M\frac{(T-t_m)^{\alpha}}{\alpha}}\left[\phi(i+1,m-1)\left(1-L_{i+1}\right)u(t_{i+1})\right.$$
$$\left.+bN\sum_{l=i+1}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^{\alpha}}ds\right] \tag{3.17}$$

จาก $D_{t_i}^{\alpha}u(t)=(t-t_i)^{1-\alpha}u'(t)$ ดังนั้น

$$(t-t_i)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}\left[e^{M\frac{(t-t_i)^{\alpha}}{\alpha}}u(t)\right]=D_{t_i}^{\alpha}\left[e^{M\frac{(t-t_i)^{\alpha}}{\alpha}}u(t)\right]\le bNe^{\frac{M}{\alpha}(t-t_i)^{\alpha}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{M\frac{(t-t_i)^{\alpha}}{\alpha}}u(t)\right]\le (t-t_i)^{\alpha-1}bNe^{\frac{M}{\alpha}(t-t_i)^{\alpha}}$$

หาปริพันธ์จาก t_* ถึง t_{i+1}

$$e^{M\frac{(t_{i+1}-t_i)^\alpha}{\alpha}}u(t_{i+1})-e^{M\frac{(t_*-t_i)^\alpha}{\alpha}}u(t_*)\le\int_{t_*}^{i+1}(s-t_i)^{\alpha-1}bNe^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^\alpha}ds$$

$$u(t_{i+1})\le e^{-\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^\alpha}\left(e^{M\frac{(t_*-t_i)^\alpha}{\alpha}}u(t_*)+\int_{t_*}^{i+1}(s-t_i)^{\alpha-1}bNe^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^\alpha}ds\right)\tag{3.18}$$

แทน (3.18) ใน (3.17) จะได้ว่า

$$u(T)\le e^{-M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}\Bigg[\phi(i,m-1)e^{M\frac{(t_*-t_i)^\alpha}{\alpha}}u(t_*)+bN\phi(i,m-1)\int_{t_*}^{i+1}(s-t_i)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^\alpha}ds$$
$$+bN\sum_{l=i+1}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}ds \tag{3.19}$$

ซึ่งพบว่า

$$0<u(T)\le e^{-M\frac{(T-t_m)^\alpha}{\alpha}}\Bigg[\phi(i,m-1)e^{M\frac{(t_*-t_i)^\alpha}{\alpha}}u(t_*)+bN\phi(i,m-1)\int_{t_*}^{i+1}(s-t_i)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^\alpha}ds$$
$$+bN\sum_{l=i+1}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}ds$$
$$0<-b\phi(i,m-1)e^{M\frac{(t_*-t_i)^\alpha}{\alpha}}+bN\phi(i,m-1)\int_{t_*}^{i+1}(s-t_i)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^\alpha}ds$$
$$+bN\sum_{l=i+1}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}ds$$

ดังนั้น

$$\phi(i,m-1)e^{M\frac{(t_*-t_i)^\alpha}{\alpha}}<N\phi(i,m-1)\int_{t_*}^{i+1}(s-t_i)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^\alpha}ds$$
$$+N\sum_{l=i+1}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}ds$$
$$1<\frac{N}{\phi(0,m-1)}\sum_{l=0}^{m}\phi(l,m-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}ds$$

ซึ่งขัดแย้งกับ (3.14) ดังนั้นได้ว่า $u(\mathrm{T})\le 0$ และจากเงื่อนไขค่าขอบ $u(0)\le\lambda u(T)$ ทำให้ได้ว่า $u(0)\le 0$ ดังนั้นจะมี $\overline{t}$ ซึ่ง $u(\overline{t})\le 0$ และ $\overline{t}<t^*$

สมมติให้ $t^*\in J_h$ และ $\inf\{u(t):t\in[0,t^*)\}=-c\le 0$ เมื่อ $\overline{t}\in J_j$ สำหรับ $j,h\in\{1,2,...,m\}$ ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า $h\le j$ ในทำนองเดียวกับ (3.19) ได้

$$u(t^*)\le e^{-M\frac{(t^*-t_j)^\alpha}{\alpha}}\Bigg[\phi(h,j-1)e^{M\frac{(\overline{t}-t_h)^\alpha}{\alpha}}u(\overline{t})+cN\phi(h,j-1)\int_{\overline{t}}^{t_{h+1}}(s-t_h)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^\alpha}ds$$
$$+cN\sum_{l=h+1}^{j-1}\phi(l,j-1)\int_{t_l}^{t_{l+1}}(s-t_l)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha}ds+cN\int_{t_j}^{t^*}(s-t_j)^{\alpha-1}e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha}ds$$

$$u(t^*) \le e^{-M\frac{(t^*-t_j)^\alpha}{\alpha}} \Bigg[-c\phi(h, j-1) e^{M\frac{(\bar{t}-t_h)^\alpha}{\alpha}} + cN\phi(h, j-1)\int_{\bar{t}}^{h+1} (s-t_h)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^\alpha} ds$$

$$+ cN \sum_{l=h+1}^{j-1} \phi(l, j-1) \int_{t_l}^{t_{l+1}} (s-t_l)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha} ds + cN \int_{t_j}^{t^*} (s-t_j)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha} ds$$

ถ้า $c = 0$ ได้ $u(t^*) \le 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง และถ้า $c > 0$ ได้ว่า

$$0 < u(t^*) \le e^{-M\frac{(t^*-t_j)^\alpha}{\alpha}} \Bigg[-c\phi(h, j-1) e^{M\frac{(\bar{t}-t_h)^\alpha}{\alpha}} + cN\phi(h, j-1)\int_{\bar{t}}^{h+1} (s-t_h)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_h)^\alpha} ds$$

$$+ cN \sum_{l=h+1}^{j-1} \phi(l, i-1) \int_{t_l}^{t_{l+1}} (s-t_l)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha} ds + cN \int_{t_j}^{t^*} (s-t_j)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_j)^\alpha} ds$$

$$1 < \frac{N}{\phi(0, m-1)} \sum_{l=0}^{m} \int_{t_l}^{t_{l+1}} (s-t_l)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_l)^\alpha} ds$$

ซึ่งขัดแย้งกับ (3.14) ดังนั้น $u(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$

❑

บทตั้ง 3.4 สมมติให้ $u \in PC$

$$\begin{aligned} &D_{t_k}^\alpha u(t) \le -Mu(t) - Nu(\theta(t)) - \frac{(t-t_k)^{1-\alpha} + Mt + N\theta(t)}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right], t \in J^-, \\ &\Delta u(t_k) \le -L_k u(t_k) - \frac{L_k t_k}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right], \qquad k = 1, 2, ..., m \\ &u(0) > \lambda u(T). \end{aligned} \tag{3.20}$$

เมื่อ $M > 0$, $N > 0$, $0 \le L_k \le 1$, $k = 1, 2, ..., m$ และ $0 < \lambda \le e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^\alpha}$ เป็นคงที่ และสอดคล้องกับ (3.14) แล้ว $u(t) \le 0$ บน J

พิสูจน์ กำหนดให้ $v(t) = u(t) + \frac{t}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right]$ จะเห็นได้ว่า $v > u$ และ v สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} D_{t_k}^\alpha v(t) + Mv(t) + Nv(\theta(t)) &= D_{t_k}^\alpha u(t) + Mu(t) + Nu(\theta(t)) \\ &\quad + \frac{(t-t_k)^{1-\alpha} + Mt + N\theta(t)}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right] \\ &\le 0 \end{aligned}$$

และ $\Delta v(t_k) = \Delta u(t_k) \le -L_k u(t_k) - \frac{L_k t_k}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right] = -L_k v(t_k)$

และ $v(0) = u(0)$, $\lambda v(T) = u(0)$ ดังนั้น $v(0) = \lambda v(T)$ โดยใช้ **บทตั้ง 3.4** ได้ว่า $v(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$ เพราะฉะนั้น $u(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$

❑

จาก **บทตั้ง 3.3 และ 3.4** เราจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ว่า $\mu_n \le \mu_{n+1}$, $\upsilon_{n+1} \le \upsilon_n$ และ $\mu_n \le \upsilon_n$ สำหรับทุกๆ $n = 0, 1, 2, ...$ เพื่อแสดงว่า $\mu_0(t) \le \mu_1(t) \le ... \le \mu_n(t) \le \upsilon_n(t) \le ... \le \upsilon_1(t) \le \upsilon_0(t)$ เป็นจริง ในหัวข้อถัดไป

3.1.4 การมีอยู่จริงของผลเฉลยสุดขีด

ในหัวข้อนี้เราจะนำผลจากหัวข้อที่ผ่านมา มาใช้ศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยสุดขีดของปัญหาค่าขอบ (1.1) โดยใช้วิธีการทำซ้ำทางเดียว

นิยาม 3.3 ผลเฉลยสูงสุดและผลเฉลยต่ำสุด (Maximal solution and minimal solution)
1) ฟังก์ชัน v จะถูกเรียกว่า **ผลเฉลยต่ำสุด** ถ้า $v \in D[\mu_0, \upsilon_0]$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (1.1) และสำหรับ $x \in D[\mu_0, \upsilon_0]$ ที่เป็นผลเฉลยใดๆ ของปัญหาค่าขอบ (1.1) ซึ่ง

$$v(t) \le x(t)$$

2) ฟังก์ชัน u จะถูกเรียกว่า **ผลเฉลยสูงสุด** ถ้า $u \in D[\mu_0, \upsilon_0]$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (1.1) และสำหรับ $x \in D[\mu_0, \upsilon_0]$ ที่เป็นผลเฉลยใดๆ ของปัญหาค่าขอบ (1.1) ซึ่ง

$$x(t) \le u(t)$$

โดยที่ $D[\mu_0, \upsilon_0] = \left\{ w \in PC\left(J, \mathbb{R}\right) \mid \mu_0(t) \le w(t) \le \upsilon_0(t),\, t \in J \right\}$
และเราจะเรียกผลเฉลยสูงสุดและผลเฉลยต่ำสุดว่า **ผลเฉลยสุดขีด** (Extreme solution)

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้สมมติฐานต่อไปนี้เป็นจริง
(H1) $\mu_0, \upsilon_0 \in PC$ เป็นผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนของ (1.1) โดยที่ $\mu_0 \le \upsilon_0$ บน J
(H2) ฟังก์ชัน $f \in C\left(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ สอดคล้องกับ

$$f\left(t,u,v\right) - f\left(t,\bar{u},\bar{v}\right) \ge -M\left(u-\bar{u}\right) - N\left(v-\bar{v}\right)$$

สำหรับ $\mu_0(t) \le \bar{u}(t) \le u(t) \le \upsilon_0(t)$, $\alpha_0(\theta(t)) \le v(t) \le \bar{v}(t) \le \beta_0(\theta(t))$, $t \in J$
(H3) ฟังก์ชัน $I_k \in C\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ เมื่อ $k = 1,2,...,m$ สอดคล้องกับ

$$I_k\left(u(t_k)\right) - I_k\left(v(t_k)\right) \ge -L_k\left[u(t_k) - v(t_k)\right]$$

สำหรับ $\mu_0(t_k) \le v(t_k) \le u(t_k) \le \upsilon_0(t_k)$, $L_k \ge 0$, $k = 1,2,...,m$
(H4) อสมการ (3.12), (3.14) เป็นจริง
แล้วจะมีสองลำดับทางเดียว $\{\mu_n\}, \{\upsilon_n\} \subset PC$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \mu_n = x_*$ และ $\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = x^*$ โดย x_*, x^* เป็นผลเฉลยสุดขีดของปัญหา (1.1) ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\mu_0(t) \le \mu_1(t) \le ... \le \mu_n(t) \le x_* \le x \le x^* \le \upsilon_n(t) \le ... \le \upsilon_1(t) \le \upsilon_0(t)$$

สำหรับ $t \in J$ เมื่อ x เป็นผลเฉลยของปัญหา (1.1) ซึ่ง $\mu_0(t) \le x \le \upsilon_0(t)$ บน J

พิสูจน์ พิจารณา

$$\begin{aligned} D_{t_k}^{\alpha} p_n(t) &= f(t, p_{n-1}(t), p_{n-1}(\theta(t)) + Mp_{n-1}(t) + Np_{n-1}(\theta(t)) \\ &\quad - Mp_n(t) - Np_n(\theta(t)) \qquad , \qquad t \neq t_k, t \in J, \\ \Delta p_n(t_k) &= I_k\left(p_{n-1}(t_k)\right) + L_k p_{n-1}(t_k) - L_k p_n(t_k), \qquad k = 1,2,...,m \\ p_n(0) &= \lambda p_n(T). \end{aligned} \tag{3.21}$$

สำหรับ $p_n = \mu_n$ หรือ $p_n = \upsilon_n$, $n = 1,2,...,m$ และจาก**บทตั้ง 3.2** สูตรการทำซ้ำ (3.21) มีผลเฉลยอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียว ดังนั้นเราจะได้ลำดับที่เกิดจากสูตรการทำซ้ำ (3.21) และผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนคือ $\{\mu_n\}$, $\{\upsilon_n\}$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{\mu_n\}$, $\{\upsilon_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว ซึ่งจะแยกการพิสูจน์เป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เราจะแสดงว่า $\mu_0 \le \mu_1$ และ $\upsilon_1 \le \upsilon_0$ โดยเราจะกำหนดให้ $u = \mu_0 - \mu_1$ จากสูตรการทำซ้ำและผลเฉลยล่างจะได้ว่า

กรณี 1 $\mu_0(0) \le \lambda \mu_0(T)$

$$\begin{aligned} D_{t_k}^{\alpha} u &= D_{t_k}^{\alpha} \mu_0 - D_{t_k}^{\alpha} \mu_1 \\ &\le f(t, \mu_0(t), \mu_0(\theta(t)) - f(t, \mu_0(t), \mu_0(\theta(t)) \\ &\quad - M\mu_0(t) - N\mu_0(\theta(t)) + M\mu_1(t) + N\mu_1(\theta(t)) \\ &\le -\left[M\left(\mu_0(t) - \mu_1(t)\right) + N\left(\mu_0(\theta(t)) - \mu_1(\theta(t))\right)\right] \\ &\le -Mu(t) - Nu(\theta(t)), \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \Delta u(t_k) &= \Delta \mu_0(t_k) - \Delta \mu_1(t_k) \\ &\le I_k\left(\mu_0(t_k)\right) - I_k\left(\mu_0(t_k)\right) - L_k \mu_0(t_k) + L_k \mu_1(t_k) \\ &\le -L_k u(t_k) \end{aligned}$$

และ $\qquad u(0) \le \lambda u(T)$

โดยใช้ **บทตั้ง 3.3** ได้ว่า $u(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$ นั่นคือ $\mu_0 \le \mu_1$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\upsilon_1 \le \upsilon_0$

กรณี 2 $\mu_0(0) > \lambda \mu_0(T)$

$$\begin{aligned} D_{t_k}^{\alpha} u &= D_{t_k}^{\alpha} \mu_0 - D_{t_k}^{\alpha} \mu_1 \\ &\le f(t, \mu_0(t), \mu_0(\theta(t)) - \frac{(t-t_k)^{1-\alpha} + Mt + N\theta(t)}{\lambda T}\left[\mu_0(0) - \lambda \mu_0(T)\right] \\ &\quad - f(t, \mu_0(t), \mu_0(\theta(t)) - M\mu_0(t) - N\mu_0(\theta(t)) + M\mu_1(t) + N\mu_1(\theta(t)) \\ &\le -Mu(t) - Nu(\theta(t)) - \frac{(t-t_k)^{1-\alpha} + Mt + N\theta(t)}{\lambda T}\left[\mu_0(0) - \lambda\mu_0(T) - \mu_1(0) + \lambda\mu_1(T)\right] \\ &\le -Mu(t) - Nu(\theta(t)) - \frac{(t-t_k)^{1-\alpha} + Mt + N\theta(t)}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right] \end{aligned}$$

และ

$$
\begin{aligned}
\Delta u(t_k) &= \Delta\mu_0(t_k) - \Delta\mu_1(t_k) \\
&\le I_k\left(\mu_0(t_k)\right) - \frac{L_k t_k}{\lambda T}\left[\mu_0(0) - \lambda\mu_0(T)\right] - I_k\left(\mu_0(t_k)\right) - L_k\mu_0(t_k) + L_k\mu_1(t_k) \\
&\le -L_k u(t_k) - \frac{L_k t_k}{\lambda T}\left[u(0) - \lambda u(T)\right]
\end{aligned}
$$

และ $\quad u(0) > \lambda u(T)$

โดยใช้ **บทตั้ง 3.4** ได้ว่า $u(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$ นั่นคือ $\mu_0 \le \mu_1$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\upsilon_1 \le \upsilon_0$

ขั้นที่ 2 เราจะแสดงว่า $\mu_n \le \mu_{n+1}$ เมื่อ $\mu_{n-1} \le \mu_n$ บน J กำหนดให้ $u = \mu_n - \mu_{n+1}$ โดยใช้ (H2) และ (3.21) ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
D_{t_k}^{\alpha} u &= D_{t_k}^{\alpha}\mu_n - D_{t_k}^{\alpha}\mu_{n+1} \\
&= f(t, \mu_{n-1}(t), \mu_{n-1}(\theta(t)) + M\mu_{n-1}(t) + N\mu_{n-1}(\theta(t)) \\
&\quad - M\mu_n(t) - N\mu_n(\theta(t)) - f(t, \mu_n(t), \mu_n(\theta(t)) - M\mu_n(t) - N\mu_n(\theta(t)) \\
&\quad + M\mu_{n+1}(t) + N\mu_{n+1}(\theta(t)) \\
&= f(t, \mu_{n-1}(t), \mu_{n-1}(\theta(t)) - f(t, \mu_n(t), \mu_n(\theta(t)) \\
&\quad + M\mu_{n-1}(t) + N\mu_{n-1}(\theta(t)) - M\mu_n(t) - N\mu_n(\theta(t)) - Mu(t) - Nu(\theta(t)) \\
&\le -Mu(t) - Nu(\theta(t))
\end{aligned}
$$

และจาก (H3) ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\Delta u(t_k) &= \Delta\mu_n(t_k) - \Delta\mu_{n+1}(t_k) \\
&= I_k\left(\mu_{n-1}(t_k)\right) + L_k\mu_{n-1}(t_k) - L_k\mu_n(t_k) - I_k\left(\mu_n(t_k)\right) - L_k\mu_n(t_k) + L_k\mu_{n+1}(t_k) \\
&= I_k\left(\mu_{n-1}(t_k)\right) + L_k\mu_{n-1}(t_k) - I_k\left(\mu_n(t_k)\right) - L_k\mu_n(t_k) - L_k u(t_k) \\
&\le -L_k u(t_k)
\end{aligned}
$$

และจะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
u(0) &= \mu_n(0) - \mu_{n+1}(0) \\
&= \lambda\mu_n(T) - \lambda\mu_{n+1}(T) \\
&= \lambda u(T)
\end{aligned}
$$

โดยใช้ **บทตั้ง 3.3** ได้ว่า $u(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$ นั่นคือ $\mu_n \le \mu_{n+1}$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\upsilon_{n+1} \le \upsilon_n$ เมื่อ $\upsilon_n \le \upsilon_{n-1}$ และ $\mu_{n+1} \le \upsilon_{n+1}$ เมื่อ $\mu_n \le \upsilon_n$ บน J

จากขั้นที่ 1 และ 2 ได้ว่าลำดับ $\{\mu_n\}$, $\{\upsilon_n\}$ เป็นลำดับทางเดียวซึ่งสอดคล้องกับ

$$
\mu_0(t) \le \mu_1(t) \le \ldots \le \mu_n(t) \le \upsilon_n(t) \le \ldots \le \upsilon_1(t) \le \upsilon_0(t)
$$

ดังนั้นจะมีฟังก์ชัน x_* และ x^* บน J ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}\mu_n = x_*$ และ $\lim_{n\to\infty}\upsilon_n = x^*$ และจากสูตรการทำซ้ำ (3.21) จะเห็นได้ว่า x_* และ x^* เป็นผลเฉลยของ (1.1)

สุดท้ายเราจะแสดงว่า x_* และ x^* เป็นคำตอบสุดขีดของ (1.1) โดยให้ $x(t)$ เป็นคำตอบของ (1.1) สำหรับ $t \in J$ ซึ่ง $\mu_0 \le x \le \upsilon_0$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\mu_n(t) \le x(t) \le \upsilon_n(t)$ แล้วจะแสดงว่า $\mu_{n+1}(t) \le x(t) \le \upsilon_{n+1}(t)$ ในการพิสูจน์เราจะกำหนดให้ $u = \mu_n - x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
D_{t_k}^{\alpha} u &= D_{t_k}^{\alpha} \mu_{n+1} - D_{t_k}^{\alpha} x \\
&= f(t, \mu_n(t), \mu_n(\theta(t)) + M\mu_n(t) + N\mu_n(\theta(t)) \\
&\quad - M\mu_{n+1}(t) - N\mu_{n+1}(\theta(t)) - f(t, x(t), x(\theta(t)) \\
&= f(t, \mu_n(t), \mu_n(\theta(t)) - f(t, x(t), x(\theta(t)) \\
&\quad + M\mu_n(t) + N\mu_n(\theta(t)) - Mx(t) - Nx(\theta(t)). \\
&\quad - M\mu_{n+1}(t) - N\mu_{n+1}(\theta(t)) + Mx(t) + Nx(\theta(t)) \\
&\le -Mu(t) - Nu(\theta(t))
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\Delta u(t_k) &= \Delta \mu_{n+1}(t_k) - \Delta x(t_k) \\
&= I_k\left(\mu_n(t_k)\right) + L_k \mu_n(t_k) - L_k \mu_{n+1}(t_k) - I_k\left(x(t_k)\right) \\
&= I_k\left(\mu_n(t_k)\right) - I_k\left(x(t_k)\right) - L_k x(t_k) + L_k \mu_n(t_k) - L_k \mu_{n+1}(t_k) + L_k x(t_k) \\
&\le -L_k u(t_k)
\end{aligned}$$

และเห็นได้ชัดว่า

$$\begin{aligned}
u(0) &= \mu_{n+1}(0) - x(0) \\
&= \lambda \mu_{n+1}(T) - \lambda x(T) \\
&= \lambda u(T)
\end{aligned}$$

โดยใช้ **บทตั้ง 3.3** ได้ว่า $u(t) \le 0$ สำหรับทุก $t \in J$ นั่นคือ $\mu_{n+1}(t) \le x(t)$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $x(t) \le \upsilon_{n+1}(t)$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า $\mu_n(t) \le x(t) \le \upsilon_n(t)$ บน J สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้นขณะที่ $n \to \infty$ จะได้ว่า $x_*(t) \le x(t) \le x^*(t)$ บน J นั่นคือ x_* และ x^* เป็นคำตอบสุดขีดของ (1.1)

❑

จากทฤษฎีบทนี้เราจะได้เงื่อนไขพอเพียงของการมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์

3.1.5 ตัวอย่างปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์

ในหัวข้อนี้เราจะยกตัวอย่างประกอบ **ทฤษฎีบท 3.1**

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$\begin{cases} D_{t_k}^{5/7}x(t) = -\frac{t}{5}x(t) + \frac{t}{7}\cos\left(x\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{t}{6}, & t \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, \\ \Delta x\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}\right), & k = 1 \\ x(0) = 1.13x(1). \end{cases} \tag{3.22}$$

จาก (3.22) ได้ว่า $\alpha = \frac{5}{7}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda = 1.13$ และ $m = 1$

เราเลือก $\mu_0 = \begin{cases} -7, & t \in [0,1/3] \\ -6, & t \in [1/3,1] \end{cases}$ และ $\upsilon_0 = 0$ เป็นผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนของ (3.22) ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $\mu_0 \le \upsilon_0$ และจาก (3.22)

$$f(t,u,v) = -\frac{t}{5}u + \frac{t}{7}\cos v - \frac{t}{6}$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v}) &= -\frac{t}{5}u + \frac{t}{7}\cos v + \frac{t}{5}\bar{u} - \frac{t}{7}\cos\bar{v} \\ &= -\frac{t}{5}(u - \bar{u}) - \frac{t}{7}(v - \bar{v}) \end{aligned}$$

สำหรับ $\mu_0(t) \le \bar{u}(t) \le u(t) \le \upsilon_0(t)$, $\alpha_0(\theta(t)) \le v(t) \le \bar{v}(t) \le \beta_0(\theta(t))$, $t \in J$ และเห็นได้ชัดว่า

$$I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k)) \ge -\frac{1}{3}[u(t_k) - v(t_k)]$$

สำหรับ $\mu_0(t_k) \le v(t_k) \le u(t_k) \le \upsilon_0(t_k)$, $k = 1$

ดังนั้นเราเลือก $M = \frac{1}{5}$, $N = \frac{1}{7}$, $L_1 = \frac{1}{3}$ และจะเห็นว่า

$$\frac{N}{\phi(0,m-1)} \sum_{i=0}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s-t_i)^{\alpha-1} e^{\frac{M}{\alpha}(s-t_i)^{\alpha}} ds = 0.449772989 \le 1$$

และ

$$\Lambda = \frac{\max\{\lambda, e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}}\} N \sum_{i=0}^{m} \left(e^{\frac{M}{\alpha}(t_{i+1}-t_i)^{\alpha}} - 1 \right)}{M \left| e^{\frac{M}{\alpha}(T-t_m)^{\alpha}} - \lambda\phi(0,m-1) \right|} = 0.8848227489 \le 1$$

ซึ่งจะเห็นว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขของ **ทฤษฎีบท 3.1** ดังนั้น (3.22) จะมีผลเฉลยสุดขีด ที่อยู่ระหว่างผลเฉลยล่างและผลเฉลยบน

❑

3.2 การมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบในรูปปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา ในรูป

$$
\begin{aligned}
&{}^{RL}D^{p_1}({}^{RL}D^{p_2}+\lambda_1)x(t) = f(t,x(t),y(t)), && 0<t<T,\\
&{}^{RL}D^{q_1}({}^{RL}D^{q_2}+\lambda_2)y(t) = g(t,x(t),y(t)), && 0<t<T,\\
&x(0)=0, \qquad x(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(\xi_i), && \\
&y(0)=0, \qquad y(\kappa)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,{}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(\zeta_j), &&
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

เมื่อ $p_1,p_2,q_1,q_2>0$, $\gamma_i,\phi_j>0$, $\xi_i,\zeta_j\in(0,T)$, $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$ และ $f,g:[0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ λ_1,λ_2 เป็นค่าคงที่

การดำเนินการวิจัยเริ่มต้นจากการแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็นระบบสมการเชิงปริพันธ์ จากนั้นจะใช้ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิ และทฤษฎีจุดตรึงของอริแกน เพื่อพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการ

3.2.1 การแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิง

ในหัวข้อนี้จะทำการแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็นระบบสมการเชิงปริพันธ์โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์เชิงเศษส่วนและการจัดรูป เพื่อสะดวกในการพิสูจน์เราจะกำหนดให้

$$\Omega_1=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\eta^{p_1+p_2-1},$$

$$\Omega_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{p_1+p_2+\mu_i-1}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p_1+p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i-1}{\mu_i}\right)}\frac{\xi_i^{p_1+p_2+\mu_i\gamma_i-1}}{\mu_i^{\gamma_i}},$$

$$\Omega=\Omega_2-\Omega_1\neq 0,$$

และ

$$\Psi_1=\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\kappa^{q_1+q_2-1},$$

$$\Psi_2=\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q_1+q_2+\delta_j-1}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q_1+q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j-1}{\delta_j}\right)}\frac{\zeta_j^{\,q_1+q_2+\delta_j\varphi_j-1}}{\delta_j^{\varphi_j}},$$

$$\Psi=\Psi_2-\Psi_1\neq 0\,.$$

บทตั้ง 3.5 กำหนดให้ $0<p_1,p_2,q_1,q_2<1$, $\mu_i,\gamma_i>0$, $\delta_j,\phi_j>0$, $\eta,\kappa,\xi_i,\varsigma_j\in(0,T)$, $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$ สำหรับ $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$ และ $u,v\in C\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ แล้ว

$$\begin{aligned}&{}^{RL}D^{p_1}({}^{RL}D^{p_2}+\lambda_1)x(t)=u(t), && 0<t<T,\\ &{}^{RL}D^{q_1}({}^{RL}D^{q_2}+\lambda_2)y(t)=v(t), && 0<t<T,\\ &x(0)=0, \qquad x(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(\xi_i), &&\\ &y(0)=0, \qquad y(\kappa)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,{}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(\zeta_j), &&\end{aligned}\tag{3.23}$$

จะมีผลเฉลยในรูป

$$\begin{aligned}x(t)=J^{p_1+p_2}u(t)-\lambda_1J^{p_2}x(t)+\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\Big[J^{p_1+p_2}u(\eta)-\lambda_1J^{p_2}x(\eta)\\ -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left(J^{p_1+p_2}u(s)-\lambda_1J^{p_2}x(s)\right)(\xi_i)\Big],\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}y(t)=J^{q_1+q_2}v(t)-\lambda_2J^{q_2}y(t)+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\Big[J^{q_1+q_2}v(\kappa)-\lambda_2J^{q_2}y(\kappa)\\ -\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,{}^{\delta_j}J^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}v(s)-\lambda_2J^{q_2}y(s)\right](\zeta_j)\Big].\end{aligned}\tag{3.25}$$

พิสูจน์ โดยใช้ **บทตั้ง 2.3** กับสมการแรกและสมการที่สองของ (3.23)

$$({}^{RL}D^{p_2}+\lambda_1)x(t)=J^{p_1}u(t)+c_1t^{p_1-1} \text{ และ } ({}^{RL}D^{q_2}+\lambda_2)y(t)=J^{q_1}v(t)+d_1t^{q_1-1}$$

ใช้ **บทตั้ง 2.3** อีกครั้ง จะได้

$$\begin{aligned}x(t)&=J^{p_1+p_2}u(t)-\lambda_1J^{p_2}x(t)+c_1J^{p_2}t^{p_1-1}+c_2t^{p_2-1}\\ y(t)&=J^{q_1+q_2}v(t)-\lambda_2J^{q_2}y(t)+d_1J^{q_2}t^{q_1-1}+d_2t^{q_2-1}\end{aligned}\;3$$

โดยใช้ **บทตั้ง 2.4** จะได้

$$x(t)=J^{p_1+p_2}u(t)-\lambda_1J^{p_2}x(t)+c_1\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}t^{p_1+p_2-1}+c_2t^{p_2-1}$$

$$y(t)=J^{q_1+q_2}v(t)-\lambda_2J^{q_2}y(t)+d_1\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}t^{q_1+q_2-1}+d_2t^{q_2-1}$$

เมื่อ $c_1,c_2,d_1,d_2\in\mathbb{R}$. จาก $x(0)=0, y(0)=0$ จะได้ $c_2=0,\ d_2=0$ ดังนั้น

$$x(t)=J^{p_1+p_2}u(t)-\lambda_1 J^{p_2}x(t)+c_1\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}t^{p_1+p_2-1} \tag{3.26}$$

$$y(t)=J^{q_1+q_2}v(t)-\lambda_2 J^{q_2}y(t)+d_1\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}t^{q_1+q_2-1} \tag{3.27}$$

หาปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา อันดับ $\gamma_i>0$ และ $\mu_i>0$ กับ (3.26) และหาปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา อันดับ $\phi_j>0$ และ $\delta_j>0$ กับ (3.27) จะได้

$$\begin{aligned}{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(t)&={}^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}u(t)-\lambda_1 J^{p_2}x(t)\right]\\&\quad+c_1\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{p_1+p_2+\mu_i-1}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p_1+p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i-1}{\mu_i}\right)}\frac{t^{p_1+p_2+\mu_i\gamma_i-1}}{\mu_i^{\gamma_i}}\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}{}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(t)&={}^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}v(t)-\lambda_2 J^{q_2}y(t)\right]\\&\quad+d_1\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q_1+q_2+\delta_j-1}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q_1+q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j-1}{\delta_j}\right)}\frac{t^{q_1+q_2+\delta_j\varphi_j-1}}{\delta_j^{\varphi_j}}\end{aligned} \tag{3.29}$$

แทน $t=\eta$ ใน (3.26) แทน $t=\kappa$ ใน (3.27)

$$x(\eta)=J^{p_1+p_2}u(\eta)-\lambda_1 J^{p_2}x(\eta)+c_1\Omega_1$$

$$y(\kappa)=J^{q_1+q_2}v(\kappa)-\lambda_2 J^{q_2}y(\kappa)+d_1\Psi_1$$

แทน $t=\xi_i$ ใน (3.28) แทน $t=\zeta_j$ ใน (3.29)

$$\begin{aligned}{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(\xi_i)&={}^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}u(s)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)\right](\xi_i)\\&\quad+c_1\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{p_1+p_2+\mu_i-1}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p_1+p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i-1}{\mu_i}\right)}\frac{\xi_i^{p_1+p_2+\mu_i\gamma_i-1}}{\mu_i^{\gamma_i}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(\zeta_j)&={}^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}v(s)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)\right](\zeta_j)\\&\quad+d_1\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q_1+q_2+\delta_j-1}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q_1+q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j-1}{\delta_j}\right)}\frac{\zeta_j^{q_1+q_2+\delta_j\varphi_j-1}}{\delta_j^{\varphi_j}}\end{aligned}$$

และ $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i{}^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}u(s)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)\right](\xi_i)+c_1\Omega_2$$

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,{}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(\zeta_j)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j{}^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}v(s)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)\right](\zeta_j)+d_1\Psi_2$$

และจากเงื่อนไขค่าขอบ $x(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, {}^{\mu_i}I^{\gamma_i}x(\xi_i),\ y(\kappa)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\, {}^{\delta_j}I^{\varphi_j}y(\zeta_j)$ จะได้

$$J^{p_1+p_2}u(\eta)-\lambda_1 J^{p_2}x(\eta)+c_1\Omega_1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, {}^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}u(s)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)\right](\xi_i)+c_1\Omega_2$$

$$J^{q_1+q_2}v(\kappa)-\lambda_2 J^{q_2}y(\kappa)+d_1\Psi_1=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\, {}^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}v(s)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)\right](\zeta_j)+d_1\Psi_2$$

จะได้

$$c_1=\frac{1}{\Omega}\left[J^{p_1+p_2}u(\eta)-\lambda_1 J^{p_2}x(\eta)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, {}^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}u(s)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)\right](\xi_i)\right]$$

$$d_1=\frac{1}{\Psi}\left[J^{q_1+q_2}v(\kappa)-\lambda_2 J^{q_2}y(\kappa)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j\, {}^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}v(s)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)\right](\zeta_i)\right]$$

แทน c_1 และ d_1 ใน (3.26) และ (3.27) ตามลำดับ จะได้ว่า x และ y สอดคล้องกับ (3.24) และ (3.25)

❑

3.2.2 การมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

ในหัวข้อนี้เราจะใช้ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิ และทฤษฎีจุดตรึงของอริแกน เพื่อพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

เพื่อสะดวกในการพิสูจน์จะให้ $X=\{x(t)\mid x\in C(J)\}$ โดย $\|x\|=\sup\{|x(t)|,t\in J\}$ และ $Y=\{y(t)\mid y\in C(J)\}$ โดย $\|y\|=\sup\{|y(t)|,t\in J\}$ ซึ่ง $(X,\|\bullet\|),(Y,\|\bullet\|)$ เป็นปริภูมิบานาค และให้ปริภูมิผลคูณ $(X\times Y,\|x,y\|)$ เป็นปริภูมิบานาค โดยกำหนดนอร์ม $\|x,y\|=\|x\|+\|y\|$ พร้อมทั้งกำหนดสัญญาลักษณ์ต่อไปนี้

$$J^{z}f(s,x(s),y(s))(\tau)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\tau}(\tau-s)^{z-1}f(s,x(s),y(s))ds$$

และ
$$ {}^{\rho}I^{z}f(s,x(s),y(s))(\tau)=\frac{\rho^{1-z}}{\Gamma(z)}\int_0^{\tau}\frac{s^{\rho-1}f(s,x(s),y(s))}{\left(\tau^{\rho}-s^{\rho}\right)^{1-z}}ds$$

เมื่อ $z,\rho>0$ และ $\tau\in J$

จาก **บทตั้ง 3.5** เราจะนิยามตัวดำเนินการ $F:X\times Y\to X\times Y$ ในรูป

$$F(x,y)(t)=\begin{pmatrix}P(x,y)(t)\\ Q(x,y)(t)\end{pmatrix} \tag{3.30}$$

เมื่อ

$$P(x,y)(t)=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\Big[J^{p_1+p_2}f(s,x(s),y(s))(\eta)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)(\eta)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}f(s,x(s),y(s))(\tau)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)(\tau)\right](\xi_i)\Big] \tag{3.31}$$
$$+J^{p_1+p_2}f(s,x(s),y(s))(t)-\lambda_1 J^{p_2}x(s)(t)$$

และ

$$Q(x,y)(t)=\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\Big[J^{q_1+q_2}g(s,x(s),y(s))(\kappa)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)(\kappa)$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\beta_i^{\delta_i}I^{\varphi_i}\left[J^{q_1+q_2}g(s,x(s),y(s))(\tau)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)(\tau)\right](\zeta_i)\Big] \tag{3.32}$$
$$J^{q_1+q_2}g(s,x(s),y(s))(t)-\lambda_2 J^{q_2}y(s)(t)$$

กำหนดค่าคงที่

$$\Phi(u)=\left[\frac{\eta^{u+p_2}}{\Gamma(u+p_2+1)}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|\alpha_i|\xi_i^{u+p_2+\mu_i\gamma_i}}{\mu_i^{\gamma_i}\Gamma(u+p_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{u+p_2+\mu_i}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{u+p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i}{\mu_i}\right)}\right)\right] \tag{3.33}$$
$$\times\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{T^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}+\frac{T^{u+p_2}}{\Gamma(u+p_2+1)}$$

และ

$$\Lambda(v)=\left[\frac{\kappa^{v+q_2}}{\Gamma(v+q_2+1)}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{|\beta_j|\zeta_j^{v+q_2+\delta_j\varphi_j}}{\delta_j^{\varphi_j}\Gamma(v+q_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{v+q_2+\delta_j}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j}{\delta_j}\right)}\right)\right] \tag{3.34}$$
$$\times\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{T^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}+\frac{T^{u+q_2}}{\Gamma(v+q_2+1)}$$

เมื่อ $u\in\{0,p_1\}$ และ $v\in\{0,q_1\}$

ในทฤษฎีบทต่อไปเราจะพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิ

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(H5) $\left|f(t,u,v)\right| \le \psi(t)$ สำหรับ $\forall (t,u,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$ และ $\psi \in C\left([0,T],\mathbb{R}^+\right)$

(H6) $\left|g(t,u,v)\right| \le \omega(t)$ สำหรับ $\forall (t,u,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$ และ $\omega \in C\left([0,T],\mathbb{R}^+\right)$

ถ้า

$$\Upsilon = \max\left\{\left|\lambda_1\right|\Phi(0), \left|\lambda_2\right|\Lambda(0)\right\} < 1 \tag{3.35}$$

แล้ว (1.2) จะมีผลเฉลย บน $[0,T]$

พิสูจน์ ให้ $\sup_{t\in J}\left|\psi(t)\right| = \left\|\psi\right\|$, $\sup_{t\in J}\left|\omega(t)\right| = \left\|\omega\right\|$ และเลือก

$$R \ge \frac{\left\|\psi\right\|\Phi(p_1) + \left\|\omega\right\|\Lambda(q_1)}{1-\Upsilon} \tag{3.36}$$

กำหนด $B_R = \left\{(x,y)\in X\times Y : \left\|x,y\right\| \le R\right\}$ และตัวดำเนินการต่อไปนี้

$$P_1(x,y)(t) = J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(t) + \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\Big[J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(\eta)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i} I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(\tau)\right](\xi_i)\Big]$$

$$P_2 x(t) = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\left[-\lambda_1 J^{p_2}x(s)(\eta) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i} I^{\gamma_i}\left[-\lambda_1 J^{p_2}x(s)(\tau)\right](\xi_i)\right]$$
$$-\lambda_1 J^{p_2}x(s)(t)$$

$$Q_1(x,y)(t) = J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(t) + \frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\Big[J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(\kappa)$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{\delta_j} I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(\tau)\right](\zeta_j)\Big]$$

$$Q_2 y(t) = -\lambda_2 J^{q_2}y(s)(t) + \frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\left[-\lambda_2 J^{q_2}y(s)(\kappa) - \sum_{j=1}^{m}\beta_j^{\delta_j} I^{\varphi_j}\left[-\lambda_2 J^{q_2}y(s)(\tau)\right](\zeta_j)\right]$$

และ

$$F_1(x,y)(t) = \begin{pmatrix} P_1(x,y)(t) \\ Q_1(x,y)(t)\end{pmatrix}, \qquad F_2(x,y)(t) = \begin{pmatrix} P_2(x,y)(t) \\ Q_2(x,y)(t)\end{pmatrix} \tag{3.37}$$

ซึ่ง $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$ และ $F = F_1 + F_2$ สำหรับ $\left(u_1,v_1\right),\left(u_2,v_2\right) \in B_R$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left|P_1(u_1,v_1)(t)+P_2u_2(t)\right| \\
&\quad=\Bigg|J^{p_1+p_2}f(s,u_1(s),v_1(s))(t)+\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\Bigg[J^{p_1+p_2}f(s,u_1(s),v_1(s))(\eta) \\
&\quad\quad-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}f(s,u_1(s),v_1(s))(\tau)\right](\xi_i)\Bigg]-\lambda_1J^{p_2}u_2(s)(t) \\
&\quad\quad-\frac{\lambda_1\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\left[J^{p_2}u_2(s)(\eta)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_2}u_2(s)(\tau)\right](\xi_i)\right]\Bigg| \\
&\quad\le J^{p_1+p_2}\|\psi\|(t)+\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[J^{p_1+p_2}\|\psi\|(\eta)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}\|\psi\|(\tau)\right](\xi_i)\right] \\
&\quad\quad+|\lambda_1|J^{p_2}R(t)+\frac{|\lambda_1|\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[J^{p_2}R(\eta)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_2}R(\tau)\right](\xi_i)\right] \\
&\quad\le\|\psi\|\left(J^{p_1+p_2}(t)+\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[J^{p_1+p_2}(\eta)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}(\tau)\right](\xi_i)\right]\right) \\
&\quad\quad+|\lambda_1|R\left(J^{p_2}(t)+\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[J^{p_2}(\eta)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_2}(\tau)\right](\xi_i)\right]\right)
\end{aligned}
$$

จาก **บทตั้ง 2.4** และ**บทตั้ง 2.5** ได้ว่า

$$\left|P_1(u_1,v_1)(t)+P_2u_2(t)\right|=\|\psi\|\Phi(p_1)+|\lambda_1|R\Phi(0)\le \mathrm{R}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left|Q_1(u_1,v_1)(t)+Q_2v_2(t)\right| \\
&\quad=\Bigg|J^{q_1+q_2}g(s,u_1(s),v_1(s))(t)+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\Bigg[J^{q_1+q_2}g(s,u_1(s),v_1(s))(\kappa) \\
&\quad\quad-\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}g(s,u_1(s),v_1(s))(\tau)\right](\zeta_j)\Bigg]-\lambda_2J^{q_2}v_2(s)(t) \\
&\quad\quad-\frac{\lambda_2\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\left[J^{q_2}v_2(s)(\kappa)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_2}v_2(s)(\tau)\right](\zeta_j)\right]\Bigg| \\
&\quad\le J^{q_1+q_2}\|\omega\|(t)+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[J^{q_1+q_2}\|\omega\|(\kappa)+\sum_{j=1}^{m}|\beta_j|^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}\|\omega\|(\tau)\right](\zeta_j)\right] \\
&\quad\quad+|\lambda_2|J^{q_2}R(t)+\frac{|\lambda_2|\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[J^{q_2}R(\kappa)+\sum_{j=1}^{m}|\beta_j|^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_2}R(\tau)\right](\zeta_j)\right]
\end{aligned}
$$

$$\left|Q_1(u_1,v_1)(t)+Q_2v_2(t)\right|$$
$$\leq \|\omega\|\left\{J^{q_1+q_2}(t)+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[J^{q_1+q_2}(\kappa)+\sum_{j=1}^{m}\left|\beta_j\right|^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}(\tau)\right](\zeta_j)\right]\right\}$$
$$+\left|\lambda_2\right|R\left\{J^{q_2}(t)+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[J^{q_2}(\kappa)+\sum_{j=1}^{m}\left|\beta_j\right|^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_2}(\tau)\right](\zeta_j)\right]\right\}$$

จาก **บทตั้ง 2.4** และ**บทตั้ง 2.5** ได้ว่า

$$\left|Q_1(u_1,v_1)(t)+Q_2v_2(t)\right|=\|\omega\|\Lambda(q_1)+\left|\lambda_2\right|R\Lambda(0)\leq R$$

ดังนั้น $\|F_1(u_1,v_1)(t)+F_2(u_2,v_2)(t)\|\leq R$ นั่นคือ $F_1(u_1,v_1)(t)+F_2(u_2,v_2)(t)\in B_R$

กำหนดให้ $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in X\times Y$ และสำหรับ $t\in[0,T]$ จะได้ว่า

$$\left|P_2x_1(t)-P_2x_2(t)\right|$$
$$\leq \frac{\left|\lambda_1\right|\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[J^{p_2}\|x_1-x_2\|(\eta)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_2}\|x_1-x_2\|(\tau)\right](\xi_i)\right]$$
$$+\left|\lambda_1\right|J^{p_2}\|x_1-x_2\|$$
$$\leq\left[J^{p_2}(t)+\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{t^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[J^{p_2}(\eta)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_2}(\tau)\right](\xi_i)\right]\right]\left|\lambda_1\right|\|x_1-x_2\|$$
$$\leq\Phi(0)\left|\lambda_1\right|\|x_1-x_2\|$$

และ

$$\left|Q_2y_1(t)-Q_2y_2(t)\right|$$
$$\leq\left|\lambda_2\right|J^{q_2}\|y_1-y_2\|(t)+\frac{\left|\lambda_2\right|\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[J^{q_2}\|y_1-y_2\|(\kappa)+\sum_{j=1}^{m}\left|\beta_j\right|^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_2}\|y_1-y_2\|(s)(\tau)\right](\zeta_j)\right]$$
$$\leq\left\{J^{q_2}(t)+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{t^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[J^{q_2}(\kappa)+\sum_{j=1}^{m}\left|\beta_j\right|^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[J^{q_2}(s)(\tau)\right](\zeta_j)\right]\right\}\left|\lambda_2\right|\|y_1-y_2\|$$
$$\leq\Lambda(0)\left|\lambda_2\right|\|y_1-y_2\|$$

ดังนั้น

$$\|F_2(x_1,y_1)(t)-F_2(x_2,y_2)(t)\|\leq\Phi(0)\left|\lambda_1\right|\|x_1-x_2\|+\Lambda(0)\left|\lambda_2\right|\|y_1-y_2\|\leq\Upsilon\|x_1-x_2,y_1-y_2\|$$

จาก (3.35) จะได้ว่า F_2 เป็นการส่งแบบหดตัว พิจารณา F_1 จะเห็นได้ว่าตัวดำเนินการ F_1 ต่อเนื่องสำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นเราจะแสดงว่า F_1 มีขอบเขตสม่ำเสมอ บน B_R

$$\|P_1(x,y)(t)\|\leq\|\psi\|\Phi(p_1)\qquad\text{และ}\qquad\|Q_1(x,y)(t)\|\leq\|\omega\|\Lambda(q_1)$$

ดังนั้น
$$\|F_1(x,y)(t)\|\leq\|\psi\|\Phi(p_1)+\|\omega\|\Lambda(q_1)$$

ต่อไปจะแสดงว่า F_1 เป็นตัวดำเนินการกระชับ โดยกำหนดให้ $t_1,t_2\in[0,T]$ ซึ่ง $t_1<t_2$ แล้วจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left|P_1(x,y)(t_2)-P_1(x,y)(t_1)\right| \\
&=\Big| J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(t_2) - J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(t_1) \\
&\quad + \left[J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(\eta) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\mu_i} I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2} f(s,x(s),y(s))(\tau)\right](\xi_i)\right] \\
&\quad \times \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)} \frac{t_2^{p_1+p_2-1}-t_1^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\Big| \\
&\le \frac{\|\psi\|\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)} \left| \frac{t_2^{p_1+p_2-1}-t_1^{p_1+p_2-1}}{\Omega} \left[J^{p_1+p_2}(\eta) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\mu_i} I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}(\tau)\right](\xi_i)\right]\right| \\
&\quad + \|\psi\| \left| J^{p_1+p_2}(t_2) - J^{p_1+p_2}(t_1)\right| \\
&\le \frac{\|\psi\|\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)} \left| \frac{t_2^{p_1+p_2-1}-t_1^{p_1+p_2-1}}{\Omega} \left[J^{p_1+p_2}(\eta) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\mu_i} I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}(\tau)\right](\xi_i)\right]\right| \\
&\quad + \frac{\|\psi\|\left(t_2^{p_1+p_2}-t_1^{p_1+p_2}\right)+2\left(t_2-t_1\right)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
&\left|Q_1(x,y)(t_2)-Q_1(x,y)(t_1)\right| \\
&=\Big| J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(t_2) - J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(t_1) \\
&+ \frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)} \frac{t_2^{q_1+q_2-1}-t_2^{q_1+q_2-1}}{\Psi} \left[J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(\kappa) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j^{\delta_j} I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2} g(s,x(s),y(s))(\tau)\right](\zeta_j)\right]\Big| \\
&\le \|\omega\| \left| J^{q_1+q_2}(t_2) - J^{q_1+q_2}(t_1)\right| + \frac{\|\omega\|\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)} \left| \frac{t_2^{q_1+q_2-1}-t_2^{q_1+q_2-1}}{\Psi} \left[J^{q_1+q_2}(\kappa) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j^{\delta_j} I^{\varphi_j}\left[J^{q_1+q_2}(\tau)\right](\zeta_j)\right]\right| \\
&\le \frac{\|\omega\|\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)} \left| \frac{t_2^{q_1+q_2-1}-t_2^{q_1+q_2-1}}{\Psi} \left[J^{q_1+q_2}(\kappa) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j^{\delta_j} I^{\varphi_j}\left[I^{q_1+q_2}(\tau)\right](\zeta_j)\right]\right| \\
&\quad + \|\omega\| \frac{\left(t_2^{p_1+p_2}-t_1^{p_1+p_2}\right)+2\left(t_2-t_1\right)^{p_1+p_2}}{\Gamma(q_1+q_2+1)}
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะเห็นว่าเป็นอิสรกับ (x,y) และลู่เข้าสู่ 0 ขณะที่ $t_2-t_1 \to 0$ ดังนั้น F_1 เป็นอีควิคอนทินิวอัส จากทฤษฎีของ arzela ascoli จะได้ว่า F_1 เป็นตัวดำเนินการกระชับ บน B_R ดังนั้นจะเห็นว่าสอดคล้องกับ **ทฤษฎีบท 2.2** ดังนั้น (1.2) จะมีผลเฉลย บน $[0,T]$

❑

ในทฤษฎีบทต่อไปเราจะพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ทฤษฎีจุดตรึงของอริแกน

กำหนดให้ $K_R = \left\{(x,y)\in X\times Y : \|x,y\| \le R\right\}$

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ (3.35) และเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(H7) มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ $z_1 \in C([0,T],\mathbb{R})$ และฟังก์ชันไม่เป็นลบ $\psi_1,\psi_2:[0,\infty)\to[0,\infty)$

$$\left|f(t,u,v)\right| \le z_1(t)\left[\psi_1(\|u\|)+\psi_2(\|v\|)\right] \text{ สำหรับทุก } (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$$

(H8) มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ $z_2 \in C([0,T],\mathbb{R})$ และฟังก์ชันไม่เป็นลบ $\omega_1,\omega_2:[0,\infty)\to[0,\infty)$

$$\left|g(t,u,v)\right| \le z_2(t)\left[\omega_1(\|u\|)+\omega_2(\|v\|)\right] \text{ สำหรับทุก } (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$$

(H9) $$\sup_{r\in(0,\infty)} \frac{r}{\|z_1\|\left[\psi_1(r)+\psi_2(r)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r)+\omega_2(r)\right]\Lambda(q_1)} > \frac{1}{1-\Upsilon}$$

แล้ว (1.2) จะมีผลเฉลย บน $[0,T]$

พิสูจน์ พิจารณา $F: X\times Y \to X\times Y$ ซึ่งกำหนดตาม (3.30) ซึ่ง

$$F(x,y)(t) = F_1(x,y)(t) + F_2(x,y)(t)$$

เมื่อ F_1,F_2 กำหนดตาม (3.37) จาก (H9) ได้ว่าจะมี $r_0>0$ ซึ่ง

$$\frac{r_0}{\|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\Lambda(q_1)} > \frac{1}{1-\Upsilon} \tag{3.38}$$

เราจะพิสูจน์ว่า F_1,F_2 สอดคล้องกับ **ทฤษฎีบท 2.3**

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า $F(K_{r_0})$ มีขอบเขต โดยเริ่มต้นเราแสดงว่า $F_1(K_{r_0})$ มีขอบเขต

$$\|P_1(x,y)(t)\| \le \|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Phi(p_1)$$

และ $$\|Q_1(x,y)(t)\| \le \|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\Lambda(q_1)$$

ดังนั้น

$$\|F_1(x,y)(t)\| \le \|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\Lambda(q_1)$$

นั่นคือ $F_1(\bar{K}_{r_0})$ มีขอบเขต ในทำนองเดียวกัน

$$\|P_2(x)\| \le |\lambda_1|\Phi(0)\|x\| \quad \text{และ} \quad \|Q_2(y)\| \le |\lambda_2|\Lambda(0)\|y\|$$

ดังนั้น

$$\|F_2(x,y)\| \le \Upsilon r_0$$

ขั้นที่ 2 จะแสดงว่าตัวดำเนินการ $F_1(K_{r_0})$ ต่อเนื่องและต่อเนื่องบริบูรณ์

จาก $F_1(\bar{K}_{r_0})$ มีขอบเขตสม่ำเสมอ และพิจารณา $t_1,t_2\in[0,T]$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left|P_1(x,y)(t_2)-P_1(x,y)(t_1)\right| \\
&\le \|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Bigg[\frac{\left(t_2^{p_1+p_2}-t_1^{p_1+p_2}\right)+2\left(t_2-t_1\right)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} \\
&\quad +\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\left|\frac{t_2^{p_1+p_2-1}-t_1^{p_1+p_2-1}}{\Omega}\right|\left[J^{p_1+p_2}(\eta)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mu_i}I^{\gamma_i}\left[J^{p_1+p_2}(\tau)\right](\xi_i)\right]\Bigg]
\end{aligned}$$

และ

$$\left|Q_1(x,y)(t_2)-Q_1(x,y)(t_1)\right| \le \|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\left[\frac{\left(t_2^{p_1+p_2}-t_1^{p_1+p_2}\right)+2\left(t_2-t_1\right)^{p_1+p_2}}{\Gamma(q_1+q_2+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\left|\frac{t_2^{q_1+q_2-1}-t_2^{q_1+q_2-1}}{\Psi}\right|\left[J^{q_1+q_2}(\kappa)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{\delta_j}I^{\varphi_j}\left[I^{q_1+q_2}(\tau)\right](\zeta_j)\right]\right]$$

ซึ่งจะเห็นว่าเป็นอิสระกับ (x,y) และลู่เข้าสู่ 0 ขณะที่ $t_2-t_1\to 0$ ดังนั้น F_1 เป็นอีควิคอนทินิวอัส จากทฤษฎีของ arzela ascoli จะได้ว่า F_1 เป็นตัวดำเนินการกระชับ ต่อไปจะกำหนดให้ $(x_n,y_n)\subset \bar{K}_{r_0}$ ซึ่ง $\|(x_n,y_n)-(x,y)\|\to 0$ จาก $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน เซตกระชับ $[0,T]\times[-r_0,r_0]\times[-r_0,r_0]$ ซึ่ง $\|f(t,x_n,y_n)-f(t,x,y)\|\to 0$ และ $\|\mathrm{g}(t,x_n,y_n)-g(t,x,y)\|\to 0$ ดังนั้น $\|F_1(x_n,y_n)-F_1(x,y)\|\to 0$ ขณะที่ $n\to\infty$ นั่นคือตัวดำเนินการ F_1 ต่อเนื่องและต่อเนื่องบริบูรณ์

ขั้นที่ 3 ตัวดำเนินการ F_2 เป็นตัวดำเนินการหดตัว สมารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกับ **ทฤษฎีบท 3.2**

ขั้นที่ 4 จะแสดงว่า (ii) ของ **ทฤษฎีบท 2.3** ไม่จริง โดยใช้การพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง เราจะสมมติให้ (ii) ของ **ทฤษฎีบท 2.3** เป็นจริง ดังนั้นจะมี $\theta\in(0,1)$ และ $(x,y)\in\partial\bar{K}_{r_0}$ ซึ่ง $(x,y)\in\theta F(x,y)$ ดังนั้นได้ว่า $\|(x,y)\|=r_0$ และ

$$\|x\|\le\|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Phi(p_1)+|\lambda_1|\Phi(0)\|x\|$$

และ
$$\|y\|\le\|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\Lambda(p_1)+|\lambda_1|\Lambda(0)\|y\|$$

ดังนั้น
$$\|x\|+\|y\|\le\|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\Lambda(p_1)+\Upsilon r_0$$

นั่นคือ
$$\frac{r_0}{\|z_1\|\left[\psi_1(r_0)+\psi_2(r_0)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r_0)+\omega_2(r_0)\right]\Lambda(q_1)}\le\frac{1}{1-\Upsilon}$$

ซึ่งขัดแย้งกับ (3.38) ดังนั้นจะได้ว่า F_1 และ F_2 สอดคล้องกับ **ทฤษฎีบท 2.3** ดังนั้นตัวดำเนินการ F มีจุดตรึง $(x,y)\in\bar{K}_{r_0}$ นั่นคือ (1.2) จะมีผลเฉลย บน $[0,T]$

❑

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ (3.35) และเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(H10) มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ $z_1\in C([0,T],\mathbb{R})$ และฟังก์ชันไม่เป็นลบ $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$

$$\left|f(t,u,v)\right|\le z_1(t)\psi_1\left(\|u\|+\|v\|\right) \text{ สำหรับทุก } (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$$

(H11) มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ $z_2\in C([0,T],\mathbb{R})$ และฟังก์ชันไม่เป็นลบ $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$

$$\left|g(t,u,v)\right|\le z_2(t)\omega\left(\|u\|+\|v\|\right) \text{ สำหรับทุก } (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$$

(H12) $$\sup_{r\in(0,\infty)}\frac{r}{\|z_1\|\psi(r)\Phi(p_1)+\|z_2\|\omega(r)\Lambda(q_1)}>\frac{1}{1-\Upsilon}$$

แล้ว (1.2) จะมีผลเฉลย บน $[0,T]$

พิสูจน์ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ **ทฤษฎีบท 3.3** ❑

3.2.3 ตัวอย่างของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

ในหัวข้อนี้เราจะยกตัวอย่างประกอบ **ทฤษฎีบท 3.2 -3.4**

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{1}{2}}\left({}^{RL}D^{\frac{3}{5}}+0.2\right)x(t)=\dfrac{t\sin 3t}{t+1}\dfrac{\arctan x(t)}{3|x(t)|+2}+\dfrac{2\cos t}{3t^2+2}\dfrac{\sin y(t)}{2|y(t)|+3}, \qquad 0<t<1, \\ {}^{RL}D^{\frac{2}{5}}\left({}^{RL}D^{\frac{4}{5}}+0.25\right)y(t)=\dfrac{3t^2}{4t+3}\dfrac{3x(t)}{5|x(t)|+1}+\dfrac{2y(t)+3}{3|y(t)|+4}, \qquad 0<t<1, \\ x(0)=0, \qquad x(0.6)=0.2\,{}^{\frac{1}{2}}I^{\frac{7}{10}}x(0.3)+0.3\,{}^{\frac{2}{5}}I^{\frac{3}{5}}x(0.6), \\ y(0)=0, \qquad y(0.2)=0.2\,{}^{\frac{3}{10}}I^{\frac{4}{5}}y(0.3)+0.3\,{}^{\frac{3}{5}}I^{\frac{2}{5}}y(0.7)+0.4\,{}^{\frac{2}{5}}I^{\frac{9}{10}}y(0.9). \end{cases} \tag{3.39}$$

จาก (3.39) ได้ว่า $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{3}{5}$, $q_1=\frac{2}{5}$, $q_2=\frac{4}{5}$, $\lambda_1=0.2$, $\lambda_2=0.25$, $\eta=0.6$, $\kappa=0.2$, $\alpha_1=0.2$, $\alpha_2=0.3$, $\beta_1=0.2$, $\beta_2=0.3$, $\beta_3=0.4$, $\mu_1=\frac{1}{2}$, $\mu_2=\frac{2}{5}$, $\gamma_1=\frac{7}{10}$, $\gamma_2=\frac{3}{5}$, $\delta_1=\frac{3}{10}$, $\delta_2=\frac{3}{5}$, $\delta_3=\frac{2}{5}$, $\phi_1=\frac{4}{5}$, $\phi_2=\frac{2}{5}$, $\phi_3=\frac{9}{10}$, $\xi_1=0.3$, $\xi_2=0.6$, $\zeta_1=0.3$, $\zeta_2=0.7$, $\zeta_3=0.9$, $T=1$, $f(t,x,y)=\dfrac{t\sin 3t}{t+1}\dfrac{\arctan x(t)}{3|x(t)|+2}+\dfrac{2\cos t}{3t^2+2}\dfrac{\sin y(t)}{2|y(t)|+3}$

และ $g(t,x,y)=\dfrac{3t^2}{4t+3}\dfrac{3x(t)}{5|x(t)|+1}+\dfrac{2y(t)+3}{3|y(t)|+4}$

จาก $f(t,x,y)\le\dfrac{t\sin 3t}{3t+3}+\dfrac{2\cos t}{6t^2+4}$ และ $g(t,x,y)\le\dfrac{9t^2}{20t+15}+\dfrac{2}{3}$ โดยการคำนวณจะได้

$$\Phi(0)=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{T^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[\frac{\eta^{u+p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{|\alpha_i|\xi_i^{p_2+\mu_i\gamma_i}}{\mu_i^{\gamma_i}\Gamma(p_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{p_2+\mu_i}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i}{\mu_i}\right)}\right)\right]+\frac{T^{u+p_2}}{\Gamma(p_2+1)}$$

$$\approx 4.318646369$$

$$\Lambda(0)=\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{T^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[\frac{\kappa^{q_2}}{\Gamma(q_2+1)}+\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{|\beta_j|\zeta_j^{q_2+\delta_j\varphi_j}}{\delta_j^{\varphi_j}\Gamma(q_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{q_2+\delta_j}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j}{\delta_j}\right)}\right)\right]+\frac{T^{u+q_2}}{\Gamma(q_2+1)}$$

$$\approx 3.234126953$$

ดังนั้น $\Upsilon\approx 0.8637292738<1$ ซึ่งสอดคล้องกับ **ทฤษฎีบท 3.2** ดังนั้น (3.39) จะมีผลเฉลย บน $[0,1]$ ❑

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{3}{10}}\left({}^{RL}D^{\frac{4}{5}}+0.25\right)x(t)=\dfrac{t}{15}\left(\dfrac{|x(t)|^2+2|x(t)|}{|x(t)|+4}+\dfrac{|y(t)|^2+2|y(t)|+2}{3|y(t)|+4}\right), 0<t<1, \\ {}^{RL}D^{\frac{2}{5}}\left({}^{RL}D^{\frac{9}{10}}+0.2\right)y(t)=\dfrac{t}{5}\left(\dfrac{|x(t)|^2+|x(t)|+1}{2|x(t)|+5}+\dfrac{|y(t)|^2+1}{|y(t)|+5}\right), \qquad 0<t<1, \\ x(0)=0, \qquad x(0.1)=1.5\,{}^{\frac{7}{10}}I^{\frac{1}{2}}x(0.6)+2\,{}^{\frac{3}{10}}I^{\frac{1}{5}}x(0.8)+2.5\,{}^{\frac{3}{5}}I^{\frac{3}{10}}x(0.9), \\ y(0)=0, \qquad y(0.8)=3\,{}^{\frac{7}{10}}I^{\frac{4}{5}}y(0.7)+2.5\,{}^{\frac{3}{10}}I^{\frac{9}{10}}y(0.8). \end{cases} \tag{3.40}$$

จาก (3.40) ได้ว่า $p_1=\frac{3}{10}$, $p_2=\frac{4}{5}$, $q_1=\frac{2}{5}$, $q_2=\frac{9}{10}$, $\lambda_1=0.25$, $\lambda_2=0.2$, $\eta=0.1$, $\kappa=0.8$, $\alpha_1=1.5$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=2.5$, $\beta_1=3$, $\beta_2=2.5$, $\mu_1=\frac{7}{10}$, $\mu_2=\frac{3}{10}$, $\mu_3=\frac{3}{5}$, $\gamma_1=\frac{1}{2}$, $\gamma_2=\frac{1}{5}$, $\gamma_3=\frac{3}{10}$, $\delta_1=\frac{7}{10}$, $\delta_2=\frac{3}{10}$, $\phi_1=\frac{4}{5}$, $\phi_2=\frac{9}{10}$, $\xi_1=0.6$, $\xi_2=0.8$, $\xi_3=0.9$, $\zeta_1=0.7$, $\zeta_2=0.8$, $T=1$, $f(t,x,y)=\frac{t}{15}\left(\frac{|x|^2+2|x|}{|x|+4}+\frac{|y|^2+2|y|+2}{3|y|+4}\right)$ และ $g(t,x,y)=\frac{t}{5}\left(\frac{|x|^2+|x|+1}{2|x|+5}+\frac{|y|^2+1}{|y|+5}\right)$ โดยการคำนวณจะได้

$$\Phi(0)=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{T^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[\frac{\eta^{u+p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{|\alpha_i|\xi_i^{p_2+\mu_i\gamma_i}}{\mu_i^{\gamma_i}\Gamma(p_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{p_2+\mu_i}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i}{\mu_i}\right)}\right)\right]+\frac{T^{u+p_2}}{\Gamma(p_2+1)}$$

$$\approx 1.892763483$$

และ

$$\Lambda(0)=\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{T^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[\frac{\kappa^{q_2}}{\Gamma(q_2+1)}+\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{|\beta_j|\zeta_j^{q_2+\delta_j\varphi_j}}{\delta_j^{\varphi_j}\Gamma(q_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{q_2+\delta_j}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j}{\delta_j}\right)}\right)\right]+\frac{T^{u+q_2}}{\Gamma(q_2+1)}$$

$$\approx 1.824427804$$

ดังนั้น $\Upsilon\approx 0.4731908708<1$ จาก

$$|f(t,x,y)|=\frac{t}{15}\left(\frac{|x(t)|^2+2|x(t)|}{4}+\frac{|y(t)|^2+2|y(t)|+2}{4}\right)$$

และ $\left|g(t,x,y)\right| = \frac{t}{5}\left(\frac{\left|x(t)\right|^2+\left|x(t)\right|+1}{5}+\frac{\left|y(t)\right|^2+1}{5}\right)$ เลือก $z_1(t)=\frac{t}{15}$, $\psi_1(x)=\frac{\left|x\right|^2+2\left|x\right|}{4}$,

$\psi_2(y)=\frac{\left|y\right|^2+2\left|y\right|+2}{4}$, $z_2(t)=\frac{t}{5}$, $\omega_1(x)=\frac{\left|x\right|^2+\left|x\right|+1}{5}$, $\omega_2(y)=\frac{\left|y\right|^2+1}{5}$ จะได้ว่า

$$\sup_{r\in(0,\infty)}\frac{r}{\|z_1\|\left[\psi_1(r)+\psi_2(r)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r)+\omega_2(r)\right]\Lambda(q_1)}$$

$$\approx 2.080080186 > 1.898220711 \approx \frac{1}{1-\Upsilon}$$

ดังนั้นจาก **ทฤษฎีบท 3.3** ดังนั้น (3.40) จะมีผลเฉลย บน $[0,1]$

❑

ตัวอย่าง 3.4 พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{4}{5}}\left({}^{RL}D^{\frac{9}{10}}+0.3\right)x(t)=\frac{t}{5}\left(\frac{2\left|x(t)+y(t)\right|^3+2\left|x(t)\right|+\left|y(t)\right|}{3\left|x(t)\right|+4}\right), 0<t<\frac{2}{3}, \\ {}^{RL}D^{\frac{3}{10}}\left({}^{RL}D^{\frac{9}{10}}+0.35\right)y(t)=\frac{t}{3}\left(\frac{\left|x(t)+y(t)\right|^2+1}{\left|x(t)\right|+2\left|y(t)\right|+3}\right), \qquad 0<t<\frac{2}{3}, \\ x(0)=0, \qquad x(0.6)=0.4\,{}^{\frac{2}{5}}I^{\frac{7}{10}}x(0.2)+0.4\,{}^{\frac{4}{5}}I^{\frac{2}{5}}x(0.6), \\ y(0)=0, \qquad y(0.3)=0.8\,{}^{\frac{4}{5}}I^{\frac{4}{5}}y(0.2)+0.7\,{}^{\frac{1}{5}}I^{\frac{9}{10}}y(0.5)+0.8\,{}^{\frac{7}{10}}I^{\frac{7}{10}}y(0.6). \end{cases} \tag{3.41}$$

จาก (3.41) ได้ว่า $p_1=\frac{4}{5}$, $p_2=\frac{9}{10}$, $q_1=\frac{3}{10}$, $q_2=\frac{9}{10}$, $\lambda_1=0.3$, $\lambda_2=0.35$, $\eta=0.6$, $\kappa=0.3$, $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.4$, $\beta_1=0.8$, $\beta_2=0.7$, $\beta_3=0.8$, $\mu_1=\frac{2}{5}$, $\mu_2=\frac{4}{5}$, $\gamma_1=\frac{7}{10}$, $\gamma_2=\frac{2}{5}$, $\delta_1=\frac{4}{5}$, $\delta_2=\frac{1}{5}$, $\delta_3=\frac{7}{10}$, $\phi_1=\frac{4}{5}$, $\phi_2=\frac{9}{10}$, $\phi_3=\frac{7}{10}$, $\xi_1=0.2$, $\xi_2=0.6$, $\zeta_1=0.2$, $\zeta_2=0.5$, $\zeta_3=0.6$, $T=1$, $f(t,x,y)=\frac{t}{5}\left(\frac{2\left|x(t)+y(t)\right|^3+2\left|x(t)\right|+\left|y(t)\right|}{3\left|x(t)\right|+4}\right)$

และ $g(t,x,y)=\frac{t}{3}\left(\frac{\left|x(t)+y(t)\right|^2+1}{\left|x(t)\right|+2\left|y(t)\right|+3}\right)$

โดยการคำนวณจะได้

$$\Phi(0)=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+p_2)}\frac{T^{p_1+p_2-1}}{|\Omega|}\left[\frac{\eta^{u+p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{|\alpha_i|\xi_i^{p_2+\mu_i\gamma_i}}{\mu_i^{\gamma_i}\Gamma(p_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{p_2+\mu_i}{\mu_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_2+\mu_i\gamma_i+\mu_i}{\mu_i}\right)}\right)\right]+\frac{T^{u+p_2}}{\Gamma(p_2+1)}$$

$$\approx 2.401980728,$$

และ

$$\Lambda(0)=\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}\frac{T^{q_1+q_2-1}}{|\Psi|}\left[\frac{\kappa^{q_2}}{\Gamma(q_2+1)}+\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{|\beta_j|\zeta_j^{q_2+\delta_j\varphi_j}}{\delta_j^{\varphi_j}\Gamma(q_2+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{q_2+\delta_j}{\delta_j}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_2+\delta_j\varphi_j+\delta_j}{\delta_j}\right)}\right)\right]+\frac{T^{u+q_2}}{\Gamma(q_2+1)}$$

$$\approx 1.42748162$$

ดังนั้น $\Upsilon \approx 0.7205942184 < 1$ จาก $|f(t,x,y)| \le \frac{t}{5}\left(\frac{|x(t)+y(t)|^3+|x(t)|+|y(t)|}{2}\right)$

และ $|g(t,x,y)| = \frac{t}{3}\left(\frac{|x(t)+y(t)|^2+1}{3}\right)$ เลือก $z_1(t)=\frac{t}{10}$,

$\psi(x+y)=|x(t)+y(t)|^3+|x(t)|+|y(t)|$, , $z_2(t)=\frac{t}{9}$, $\omega(x)=|x(t)+y(t)|^2+1$, จะได้ว่า

$$\sup_{r\in(0,\infty)}\frac{r}{\|z_1\|\psi(r)\Phi(p_1)+\|z_2\|\omega(r)\Lambda(q_1)}\approx 3.980031158 > 3.579024007 \approx \frac{1}{1-\Upsilon}$$

ดังนั้นจาก **ทฤษฎีบท 3.4** ดังนั้น (3.41) จะมีผลเฉลย บน $\left[0,\frac{2}{3}\right]$

❑

บทที่ 4
บทสรุป

4.1 สรุปผลการวิจัย

จากการนำวิธีทำซ้ำทางเดียวมาใช้ในการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ในรูป

$$\begin{cases} D_{t_k}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(\theta(t))), & t \in J^-, \\ \Delta x(t_k) = I_k\left(x(t_k)\right), & k = 1, 2, \ldots, m \\ x(0) = \lambda x(T). \end{cases} \tag{1.1}$$

โดยใช้นิยามของผลเฉลยล่าง ผลเฉลยบน จากนิยาม 3.1 , 3.2 และสูตรการทำซ้ำ (3.3) ซึ่งได้เงื่อนไขเพียงพอของการมีอยู่จริงของผลเฉลยสุดขีดของปัญหาค่าขอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ ดังนี้

(H1) $\mu_0, \upsilon_0 \in PC$ เป็นผลเฉลยล่างและผลเฉลยบนของ (1.1) โดยที่ $\mu_0 \le \upsilon_0$ บน J

(H2) ฟังก์ชัน $f \in C\left(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ สอดคล้องกับ

$$f\left(t, u, v\right) - f\left(t, \bar{u}, \bar{v}\right) \ge -M\left(u - \bar{u}\right) - N\left(v - \bar{v}\right)$$

สำหรับ $\mu_0(t) \le \bar{u}(t) \le u(t) \le \upsilon_0(t)$, $\alpha_0(\theta(t)) \le v(t) \le \bar{v}(t) \le \beta_0(\theta(t))$, $t \in J$

(H3) ฟังก์ชัน $I_k \in C\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, m$ สอดคล้องกับ

$$I_k\left(u(t_k)\right) - I_k\left(v(t_k)\right) \ge -L_k\left[u(t_k) - v(t_k)\right]$$

สำหรับ $\mu_0(t_k) \le v(t_k) \le u(t_k) \le \upsilon_0(t_k)$, $L_k \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$

(H4) อสมการ (3.12), (3.14) เป็นจริง

นอกจากนี้ยังศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบในรูปปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา ในรูป

$$\begin{aligned} &{}^{RL}D^{p_1}({}^{RL}D^{p_2} + \lambda_1)x(t) = f(t, x(t), y(t)), && 0 < t < T, \\ &{}^{RL}D^{q_1}({}^{RL}D^{q_2} + \lambda_2)y(t) = g(t, x(t), y(t)), && 0 < t < T, \\ &x(0) = 0, \qquad x(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, {}^{\mu_i}I^{\gamma_i} x(\xi_i), \\ &y(0) = 0, \qquad y(\kappa) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \, {}^{\delta_j}I^{\varphi_j} y(\zeta_j), \end{aligned} \tag{1.2}$$

ซึ่งจากการใช้ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิได้เงื่อนไขเพียงพอ ดังนี้

(H5) $\left|f(t,u,v)\right| \le \psi(t)$ สำหรับ $\forall(t,u,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$ และ $\psi \in C\left([0,T],\mathbb{R}^+\right)$

(H6) $\left|g(t,u,v)\right| \le \omega(t)$ สำหรับ $\forall(t,u,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$ และ $\omega \in C\left([0,T],\mathbb{R}^+\right)$

และ $$\Upsilon = \max\left\{|\lambda_1|\Phi(0),|\lambda_2|\Lambda(0)\right\} < 1$$

นอกจากนี้ยังใช้ทฤษฎีจุดตรึงของอริแกนได้เงื่อนไขเพียงพอ ดังนี้

(H7) มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ $z_1 \in C\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ และฟังก์ชันไม่เป็นลบ $\psi_1,\psi_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$\left|f(t,u,v)\right| \le z_1(t)\left[\psi_1\left(\|u\|\right)+\psi_2\left(\|v\|\right)\right] \text{ สำหรับทุก } (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$$

(H8) มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ $z_2 \in C\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ และฟังก์ชันไม่เป็นลบ $\omega_1,\omega_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$\left|g(t,u,v)\right| \le z_2(t)\left[\omega_1\left(\|u\|\right)+\omega_2\left(\|v\|\right)\right] \text{ สำหรับทุก } (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$$

(H9) $$\sup_{r\in(0,\infty)} \frac{r}{\|z_1\|\left[\psi_1(r)+\psi_2(r)\right]\Phi(p_1)+\|z_2\|\left[\omega_1(r)+\omega_2(r)\right]\Lambda(q_1)} > \frac{1}{1-\Upsilon}$$

4.2 อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นเพียงการนำวิธีทำซ้ำทางเดียวมาใช้ในการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ (1.1) เท่านั้น ดังนั้นจึงมีสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยเงื่อนไขขอบอื่นๆ ซึ่งผู้สนใจสามารถนำวิธีทำซ้ำทางเดียวมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาเหล่านั้นได้ และนอกจากจะได้เงื่อนไขเพียงของการมีอยู่จริงของผลเฉลยแล้วยังพบว่าเรายังสามารถนำสูตรการทำซ้ำ (3.3) มาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณได้อีกด้วย ดังนั้นวิธีการนี้จึงเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจในการพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลย

ในการใช้ทฤษฎีจุดตรึงของคาเซโนเซลสกิและทฤษฎีจุดตรึงของอริแกนศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบในรูปปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา (1.2) พบว่าทฤษฎีจุดตรึงที่แตกต่างกันทำให้เราได้เงื่อนไขเพียงพอที่แตกต่างกันดังนั้นเราจึงสามารถนำทฤษฎีจุดตรึงอื่นๆ มาศึกษากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงนี้หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงอื่นๆ ได้อีกด้วย

บทที่ 5
ผลผลิต

5.1 การตีพิมพ์ผลงานในวารสารวิชาการ

1. Chatthai Thaiprayoon, Sotiris K. Ntouyas, and Jessada Tariboon. Monotone iterative technique for nonlinear impulsive conformable. Communications in Mathematics and Applications. (อยู่ระหว่างกระบวนการตีพิมพ์)
2. Chatthai Thaiprayoon, Sotiris K. Ntouyas, and Jessada Tariboon. On systems of fractional Langevin equations of Riemann-Liouville type with generalized nonlocal fractional integral boundary conditions. Journal of Computational Analysis and Applications. (อยู่ระหว่างกระบวนการตีพิมพ์)

5.2 การจดสิทธิบัตร

ไม่มี

5.3 ผลงานเชิงพาณิชย์

ไม่มี

5.4 ผลงานเชิงสาธารณะ

เป็นองค์ความรู้ใหม่ทางด้านทฤษฎีการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอิมพัลส์ และทฤษฎีการมีอยู่จริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ ลียูวิลล์ร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบในรูปปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาทูกัมโปลา ซึ่งเป็นองค์ความรู้ที่จะใช้ในการศึกษาแคลคูลัสเชิงเศษส่วนต่อไป

บรรณานุกรม

Zeidler, E. (1995). Applied Functional Analysis Applications to Mathematical Physics. Springer-Verag; New York.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego.

Coster, C.D. & Habets, P. (2006). Two-point Boundary Value Problem : Lower and upper solution, Elsevier; Netherlands.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., & Trujillo, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Diffrential Equations.* North-Holland Mathematics Studies. 204. Elsevier Science B.V.: Amsterdam.

Sabatier, J., Agrawal, O.P., & Machado, J.A.T. (2007). *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, Dordrecht.

Ahmad, B., Ntouyas, S. K. & Alsaedi, A. (2011). New existence results for nonlinear fractional differential equations with three-point integral boundary conditions. *Advance Difference Equations,* Art. ID 107384, 11pp.

Alsaedi, A., Ntouyas, S.K., Agarwal, R.P., & Ahmad, B. (2015). On Caputo type sequential fractionalm differential equations with nonlocal integral boundary conditions. *Advance Difference Equations,* 2015:33.

Ahmad, B., Ntouyas, S.K., & Tariboon, J. (2016). Fractional differential equations with nonlocal integral and integer-fractional-order Neumann type boundary conditions. *Mediterr. J. Math*, 5(13), 2365-2381.

Bai, Z.B., & Sun, W. (2012). Existence and multiplicity of positive solutions for singular fractional boundary value problems. *Comput. Math. Appl.*, 63(2012), 1369-1381.

Su, Y., & Feng, Z. (2012). Existence theory for an arbitrary order fractional differential equation with deviating argument. *Acta Appl. Math.*, 118(2012), 81-105.

Ahmad, B., & Ntouyas, S.K. (2016). Existence results for Caputo type sequential fractional differential inclusions with nonlocal integral boundary conditions. *J. Appl. Math. Comput.*, 50(2016), 157-174.

Alsaedi, A., Ntouyas, S.K., & Ahmad, B. (2015). New existence results for fractional integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions. *Abstr. Appl. Anal.*, Volume 2015, Article ID 205452, 10 pages.

Ntouyas, S.K., Etemad, S., & Tariboon, J. (2015). Existence of solutions for fractional differential inclusions with integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, (2015) 2015:92.

Ahmad, B., & Ntouyas, S.K. (2016). Some fractional-order one-dimensional semi-linear problems under nonlocal integral boundary conditions. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fyss. Nat. Ser.A-Mat*., 110(2016), 159-172.

Graef, J.R., Kong, L., & Wang, M. (2014). Existence and uniqueness of solutions for a fractional boundary value problem on a graph. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17(2014), 499-510.

Tariboon, J., Ntouyas, S.K., & Thiramanus, P. (2016). Riemann-Liouville fractional differential equations with Hadamard fractional integral conditions. *Inter. J. Appl. Math. Stat.*, 54(2016), 119-134.

Ahmad, B., & Agarwal, R.P. (2014). Some new versions of fractional boundary value problems with slit-strips conditions. *Bound. Value Probl.* (2014), 2014:175.

Tariboon, J., Ntouyas, S.K., & Sudsutad, W. (2014). Fractional integral problems for fractional differential equations via Caputo derivative. *Adv. Difference Equ.*, (2014), 2014:181.

Ntouyas, S.K., Tariboon, J., & Thaiprayoon, C. (2016). Nonlocal boundary value problems for Riemann-Liouville fractional differential inclusions with Hadamard fractional integral boundary conditions. *Taiwanese J. Math.*, 20(2016), 91-107.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.*, 264(2014), 65-70.

Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math*., 279 (2015), 57-66.

Anderson, D., & Ulness, D. (2015). Newly defined conformable derivatives. *Adv. Dyn. Syst. Appl.* 10(2015), 109-137.

Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J.J., & Shammakh, W. (2015). Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations. *J. Func. Spaces*, Volume 2015, Article ID 706383, 6 pages.

Abdeljawad, T., Al Horani, M., & Khalil, R. (2015). Conformable fractional semigroups of operators. *J. Semigroup Theory Appl.*, Vol 2015, Article ID 7.

Abu Hammad, I., & Khalil, R. (2014). Fractional Fourier series with applications, Amer. *J. Comput. Appl. Math.*, 4(2014), 187-191.

Abu Hammad, M., & Khalil, R. (2014). Abels formula and Wronskian for conformable fractional differential equations. *Internat. J. Diff. Equ. Appl.*, 13(2014), 177-183.

Asawasamrit, S., Ntouyas, S.N., Thiramanus, P., & Tariboon, J. (2016) Periodic boundary value problems for impulsive conformable fractional integro-differential equations. *Bound. Value Probl.*, (2016) 2016:122.

Ladde, G.S., Lakshmikantham, V., & Vatsala, A.S. (1985). *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*. Pitman:Boston.

Lakshmikantham, V., & Vatsala, A.S. (2008). General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations. *Appl. Math. Lett.*, 21(2008), 828-834.

Mu, J., & Li, Y. (2011). Monotone iterative technique for impulsive fractional evolution equations. *J. Inequal. Appl.*, (2011) 2011:125.

Cao, J., & Chen, H. (2012). Impulsive fractional differential equations with nonlinear boundary conditions. *Math. Comput. Modelling*, 55(2012), 303-311.

Zhang, L., & Liang, Y. (2015). Monotone iterative technique for impulsive fractional evolution equations with noncompact semigroup. *Adv. Difference Equ.*, (2015) 2015:324.

Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-verlag Berlin:Heidelberg.

Agarwal, R.P., Zhou, Y., & He, Y. (2010). Existence of fractional neutral functional differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 59(2010), 1095-1100.

Ahmad, B., Ntouyas, S.K., & Tariboon, J. (2015) Existence results for mixed Hadamard and Riemann-Liouville fractional integro-differential equations. *Adv. Difference Equ.*, 2015:293.

Ahmad, B., & Nieto, J.J. (2011). Riemann-Liouville fractional integro-differential equations with fractional nonlocal integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, 2011:36.

Ahmad, B., Ntouyas, S.K. & Alsaedi, A. (2013). A study of nonlinear fractional differential equations of arbitrary order with Riemann-Liouville type multistrip boundary conditions. *Math. Probl. Eng.*, 2013, Art. ID 320415, 9 pp.

Ahmad, B. & Nieto, J.J. (2013). Boundary value problems for a class of sequential integro-differential equations of fractional order. *J. Funct. Spaces Appl.*, 2013, Art. ID 149659, 8 pp.

Zhang, L., Ahmad, B., Wang, G. & Agarwal, R.P. (2013). Nonlinear fractional integro-differential equations on unbounded domains in a Banach space. *J. Comput. Appl. Math.*, 249(2013), 51–56.

Liu, X., Jia, M., & Ge, W. (2013). Multiple solutions of a p-Laplacian model involving a fractional derivative. *Adv. Difference Equ.*, 2013:126.

Katugampola, U.N. (2015) New Approach to a generalized fractional integral. *Appl. Math. Comput.*, 218(2015), 860-865.

Katugampola, U.N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 6(2014), 1-15.

Malinowska, A.B., Odzijewicz, T., & Torres, D.F.M. (2015). *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations*. Springer. 2015.

Thaiprayoon, C., Ntouyas, S.K., & Tariboon, J. (2015). On the nonlocal Katugampola fractional integral conditions for fractional Langevin equation. *Adv. Difference Equ.*, 2015:374.

Ntouyas, S.K., & Tariboon, J. (2018) Langevin fractional differential inclusions with nonlocal Katugampola fractional integral boundary conditions. *J. Comput. Appl. Anal.*, 24(2), 228-242.

Coffey, W.T., Kalmykov, Yu.P., & Waldron, J.T. (2004). *The Langevin Equation*. second ed. World Scientific. Singapore.

Lim, S.C., Li, M., & Teo, L.P., (2008). Langevin equation with two fractional orders. *Phys. Lett. A*, 372 (2008), 6309-6320.

Lim, S.C., & Teo, L.P. (2009). The fractional oscillator process with two indices, *J. Physics A: Math. Theor.*, 42 (34). Art. ID 065208.

Uranagase, M., & Munakata, T. (2010). Generalized Langevin equation revisited: mechanical random force and self-consistent structure. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43(11), Art.ID 455003.

Denisov, S.I., Kantz, H., & Hanggi, P. (2010). Langevin equation with super-heavy-tailed noise. *J. Phys. A:Math. Theor.*, 43(10), Art. ID 285004.

Lozinski, A., Owens, R.G., & Phillips, T.N. (2011). The Langevin and Fokker-Planck Equations in Polymer Rheology. *Handbook of Numerical Analysis*, 16 (C), 211-303.

Tariboon, J., Ntouyas, S.K., & Thaiprayoon, C. (2014). Nonlinear Langevin equation of Hadamard-Caputo type fractional derivatives with nonlocal fractional integral conditions. *Adv. Math. Phys.*, Volume 2014, Article ID 372749, 15 pages.

Alsaedi, A., Ntouyas, S.K., & Ahmad, B. (2013). Existence results for Langevin fractional differential inclusions involving two fractional orders with four-point multi-term fractional integral boundary conditions. *Abstr. Appl. Anal.*, Volume 2013, Article ID 869837, 17 pages

Tariboon, J., Ntouyas, S.K., & Thaiprayoon, C. (2014). Nonlinear Langevin equation of Hadamard-Caputo type fractional derivatives with nonlocal fractional integral conditions. *Adv. Math. Phys.*, Volume 2014, Article ID 372749, 15 pages.

Yukunthorn, W., Ntouyas, S.K., & Tariboon, J. (2014). Nonlinear fractional Caputo-Langevin equation with nonlocal Riemann-Liouville fractional integral conditions. *Adv. Difference Equ.*, 2014:315.

Sudsutad, W., Ntouyas, S.K., & Tariboon, J. (2015). Systems of fractional Langevin equation via Riemann-Liouville and Hadamard types and their fractional integral conditions. *Adv. Difference Equ.* 2015:235.

Krasnoselskii, M.A. (1955). Two remarks on the method of successive approximations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 10(1955), 123-127.

O'Regan, D. (1996). Fixed-point theory for the sum of two operators. *Appl. Math. Lett.*, 9(1996), 1-8.

Petryshyn, W.V., & Fitzpatric, P. M. (1974). A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 194(1974), 1-25.