การหาสหสัมพันธ์จากการทดลองของการพาความร้อนด้วยอากาศบนระนาบเรียบ
Determination of Empirical Correlations for Air Convection on a Flat Plate

อุทัย ประสพชิงชนะ[1]

1. บทนำ

การหาสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนด้วยอากาศบนระนาบเรียบ ทำได้ 2 วิธี คือการวิเคราะห์ทางทฤษฎี (Analytical Method) และวิธีการวิเคราะห์จากผลการทดลอง (Empirical Method)

วิธีการวิเคราะห์ทางทฤษฎีสำหรับการพาความร้อนบนระนาบเรียบ โดยทิศการไหลขนานกับแผ่นระนาบและอุณหภูมิของผิวระนาบมีค่าสม่ำเสมอ (Uniform Temperature) นั้น วิเคราะห์จากสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) สมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และสมการพลังงาน (Energy Equation) โดยมีข้อสมมุติฐานว่า เป็นการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) ที่สภาวะคงตัว (Steady State) อัดตัวไม่ได้ (Incompressible) และของไหลมีคุณสมบัติคงที่ (Constant Properties) จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีได้สหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบบังคับ [1]-[7] ระหว่างเลขนัสเซลต์ (Nusselt Number, Nu) กับเลขเรย์โนลดส์ (Reynolds Number, Re) และเลขพรันด์เทิล (Prandtl Number, Pr) เป็น

$$\overline{Nu}_L = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \quad \mathrm{Pr}\geq 0.6 \tag{1}$$

สำหรับสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบธรรมชาติ [1] - [7] ระหว่างเลขนัสเซลต์กับเลขกราสโฮฟ (Grashof Number, Gr) และเลขพรันด์เทิล เป็น

$$\overline{Nu}_L = \frac{4}{3}\left(\frac{Gr_L}{4}\right)^{1/4} g(\mathrm{Pr}) \tag{2}$$

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \tag{3}$$

$$g(\mathrm{Pr}) = \frac{0.75\,\mathrm{Pr}^{1/2}}{\left(0.609 + 1.221\,\mathrm{Pr}^{1/2} + 1.238\,\mathrm{Pr}\right)^{1/4}} \tag{4}$$

เมื่อ g เป็นค่าความเร่งโน้มถ่วงของโลก β เป็นค่า Volumetric Thermal Expansion Coefficient และ ν เป็นค่าความหนืดคิเนมาติกส์ (Kinematics Viscosity)

สำหรับวิธีการวิเคราะห์จากผลการทดลองนั้น Churchill and Ozoe [1]-[7] ได้ทดลองและหาสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบบังคับได้เป็น

$$\overline{Nu}_L = \frac{0.6774\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0.0468/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \quad \mathrm{Pe}_L \geq 100 \tag{5}$$

[1] อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา โทรศัพท์ 08-2211-5188 E-mail: uthai@buu.ac.th

รับเมื่อ 7 มกราคม 2553 ตอบรับเมื่อ 10 สิงหาคม 2553

เมื่อ Pe_L เป็นค่า Peclet Number, $Pe_L = Re_L Pr$ โดยที่สมการ (2) มีค่าความผิดพลาดเป็น ± 1% [2] และสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่ได้จากการทดลองของ Churchill and Chu [1]-[7] เป็น

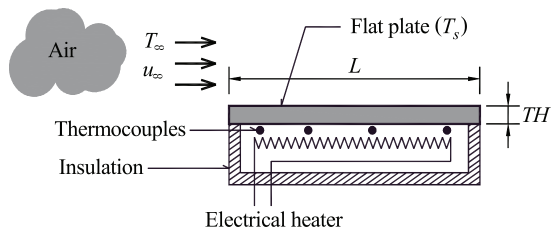
$$\overline{Nu}_L = \left\{0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{\left[1+\left(0.492/\Pr\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 \quad (6)$$

เมื่อ Ra_L เป็นค่าเลขเรย์ลี (Rayleigh Number), $R_{aL} = Gr_L \Pr$

เนื่องจากสหสัมพันธ์ที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์ทางทฤษฎียังต้องมีข้อสมมุติฐานที่ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้คลาดเคลื่อนจากความจริงบ้างและสหสัมพันธ์ที่ได้จากการทดลองของ Churchill and Ozoe และ Churchill and Chu ยังมีความคลาดเคลื่อนเนื่องจากช่วงการใช้งานที่กว้างทำให้ความแม่นยำน้อยลง ดังนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงวิธีการหาสหสัมพันธ์จากผลการทดลอง ซึ่งสามารถกำหนดช่วงของค่าต่างๆ ได้ตามที่ต้องการ

2. วิธีการทดลอง

การทดลองการพาความร้อนด้วยอากาศบนระนาบเรียบ มี 2 แบบ คือการพาความร้อนแบบบังคับและการพาความร้อนแบบธรรมชาติ โดยการทดลองการพาความร้อนแบบบังคับกระทำเพื่อหาค่าเลขนัสเซลต์ ค่าเลขเรย์โนลดส์และค่าเลขพรันด์เทิลที่สภาวะต่างๆ สำหรับการทดลองการพาความร้อนแบบธรรมชาติกระทำเพื่อหาค่าเลขนัสเซลต์และค่าเลขเรย์ลีที่สภาวะต่างๆ เช่นกัน โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองจะเป็นข้อมูลเพื่อใช้ในการหาสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนด้วยอากาศแบบบังคับและแบบธรรมชาติบนระนาบเรียบ โดยที่คุณสมบัติต่างๆ ของอากาศที่ใช้ในการคำนวณที่ความดันบรรยากาศซึ่งเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิหาได้จาก NIST (National Institute of Standards and Technology) Standard Reference Database 23, Version 7.0



รูปที่ 1 ชุดอุปกรณ์การทดลองการพาความร้อนแบบบังคับด้วยอากาศบนแผ่นระนาบเรียบ

2.1 การพาความร้อนแบบบังคับ

จากรูปที่ 1 เมื่ออากาศที่มีอุณหภูมิเป็น T_∞ และมีความเร็วเป็น u_∞ ไหลผ่านแผ่นระนาบเรียบที่มีอุณหภูมิที่ผิวสม่ำเสมอเป็น T_s ทำให้เกิดการพาความร้อนที่ผิวของระนาบสู่อากาศ ซึ่งแผ่นระนาบมีความยาวตามแนวการไหลเป็น L มีความหนาเป็น TH มีพื้นที่ผิวเป็น A และมีค่าสภาพนำความร้อน (Thermal Conductivity) เป็น k โดยในการทดลองการพาความร้อนแบบบังคับ ข้อมูลที่ต้องวัดและบันทึกค่าได้แก่ กำลังไฟฟ้า *(P)* ที่จ่ายให้กับ Electrical Heater ค่าอุณหภูมิเฉลี่ยที่ได้จากการวัดด้วย Thermocouples, (T_{th}) อุณหภูมิของอากาศ (T_∞) และความเร็วของอากาศ (u_∞)

ที่สภาวะคงตัวกำลังไฟฟ้าที่จ่ายให้กับ Electrical Heater มีค่าเท่ากับอัตราการพาความร้อน q ที่เกิดขึ้นที่ผิวของแผ่นระนาบดังนั้นจะได้ว่า

$$q = P \quad (7)$$

สำหรับอุณหภูมิที่ผิวระนาบ (T_s) หาได้จาก

$$q = kA\left(\frac{T_{th} - T_s}{TH}\right)$$

$$T_s = T_{th} - q\frac{TH}{kA} \quad (8)$$

โดยค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $\left(\bar{h}_L\right)$ ระหว่างผิวของระนาบกับอากาศหาได้จาก

$$q = \bar{h}_L A\left(T_s - T_\infty\right)$$

$$\bar{h}_L = \frac{q}{A\left(T_s - T_\infty\right)} \quad (9)$$

ดังนั้นเลขนัสเซลต์มีค่าเป็น

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k_f} \quad (10)$$

เมื่อ k_f เป็นค่าสภาพนำความร้อนของอากาศเลขเรย์โนลดส์มีค่าเป็น

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} \quad (11)$$

โดยที่คุณสมบัติของอากาศคิดที่ Film temperature (T_f) ซึ่งมีค่าเป็น

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \quad (12)$$

2.2 การพาความร้อนแบบธรรมชาติ

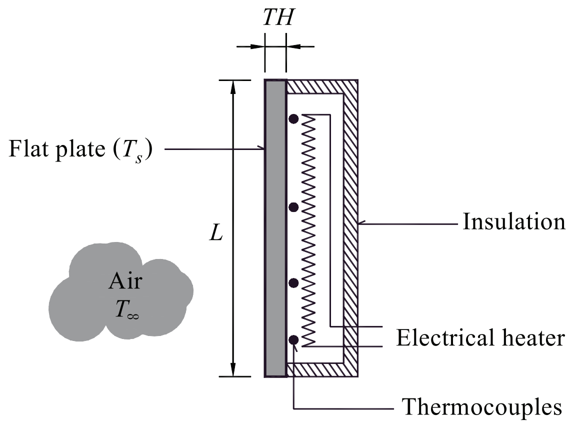
จากรูปที่ 2 เมื่ออากาศที่มีอุณหภูมิเป็น T_∞ สัมผัสกับแผ่นระนาบเรียบที่วางตัวในแนวดิ่งโดยมีอุณหภูมิที่ผิวสม่ำเสมอเป็น T_s ทำให้เกิดการพาความร้อนที่ผิวของระนาบสู่อากาศ ซึ่งแผ่นระนาบมีความยาวตามแนวดิ่งเป็น L มีความหนาเป็น TH มีพื้นที่ผิวเป็น A และมีค่าสภาพนำความร้อน (Thermal Conductivity) เป็น k โดยในการทดลองการพาความร้อนแบบธรรมชาติข้อมูลที่ต้องวัดและบันทึกค่าได้แก่ กำลังไฟฟ้า *(P)* ที่จ่ายให้กับ Electrical Heater ค่าอุณหภูมิเฉลี่ยที่ได้จากการวัดด้วย Thermocouples, (T_{th}) และอุณหภูมิของอากาศ (T_∞)

ที่สภาวะคงตัวกำลังไฟฟ้าที่จ่ายให้กับ Electrical Heater มีค่าเท่ากับอัตราการพาความร้อน q ที่เกิดขึ้นที่ผิวของเผ่นระนาบดังนั้นจะได้ว่า

$$q = P \quad (13)$$

สำหรับอุณหภูมิที่ผิวระนาบ (T_s) หาได้จาก

$$q = kA\left(\frac{T_{th} - T_s}{TH}\right)$$
$$T_s = T_{th} - q\frac{TH}{kA} \quad (14)$$



รูปที่ 2 ชุดอุปกรณ์การทดลองการพาความร้อนแบบธรรมชาติด้วยอากาศบนแผ่นระนาบเรียบ

โดยค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $\left(\bar{h}_L\right)$ ระหว่างผิวของระนาบกับอากาศหาได้จาก

$$q = \bar{h}_L A(T_s - T_\infty)$$
$$\bar{h}_L = \frac{q}{A(T_s - T_\infty)} \quad (15)$$

ดังนั้นเลขนัสเซลต์มีค่าเป็น

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k_f} \quad (16)$$

ค่าเลขเรย์ลีมีค่าเป็น

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \quad (17)$$

เมื่อ α เป็นค่า Thermal Diffusivity

3. การหาสหสัมพันธ์

การหาสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนด้วยอากาศบนแผ่นระนาบเรียบซึ่งอยู่ในรูปของเลขยกกำลังใช้วิธีการถดถอยแบบเชิงเส้น (Linear Regression) [8]

3.1 การพาความร้อนแบบบังคับ

สหสัมพันธ์ระหว่างเลขนัสเซลต์กับเลขเรย์โนลดส์และเลขพรันด์เทิลของการพาความร้อนแบบบังคับจะจัดให้อยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\overline{Nu}_L = a \operatorname{Re}_L^b \Pr^c \tag{18}$$

โดยที่ค่า a, b และ c เป็นค่าคงที่ซึ่งเราต้องการหาค่า โดยจัดรูปสมการ (18) ให้อยู่ในรูปของสมการลอการิทึมจะได้ว่า

$$\log \overline{Nu}_L = \log a + b \log \operatorname{Re}_L + c \log \Pr \tag{19}$$

หากกำหนดให้

$$z = \log \overline{Nu}_L, \; x = \log \operatorname{Re}_L, \; y = \log \Pr$$

$$a_0 = \log a, \; a_1 = b, \; a_2 = c$$

ดังนั้นจากสมการ (19) จะได้ว่า

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

หากกำหนดให้

$$g(x, y) = z = a_0 + a_1 x + a_2 y \tag{20}$$

ดังนั้นผลรวมของค่าความแตกต่างยกกำลังสองระหว่างข้อมูลที่ได้จากการทดลองกับค่าของฟังก์ชัน *g(x,y)* ที่ตำแหน่ง *i* ใดๆจากข้อมูลทั้งหมด *n* ข้อมูลสามารถเขียนได้ดังนี้

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[z_i - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[z_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i) \right]^2 \tag{21}$$

จากสมการ (21) เราต้องการหาค่าผลรวมของค่าความแตกต่างยกกำลังสองให้มีค่าน้อยที่สุด ทำได้โดยการหาค่าต่ำสุดด้วยการหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงที่แล้วให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} \left[z_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i) \right] (-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_2 y_i = 0$$

$$n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} z_i \tag{22a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} \left[z_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i) \right] (-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i y_i = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \tag{22b}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} \left[z_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i) \right] (-y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i y_i = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \tag{22c}$$

จากสมการ (22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} z_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

จากสมการ (23) สามารถแก้สมการหาค่า a_0 , a_1 และ a_2 ได้ ซึ่งจะได้ว่า $a=10^{a0}$, $b = a_1$ และ $c = a_2$ หลังจากนั้นนำค่า a , b และ c แทนค่าลงในสมการ (18) ก็จะได้สหสัมพันธ์ระหว่างเลขนัสเซลต์กับเลขเรย์โนลดส์และเลขพรันด์เทิลตามต้องการ

3.2 การพาความร้อนแบบธรรมชาติ

สหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบธรรมชาติ เป็นความสัมพันธ์ของเลขนัสเซลต์กับเลขเรย์ลี ซึ่งจะจัดให้อยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\overline{Nu}_L = aRa_L^b \quad (24)$$

โดยที่ค่า a และ b เป็นค่าคงที่ซึ่งเราต้องการหาค่า โดยจัดรูปสมการ (24) ให้อยู่ในรูปของสมการลอการิทึม จะได้ว่า

$$\log \overline{Nu}_L = \log a + b \log Ra_L \quad (25)$$

หากกำหนดให้

$$z = \log \overline{Nu}_L ,\ x = \log Ra_L$$
$$a_0 = \log a ,\ a_1 = b$$

ดังนั้นจากสมการ (25) จะได้ว่า

$$z = a_0 + a_1 x$$

หากกำหนดให้

$$g(x) = z = a_0 + a_1 x \quad (26)$$

ดังนั้นผลรวมของค่าความแตกต่างยกกำลังสองระหว่างข้อมูลที่ได้จากการทดลองกับค่าของฟังก์ชัน $g(x)$ ที่ตำแหน่ง i ใดๆจากข้อมูลทั้งหมด n ข้อมูล สามารถเขียนได้ดังนี้

$$E = \sum_{i=1}^{n} [z_i - g(x_i)]^2$$
$$E = \sum_{i=1}^{n} [z_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \quad (27)$$

จากสมการ (27) เราต้องการหาค่าผลรวมของค่าความแตกต่างยกกำลังสองให้มีค่าน้อยที่สุด ทำได้โดยการหาค่าต่ำสุดด้วยการหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงที่แล้วให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0$$
$$2\sum_{i=1}^{n} [z_i - (a_0 + a_1 x_i)](-1) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0$$
$$n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i \quad (28a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$
$$2\sum_{i=1}^{n} [z_i - (a_0 + a_1 x_i)](-x_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \quad (28b)$$

จากสมการ (28) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} z_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \end{bmatrix} \tag{29}$$

จากสมการ (29) สามารถแก้สมการหาค่า a_0 และ a_1 ได้ ซึ่งจะได้ว่า $a = b^{a0}$ และ, $b = a_1$ หลังจากนั้นนำค่า a, b และ c แทนค่าลงในสมการ (24) ก็จะได้สหสัมพันธ์ของเลขนัสเซลต์กับเลขเรย์ลีตามต้องการ

4. สรุป

การหาสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนด้วยอากาศบนระนาบเรียบโดยวิเคราะห์จากผลการทดลองมี 2 แบบ คือสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบบังคับและสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบธรรมชาติ โดยสหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบบังคับเป็นความสัมพันธ์ในรูของเลขยกกำลังระหว่างค่าเลขนัสเซลต์ กับเลขเรย์โนลดส์และเลขพรันด์เทิล ขณะที่สหสัมพันธ์ของการพาความร้อนแบบธรรมชาติเป็นความสัมพันธ์ในรูปของเลขยกกำลังระหว่างค่าเลขนัสเซลต์กับเลขเลขเรย์ลี โดยการหาสหสัมพันธ์ที่ได้จากผลการทดลองใช้วิธีถดถอยแบบเชิงเส้น ซึ่งคุณสมบัติของของอากาศที่ใช้ในการคำนวณคิดที่ Film Temperature

เอกสารอ้างอิง

[1] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer,* 6 ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 2007.

[2] Y. A. Cengel, *Heat and Mass Transfer,* 3 ed., Singapore: McGraw-Hill Companies, 2006.

[3] M. N. Ozisik, *Heat Transfer a Basic Approach* New York: Graw-Hill Book Company. 1985.

[4] K. D. Hagen, *Heat Transfer with Applications,* Pentice-Hall, Upper Saddle River, 1999.

[5] K. C. Rolle, *Heat and Mass Transfer,* Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[6] F. Kreith, and M. S. Bohn, *Principles of Heat Transfer,* 6 ed., U.S.A: Brooke/Cole, 2001.

[7] A. F. Mills, *Basic Heat& Mass Transfer*, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.

[8] ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์, “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม,” กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2551.