การแจกแจงทวินามทั่วไปและความสัมพันธ์กับการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง

A Generalized Binomial Distribution and Relation with the Binomial and Poisson Distributions

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

Kanint Teerapabolarn*

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เรานำเสนอการแจกแจงทวินามทั่วไปที่ครอบคลุมการแจกแจงวิยุตที่สำคัญสามการแจกแจง คือ การแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา นอกจากนี้เราได้อภิปรายความสัมพันธ์ของการแจกแจงทวินามทั่วไปกับการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง ซึ่งนำไปสู่ผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง

คำสำคัญ : การแจกแจงทวินามทั่วไป การแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก การแจกแจงโพลยา การแจกแจงปัวซง

Abstract

In this article, we present a generalized binomial distribution that includes three important discrete distributions namely the binomial, hypergeometric and Polya distributions. Furthermore, we discuss its relation with the binomial and Poisson distributions, which lead to the results of binomial and Poisson approximations to generalized binomial distribution.

Keywords : a generalized binomial distribution, binomial distribution, hypergeometric distribution, Polya distribution, Poisson distribution.

***E-mail:** kanint@buu.ac.th

บทนำ

ในการศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงของตัวแปรสุ่มวิยุต (discrete variable) เราพบได้เสมอว่าเนื้อหาของการแจกแจงของแต่ละตัวแปรสุ่มจะแบ่งเป็นหัวข้อย่อยตามภูมิหลัง (back ground) ของแต่ละการแจกแจง เช่น การแจกแจงทวินาม (binomial distribution) การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก (hypergeometric distribution) การแจกแจงทวินามนิเสธ (negative binomial distribution) การแจกแจงปัวซง (Poisson distribution) และการแจกแจงโพลยา (Polya distribution) เป็นต้น โดยทั่วไปในการสอนการแจกแจงเหล่านี้ผู้สอนจะกล่าวถึงการแจกแจงต่างๆ แยกกันเป็นแต่ละหัวข้อย่อย โดยเฉพาะในเรื่องของการแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา จากการศึกษาบทความของ Dwass (1979) เราพบว่าทั้งสามการแจกแจงข้างต้นสามารถนำมารวมอยู่ในการแจกแจงเดียวได้ และ Dwass (1979) ได้เรียกการแจกแจงนี้ว่า ***การแจกแจงทวินามทั่วไป*** (a generalized binomial distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงที่ได้มาโดยอาศัยพื้นฐานของการแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา ดังนั้นการศึกษาการแจกแจงทวินามทั่วไปจะช่วยให้เราเข้าใจภูมิหลังของการแจกแจงอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องได้

สำหรับเนื้อหาที่จะนำเสนอต่อไปมีดังนี้ ในหัวข้อที่สอง (การแจกแจงทวินามทั่วไป) เป็นเรื่องของภูมิหลังของการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงที่เกี่ยวข้อง หัวข้อที่สาม (ความสัมพันธ์กับการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการลู่เข้าของการแจกแจงทวินามทั่วไปที่จะนำไปสู่การแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง หัวข้อที่สี่ (การประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง) เป็นเรื่องสืบเนื่องมาจากหัวข้อที่สาม ซึ่งเกี่ยวข้องกับการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง พร้อมด้วยการแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่ได้ด้วยตัวอย่างเชิงตัวเลข และหัวข้อสุดท้าย คือ บทสรุปของเนื้อหาในบทความนี้

การแจกแจงทวินามทั่วไป

สมมติว่าประชากรชุดหนึ่งประกอบด้วยสมาชิกสองประเภทที่แตกต่างกัน คือ ประเภท I และ ประเภท II กำหนดให้ A และ B แทนปริมาณเริ่มต้นของสมาชิกประเภทที่ I และ II ตามลำดับ (A และ B ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็ม) สมมติว่าเราสามารถสุ่มหยิบตัวอย่างจากประชากรชุดนี้ โดยผลลัพธ์ที่ได้จะต้องเป็นสมาชิกประเภท I หรือ II (อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น) ด้วยความน่าจะเป็นที่เป็นสัดส่วนกับปริมาณที่เหลือของสมาชิกแต่ละประเภท และแต่ละครั้งของการสุ่มเราจะนำสมาชิกในปริมาณ α ที่เป็นประเภทเดียวกับสมาชิกที่สุ่มได้ออกจากประชากรที่มีอยู่ในขณะนั้น กรณีที่ α เป็นลบหรือน้อยกว่าศูนย์เราหมายความว่าให้เพิ่มสมาชิกในปริมาณ $-\alpha$ เข้าไปในประชากร ตัวอย่างเช่น เมื่อเริ่มต้นเราสามารถสุ่มหยิบสมาชิกประเภท I หรือ II ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{A}{A+B}$ หรือ $\frac{B}{A+B}$ ถ้าผลลัพธ์ที่สุ่มได้ คือสมาชิกประเภท I แล้วปริมาณสมาชิกทั้งหมดในประชากรจะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็น $A+B-\alpha$ โดยปริมาณสมาชิกประเภท I จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็น $A-\alpha$ ส่วนปริมาณสมาชิกประเภท II จะมีค่าเท่าเดิมเป็น B และความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) ของการสุ่มหยิบสมาชิกประเภท I และ II ในการสุ่มครั้งต่อไปจะมีค่าเท่ากับ $\frac{A-\alpha}{A+B-\alpha}$ และ $\frac{B}{A+B-\alpha}$ ตามลำดับ กระบวนการทดลองนี้จะสิ้นสุดเมื่อเราสุ่มหยิบตัวอย่างในทำนองเดียวกันนี้ครบจำนวน n ครั้ง (n เป็นจำนวนเต็มบวก) ให้ X แทนจำนวนครั้งที่สุ่มได้สมาชิกประเภท I ดังนั้นโดยใช้คุณสมบัติที่ว่าผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกค่าของตัวแปรสุ่ม X ต้องเท่ากับหนึ่ง และใช้เอกลักษณ์ที่รู้จักกันเป็นอย่างดี คือ

$(x+y)^{(n)} = \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$ เมื่อ $x^{(i)} = x(x-\alpha)\cdots\cdot(x-(i-1)\alpha)$ เราจึงสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ได้เป็น

$$p(k) = \binom{n}{k}\frac{A^{(k)}B^{(n-k)}}{(A+B)^{(n)}} \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

$$= \binom{n}{k} \times \frac{A(A-\alpha)\cdots(A-(k-1)\alpha)B(B-\alpha)\cdots(B-(n-k-1)\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)\cdots(A+B-(n-1)\alpha)}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0, 1, \ldots, n \tag{2}$$

การแจกแจงที่เขียนอยู่ในรูปของสมการ (1) หรือ (2) คือ การแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n และเราจะเรียกตัวแปรสุ่ม X ว่าตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป โดยมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X เป็น $\mu = \frac{nA}{A+B}$ และ $\sigma^2 = \frac{nAB(A+B-n\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)}$ ตามลำดับ (สามารถหาได้ง่ายๆ โดยใช้วิธีเดียวกับการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มทวินาม) เราจะสังเกตได้ว่าการแจกแจงนี้ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ทั้ง 4 ตัว คือ A, B, α และ n โดยที่ A และ B เป็นจำนวนจริงบวก n เป็นจำนวนเต็มบวก และ α เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขหรือข้อจำกัดที่ว่า $\alpha(n\text{-}1) \le A+B$ และ $A^{(i)}$ และ $B^{(i)}$ จะต้องไม่เป็นจำนวนลบสำหรับ i = 1,..., n และในกรณีที่ $\alpha \neq 0$ ค่าความน่าจะเป็น $p(k)$ ในสมการ (1) และ (2) จะกำหนดโดย $\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\alpha}$ และ n นอกจากนี้เราพบว่าฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในรูปแบบ (2) จะคล้ายกับฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบ Pólya urn ใน John *et al.* (2005)

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นดังสมการ (1) เป็นการแจกแจงที่ครอบคลุมการแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา ต่อไปเราจะนำเสนอว่าการแจกแจงทวินามทั่วไปครอบคลุมการแจกแจงเหล่านี้อย่างไร โดยการพิจารณาจากค่าของ α ดังนี้

2.1 ถ้า $\alpha = 0$ การแจกแจงทวินามทั่วไปจะเป็นการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ $\frac{A}{A+B}$ ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$p(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{A}{A+B}\right)^k \left(\frac{B}{A+B}\right)^{n-k} \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

2.2 ถ้า $\alpha > 0$ การแจกแจงทวินามทั่วไปจะเป็นการแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริกทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n และในกรณีที่ $\frac{A}{\alpha}$ และ $\frac{B}{\alpha}$ เป็นจำนวนเต็ม การแจกแจงนี้ คือการแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริกดั้งเดิมที่เราเคยศึกษาหรือได้รับรู้มาก่อน ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$p(k) = \frac{\binom{A/\alpha}{k}\binom{B/\alpha}{n-k}}{\binom{A/\alpha + B/\alpha}{n}} \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, \ldots, \min\left\{n, A/\alpha\right\} \tag{4}$$

2.3 ถ้า $\alpha < 0$ การแจกแจงทวินามทั่วไปจะเป็นการแจกแจงโพลยาที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n โดยเราสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของสมการ (1) ในอีกรูปแบบหนึ่งได้เป็น

$$p(k) = \frac{\binom{-A/\alpha + k - 1}{k}\binom{-B/\alpha + n - k - 1}{n-k}}{\binom{-A/\alpha - B/\alpha + n - 1}{n}}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0, 1, \ldots, n \tag{5}$$

และเมื่อ α = -1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังสมการ (5) จะเหมือนกับฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามบีตา (beta-binomial distribution) ที่มีพารามิเตอร์ A, B และ n ถ้า A, B, -α และ n เป็นจำนวนเต็มบวกฟังก์ชันความน่าจะเป็นนี้จะเหมือนกับฟังก์ชันน่าจะเป็นใน Brown และ Phillips (1999) และในกรณีที่ A, B และ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ α = -1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นนี้จะเหมือนกับฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จิออเมตริกนิเสธ (negative hypergeometric distribution)

ความสัมพันธ์กับการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง

ความสัมพันธ์ของการแจกแจงทวินามทั่วไปกับการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซงที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการลู่เข้าของการแจกแจงทวินามทั่วไปที่จะนำไปสู่การแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง

3.1 การลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินาม

พิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังสมการ (2) เราจะได้ว่า

$$p(k)=\binom{n}{k}\frac{\left[A(A-\alpha)\cdots(A-(k-1)\alpha)\right]\left[B(B-\alpha)\cdots(B-(n-k-1)\alpha)\right]}{(A+B)(A+B-\alpha)\mathrm{L}\ \ (A+B-(n-1)\alpha)}$$

$$=\binom{n}{k}\frac{\left[\frac{A}{A+B}\frac{(A-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(A-(k-1)\alpha)}{A+B}\right]\left[\frac{B}{A+B}\frac{(B-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(B-(n-k-1)\alpha)}{A+B}\right]}{\frac{(A+B)}{A+B}\frac{(A+B-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(A+B-(n-1)\alpha)}{A+B}} \tag{6}$$

จากสมการ (6) เราสังเกตได้ว่าถ้า $A+B\to\infty$ และ $\frac{A}{A+B}$ ลู่เข้าสู่เป็นค่าคงตัว p แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p นั่นคือ

$$p(k)=\binom{n}{k}\frac{A^{(k)}B^{(n-k)}}{(A+B)^{(n)}}\to\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

สำหรับทุก k = 0, 1,...,n และทุกจำนวนจริง α ดังนั้นทั้งการแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริกและการแจกแจงโพลยาจะลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินามด้วยเงื่อนไขในลักษณะเดียวกับการแจกแจงทวินามทั่วไป

3.2 การลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซง

พิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นในสมการ (6) เราจะได้ว่า

$$p(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\left[\frac{A}{A+B}\frac{(A-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(A-(k-1)\alpha)}{A+B}\right]\left[\frac{B}{A+B}\frac{(B-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(B-(n-k-1)\alpha)}{A+B}\right]}{\frac{(A+B)}{A+B}\frac{(A+B-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(A+B-(n-1)\alpha)}{A+B}}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\left[\frac{A}{A+B}\frac{(A-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(A-(k-1)\alpha)}{A+B}\right]\left[\frac{B}{A+B}\frac{(B-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(B-(n-k-1)\alpha)}{A+B}\right]}{\frac{(A+B)}{A+B}\frac{(A+B-\alpha)}{A+B}\cdots\frac{(A+B-(n-1)\alpha)}{A+B}} \tag{7}$$

จากสมการ (7) เมื่อ $A+B\to\infty$ โดยที่ $\frac{A}{A+B}$ เป็นค่าคงตัว แล้วเราจะได้ว่า

$$p(k)=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{A}{A+B}\right)^{k}\left(\frac{B}{A+B}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}}{k!}\left(\frac{nA}{A+B}\right)^{k}\left(1-\frac{A}{A+B}\right)^{n-k}$$

$$=\left(1-\frac{A}{A+B}\right)^{n}\frac{\left(\frac{nA}{A+B}\right)^{k}}{k!}\left[\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}\right]\left(1-\frac{A}{A+B}\right)^{-k} \tag{8}$$

จากสมการ (8) เมื่อ $n \to \infty$ และ $\dfrac{A}{A+B} \to 0$ โดยที่ $\dfrac{nA}{A+B}$ เป็นค่าคงตัวที่มีค่าจำกัด เราจะได้

$$p(k) \to e^{-nA/(A+B)} \frac{\left(\dfrac{nA}{A+B}\right)^k}{k!}$$

ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ ถ้า $A+B \to \infty, n \to \infty, \dfrac{A}{A+B} \to 0$ และ $\lambda = \dfrac{nA}{A+B}$ เป็นค่าคงตัวที่มีค่าจำกัด แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = \dfrac{nA}{A+B}$ นั่นคือ

$$p(k) = \binom{n}{k} \frac{A^{(k)} B^{(n-k)}}{(A+B)^{(n)}} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

สำหรับทุก k = 0, 1,..., n และทุกจำนวนจริง α และเมื่อกำหนดเงื่อนไขในลักษณะเดียวกับการแจกแจงทวินามทั่วไป แล้วทั้งสามการแจกแจง คือ การแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซงได้เช่นเดียวกัน

การประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราทราบว่าถ้า $A+B \to \infty$ และ $\dfrac{A}{A+B}$ ลู่เข้าสู่เป็นค่าคงตัว p แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p และในกรณีที่ $A+B \to \infty, n \to \infty,$ $\dfrac{A}{A+B} \to 0$ และ $\lambda = \dfrac{nA}{A+B}$ เป็นค่าคงตัวที่มีค่าจำกัด แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = \dfrac{nA}{A+B}$ ซึ่งแสดงว่าการแจกแจงทวินามทั่วไปสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงทวินามหรือการแจกแจงปัวซงเมื่อเงื่อนไขของการแจกแจงมีความสมนัยกันหรือสอดคล้องกัน และรูปแบบของการประมาณการแจกแจงที่เราจะกล่าวถึงต่อไปจะอยู่ในรูปของระยะห่างของความแตกต่างรวม (total variation distance) และขอบเขตบน (upper bound) ของความคลาดเคลื่อนของการประมาณระยะห่างของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงทวินาม และระยะห่างของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงปัวซงนิยามได้ดังนี้

$$d_{TV}(GB(A,B,n,\alpha),B(n,p)) = \sup_{E_1} \left|(GB(A,B,n,\alpha)(E_1) - B(n,p)(E_1)\right|$$

และ

$$d_{TV}(GB(A,B,n,\alpha),P(\lambda)) = \sup_{E_2} \left|(GB(A,B,n,\alpha)(E_2) - P(\lambda)(E_2)\right|$$

โดยที่ E_1 คือ เซตย่อยของเซต {0,...,n} และ E_2 คือ เซตย่อยของเซต {0,1,...} และ $GB(A,B,n,\alpha)$,$B(n,p)$ และ $P(\lambda)$ คือการแจกแจงทวินามทั่วไป การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซงตามลำดับ และเนื้อหาของการประมาณการแจกแจงที่กล่าวถึงต่อไปเราได้อ้างอิงจากเอกสารงานวิจัยของ Wongkasem *et al.* (2008)

4.1 การประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม

ทฤษฎีบท 4.1 *ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป และ $p = \dfrac{A}{A+B} > 0$ แล้วอสมการต่อไปนี้เป็นจริง*

$$d_{TV}(GB(A,B,n,\alpha),B(n,p)) \le \left(1 - p^{n+1} - (1-p)^{n+1}\right) \times \frac{n(n-1)\alpha\delta(\alpha)}{(n+1)(A+B-\alpha)} \qquad (9)$$

โดยที่ $\delta(\alpha)$ = 1 ถ้า $\alpha \ge 0$ และ $\delta(\alpha)$ = -1 ถ้า $\alpha < 0$

บทแทรกที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์โดยตรงที่ได้มาจากทฤษฎีบท 4.1 ซึ่งเกี่ยวข้องกับการประมาณการแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริกและการแจกแจงโพลยาด้วยการแจกแจงทวินาม

บทแทรก 4.1 *ถ้า* $\alpha > 0$ *และ* A/α *และ* B/α *เป็นจำนวนเต็มแล้วเราจะได้*

$$d_{TV}(H(A,B,n,\alpha),B(n,p)) \le \left(1-p^{n+1}-\left(1-p\right)^{n+1}\right) \frac{n(n-1)\alpha}{(n+1)(A+B-\alpha)} \quad (10)$$

และในกรณีที่ $0 < p = \frac{n}{A+B} < 1$ *และ* A *เป็นจำนวนเต็มแล้ว*

$$d_{TV}(H(A,B,n,\alpha),B(n,p)) \le \left(1-p^{A+1}-\left(1-p\right)^{A+1}\right) \times \frac{A(A-1)\alpha}{(A+1)(A+B-\alpha)} \quad (11)$$

โดยที่ $H(A,B,n,\alpha)$ *แทนการแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก*

บทแทรก 4.2 *สำหรับ* $\alpha < 0$ *เราจะได้ว่า*

$$d_{TV}(PY(A,B,n,\alpha),B(n,p)) \le \left(1-p^{n+1}-\left(1-p\right)^{n+1}\right) \frac{n(n-1)(-\alpha)}{(n+1)(A+B-\alpha)} \quad (12)$$

โดยที่ $PY(A,B,n,\alpha)$ *แทนการแจกแจงโพลยา*

ข้อสังเกต ผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 4.1 หรือในบทแทรก 4.1 และ 4.2 จะทำให้ได้ผลการประมาณทวินามที่ดี ถ้าหากว่า $\frac{(n-1)|-\alpha|}{A+B-\alpha}$ มีค่าน้อย นั่นคือ $|\alpha|$ มีค่าน้อยและ $A+B-\alpha$ มีค่ามาก ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของการลู่เข้าที่ได้กล่าวมาแล้ว

4.2 การประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงปัวซง

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงปัวซง

ทฤษฎีบท 4.2 *ให้* X *เป็นตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป และ* $\lambda = \frac{nA}{A+B} > 0$ *และให้* $A \ge (n-1)(-\alpha)$ *สำหรับ* $\alpha < 0$ *แล้วเราจะได้*

$$d_{TV}(GB(A,B,n,\alpha),P(\lambda)) \le \left(1-e^{-\lambda}\right) \times \frac{B(n-1)\alpha + A(A+B-\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)} \quad (13)$$

จากทฤษฎีบท 3.2 เราจะได้ผลลัพธ์ของการประมาณปัวซงเพิ่มเติมสำหรับการแจกแจงดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.3 *ถ้า* $\alpha = 0$ *แล้ว*

$$d_{TV}(B(n,A/(A+B)),P(\lambda)) \le \left(1-e^{-\lambda}\right)\frac{A}{A+B} \quad (14)$$

บทแทรก 4.4 *ถ้า* $\alpha > 0$ *และ* A/α *และ* B/α *เป็นจำนวนเต็มแล้วเราจะได้*

$$d_{TV}(H(A,B,n,\alpha),P(\lambda)) \le \left(1-e^{-\lambda}\right) \times \frac{B(n-1)\alpha + A(A+B-\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)} \quad (15)$$

บทแทรก 4.5 *ถ้า* $\alpha > 0$ *และ* $A > (n-1)(-\alpha)$ *แล้ว*

$$d_{TV}(PY(A,B,n,\alpha),P(\lambda)) \le \left(1-e^{-\lambda}\right) \times \frac{B(n-1)\alpha + A(A+B-\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)} \quad (16)$$

ข้อสังเกต ถ้า $\frac{A}{A+B}$ และ α มีค่าน้อย แล้วผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 4.2 จะทำให้ได้ผลการประมาณปัวซงที่ดีและเราจะเห็นได้ว่าถ้า $\alpha > 0$ และ $B > 0$ แล้ว

$$\frac{B(n-1)\alpha + A(A+B-\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)} < \frac{A}{A+B} < \frac{B(n-1)(-\alpha) + A(A+B+\alpha)}{(A+B)(A+B+\alpha)}$$

ดังนั้นขอบเขตบนในอสมการ (16) จะน้อยกว่าขอบเขตบนในอสมการ (13) และ (14) เสมอ

4.3. ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ตัวอย่างเชิงตัวเลขต่อไปนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อแสดงว่าการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซงมีความเหมาะสมอย่างไร และขอบเขตบนของระยะห่างของความแตกต่างรวมที่หาได้สามารถวัดความถูกต้องของการประมาณได้อย่างไร ตัวอย่างเชิงตัวเลขในตาราง 4.1 และ 4.2 เป็นการแสดงการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ในทฤษฎี 4.1 และ 4.2 ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิ-ออเมตริก และการแจกแจงโพลยา (บทแทรก 4.1 ถึง 4.5) ดังนี้

ตาราง 4.1 ตัวอย่างเชิงตัวเลขของระยะห่างของความแตกต่างรวม (d_{TV}) ระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไป และการแจกแจงทวินามพร้อมด้วยขอบเขตบน

n	A	d_{TV} **(10)**	**ขอบเขตบน (10)**	d_{TV} **(11)**	**ขอบเขตบน (11)**	d_{TV} **(12)**	**ขอบเขตบน (12)**
5	10	0.00019	0.00020	0.00043	0.00044	0.00019	0.00020
10	10	0.00080	0.00086	0.00080	0.00086	0.00078	0.00086
20	10	0.00291	0.00345	0.00139	0.00163	0.00280	0.00344
5	25	0.00044	0.00047	0.00257	0.00282	0.00043	0.00047
10	25	0.00162	0.00199	0.00426	0.00531	0.00159	0.00199
20	25	0.00459	0.00747	0.00577	0.00944	0.00445	0.00746
5	50	0.00075	0.00088	0.00882	0.01085	0.00075	0.00088
10	50	0.00226	0.00353	0.01182	0.01929	0.00222	0.00352
20	50	0.00552	0.01195	0.01415	0.03093	0.00540	0.01192

ค่าตัวอย่างในตาราง 4.1 เป็นการนำเสนอตัวอย่างของระยะห่างของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงทวินามพร้อมด้วยขอบเขตบน โดยกำหนดให้ $A+B$ มีค่าเท่ากับ 1000 และ α มีค่าเท่ากับ 1 และ -1 เพื่อให้สอดคล้องกับบทแทรก 4.1 และ 4.2

สำหรับการประมาณปัวซง เราได้นำเสนอตัวอย่างของระยะห่างของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงปัวซงพร้อมด้วยขอบเขตบนไว้ในตาราง 4.2 โดยกำหนดให้ $A+B$ มีค่าเท่ากับ 1000 และ α มีค่าเท่ากับ 0, 1 และ -1 ซึ่งจะสอดคล้องกับบทแทรก 4.3, 4.4 และ 4.5 ตามลำดับ

ตาราง 4.2 ตัวอย่างเชิงตัวเลขของระยะห่างของความแตกต่างรวม (d_{TV}) ระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไป และการแจกแจงปัวซงพร้อมด้วยขอบเขตบน

n	A	d_{TV} **(14)**	**ขอบเขตบน (14)**	d_{TV} **(15)**	**ขอบเขตบน (15)**	d_{TV} **(16)**	**ขอบเขตบน (16)**
5	10	0.00047	0.00049	0.00066	0.00068	0.00028	0.00029
10	10	0.00087	0.00095	0.00166	0.00180	0.00009	0.00010
20	10	0.00149	0.00181	0.00439	0.00523	0.00132	---------
5	25	0.00265	0.00294	0.00309	0.00340	0.00222	0.00248
10	25	0.00436	0.00553	0.00598	0.00747	0.00276	0.00359
20	25	0.00581	0.00984	0.01040	0.01713	0.00136	0.00255
5	50	0.00893	0.01106	0.00968	0.01190	0.00818	0.01022
10	50	0.01186	0.01967	0.01412	0.02304	0.00964	0.01631
20	50	0.01421	0.03161	0.01973	0.04303	0.00881	0.02021

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขในตาราง 4.1 และ 4.2 ได้ชี้ให้เห็นว่าการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซงจะมีประสิทธิภาพเมื่อ n และ/หรือ A มีค่าน้อย นั่นคือ ค่าประมาณของระยะห่างของความแตกต่างรวมของแต่ละผลลัพธ์ (ขอบเขตบน) จะมีค่าเข้าใกล้ค่าจริงของระยะห่างของความแตกต่างรวม ถ้าหากว่า n และ/หรือ A มีค่าน้อย และ $A+B-\alpha$ มีค่ามาก เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์เชิงตัวเลขของทั้งสองตารางระหว่างสดมภ์ (10) และ (12) และ สดมภ์ (15) และ (16) เราจะพบว่าผลลัพธ์ในสดมภ์ (10) ดีกว่าผลลัพธ์ในสดมภ์ (15) และในกรณีที่ n และ A มีค่าความแตกแต่างกันมาก เราจะได้ผลลัพธ์ในสดมภ์ (12) ดีกว่าผลลัพธ์ในสดมภ์ (16) เช่นเดียวกัน

บทสรุป

การแจกแจงทวินามทั่วไปเป็นการแจกแจงวิยุตแบบหนึ่งที่ครอบคลุมการแจกแจงที่สำคัญสามการแจกแจง คือ การแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา ซึ่งภูมิหลังของการแจกแจงนี้เป็นประโยชน์สำหรับผู้สอนที่สามารถรวมเนื้อหาของทั้งสามการแจกแจงดังกล่าวให้อยู่ในเรื่องเดียวกัน

สำหรับความสัมพันธ์ของการแจกแจงทวินามทั่วไปกับการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซงเป็นเรื่องเกี่ยวกับการลู่เข้าของการแจกแจงซึ่งเราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $A+B \to \infty$ และ $\frac{A}{A+B}$ ลู่เข้าสู่เป็นค่าคงตัว p แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p และในกรณีที่ $A+B \to \infty, n \to \infty,$ $\frac{A}{A+B} \to 0$ และ $\lambda = \frac{nA}{A+B}$ เป็นค่าคงตัวที่มีค่าจำกัด แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = \frac{nA}{A+B}$ และผลที่ได้นี้สามารถเชื่อมโยงไปสู่เรื่องของการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซง โดยมีขอบเขตบนของแต่ละผลลัพธ์เป็นหลักเกณฑ์ทั่วไปที่นำมาใช้ประมาณค่าของระยะห่างของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงทวินาม หรือระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงปัวซง ซึ่งเราสามารถใช้หลักเกณฑ์นี้เป็นเครื่องมือในการวัดความถูกต้องของการประมาณการแจกแจงดังกล่าวได้ กล่าวคือ ถ้าขอบเขตบนดังกล่าวมีค่าน้อยแสดงว่าการแจกแจงทวินาม (หรือการแจกแจงปัวซง) สามารถประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปได้ดี หรือแสดงว่าการแจกแจงทวินามทั่วไปเข้าใกล้การแจกแจงทวินาม (หรือการแจกแจงปัวซง) ในทางกลับกันถ้าขอบเขตบนมีค่ามากแสดงว่าการประมาณการแจกแจงดังกล่าวไม่มีความเหมาะสม และขอบเขตบนดังกล่าวจะมีค่ามากหรือน้อยนั้นมักจะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่มีความสอดคล้องกัน ซึ่งจากผลการวิจัยที่ได้เราพบว่าการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามจะมีความเหมาะสมเมื่อ $|\alpha|$ มีค่าน้อยและ $A+B-\alpha$ มีค่ามาก และการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงปัวซงจะมีความเหมาะสมเมื่อ $\frac{A}{A+B}$ และ α มีค่าน้อย

เอกสารอ้างอิง

Brown, T. C. & Phillips, M. J. (1999). Negative binomial approximation with Stein's method. *Methodology and Computing in Apply Probability, 1,* 407-421.

Dwass, M. (1979). A generalized binomial distribution. *American Statistician, 33,*86-87.

Johnson, N. L., Kotz, S. & Kemp, A. W. (2005). Univariate Discrete Distributions, 3rd ed. Wiley, New York.

Wongkasem, P., Teerapabolarn K. & R. Gulasirima. (2008). On approximating a generalized binomial by binomial and Poisson distributions. *International Journal of Statistics and Systems*, *3,*113-124.