ฯ(10)

สำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี 20131

เอกสารประกอบการสอน
วิชา 226271 คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์

ศิริวรรณ สมนึก
ภาควิชาเศรษฐศาสตร์

31 ต.ค. 2550
226795 bk0102745

ได้รับทุนสนับสนุนจากงบประมาณเงินรายได้
คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

เริ่มบริการ
9 ม.ค. 2551

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน 226271 คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ นี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ศึกษาประกอบการเรียนวิชาดังกล่าว สำหรับนิสิตเอกเศรษฐศาสตร์ ในระดับปริญญาตรี เนื้อหาในเอกสารประกอบการสอนประกอบด้วย สามส่วนด้วยกัน กล่าวคือส่วนแรกเป็นการปูพื้นด้วยหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้ศึกษาเข้าใจในหลักการ ส่วนที่สองเป็นการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ และส่วนสุดท้ายเพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งมากขึ้น จึงต้องทำแบบฝึกท้ายบทด้วยตนเอง ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในเศรษฐศาสตร์มากยิ่งขึ้น

ผู้จัดทำหวังว่าเอกสารเล่มนี้จะมีประโยชน์อย่างมากต่อการเรียนการสอนวิชาดังกล่าวแก่ผู้เรียนและบุคคลที่สนใจ

ท้ายนี้ ขอขอบคุณคณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่ได้ให้โอกาสสนับสนุนทุนในการเขียนเอกสารเล่มนี้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์จุฑารัตน์ จุลศิริพงษ์ ที่ให้คำแนะนำต่างๆ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิไล เอื้อปิยฉัตร ที่แนะนำตำราภาษาอังกฤษแหล่งค้นคว้าเพิ่มเติม และขอขอบพ่อแม่ที่ให้กำลังใจในการทำเอกสารเล่มนี้

ศิริวรรณ สมนึก

สิงหาคม 2550

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางภาคผนวกที่

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ข้อมูลรายวิชาและการสอน

ชื่อวิชา 226271 คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ (Mathematics for Economist)

จำนวนหน่วยกิต 3(3-0-6)

คำอธิบายรายวิชา ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น เช่น เมตริกซ์ ดีเทอร์มินันต์ การแปลงเชิงเส้น เป็นต้น และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ รวมทั้งการประยุกต์แนวคิดดังกล่าวมาใช้ในทางเศรษฐศาสตร์

ความมุ่งหมายของรายวิชา

1. เพื่อให้เกิดความเข้าใจในความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับเศรษฐศาสตร์
2. เพื่อให้มีความเข้าใจ ความรู้และความสามารถในหลักการทางคณิตศาสตร์
3. เพื่อให้สามารถนำหลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาเศรษฐศาสตร์ทั้งในระดับจุลภาค, มหภาค และปัญหาทางธุรกิจการเงิน
4. เพื่อให้มีความสามารถในการเลือกใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ไปแก้ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง ตรงตามวัตถุประสงค์

แผนการสอน

สัปดาห์ที่	หัวข้อ- เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนการสอน
1 คาบที่ 1-3	**บทที่ 1** บทนำ 1.1 ความสำคัญของคณิตสำหรับนักเศรษฐศาสตร์ 1.2 คำนิยามของคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ 1.3 ข้อดีและข้อเสียของการใช้คณิตศาสตร์ในการศึกษาเศรษฐศาสตร์ 1.4 ขอบเขตการศึกษาและแบบจำลองเศรษฐศาสตร์ 1.5 องค์ประกอบของแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ 1.6 ประเภทตัวแปรที่ใช้ในแบบจำลอง 1.7 ความสัมพันธ์ทางด้านเศรษฐศาสตร์	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. ทบทวนเนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์ 3. อภิปรายและตอบข้อซักถาม 4. ทำแบบฝึกท้ายบท

สัปดาห์ที่	หัวข้อ- เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนการสอน
2 คาบที่ 4-6	**บทที่ 2** ฟังก์ชันเส้นตรง สมการ กราฟ และการประยุกต์ 2.1 ความสัมพันธ์ 2.2 ฟังก์ชันและกราฟ 2.3 ชนิดของฟังก์ชัน 2.4 สมการเชิงเส้น ความชันและส่วนตัด 2.5 ฟังก์ชันเส้นตรง	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. อภิปรายและตอบข้อซักถาม 3. ทดลองแก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ 4. ทำแบบฝึกท้ายบท
3,4 คาบที่ 7-10	2.6 การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์ 2.7 ระบบสมการเชิงเส้น 2.8 การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์	
	บทที่ 3 พีชคณิตเชิงเส้นหรือเมตริกซ์ 3.1 ความหมายของเมตริกซ์ 3.2 การบวกและลบเมตริกซ์ 3.3 การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์ 3.4 การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ 3.5 กฎเกี่ยวกับการบวก การลบ และการคูณเมตริกซ์ 3.6 เมตริกซ์เอกลักษณ์และเมตริกซ์ศูนย์	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. อภิปรายและตอบข้อซักถาม 3. ทดลองแก้ปัญหาเมตริกซ์
5 คาบที่ 11-15	3.7 ดีเทอร์มิแนนต์และเมตริกซ์ผกผัน 3.8 เมตริกซ์โคแฟคเตอร์และเมตริกซ์ผูกพัน 3.9 คุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับเมตริกซ์ 3.10 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์	
6 คาบที่ 16-17	**บทที่ 4** โปรแกรมเชิงเส้น 4.1 ความหมายของโปรแกรมเชิงเส้น 4.2 ลักษณะปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงเส้น 4.3 ส่วนประกอบของโปรแกรมเชิงเส้น 4.4 สมมติฐานของโปรแกรมเชิงเส้น 4.5 รูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้น 4.6 ตัวอย่างการสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. อภิปรายและตอบข้อซักถาม 3. ทดลองเขียนโปรแกรมเชิงเส้น 4. ทำแบบฝึกท้ายบท

สัปดาห์ที่	หัวข้อ- เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนการสอน
7 คาบที่ 18-21	**บทที่ 5** การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 5.1 การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีกราฟ 5.2 การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ 5.3 การหาคำตอบคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีคู่เสมอกัน	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. อภิปรายและตอบข้อซักถาม 3. ทดลองแก้ปัญหาโปรแกรม 4. ทำแบบฝึกท้ายบท
8 คาบที่ 22-24	สอบกลางภาคเรียน	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา
9 คาบที่ 25-27	**บทที่ 6** ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม 6.1 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล 6.2 ฟังก์ชันลอการิทึม 6.3 การใช้ฟังก์ชันลอกาลิทึมแก้ปัญหาฟังก์ชันที่ไมใช้เส้นตรง 6.4 การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์และการเงินธุรกิจ	2. อภิปรายและตอบข้อซักถาม 3. ทดลองทำเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม
10-11 คาบที่ 28-33	**บทที่ 7** แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรและการประยุกต์ 7.1 ความชันและค่าลิมิต 7.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร 7.3 อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร 7.4 การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรในทางเศรษฐศาสตร์ 7.5 การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร 7.6 การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในทางเศรษฐศาสตร์	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. ทดลองทำอนุพันธ์ 3. อภิปรายหัวข้อเศรษฐศาสตร์ที่มีการใช้อนุพันธ์แก้ปัญหา 4. ทำแบบฝึกท้ายบท

สัปดาห์ที่	หัวข้อ- เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนการสอน
12-13 คาบที่ 34-38	**บทที่ 8** อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร และการประยุกต์ 8.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร 8.2 การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง 8.3 การนำอนุพันธ์ย่อยมาใช้วิเคราะห์เชิงสถิตย์เปรียบเทียบ 8.4 อนุพันธ์ (Derivatives) และผลต่างอนุพันธ์ (Differential) 8.5 การประยุกต์ใช้ในเรื่องความยืดหยุ่นย่อย (Partial Elasticities) 8.6 การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร 8.7 การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุดและต่ำสุดทางเศรษฐศาสตร์ 8.8 การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันมากกว่า 2 ตัวแปร 8.9 การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดโดยมีข้อจำกัด 8.10 การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. ทดลองทำอนุพันธ์ย่อยและอนุพันธ์รวม 3. ทดลองนำแคลคูลัสฟังก์ชันหลายตัวแปรไปใช้ในทางเศรษฐศาสตร์ 4. ทำแบบฝึกท้ายบท
13-14 คาบที่ 39-42	**บทที่ 9** อินทิกรัลแคลคูลัส (Integral Calculus) 9.1 การวิเคราะห์เชิงพลวัตร 9.2 อินทิกรัลแคลคูลัส 9.3 ทฤษฎีบทพื้นฐานของอินทิกรัลแคลคูลัส 9.4 ลักษณะของปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ที่ใช้อินทิกรัลแคลคูลัส 9.5 การประยุกต์ใช้อินทิกรัลแคลคูลัสแบบจำกัดเขต	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. คำนวณค่าส่วนเกินผู้บริโภคและส่วนเกินผู้ผลิต 3. ทำแบบฝึกท้ายบท

สัปดาห์ที่	หัวข้อ- เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนการสอน
15 คาบที่ 43-45	**บทที่ 10** สมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equation) 10.1 สมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก 10.2 การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก 10.3 เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ 10.4 การโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ 10.4 การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์	1. บรรยายในหัวข้อต่างๆ ในเนื้อหา 2. ทดลองสมการผลต่างสืบเนื่องไปประยุกต์ใช้ทางเศรษฐศาสตร์ 3. ทบทวนบทเรียนก่อนสอบ
16 คาบที่ 46-48	สอบปลายภาคเรียน	

วัสดุอุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยาย ด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. ทำแบบฝึกท้ายบท

การประเมินผล

1. การสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนในด้าน
    1) ความสนใจ
    2) การตอบคำถาม
    3) การทดลองในการทำแบบฝึกฝนในชั้นเรียน
    4) การทำแบบฝึกท้ายบท
2. การทดสอบ (ข้อสอบแบบอัตนัย)
    1) การทดสอบกลางภาคเรียนร้อยละ 40
    2) การทำแบบทดสอบย่อยร้อยละ 10
    3) การทดสอบปลายภาคเรียนร้อยละ 50

บทที่ 1
บทนำ

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์สำหรับเศรษฐศาสตร์
2. เพื่อให้ผู้เรียนทราบขอบเขตเนื้อหาวิชา
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายลักษณะของเศรษฐศาสตร์ในเชิงคณิตศาสตร์
4. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจความแตกต่างของประเภทของตัวแปรและสมการ
5. เพื่อให้ผู้เรียนนำแนวคิดความสัมพันธ์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ไปใช้วิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ได้

เนื้อหา

1. ความสำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์
2. คำนิยามของคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์
3. ข้อดีของการใช้คณิตศาสตร์ในการศึกษาทางด้านเศรษฐศาสตร์
4. ข้อเสียของการใช้คณิตศาสตร์ในการศึกษาทางด้านเศรษฐศาสตร์
5. ขอบเขตของการศึกษา
6. แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์
7. องค์ประกอบของแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์
8. ประเภทตัวแปรที่ใช้ในแบบจำลอง
9. ความสัมพันธ์ทางด้านเศรษฐศาสตร์

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

1. ความสำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์

คณิตเศรษฐศาสตร์สำคัญต่อสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์เป็นอย่างมาก ไม่เพียงแต่ใช้เป็นเครื่องมือศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์เท่านั้น แต่ยังใช้ประกอบอาชีพการงานทางด้านเศรษฐศาสตร์ด้วย ทั้งนี้เนื่องจากลักษณะเนื้อหาโดยทั่วไปของวิชาเศรษฐศาสตร์จะเป็นการศึกษาพฤติกรรมทางด้านเศรษฐกิจ ผ่านทางตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์ ซึ่งบางชุดของตัวแปรมีความสัมพันธ์กันที่ค่อนข้างสลับซับซ้อน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์รวมถึงสถิติมาใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าวเพื่อความชัดเจนถูกต้องและเข้าใจง่ายขึ้น หรือกล่าวได้ว่า เราจะมีความเข้าใจเศรษฐศาสตร์ในแต่ละหัวข้อที่มีความซับซ้อน หรือในการทำผลงานวิจัยต่างๆ ของนักเศรษฐศาสตร์ ได้เป็นอย่างดีนั้น จำเป็นต้องอาศัยทักษะพื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์

ดังนั้นทักษะพื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ที่ดีพอ จะช่วยให้เราสามารถเรียนรู้วิชาเศรษฐศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น สามารถนำไปใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการวิเคราะห์ทางด้านเศรษฐกิจต่างๆ ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

ตัวอย่างเบื้องต้นของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในการช่วยวิเคราะห์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ อาทิ อุปสงค์อุปทานและดุลยภาพของตลาดสินค้า

หากเราตั้งสมมติฐานว่า "ปริมาณความต้องการของสินค้าบางชนิดจะขึ้นอยู่กับปัจจัยต่างๆ อาทิ ราคาสินค้าชนิดนั้น, ราคาของสินค้าอื่นที่สามารถใช้ทดแทนกันได้โดยตรง, ราคาของสินค้าอื่นที่ใช้ประกอบกัน, ระดับรายได้ของผู้บริโภคและอื่นๆ"

จากสมมติฐานดังกล่าวข้างต้น เราสามารถนำคณิตศาสตร์มาใช้สรุปความสัมพันธ์ดังกล่าวให้มีความเป็นระเบียบเรียบร้อย (Elegant), รัดกุม (Concise) และชัดเจน (Unambiguous) ได้ดังนี้

$$Q_X = \alpha + \beta_1 P_X + \beta_2 P_S + \beta_3 P_C + \beta_4 Y$$

เมื่อ Q_X คือ ปริมาณความต้องการสินค้า X

P_X คือ ราคาสินค้า X

P_s คือ ราคาของสินค้าอื่นที่ทดแทนกันได้

P_c คือ ราคาของสินค้าอื่นที่ใช้ประกอบกัน

Y คือ ระดับรายได้ของผู้บริโภค

ส่วนสัญลักษณ์ α , β_1 , β_2 , β_3 และ β_4 แทนค่าพารามิเตอร์ของสมการ (พารามิเตอร์ คือค่าที่เป็นตัวเลขเฉพาะที่มีความสำคัญในการแสดงความสัมพันธ์ทางด้านเศรษฐศาสตร์)

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า การนำสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการให้คำนิยามและพรรณนาถึงความสัมพันธ์นั้น มีความน่าเชื่อถือและไม่คลุมเครือ (Unambiguous) ขณะที่หากเราอธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าวด้วยคำพูดหรือข้อความเพียงอย่างเดียว อาจทำให้เกิดการตีความผิดและเกิดความไม่ชัดเจนได้

2. คำนิยามของคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์

ตามความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อการศึกษาทางด้านเศรษฐศาสตร์ข้างต้น ทำให้สามารถนิยามความหมายของคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ (Mathematic for Economists) ว่าเป็นวิธีการสำหรับการศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์โดยใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เป็นสื่อในการวิเคราะห์ กล่าวคือ นักเศรษฐศาสตร์ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ และสร้างทฤษฎีในรูปคณิตศาสตร์เพื่อช่วยในการหาเหตุผลและบทสรุปต่อปรากฏการณ์ทางด้านเศรษฐกิจต่างๆ ที่เกิดขึ้น

3. ข้อดีของการใช้คณิตศาสตร์ในการศึกษาทางด้านเศรษฐศาสตร์

1) มีการกำหนดและระบุความหมายของตัวแปรต่างๆ และใช้อักษรแทนตัวแปรเหล่านั้นในการอธิบายความสัมพันธ์ที่สลับซับซ้อนได้ชัดเจน
2) คณิตศาสตร์มีทฤษฎีและเครื่องมือหลากหลายในการนำมาประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ได้
3) สามารถแปลงข้อสมมติทางเศรษฐศาสตร์ให้เป็นคณิตศาสตร์ได้
4) สามารถใช้แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรได้โดยไม่จำกัดจำนวนตัวแปร

4. ข้อเสียของการใช้คณิตศาสตร์ในการศึกษาทางด้านเศรษฐศาสตร์

1) เนื่องจากวิธีการทางคณิตศาสตร์นั้นประกอบไปด้วย สัญลักษณ์ต่างๆ มากมาย ทำให้ในบางครั้ง การสื่อสารให้บุคคลทั่วไปเข้าใจในทันที จึงเป็นไปได้ยาก
2) ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ในโลกความเป็นจริงอาจซับซ้อนเกินกว่าความสามารถที่จะนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ได้
3) ในบางสถานการณ์ของอาจสมมติความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ไม่สอดคล้องกับโลกความเป็นจริง

5. ขอบเขตของการศึกษา

สำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ในเล่มนี้ จะประกอบไปด้วยเนื้อหา 3 ส่วนใหญ่ๆ ด้วยกัน ซึ่งจะครอบคลุมการวิเคราะห์ปัญหาทั้งทางด้านเศรษฐศาสตร์จุลภาค (Microeconomics) และเศรษฐศาสตร์มหภาค (Macroeconomics) อันประกอบด้วย

5.1 การวิเคราะห์เชิงสถิต (Static Analysis) หรือ การวิเคราะห์ดุลยภาพ (Equilibrium Analysis) เป็นการศึกษาที่มุ่งให้ความสนใจสภาพที่เป็นอยู่ ณ ขณะใดขณะหนึ่ง ไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นก่อน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เป็นการวิเคราะห์ในกรณีที่แบบจำลองทางเศรษฐกิจนั้นๆ อยู่ในลักษณะที่ได้ดุลยภาพหรืออยู่ในสภาพสมดุลนั่นเอง ตัวอย่างการวิเคราะห์ อาทิ ราคาและปริมาณสินค้าที่ซื้อขายในท้องตลาดถูกกำหนดได้อย่างไร

5.2 การวิเคราะห์แบบเชิงสถิตเปรียบเทียบ (Comparative Static Analysis) เป็นการศึกษาเปรียบเทียบระหว่างสภาวะดุลยภาพทั้งสอง (จุดดุลยภาพเดิมกับจุดดุลยภาพใหม่) ซึ่งเป็นการบอกให้ทราบถึงทิศทางและขนาดของการเปลี่ยนแปลง แต่ไม่สามารถบอกให้ทราบถึงวิธีการที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจากจุดดุลยภาพหนึ่งไปสู่อีกจุดดุลยภาพหนึ่ง การวิเคราะห์แบบเชิงสถิตเปรียบเทียบนี้เกี่ยวข้องกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Change)ในอนุพันธ์แบบต่างๆ, สมการผลต่างอนุพันธ์ (Differential Calculus) เป็นต้น ตัวอย่างการวิเคราะห์ อาทิ ในเรื่องของการเปลี่ยนแปลงตัวกำหนดอุปสงค์และอุปทานส่งผลให้ระดับราคาและปริมาณตลาดเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

5.3 การวิเคราะห์เชิงพลวัต (Dynamic Analysis) เป็นการวิเคราะห์ที่มีจุดมุ่งหมายในการติดตามและศึกษาว่าในช่วงระยะเวลาหนึ่งตัวผันแปรต่างๆ มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้อง หรือมีผลกระทบต่อภาวะเศรษฐกิจในช่วงเวลาอื่นๆ อย่างไร การวิเคราะห์แบบนี้ต้องมีเรื่องของเวลามาเกี่ยวข้อง ต้องมีการระบุ วัน เดือน ปี ของทุกค่าของตัวแปร เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้เกี่ยวข้องกับ อินทิกรัลแคลคูลัส (Integral Calculus), สมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equations) เป็นต้น

6. แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์

แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ (Economics Model) หรือเรียกอีกอย่างว่าทฤษฎีเศรษฐศาสตร์ เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทางเศรษฐกิจ อย่างมีระเบียบแบบแผนทั้งนี้ อาจเป็นลักษณะของข้อความหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ก็ได้ แต่โดยทั่วไปแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์มีจุดมุ่งหมายหลักคือ

1) เพื่อการเรียนการสอน สนองความอยากรู้ของผู้ที่สนใจศึกษา

2) เพื่ออธิบายพฤติกรรมทางเศรษฐกิจของมนุษย์และของระบบเศรษฐกิจ

3) เพื่อทำนายหรือคาดการณ์พฤติกรรมทางเศรษฐกิจของมนุษย์และของระบบเศรษฐกิจ

ตัวอย่างแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ อาทิ แบบจำลองดุลยภาพตลาด

$$Q_d^x = a - bP_x \qquad (1)$$

$$Q_s^x = -c + dP_x \qquad (2)$$

ดุลยภาพตลาดเกิดขึ้นเมื่อ สมการที่ (1) = (2) หรือ

$$Q_d^x = Q_s^x \qquad \text{โดยที่ } a, b, c \text{ และ } d \quad > 0 \qquad (3)$$

จากแบบจำลองดุลยภาพตลาดข้างต้น ในสมการที่ (1) เป็นสมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X ซึ่งสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ว่า ปริมาณอุปสงค์ (Quantity Demand) สำหรับสินค้า X มีความสัมพันธ์ที่แปรผกผันกับระดับราคาของสินค้า X กล่าวคือ ถ้า X มีราคาที่สูงขึ้น จะส่งผลให้ปริมาณความต้องการต่อสินค้า X ลดลง และตรงกันข้าม หาก X มีราคาที่ต่ำลง ก็จะทำให้ปริมาณความต้องการต่อสินค้า X เพิ่มขึ้น

สมการที่ (2) เป็นสมการอุปทานต่อสินค้า X ซึ่งสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ว่า ปริมาณอุปทาน (Quantity Supply) ที่มีต่อสินค้า X จะมีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกับระดับราคาสินค้า X กล่าวคือ ถ้า X มีราคาที่สูงขึ้น ปริมาณความต้องการขายสินค้า X ก็จะสูงขึ้นตาม และถ้า X มีราคาต่ำลง ปริมาณความต้องการขายสินค้า X ก็จะลดลงเช่นกัน

เมื่อนำสมการที่ (1) และ (2) มาเท่ากัน ก็จะได้สภาวะดุลยภาพของตลาดสินค้า X นั่นคือ ดุลยภาพตลาดเกิดขึ้น ณ ระดับที่ปริมาณอุปสงค์เท่ากับปริมาณอุปทานพอดี ก่อให้เกิดระดับราคาดุลยภาพ (Equilibrium Price) และปริมาณดุลยภาพ (Equilibrium Quantity) ดังแสดงในสมการที่ (3) เป็นต้น

7. องค์ประกอบของแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์

1) ข้อสมมติ (Assumption) เป็นการกำหนดขอบเขตการทำงานว่าจะเป็นไปภายใต้เงื่อนไขและสถานการณ์อย่างไร ข้อสมมตินี้มีหลายรูปแบบ อาทิ ในรูปแบบคำจำกัดความ ในรูปของเงื่อนไข ได้แก่ มนุษย์มีเหตุมีผลในการดำเนินกิจกรรมทางเศรษฐกิจ, ปัจจัยอื่นคงที่

2) สมมติฐาน (Hypothesis) เป็นข้อความที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ ในทฤษฎีหรือแบบจำลอง อาจจะอยู่ในรูปแบบเฉพาะเจาะจงทั้งขนาดและทิศทาง หรือ อยู่ในรูปกว้างๆ โดยทั่วไป เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณการบริโภคกับราคาสินค้าเป็นไปในทิศทางตรงกันข้าม

3) คำทำนาย (Prediction) เป็นการทำนายจากเงื่อนไขที่กำหนด และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามสมมติฐาน

8. ประเภทตัวแปรที่ใช้ในแบบจำลอง

ตัวแปรที่ใช้ในแบบจำลองสามารถแบ่งได้ 2 ประเภท คือ

8.1 ตัวแปรภายนอก (Exogenous Variables)

หมายถึงลักษณะของตัวแปรที่ค่าของมันขึ้นอยู่กับการกำหนดขึ้นจากปัจจัยหรือเหตุการณ์ซึ่งปรากฏอยู่ภายนอกแบบจำลองที่กำลังศึกษา

8.2 ตัวแปรภายใน (Endogenous Variables)

หมายถึงลักษณะของตัวแปรที่ถูกกำหนดค่าขึ้นจากภายในแบบจำลองที่กำลังศึกษา ตัวอย่างการพิจารณาตัวแปรภายนอกและตัวแปรภายในต่อไปนี้ เป็นแบบจำลองดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจมหภาคแบบ 2 ภาคเศรษฐกิจ โดยที่

ดุลยภาพเกิดขึ้น ณ ระดับที่ $Y = C + G$

โดยที่ $C = f(Y)$

และ $G = G_a$

จากแบบจำลองดังกล่าว จะเห็นว่าตัวแปร G หรือค่าใช้จ่ายมวลรวมของภาครัฐบาล (Government Expenditure) ถูกกำหนดให้คงที่ ($G = G_a$) โดยค่าของ G จะมากหรือน้อยเพียงใดขึ้นกับการตัดสินใจของรัฐบาล อันเป็นปัจจัยที่เกิดขึ้นภายนอกแบบจำลอง ฉะนั้น G จึงถูกจัดเป็นตัวแปรภายนอก ส่วน C หรือค่าใช้จ่ายในการอุปโภคบริโภคมวลรวม (Consumption Expenditure) และ Y หรือรายได้ประชาชาติ (National Income) เป็นตัวแปรภายใน เพราะค่าของมันถูกกำหนดขึ้นภายในรแบบจำลองนี้ (คือสามารถหาค่าของตัวแปรได้จากการแก้สมการของแบบจำลอง)

3) ตัวพารามิเตอร์ (Parameters)

ตัวพารามิเตอร์ ก็คือ ตัวคงที่ (Constant) ที่สามารถเปลี่ยนแปลงค่าได้ขึ้นอยู่กับกลุ่มข้อมูลที่นำมาใช้พิจารณา เป็นตัวแปรที่ไม่ต้องการระบุค่าแน่นอน มักเขียนในรูปสัญลักษณ์ เช่น a , b , k เป็นต้น เช่น $Q_d = a - bP$ เมื่อ a , $b > 0$ เราเรียกตัวอักษร a , b ในสมการว่า ตัวพารามิเตอร์ ส่วนตัวคงที่ที่อยู่ควบคู่กับตัวแปร มีการระบุค่า เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของตัวแปรนั้น เช่น $0.8y$

9. ความสัมพันธ์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ (Economics Relationships)

ความสัมพันธ์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มของตัวแปรต่างๆ อาทิ

- ราคาสินค้า และปริมาณการผลิต
- รายได้ และการใช้จ่ายของบุคคล
- การนำเข้า และอัตราแลกเปลี่ยน
- ระดับของการผลิต และต้นทุนการผลิต

ฯลฯ

ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ ดังกล่าวว่าจะมีความสัมพันธ์กันอย่างไร นั้น มีวิธีการอยู่ด้วยกัน 3 วิธี คือ

1) วิธีการคำพูดหรือข้อความ
2) วิธีการใช้กราฟ
3) วิธีการใช้สมการ

ซึ่งแต่ละวิธีโดยเฉพาะวิธีการใช้กราฟนั้น ผู้เรียนได้ศึกษามาแล้วในส่วนของเศรษฐศาสตร์จุลภาค 1 และผู้เรียนสามารถศึกษารายละเอียดได้ในบทต่อๆ ไป

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิจารณาข้อดีและข้อเสียของการใช้คณิตศาสตร์ในทางเศรษฐศาสตร์
2. จงเปรียบเทียบความแตกต่างของการวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบและการวิเคราะห์เชิงพลวัต
3. แบบจำลองรายได้ประชาชาติดุลยภาพ ดังนี้

$$Y = C_0 + bY_d + I_0 + iY + G_0 + X_0 - (M_0 + mY)$$

จากแบบจำลองข้างต้น จงระบุว่าตัวแปรใดบ้างเป็นตัวแปรภายนอก ตัวแปรภายใน และตัวพารามิเตอร์

4. จงแสดงพฤติกรรมของผู้ขายในการขายสินค้า A ณ ระดับราคาต่างๆ โดยกราฟพร้อมทั้งอธิบายพฤติกรรมดังกล่าวให้ชัดเจน

เอกสารอ้างอิง

Klein, Michael W. (2002). ***Mathematical Methods for Economics.*** 2nd ed. Boston : Pearson.

Sydsaeter K. & Hammond P. (1995). ***Essential Mathematics for Economics Analysis.*** 2nd ed. London : Pearson.

Wisniewski M. (1996). ***Introductory Mathematical Methods in Economics.*** 2nd ed. London : McGraw -Hill.

กฤตยา ตติรังสรรค์สุข. (2547). ***เศรษฐศาสตร์มหภาคเบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภราดร ปรีดาศักดิ์. (2547). ***หลักเศรษฐศาสตร์จุลภาค.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

บทที่ 2
ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน สมการ กราฟ และการประยุกต์ใช้

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจและอธิบายความแตกต่างระหว่างความสัมพันธ์และฟังก์ชันได้
2. เพื่อให้ผู้เรียนทราบรูปแบบต่างๆ ของฟังก์ชันได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนคำนวณความชันและวาดกราฟแสดงสมการเชิงเส้นได้
4. เพื่อให้ผู้เรียนประยุกต์ใช้สมการทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์
5. เพื่อให้ผู้เรียนประยุกต์ใช้ระบบสมการทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ดุลยภาพในเชิงเศรษฐศาสตร์

เนื้อหา

1. ความสัมพันธ์
2. ฟังก์ชันและกราฟ
3. ชนิดของฟังก์ชัน
4. สมการเชิงเส้น ความชันและส่วนตัด
5. ฟังก์ชันเส้นตรง
6. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์
7. ระบบสมการเชิงเส้น
8. การประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

1. ความสัมพันธ์

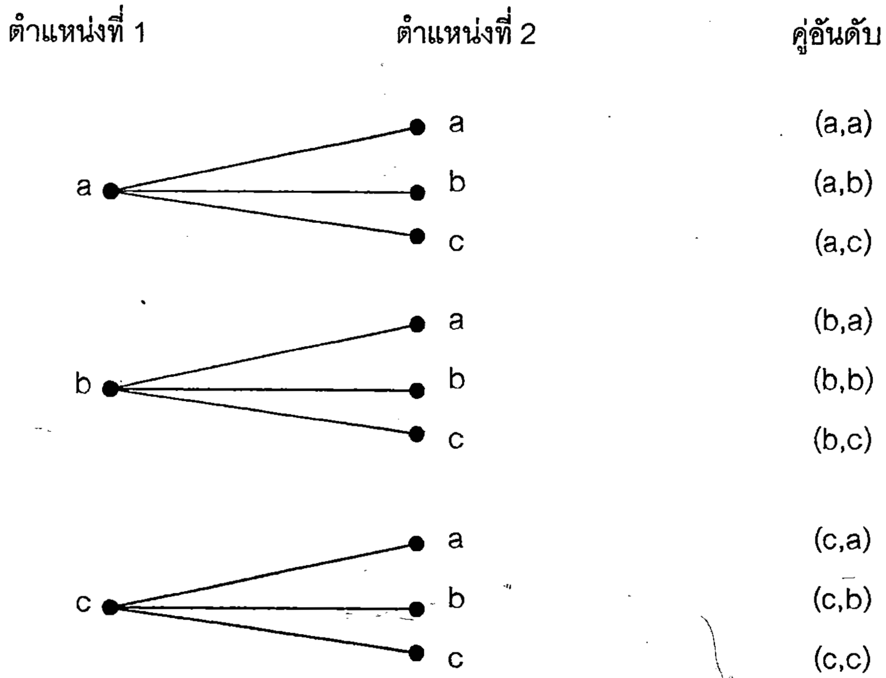
1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

สมมติว่า เซต S ประกอบด้วยสมาชิก 3 ตัวคือ a, b, c

S = a, b, c

ถ้านำสมาชิกเหล่านี้มาเขียนให้อยู่ในรูปคู่อันดับ (Orders Pair) จะได้จำนวนคู่อันดับรวมทั้งสิ้นเท่าไร

แนวคิดในเรื่องนี้คือ คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตำแหน่ง ตำแหน่งแรกอาจเลือกสมาชิกมาวางได้ 3 วิธีคือ a หรือ b หรือ c แต่ละวิธีของตำแหน่งแรก อาจเลือกสมาชิกลงในตำแหน่งที่ 2 ได้ 3 วิธีเช่นกัน คือ a หรือ b หรือ c ดังนั้นจำนวนคู่อันดับทั้งสิ้นที่จัดได้เท่ากับ $3^2 = 9$ คู่อันดับ ดังแสดงด้วยแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) ในภาพที่ 2.1 ข้างล่างนี้



ภาพที่ 2.1 แผนภูมิต้นไม้ เมื่อเซต S = a, b, c

ในกรณีที่มีเซต 2 เซต คือ $S_1 = \{1,2,3\}$ และ $S_2 = \{4,5\}$ ถ้านำสมาชิกในสองเซต นี้มาจัดคู่อันดับ (x, y) โดยมีเงื่อนไขว่า x จะต้องเป็นสมาชิกของ S_1 ส่วน y เป็นสมาชิกของ S_2 จะได้คู่อันดับรวมทั้งหมดสามารถหาได้ดังนี้

ถ้าเซต S_1 ประกอบด้วยสมาชิก m ตัว และเซต S_2 ประกอบด้วยสมาชิก n ตัว จำนวนคู่อันดับที่สามารถจัดได้เท่ากับ $m \times n$ คู่อันดับ

จำนวนคู่อันดับทั้งหมดที่จัดได้นี้ อาจพิจารณาได้เป็นเซตหนึ่ง โดยมีคู่อันดับแต่ละตัวเป็นสมาชิก เซตของคู่อันดับดังกล่าวอาจเขียนได้ในรูป

$$S_1 \times S_2 = \{(x, y) | x \in S_1 and\ y \in S_2\}$$

นั่นคือ $S_1 \times S_2$ เป็นเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยมีพิกัดที่ 1 หรือ x เป็นสมาชิกของ S_1 และมีพิกัดที่ 2 หรือ y เป็นสมาชิกของ S_2

กล่าวโดยทั่วไป ถ้านำสมาชิกของเซต 2 เซตใดๆ A และ B มาจัดคู่อันดับ (x, y) โดยมีเงื่อนไขว่า $x \in A$ และ $y \in B$ เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สามารถจัดได้จะแสดงในรูป

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A and\ y \in B\}$$

เซตดังกล่าวนี้เรียกว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B และเรียกว่า $A \times B$ ว่า เอ ครอส บี

ดังนั้นถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ของผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x เป็นสมาชิกของ A และ y เป็นสมาชิกของ B หรือเราอาจให้คำจำกัดความของคำว่า ความสัมพันธ์ได้ดังนี้

"ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์ r คือ เซตย่อยของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ สมาชิกของเซตย่อย r ประกอบด้วยคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$"

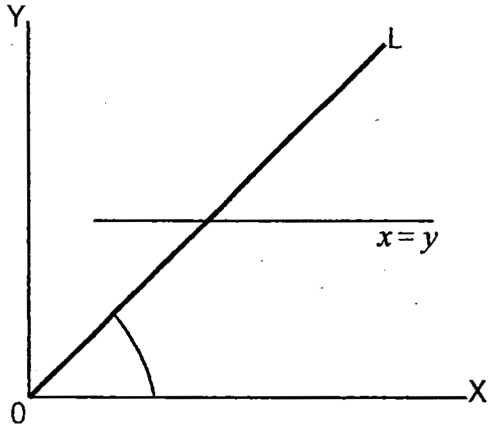
2. ฟังก์ชันและกราฟ

2.1 ความหมายของฟังก์ชัน

ในเบื้องต้นเราจะเห็นได้ว่า ความสัมพันธ์ r ก็คือ คู่อันดับชุดหนึ่ง (จากคู่อันดับทั้งหมดซึ่งเรียกว่าผลคูณคาร์ทีเซียน) ซึ่งสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเหล่านี้มีความสัมพันธ์กับสมาชิกตัวหลังในรูปแบบหนึ่ง สมาชิกตัวหน้าทุกตัวหรือค่าต่างๆ ของ x เรียกว่า โดเมนของความสัมพันธ์ r ส่วนสมาชิกตัวหลังทุกตัวหรือค่าต่างๆ ของ y เรียกว่า เรนจ์ของความสัมพันธ์ r

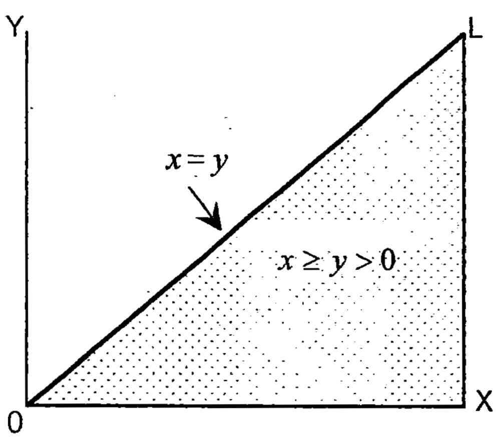
รูปแบบของความสัมพันธ์อาจอยู่ในลักษณะต่างๆ เช่น "เท่ากัน" "มากกว่า" และ "น้อยกว่า" อาทิ $y = x, x + y = 5, y = x^2, x^2 + y^2 = 16, y \le x, y > x$ ฯลฯ

อย่างไรก็ดี ความสัมพันธ์รูปแบบต่างๆ เหล่านี้ เมื่อกำหนดค่า x ให้บางความสัมพันธ์จะได้ y เพียงค่าเดียว แต่บางความสัมพันธ์จะได้ y มากกว่าหนึ่งค่า เช่น จากตัวอย่างรูปแบบความสัมพันธ์ $x = y$ ในภาพที่ 2.2 ถ้ากำหนดค่า x ใดๆ จะได้ y เพียงค่าเดียว เช่น ถ้า x = 1 จะได้ y = 1 ถ้า x = 5 จะได้ y = 5 เป็นต้น

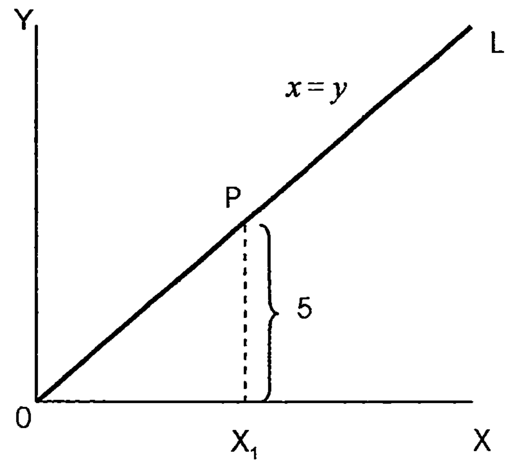


ภาพที่ 2.2 ตำแหน่งคู่อันดับซึ่งเป็นจำนวนบวกทั้งหมดตามเงื่อนไข $x = y$

ในขณะที่ ถ้ารูปแบบความสัมพันธ์เป็น $x \geq y > 0$ ดังแสดงในภาพที่ 2.3 จะเห็นได้ว่า เมื่อกำหนดค่า x ให้หนึ่งค่าจะได้ค่า y มากกว่า 1 ค่า เช่น $x = 5$ y สามารถเป็นได้ตั้งแต่ 1, 2, ...,5 เป็นต้น ทำให้พื้นที่คำตอบของความสัมพันธ์คือพื้นที่ OLX ส่วนในภาพที่ 2.4 ก็เช่นกัน ถ้า $x = 5$ ดังแสดงด้วยระยะ $0X_1$ ค่า y อาจเท่ากับ 5 ดังแสดงด้วยระยะ PX_1 หรืออาจน้อยกว่า 5 คือเป็นระยะทางจากจุด X_1 ไปยังจุดใดๆ ที่ต่ำกว่าจุด P ลงมา เช่น 4, 3, 2, 1 ก็ได้ ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.3 ตำแหน่งคู่อันดับซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกตามเงื่อนไข $x \geq y > 0$

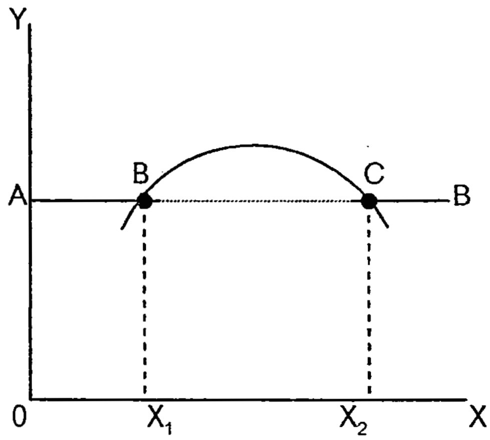


<u>ภาพที่ 2.4</u> เงื่อนไขความสัมพันธ์ $x \geq y > 0$
ซึ่งทำให้ได้ y มากกว่า 1 ค่า สำหรับค่า x ที่กำหนดให้1 ค่า

จากกรณีที่ยกมานี้จึงเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ใดก็ตาม ที่เมื่อกำหนดค่า x แล้วทำให้ได้ค่า y เพียง 1 ค่า เราเรียกว่า y เป็นฟังก์ชันของ x และเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ ดังนั้นจึงอาจให้คำจำกัดความของฟังก์ชันได้ว่า **ฟังก์ชัน คือ เซตของคู่อันดับซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับค่าใดๆ ของ x จะสามารถหาค่า y ที่สอดคล้อง (Corresponding) กับค่าของ x นั้นได้เพียง 1 ค่า**

สำหรับในกรณีกลับกัน กล่าวคือ ถ้ากำหนดค่า y ให้ ไม่จำเป็นที่ฟังก์ชันจะให้ค่า x ที่สอดคล้องกับค่า y เพียงค่าเดียว แต่จะเป็นกี่ค่าก็ได้ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งสมมติเป็นฟังก์ชันพาราโบลา ดังแสดงในภาพที่ 2.5 จะเห็นว่า เส้นตรง AB ซึ่งลากขนานกับแกน X และตัดเส้นโค้งที่จุด P และ Q นั้นแสดงถึงค่า y เพียงค่าเดียวคือ ระยะ 0A แต่จะให้ค่า x ได้ 2 ค่า คือ ระยะ $0X_1$ และ $0X_2$

แต่ถ้ากำหนดค่า x แต่ละค่าใดๆ คือ ลากเส้นตรงจากแกน X ให้ขนานกับแกน Y จะปรากฏว่าตัดเส้นโค้งเพียงจุดเดียว แม้บางค่าของ x จะให้ค่า y ตัวเดียวกันก็ไม่เป็นไร เช่น ระยะ $0X_1$ และ $0X_2$ ต่างก็ให้ค่า y เท่ากับระยะ 0A ดังแสดงในภาพที่ 2.5



ภาพที่ 2.5 ฟังก์ชัน $y = f(x)$

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ จึงอาจกล่าวสรุปได้ว่า **ฟังก์ชัน คือ รูปแบบหนึ่งของความสัมพันธ์ หรือ ฟังก์ชันก็คือความสัมพันธ์นั่นเอง แต่ความสัมพันธ์อาจมิใช่ฟังก์ชันก็ได้**

2.2 รูปแบบของฟังก์ชัน

ในการเขียนฟังก์ชันนั้น เราอาจเขียนได้หลายรูปแบบ แล้วแต่วัตถุประสงค์ของการเขียน โดยทั่วไปอาจแบ่งออกได้เป็น 3 รูปแบบ คือ

1) ฟังก์ชันทั่วไป (General Function) ในการกล่าวถึงฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งโดยทั่วไป มักจะระบุแต่เพียงว่าตัวแปรอิสระตัวใดบ้างที่มีผลกระทบต่อตัวแปรตาม แต่จะไม่ลงลึกในรายละเอียดว่ามีผลกระทบมากน้อยเพียงไร และในทิศทางอย่างไร ฟังก์ชันที่เขียนขึ้นตามวัตถุประสงค์ดังกล่าวเรียกว่า ฟังก์ชันทั่วไป ซึ่งมีรูปแบบดังตัวอย่างต่อไปนี้

(1) ฟังก์ชันการบริโภค

$C = f(Y_d)$ เมื่อ C คือ ปริมาณการบริโภค

Y_d คือ ระดับรายได้ที่อยู่ในมือบุคคลของผู้บริโภค

(2) ฟังก์ชันอุปสงค์

$Q_d = f(P, Y, P_r)$ เมื่อ Q_d คือ ปริมาณสินค้าที่ต้องการซื้อ

P คือ ราคาสินค้านั้น

Y คือ ระดับรายได้ของผู้บริโภค

P_r คือ ราคาสินค้าที่เกี่ยวข้อง

2) ฟังก์ชันเฉพาะ (Specific Function) ฟังก์ชันเฉพาะจะระบุรายละเอียดของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระแต่ละตัวกับตัวแปรตาม ว่ามีขนาดและทิศทางความสัมพันธ์อย่างไร จากตัวอย่าง

ฟังก์ชันการบริโภคและฟังก์ชันอุปสงค์ข้างต้น ซึ่งเขียนในรูปแบบทั่วไป อาจแสดงในรูปฟังก์ชันเฉพาะได้ดังนี้

(1) ฟังก์ชันการบริโภค

$$C = a + bY_d$$

(2) ฟังก์ชันอุปสงค์

$$Q_d = a - bP + cY + dP_r \text{ ; } a,b,c,d \text{ เป็นค่าคงที่}$$

3) ฟังก์ชันจำบัง (Implicit Function) รูปแบบความสัมพันธ์ที่ได้กล่าวมาแล้วไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันทั่วไปหรือฟังก์ชันเฉพาะ เราเรียกได้ว่าเป็นฟังก์ชันชัดแจ้ง (Explicit Function) ที่เป็นเช่นนี้เพราะรูปแบบความสัมพันธ์ได้แสดงไว้ให้เห็นอย่างชัดเจนว่า ตัวแปรตามซึ่งอยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระซึ่งอยู่ทางขวามือ เช่น

$$y = f(x) \tag{1}$$

หรือ

$$y = 5 - 3x^2 \tag{2}$$

ส่วนฟังก์ชันที่มิได้อยู่ในรูปแบบที่กล่าวข้างต้น กล่าวคือ จะมีพจน์ (Term) ของตัวแปรตามและของตัวแปรอิสระอยู่ปะปนกัน ซึ่งบางฟังก์ชันก็สามารถทำให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันชัดแจ้งได้ แต่บางฟังก์ชันก็ไม่สามารถทำให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันชัดแจ้งได้ ฟังก์ชันที่มีลักษณะดังกล่าวนี้เรียกว่า ฟังก์ชันจำบัง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$x + y - 1 = 0 \tag{3}$$

$$x^2y - x + y = 1 \tag{4}$$

$$y^2 + xy - x = 10 \tag{5}$$

สำหรับสมการ (3) และ (4) สามารถทำให้อยู่ในรูปฟังก์ชันชัดแจ้งได้ คือ

จาก (3) $\qquad y = 1 - x$

จาก (4) $\qquad y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$

ส่วนสมการ (5) ไม่สามารถทำให้อยู่ในรูปฟังก์ชันชัดแจ้งได้

4) ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function) ฟังก์ชันผกผันเป็นฟังก์ชันที่กลับกันของฟังก์ชันทั่วไปหรือเป็นฟังก์ชันที่กลับกันของฟังก์ชันเฉพาะ เช่น ถ้า $y = f(x)$ ฟังก์ชันผกผันจะเขียนในรูป $x = f^{-1}(y)$ แต่ทั้งนี้จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า แต่ละค่าของ y ที่กำหนดให้ จะสามารถหาค่า x ได้เพียง 1 ค่าเท่านั้น

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันอุปสงค์ที่มักเขียนกันก็คือ

$$Q_d = f(P)$$

หรือ $$Q_d = a - bP$$

เมื่อ Q_d คือ ปริมาณสินค้าที่ต้องการซื้อ

P คือ ราคาสินค้า

แต่ในการวิเคราะห์เรื่องอุปสงค์อุปทาน และมีการเขียนกราฟ เราจะให้ P เป็นแกนตั้ง และ Q_d เป็นค่าบนแกนนอน ดังนั้น ในกรณีเช่นนี้เราจำเป็นต้องเขียน P ให้เป็นฟังก์ชันของ Q_d นั่นคือ $P = f^{-1}(Q_d)$ ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันผกผัน

ดังนั้น จาก $$Q_d = a - bP$$

จะได้ $$bP = a - Q_d$$

$$P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q_d$$

3. ชนิดของฟังก์ชัน

โดยทั่วไปฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ชนิดหลัก คือ ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Functions) และฟังก์ชันที่มิใช่พีชคณิต (Non-algebraic Functions) โดยเฉพาะอย่างยิ่งฟังก์ชันชนิดหลังนี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่า ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Functions) นอกจากนี้ยังมีฟังก์ชันชนิดต่างๆ ดังนี้

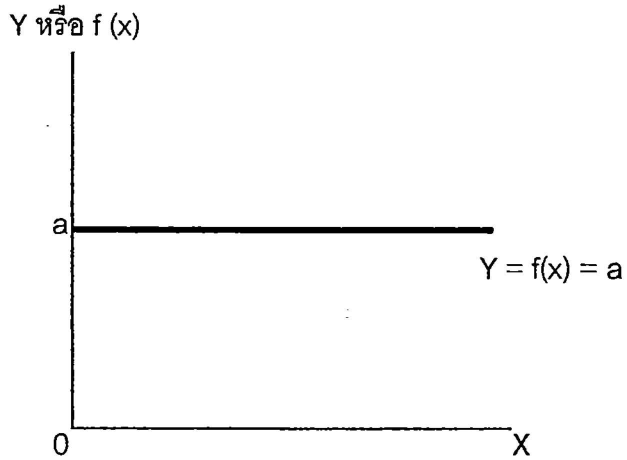
1) ฟังก์ชันคงที่ (Constant Functions)

ฟังก์ชันคงที่ ได้แก่ ฟังก์ชันที่มีเรนจ์ของฟังก์ชันเพียงค่าเดียว โดยไม่คำนึงถึงว่าโดเมนของฟังก์ชันหรือค่าของ x จะเป็นเท่าไร รูปแบบของฟังก์ชันคงที่ คือ

$y = a$ หรือ $f(x) = a$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ใดๆ

ฟังก์ชันคงที่เมื่อนำมาเขียนกราฟในระนาบพิกัดฉาก ก็คือเส้นตรงที่ลากขนานกับแกนนอน X โดยตัดแกน Y ที่ระยะ a เหนือจุดกำเนิด ดังภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 กราฟแสดงฟังก์ชันคงที่

ตัวอย่างของฟังก์ชันคงที่ในทางเศรษฐศาสตร์คือ ฟังก์ชันการลงทุนอิสระ (Autonomous Investment) เช่น I = 1,000 ล้านบาท หรือ $I = I_0$ เป็นต้น

2) ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Functions)

ฟังก์ชันชนิดนี้มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว แต่เป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วยพจน์ต่างๆ บวกหรือลบกัน กราฟของฟังก์ชันมีลักษณะเป็นเส้นตรงหรือโค้งเรียบ (คือไม่หักงอหรือเป็นเหลี่ยม) ต่อเนื่องกันไป ตัวอย่างของฟังก์ชันชนิดนี้ได้แก่

$$y = f(x) = x + 2$$

$$y = f(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$y = f(x) = 2x^2 + x^2 - 3x + 1$$

รูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันพหุนาม คือ

$$y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \ldots \qquad (1)$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่ แต่ฟังก์ชันพหุนาม ก็อาจเขียนใหม่ในรูปการเรียงลำดับพจน์ตามเลขชี้กำลังของ x จากมากไปหาน้อยได้ดังนี้

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \ldots \qquad (2)$$

เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือเป็นเลข 0

จากฟังก์ชัน (1) หรือ (2) จะเห็นว่ามีจำนวนพจน์อยู่ n + 1 พจน์ อย่างไรก็ตาม จำนวนพจน์จะมีได้อย่างมากเท่าไร และกราฟของฟังก์ชันจะมีลักษณะอย่างไรขึ้นอยู่กับค่า n ซึ่งเป็นเลขชี้กำลังสูงสุดของ x และมักเรียกค่า n ว่าเป็นองศาของฟังก์ชันพหุนาม

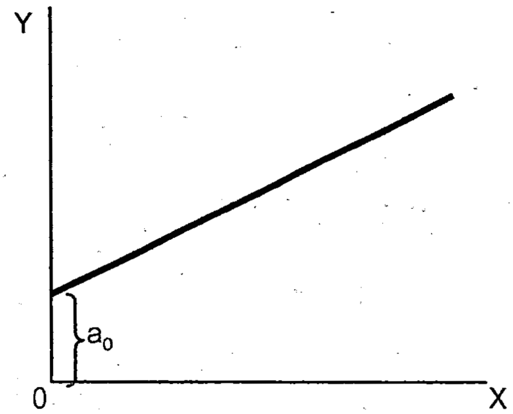
กรณีที่ 1 ; $n = 0, y = a_0$ เป็นฟังก์ชันคงที่

กรณีที่ 2 ; $n = 1, y = a_0 + a_1x$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

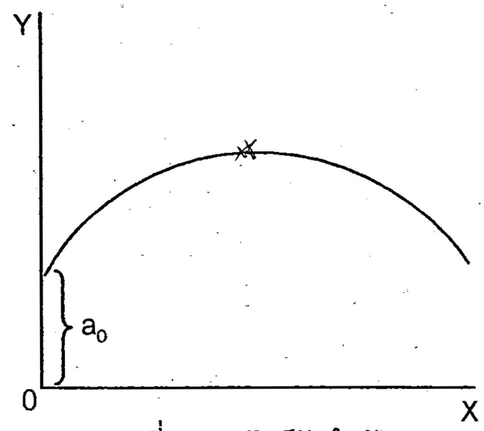
กรณีที่ 3 ; $n = 2, y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง

กรณีที่ 4 ; $n = 3, y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ เป็นฟังก์ชันกำลังสาม

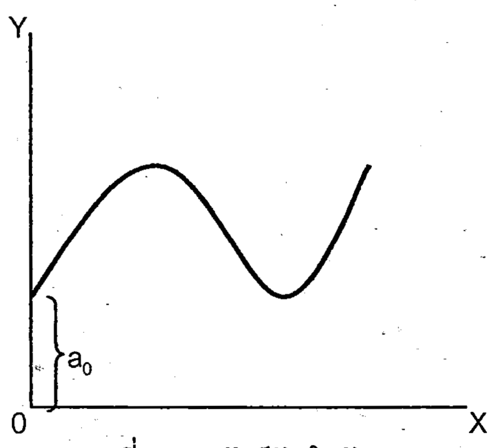
ถ้านำฟังก์ชันเหล่านี้มาลงจุด กรณีแรก จะได้กราฟของฟังก์ชัน $y = a_0$ ดังแสดงไว้ในภาพที่ 2.7.1 ภาพที่ 2.7.2 และภาพที่ 2.7.3



ภาพที่ 2.7.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น



ภาพที่ 2.7.2 ฟังก์ชันกำลังสอง



ภาพที่ 2.7.3 ฟังก์ชันกำลังสาม

ภาพที่ 2.7 ฟังก์ชันพหุนามกรณีต่างๆ

จากภาพที่ 2.7.1 ซึ่งแสดงถึงฟังก์ชันเชิงเส้นของสองตัวแปรซึ่งเป็นกราฟเส้นตรงนั้น ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = a_0$ ซึ่งเป็นจุดตัดบนแกน Y (Y intercept) เหนือจุดกำเนิด ส่วนสัมประสิทธิ์ a_1 เป็นค่าความชันของเส้นตรง ซึ่งมีความหมายในทางเศรษฐศาสตร์ว่า แต่ละหน่วยที่เพิ่มขึ้นของค่า x จะมีผลทำให้ค่า y เพิ่มขึ้นหรือลดลง a_1 หน่วย ทั้งนี้แล้วแต่ว่าค่า a_1 เป็นบวกหรือลบ สำหรับภาพที่ 2.7.1 นั้น ค่า a_1 เป็น

ค่าบวกซึ่งเป็นลักษณะของเส้นอุปทาน แต่ถ้า a_1 เป็นค่าลบ เส้นกราฟก็จะมีทิศทางลาดจากบนซ้ายลงไปล่างขวา ซึ่งเป็นลักษณะของเส้นอุปสงค์

จากภาพที่ 2.7.2 แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันกำลังสองคือรูปพาลาโบลา แต่เป็นรูปพาลาโบลาคว่ำ แสดงว่าค่า $a_2 < 0$ ในกรณีที่ค่า $a_2 > 0$ รูปพาลาโบลาจะมีลักษณะเป็นรูปหงาย ส่วนค่า a_0 แสดงถึงจุดตัดบนแกน Y เช่นเดียวกับฟังก์ชันเชิงเส้น

ส่วนภาพที่ 2.7.3 เป็นกราฟของฟังก์ชันกำลังสามซึ่งกราฟมีลักษณะเป็นคลื่นที่มีโค้งคว่ำและหงายวางติดต่อกัน สำหรับค่า a_0 แสดงถึงจุดตัดบนแกน Y เช่นเดียวกับกราฟฟังก์ชันอื่นๆ ที่กล่าวแล้ว

ฟังก์ชันพหุนาม ตามที่ยกมาแสดงนี้มีที่ใช้บ่อยในแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ ซึ่งจะได้พบในหน่วยต่อๆ ไป

3) ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational functions)

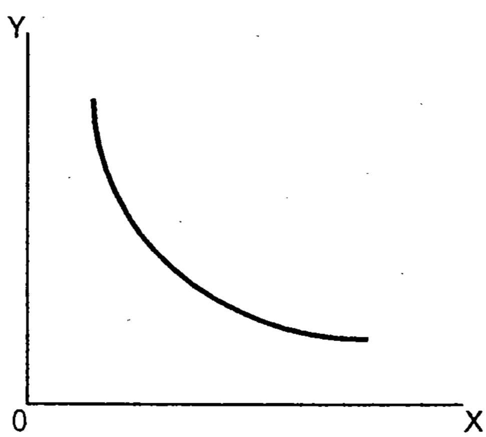
ฟังก์ชันตรรกยะ เป็นฟังก์ชันที่ได้มาจากอัตราส่วนของฟังก์ชันโพลิโนเมียล ตัวอย่างเช่น

(1) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ (x ≠ -2)

(2) $y = \dfrac{x-1}{y^2+2x+4}$

(3) $y = \dfrac{a}{x}$ หรือ $xy = a$ เป็นต้น

สำหรับฟังก์ชันตรรกยะตามข้อ (3) ข้างต้น ถือว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะที่มีลักษณะพิเศษ กราฟของฟังก์ชันตรรกยะดังกล่าว มีชื่อเรียกว่า ไฮเปอร์โบลาผืนผ้า (Rectangular Hyperpola) ได้แสดงไว้ในภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 ฟังก์ชันตรรกยะ $y = \dfrac{a}{x}$

สำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี 20131

ลักษณะของกราฟรูป Rectangular Hyperbola ก็คือ เป็นเส้นโค้งที่มีลักษณะเว้าจากเบื้องบนมาก ปลายทั้งสองข้างของเส้นโค้งจะสมมาตรกัน (Symmetrical) และลาดไปตามแนวแกน X และ Y ทีละน้อยจนไปจรดแกน X และแกน Y ที่ระยะอนันต์ (Infinity) เส้นกราฟชนิดนี้เมื่อเปรียบเทียบกับเส้นโค้งไฮเปอร์โบลาชนิดอื่นแล้ว ชนิดนี้จะมีลักษณะเว้าจากเบื้องบนมากกว่า จนดูคล้ายกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้น จึงมีชื่อเรียกว่า Rectangular Hyperbola

เนื่องจากลักษณะพิเศษของฟังก์ชันตรรกยะชนิดนี้คือ $xy = a$ หรือผลคูณของตัวแปร x และ y มีค่าคงที่เสมอ ฟังก์ชันตรรกยะชนิดนี้จึงได้รับการนำไปประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์หลายเรื่อง เรื่องหนึ่งก็คือ เส้นอุปสงค์ที่มีลักษณะพิเศษ กล่าวคือ ผลคูณของราคาสินค้า P และปริมาณสินค้าที่ประสงค์จะซื้อ Q อันได้แก่ $P\,Q$ ซึ่งหมายถึง รายจ่ายสำหรับสินค้านั้น ณ ระดับราคาต่างๆ จะมีค่าคงที่เสมอ ลักษณะของเส้นอุปสงค์ชนิดนี้ แสดงถึงเส้นอุปสงค์ที่มีความยืดหยุ่นเอกภาพ (Unitary Elasticity) นั่นคือ ทุกจุดบนเส้นอุปสงค์ชนิดนี้ต่างก็มีความยืดหยุ่นต่อราคาเท่ากับ 1 อีกเรื่องหนึ่งของการนำฟังก์ชันตรรกยะชนิดนี้ไปประยุกต์ใช้ก็คือ เส้นต้นทุนคงที่เฉลี่ย (Average Fixed Cost หรือ AFC)

4. สมการเชิงเส้น ความชันและส่วนตัด

1) <u>สมการเชิงเส้น</u> (Linear Equation)

คือสมการที่ตัวแปรทุกตัวยกกำลังหนึ่งโดยไม่มีการคูณกันระหว่างของตัวแปร โดยรูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงเส้นนี้คือ $ax + cy = d$ โดยที่ a, c, d เป็นเลขจำนวนจริง และ a, c ไม่เท่ากับ 0 เช่น 6x + 3y = 18 เป็นต้น

2) <u>ความชัน</u> (Slope)

ของเส้นใดๆ ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม หารด้วยการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระ ซึ่งบอกให้ทราบถึงความลาดชันและทิศทางของเส้นดังกล่าว โดยเริ่มจากซ้ายมาขวา เส้นที่มีความชันเป็นบวกจะลาดขึ้น ส่วนเส้นที่มีความชันเป็นลบจะลาดลง และเส้นที่มีค่าสมบูรณ์ของความชันสูงกว่าแสดงถึงความชันมากกว่า

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

226795

330.0151
ฟ 486 ค
ฉ.1

3) <u>ส่วนตัด</u>

ส่วนตัดแกน x (x-Intercept) คือ จุดที่เส้นกราฟตัดกับแกน x การหาพิกัดของส่วนตัดแกน x ทำได้โดยกำหนดค่า y = 0

ส่วนตัดแกน y (y-Intercept) คือ จุดที่เส้นกราฟตัดกับแกน y การหาพิกัดของส่วนตัดแกน y ทำได้โดยกำหนดค่า x = 0

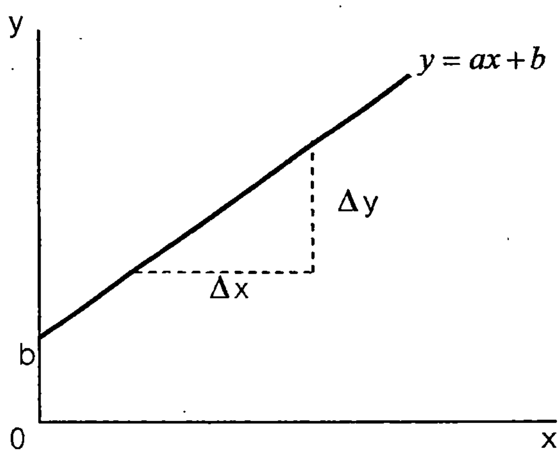
<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาสมการเชิงเส้น $y = ax + b \quad (a, b > 0)$

<u>วิธีทำ</u>

เป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบของความชันและส่วนตัด (Slope-Intercept Form)

a แสดงถึง ค่าความชันของเส้น

$(0, b)$ แสดงถึง ส่วนตัด คือ พิกัดของส่วนตัดแกน y หรือ y-Intercept



<u>ภาพที่ 2.9</u> ความสัมพันธ์เชิงสมการเส้นตรง

ตามภาพที่ 2.9 แสดงความสัมพันธ์ของสมการเส้นตรง มี a, b เป็นตัวกำหนดทิศทางของความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

นอกจากนี้ยังมีสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ x และ y ในรูปอื่นๆ อีก เช่น สมการวงกลม $x^2 + y^2 = r^2$ ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า **ฟังก์ชันคือสมการ แต่สมการมิใช่หรือใช่ฟังก์ชันก็ได้**

5. ฟังก์ชันเส้นตรง

ฟังก์ชันเส้นตรง เป็นฟังก์ชันที่กำหนดแต่ละค่าของตัวแปร x กับค่าใดๆ เพียงค่าเดียวเท่านั้น แต่ไม่ได้บอกขนาดทิศทาง ซึ่งอาจมีตัวแปรอิสระ 1 ตัวหรือมากกว่า 1 ตัว อาทิ

5.1 ฟังก์ชันเส้นตรงที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว

กำหนดให้ f มี x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม เขียนในรูปฟังก์ชันได้ว่า

$y = f(x)$ อ่านว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ x

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $f(x)$

เช่น $y = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าจำนวนจริง

ค่า y ขึ้นอยู่กับค่าของ x การเปลี่ยนแปลงค่าของ x ทำให้ค่า y เปลี่ยนแปลงโดยตรง

5.2 ฟังก์ชันเส้นตรงที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

กำหนดให้ f มี x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม เขียนในรูปฟังก์ชันได้ว่า

$Y = f(x_1, x_2)$ อ่านว่า Y เป็นฟังก์ชันของ x_1 และ x_2

เช่น $Y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ เมื่อ a_1, a_2 และ b เป็นค่าจำนวนจริง ค่าของ Y ขึ้นอยู่กับค่าของ x_1 และ x_2 ทำให้ค่า Y เปลี่ยนแปลงโดยตรง

5.3 ฟังก์ชันเส้นตรงที่มีตัวแปรอิสระ n ตัว

กำหนดให้ f มี $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรอิสระ และ Y เป็นตัวแปรตาม เขียนรูปฟังก์ชันได้ว่า

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

เช่น $Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ b เป็นค่าจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาฟังก์ชันเส้นตรง

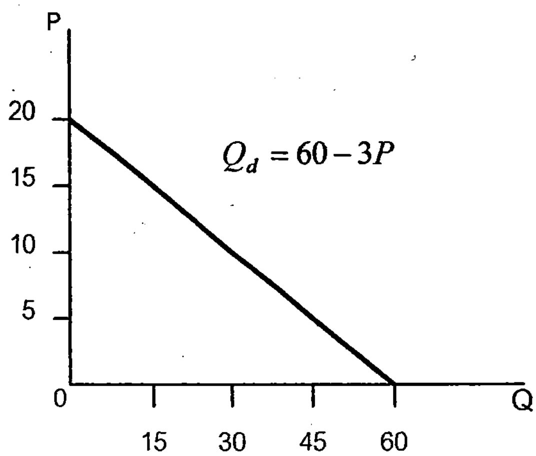
ฟังก์ชันอุปสงค์ (Demand Function) เป็นฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณความต้องการซื้อ กับราคาต่อหน่วยผลผลิต ณ ระดับราคาต่างๆ กัน ในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง โดยสินค้าส่วนใหญ่จะมีความสัมพันธ์ระหว่างราคากับปริมาณสินค้าเป็นไปในทิศทางตรงกันข้ามกัน (ตามกฎ Law of Demand) กล่าวคือ ถ้าระดับราคาสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการซื้อจะลดลง ในทำนองกลับกัน ถ้าระดับราคาสินค้าลดลง ความต้องการซื้อจะเพิ่มขึ้น เราสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันเส้นตรงได้ว่า

$$Q_d = f(P)$$

โดยที่ Q_d = ปริมาณความต้องการซื้อสินค้าชนิดใดชนิดหนึ่ง

P = ระดับราคาสินค้าชนิดนั้นต่อหน่วยผลผลิต

เช่น $Q_d = 60 - 3P$ สามารถเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ตามฟังก์ชันได้ดังภาพที่ 2.10



ภาพที่ 2.10 กราฟสมการ $Q_d = 60 - 3P$

6. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์

ฟังก์ชันเชิงเส้นถูกนำไปใช้บ่อยมากในทางเศรษฐศาสตร์ บางครั้งอาจอยู่ในรูปฟังก์ชันใหม่ ที่เกิดจากการรวมฟังก์ชันต่างๆ เข้าด้วยกัน

6.1 ต้นทุนการผลิต รายรับ และกำไร

➢ ต้นทุนการผลิต

คือ ค่าใช้จ่ายของหน่วยผลิตในการนำปัจจัยการผลิตต่างๆ มาใช้ร่วมกันในกระบวนการผลิตจนเกิดเป็นสินค้าหรือบริการ ซึ่งต้นทุนการผลิตแบ่งออกเป็น ต้นทุนการผลิตในระยะสั้นและต้นทุนการผลิตในระยะยาว

ต้นทุนการผลิตในระยะสั้น ประกอบด้วย

(1) ต้นทุนคงที่ (Fixed Cost) เป็นค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นแน่นอนเมื่อก่อตั้งกิจการ ไม่เปลี่ยนแปลงตามปริมาณการผลิต ไม่ว่าจะดำเนินการผลิตหรือไม่ก็ตาม ต้นทุนนี้ก็เกิดขึ้น

(2) <u>ต้นทุนผันแปร</u> (Variable Cost) เป็นค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นและเปลี่ยนแปลงตามจำนวนผลผลิต อาทิ ค่าวัตถุดิบ ค่าแรงงาน

หน่วยงานธุรกิจที่มีต้นทุนคงที่ และต้นทุนผันแปร เราสามารถหาต้นทุนรวม (Total Cost: TC) ได้ดังนี้ คือ ต้นทุนรวม เท่ากับผลรวมของต้นทุนคงที่ทั้งหมด (Total Fixed Cost: TFC) กับต้นทุนผันแปรทั้งหมด (Total Variable Cost: TVC) เขียนในรูปสมการได้ว่า

$$TC = TVC + TFC$$

ตัวอย่างเช่น หน่วยธุรกิจแห่งหนึ่ง มีต้นทุนรวมในการประกอบการคือ TC = 35Q + 15,000 แสดงให้เห็นว่า หน่วยผลิตดังกล่าว มีค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานคงที่ เท่ากับ 15,000 บาท และมีส่วนของค่าใช้จ่ายที่ผันแปรตามปริมาณผลผลิตเท่ากับ 35 บาทต่อ 1 หน่วยผลผลิต

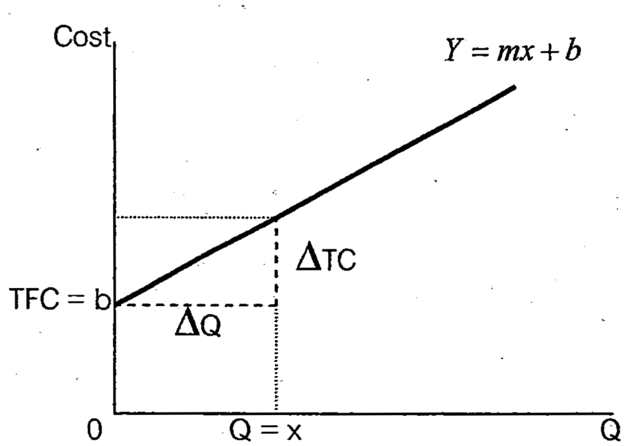
ในการแสดงความสัมพันธ์ของต้นทุนรวม กับผลผลิตด้วยกราฟเส้นตรง จะเห็นได้ว่าเส้นต้นทุนรวมของหน่วยธุรกิจจะสะท้อนให้เห็นต้นทุนคงที่ และต้นทุนหน่วยสุดท้าย (Marginal Cost: MC) ซึ่งหมายถึง ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าชนิดนั้นเพิ่มขึ้นทีละ 1 หน่วย เราสามารถหาสมการต้นทุนรวมได้โดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้คือ

$$Y = mx + b$$

เมื่อ Y = ต้นทุนรวม m = ต้นทุนส่วนเพิ่ม

x = จำนวนผลผลิต b = ต้นทุนคงที่รวม

กราฟแสดงความสัมพันธ์ตามฟังก์ชันต้นทุนรวมได้แสดงในภาพที่ 2.11



<u>ภาพที่ 2.11</u> กราฟแสดงฟังก์ชันต้นทุนรวม

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> หน่วยธุรกิจหนึ่งมีต้นทุนคงที่สำหรับโรงงาน และเครื่องจักรจำนวน 7,000 บาท และต้นทุนผันแปรหน่วยละ TVC 600 บาท ของสินค้าที่ทำการผลิต จงหาต้นทุนรวม (TC) ถ้าผลิต 30 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ TC = ต้นทุนรวมทั้งหมด

x = จำนวนผลผลิต

จะได้ว่า TC = 600x + 7,000

ถ้า x = 30, C = 600(30) + 7,000

= 25,000 บาท

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาต้นทุนรวมของการผลิตสินค้า 20 หน่วย สำหรับหน่วยธุรกิจที่มีต้นทุนคงที่ 3,500 บาท และต้นทุนหน่วยสุดท้าย 400 บาทต่อหน่วย

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ TC = ต้นทุนรวมทั้งหมดในการผลิต

x = จำนวนผลผลิต

จะได้ว่า TC = 400x + 3,500

ถ้า x = 20, TC = 400(20) + 3,500

= 11,500 บาท

- รายรับ และกำไร

หน่วยธุรกิจที่อยู่ในตลาดแข่งขันอย่างแท้จริง และจำหน่ายสินค้า x ได้ Q หน่วย แต่ละหน่วยในราคา P บาท รายรับรวม (Total revenue) ของธุรกิจนี้สามารถแสดงในรูปสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$TR = P \times Q$$

โดยที่ TR = รายรับรวมจากการขายสินค้า x

P = ราคาของสินค้า x

Q = จำนวนสินค้าที่ขาย

เช่น ธุรกิจรายหนึ่งขายสินค้า x ได้ 140 หน่วย ราคาหน่วยละ 25 บาท แสดงว่าธุรกิจนี้มีรายรับรวมดังนี้ คือ

$$TR = 25(140) = 3{,}500 \text{ บาท}$$

กำไร (Profit) หมายถึง ส่วนต่างระหว่างรายรับรวมกับต้นทุนรวม (รายรับรวมและต้นทุนรวมที่สามารถคำนวณได้ต้องเป็นสมการเส้นตรงแบบเดียวกันและมีตัวแปรเหมือนกัน) แสดงในรูปของสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$\pi = TR - TC$$

โดยที่ π = กำไร

TR = รายรับรวม

TC = ต้นทุนรวม

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> หน่วยธุรกิจหนึ่ง ในตลาดแข่งขันอย่างแท้จริง มีรายรับจากการขายสินค้า x หน่วยละ 45 บาท โดยมีต้นทุนผันแปร 25 บาทต่อชิ้น และต้นทุนคงที่ 1,600 บาท จงหาระดับกำไรที่ทำให้ธุรกิจนี้ขายได้ 200 ชิ้น

<u>วิธีทำ</u>

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = 45x$$

$$TC = 25x + 1{,}600$$

$$\pi = 45x - (25x + 1{,}600)$$

$$= 20x - 1{,}600$$

ถ้า x = 200, $\pi = 20(200) - 1{,}600 \quad = 2{,}400$ บาท

<u>6.2 ค่าเสื่อมราคาแบบเส้นตรง (Straight – Line Depreciation)</u>

1) ค่าเสื่อมราคาแบบไม่มีค่าซาก

คือ อัตราค่าเสื่อมราคาจะมีค่าคงที่เท่ากันตลอดทุกปี ราคาสินทรัพย์ลดลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้น

$$\text{ค่าเสื่อมราคาต่อปี} = \frac{\text{ราคาสินทรัพย์เริ่มแรก}}{\text{อายุการใช้งาน}}$$

มูลค่าสินทรัพย์ ณ เวลาใดๆ = ราคาสินทรัพย์เริ่มแรก – (ค่าเสื่อมราคาต่อปี × อายุการใช้งาน)

$V = v(t)$ = ราคาสินทรัพย์เริ่มแรก – (ค่าเสื่อมราคาต่อปี × อายุการใช้งาน)

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> รถบรรทุกราคา 200,000 บาท อายุการใช้งาน 10 ปี ถามว่า

ก. รถบรรทุกนี้มีค่าเสื่อมราคาต่อปีเท่ากับเท่าไร

ข. เมื่อใช้ไปแล้ว 1 ปี ราคาสินทรัพย์เท่ากับเท่าไร

ค. สร้างฟังก์ชันเส้นตรงและสมการเส้นตรงของมูลค่ารถบรรทุก ณ เวลาใดๆ

<u>วิธีทำ</u>

ก. รถบรรทุกนี้มีต้นทุนค่าเสื่อมราคาปีละ $= \dfrac{200,000}{10}$

$=$ 20,000 บาท

ข. รถบรรทุกเมื่อใช้ไป 1 ปี มีราคา $=$ 200,000 – 20,000

$=$ 180,000 บาท

ค. สามารถสร้างเป็นฟังก์ชันเส้นตรงได้ว่า

$$V = v(t)$$

โดยที่ V = มูลค่าสินทรัพย์ (รถบรรทุก)

t = จำนวนปี หรือระยะเวลาภายหลังการซื้อสินทรัพย์

สร้างสมการเส้นตรงได้ว่า

$$V = 200,000 - 20,000t, \quad 0 < t \leq 10$$

2) ค่าเสื่อมราคาแบบมีค่าซาก

สินทรัพย์หลายประเภทที่สามารถนำออกมาจำหน่ายได้เมื่อหมดอายุใช้งานแล้ว เราเรียกว่า สินทรัพย์ดังกล่าวมีค่าซาก เช่น รถบรรทุก เมื่อหมดอายุการใช้งาน ก็สามารถขายเป็นเศษเหล็กได้ ในกรณีแบบนี้ สามารถคิดค่าเสื่อมราคา ณ เวลาใดๆ ได้จาก

$$\text{ค่าเสื่อมราคาต่อปี} = \frac{\text{ราคาสินทรัพย์เริ่มแรก} - \text{ค่าซาก}}{\text{อายุการใช้งาน (ปี)}}$$

มูลค่าสินทรัพย์ ณ เวลาใดๆ = ราคาสินทรัพย์เริ่มแรก – (ค่าเสื่อมราคาต่อปี × อายุการใช้งาน)

ตัวอย่างที่ 7 รถบรรทุกราคา 200,000 บาท อายุใช้งาน 10 ปี มีค่าซาก 10,000 บาท ถามว่า

ก. รถบรรทุกนี้มีค่าเสื่อมราคาต่อปีเท่ากับเท่าไร

ข. เมื่อใช้ไปแล้ว 1 ปี ราคาสินทรัพย์เท่ากับเท่าไร

ค. ให้สร้างฟังก์ชันเส้นตรงและสมการเส้นตรงของมูลค่ารถบรรทุก ณ เวลาใดๆ

วิธีทำ

ก. รถบรรทุกนี้มีต้นทุนค่าเสื่อมราคาปีละ $= \dfrac{(200{,}000-10{,}000)}{10}$

$=$ 19,000 บาท

ข. รถบรรทุกเมื่อใช้ไป 1 ปี มีราคา $=$ 200,000 – 19,000

$=$ 181,000 บาท

ค. สามารถสร้างเป็นฟังก์ชันเส้นตรงได้ว่า

$$V = v(t)$$

โดยที่ V = มูลค่าสินทรัพย์ (รถบรรทุก)

t = จำนวนปี หรือระยะเวลาภายหลังการซื้อสินทรัพย์

สร้างสมการเส้นตรงได้ว่า

$$V = 200{,}000 - 19{,}000t\,, \quad 0 < t \le 10$$

7. ระบบสมการเชิงเส้น

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการมุ่งวิเคราะห์สมการใดสมการหนึ่งเท่านั้น ซึ่งในความเป็นจริงมีตัวแบบทางคณิตศาสตร์จำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับสมการมากกว่า 1 สมการ ซึ่งมีชื่อเรียกว่า ระบบสมการ (System of Equation) โดยคำตอบของระบบสมการ คือ เซตของค่าต่างๆ ที่สอดคล้องกับสมการทุกสมการในระบบ การหาผลเฉลยสามารถหาได้หลายวิธี เช่น วิธีหาผลเฉลยด้วยกราฟ วิธีการกำจัด และวิธีการแทนค่า

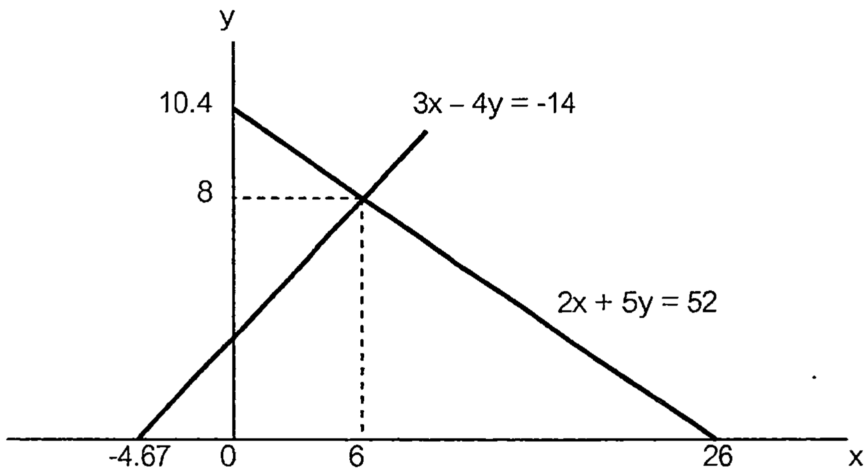
ตัวอย่างที่ 8 ระบบสมการ $2x + 5y = 52$

$$3x - 4y = -14$$

จงหาค่า x และ y ที่ทำให้สมการเป็นจริง โดยวิธีกราฟ วิธีการกำจัดและวิธีการแทนค่า

<u>วิธีทำ</u>

- วิธีกราฟ



<u>ภาพที่ 2.12</u> ผลเฉลยของดุลยภาพตลาดในตัวอย่างที่ 8

ค่า x และ y ได้จากจุดตัดของสมการทั้งสอง คือ (6, 8)

- วิธีการกำจัด

เลือกกำจัด x

	2x + 5y	=	52	(1)
	3x – 4y	=	-14	(2)
นำ (1) × 3	6x + 15y	=	156	(3)
นำ (2) × 2	6x – 8y	=	-28	(4)
(3) – (4)	23y	=	184	
	y	=	8	
แทนค่า y = 8 ในสมการ (1) ได้ว่า	2x + 5(8)	=	52	
	x	=	6	

➢ วิธีแทนค่า

แก้สมการใดสมการหนึ่งของโจทย์เพื่อหาค่าตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง (x)

$$2x + 5y = 52$$

$$x = 26 - 2.5y$$

แทนค่า x ในสมการ (2) $3(26 - 2.5x) - 4y = -14$

$$78 - 7.5y - 4y = -14$$

$$-11.5y = -92$$

$$y = 8$$

แทนค่า y ในสมการ (1) $2x + 5(8) = 52$

$$x = 6$$

8. การประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์

8.1 การวิเคราะห์อุปทานและอุปสงค์

การวิเคราะห์อุปทานและอุปสงค์ในวิชาเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น มักอาศัยกราฟเป็นหลักในการหาจุดดุลยภาพ โดยมีการกำหนดให้ P เป็นตัวแปรตาม และเขียนกราฟอยู่บนแกน y ส่วนปริมาณสินค้า Q ถูกกำหนดเป็นตัวแปรอิสระ อยู่บนแกน x ซึ่งจุดตัดของเส้นอุปทานและเส้นอุปสงค์คือ จุดดุลยภาพในระบบเศรษฐกิจ ณ จุดนี้จะได้ปริมาณดุลยภาพและราคาดุลยภาพของตลาด

นอกจากนี้ ยังสามารถหาได้โดยการแก้สมการ (มีทั้งวิธีการกำจัด และวิธีการแทนค่า)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหาผลเฉลยของระบบสมการอุปทานและอุปสงค์ต่อไปนี้ โดยวิธีแก้สมการ และกราฟ

ฟังก์ชันอุปทาน: $P = 1 + \frac{1}{2}Q_s$ ฟังก์ชันอุปสงค์: $P = 10 - \frac{5}{8}Q_d$

<u>วิธีทำ</u>

➤ วิธีแก้สมการ

ฟังก์ชันอุปทาน: $P = 1 + \frac{1}{2}Q_s$

$Q_s = 2P - 2$

ฟังก์ชันอุปสงค์: $P = 10 - \frac{5}{8}Q_d$

$Q_d = 16 - 1.6P$

ดุลยภาพเกิดขึ้นเมื่อ $Q_d = Q_s$

16 – 1.6P = 2P – 2

-3.6P = -18

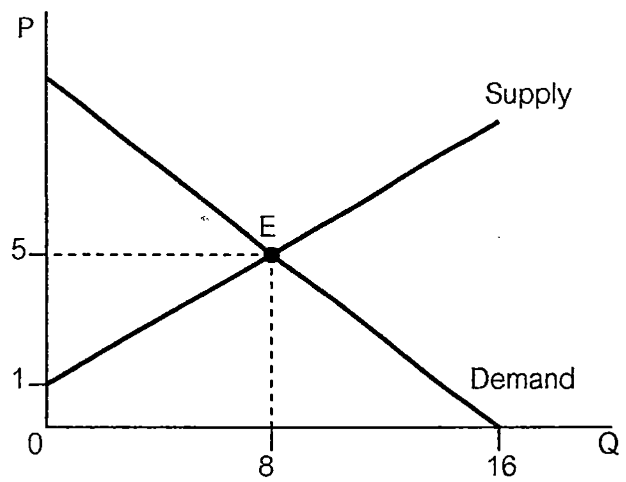
P = 5

แทนค่า P = 5 ในสมการ (1) หรือ (2) ;

$Q_s = 2(5) - 2 = 8$

หรือ $Q_d = 16 - 1.6\,(5) = 8$

➤ วิธีกราฟ



<u>ภาพที่ 2.13</u> ผลเฉลยดุลยภาพตลาดในตัวอย่างที่ 9

จากกราฟ จะได้ราคาดุลยภาพเท่ากับ 5 บาท และปริมาณดุลยภาพ เท่ากับ 8 หน่วย

8.2 การวิเคราะห์แบบจำลองรายได้ประชาชาติ

โดยทั่วไป ประกอบด้วย 4 ภาคของระบบเศรษฐกิจ คือ

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

โดยที่ Y = รายได้หรือมูลค่าผลผลิต C = การบริโภค

I = การลงทุน G = การใช้จ่ายของรัฐบาล

X = สินค้าออก M = สินค้าเข้า

มูลค่าผลผลิต = การใช้จ่ายมวลรวม

ตัวอย่างที่ 10 สมมติให้ระบบเศรษฐกิจเป็นแบบ Two-Sector Economy

$Y = C + I$ โดยที่ $C = C_a + bY$ และ $I = I_a$

โดยที่ C_a = 95, b = 0.8 และ I_a = 75 จงหาระดับรายได้ดุลยภาพ

วิธีทำ สามารถคำนวณหารายได้ดุลยภาพโดย

สมการดุลยภาพคือ $Y = C + I$

แทนค่า C, I ; $Y = C_a + bY + I_a$

แก้หาค่า Y; $Y - bY = C_a + I_a$

$$(1-b)Y = C_a + I_a$$

รายได้ดุลยภาพ $Y = \dfrac{C_a + I_a}{1-b}$

ผลเฉลยในสมการรูปแบบนี้มีชื่อว่า สมการลดรูป (The Reduced-Form Equation) คือเป็นสมการที่แสดงตัวแปรภายในหรือตัวแปรตามในรูปของฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (Explicit Function) ของตัวแปรภายนอกหรือตัวแปรอิสระและพารามิเตอร์

วิธีแทนค่า	วิธีใช้สมการรูปแบบที่ลดทอนแล้ว
$Y = C_a + bY + I_a$	$Y = \dfrac{C_a + I_a}{1-b}$
$Y = 95 + 0.8Y + 75$	$Y = \dfrac{95+75}{1-0.8}$
$0.2Y = 170$	$Y = \dfrac{170}{0.2}$
$Y = 850$	$Y = 850$

จากสมการลดรูป พจน์ $\dfrac{1}{(1-b)}$ ในทางเศรษฐศาสตร์ เรียกว่า ตัวทวีของการใช้จ่ายโดยอิสระ เป็นตัววัดผลคูณของการใช้จ่ายอิสระ แต่ละหน่วยเงินตราที่มีต่อระดับรายได้ดุลยภาพ และ b คือ ค่าความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้าย (Marginal Propensity to Consume: MPC) ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงในการบริโภค อันเป็นผลจากรายได้

$I = I_a$	แสดงว่าการลงทุนเป็นอิสระจากรายได้
$C = C_a + bY$, C_a	แสดงระดับการบริโภคที่เป็นอิสระจากรายได้

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สมมติให้หน่วยผลิตแห่งหนึ่งมีชั่วโมงทำงานของแรงงานมีฝีมือ (skill labor) รวมทั้งสิ้น 240 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ เพื่อใช้ในการผลิตสินค้าสองชนิด ชนิดแรก หรือสินค้า x แต่ละหน่วยจะต้องใช้ชั่วโมงแรงงานที่มีฝีมือ 3 ชั่วโมง ขณะที่สินค้าชนิดที่สอง หรือสินค้า y ต้องใช้ 4 ชั่วโมง จงหา

(ก) จงแสดงเงื่อนไขบังคับทางด้านแรงงานของหน่วยผลิตนี้ในรูปของสมการ

(ข) จงวาดกราฟเพื่อแสดงความเป็นไปได้ในการจัดสรรแรงงานระหว่างสินค้าทั้งสองชนิด

2. บริษัทบูรพา จำกัด มีค่าใช้จ่าย สำหรับค่าเช่าและเงินเดือนของผู้บริหารที่ต้องจ่ายไม่ว่าจะผลิตหรือไม่ก็ตาม จำนวน \$560 และมี ค่าใช้จ่ายสำหรับวัตถุดิบที่ผันแปรตามการผลิตสินค้า x เพิ่มขึ้นทีละหนึ่งหน่วย เท่ากับ \$9 จงหา

(ก) จงแสดงสมการต้นทุนรวม TC (Total Cost)

(ข) จงหารายรับรวมของบริษัทบูรพา จำกัด หากบริษัทเป็นธุรกิจที่อยู่ในตลาดแข่งขันที่แท้จริง (Pure Competition) ทำการผลิตสินค้า 140 หน่วย และขายในราคาหน่วยละ 25 บาท

3. สมมติให้ผู้บริโภครายหนึ่งมีเงิน \$150 สำหรับใช้จ่ายในการซื้อสินค้าสองชนิดคือสินค้า x และสินค้า y โดยราคาของ x (P_x) = \$5 และราคาของ y (P_y) = \$2 จงวาดเส้นงบประมาณ ในกรณีต่างๆ ดังนี้

(ก) เส้นงบประมาณตามเงื่อนไขโจทย์ (ข) เมื่องบประมาณผู้บริโภคลดลง 20 %

(ค) ราคาสินค้า x ลดลงครึ่งหนึ่ง (ง) ราคาสินค้า y เพิ่มขึ้น 50 เซนต์

4. กำหนดให้ $Y = C + I + G$ เมื่อ $C = 160 + 0.8Y_d$, $Y_d = Y - T$, $I = 80$
$G = 120$, $T = 40 + 0.25Y$ จากโจทย์จงใช้วิธีแทนค่าหรือกำจัดออก เพื่อหา

ก. รูปแบบที่ลดทอนแล้ว ข. ระดับรายได้ดุลยภาพ ค. ค่าตัวทวี

5. สมมติระบบสมการเส้นตรงอุปสงค์และอุปทาน ต่อไปนี้

Q_d : $6P - 3Q = 36$

Q_s : $8P + 2Q = 129$

จงแก้ระบบสมการโดยวิธีกราฟเพื่อหาปริมาณและราคาดุลยภาพของตลาด

เอกสารอ้างอิง

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** 3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.

Wisniewski, Mik . (1996). *Introductory Mathematical Methods in Economics.* 2nd ed. London : McGraw-Hill.

บุญสม ศิริโสภณา และประสาร บุญเสริม. (2539). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์.*** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมธิราช. (2544). ***เอกสารการสอนชุดคณิตเศรษฐศาสตร์และเศรษฐมิติเพื่อธุรกิจ หน่วยที่ 1-7.*** นนทบุรี : มหาวิทยาลัยบูรพา.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 3
พีชคณิตเชิงเส้น หรือเมตริกซ์

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนทราบและเข้าใจหลักการทางคณิตศาสตร์ของเมตริกซ์
2. เพื่อให้ผู้เรียนใช้กฎในการบวก ลบ และคูณเมตริกซ์ได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจและนำแนวคิดเมตริกซ์เอกลักษณ์และเมตริกซ์ศูนย์มาใช้
4. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจหลักการหาดีเทอร์มินันต์และเมตริกซ์ผกผันได้
5. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจหลักการหาเมตริกซ์โคแฟกเตอร์และเมตริกซ์ผูกพันได้
6. เพื่อให้ผู้เรียนใช้วิธีการต่างๆ ของเมตริกซ์แก้ปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์
7. เพื่อให้ผู้เรียนประยุกต์ใช้วิธีการแก้ระบบสมการโดยวิธีการของเมตริกซ์กับปัญหาในเชิงเศรษฐศาสตร์

เนื้อหา

1. ความหมายของเมตริกซ์
2. การบวกและลบเมตริกซ์
3. การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์
4. การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
5. กฎบางประการเกี่ยวกับการบวก การลบ และการคูณเมตริกซ์
6. เมตริกซ์เอกลักษณ์และเมตริกซ์ศูนย์
7. ดีเทอร์มินันต์และเมตริกซ์ผกผัน
8. เมตริกซ์โคแฟคเตอร์และเมตริกซ์ผูกพัน
9. คุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับเมตริกซ์
10. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

1. ความหมายของเมตริกซ์

เมตริกซ์คือกลุ่มของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง โดยสิ่งๆ นั้นอาจจะเป็นได้ทั้ง สิ่งของ ตัวเลข พารามิเตอร์ หรือตัวแปร และเรียกกลุ่มของสิ่งใดสิ่งหนึ่งดังกล่าวว่า **เมตริกซ์** (Matrix) และเรียกสิ่งที่อยู่ในเมตริกซ์ว่า **สมาชิก** (Element) ของเมตริกซ์ สมาชิกที่อยู่ในเมตริกซ์จะได้รับการจัดเรียงกันเป็นแถวๆ โดยที่ในแต่ละแถวมีสมาชิกจำนวนเท่าๆ กัน เขียนแทนด้วย a_{ij} หมายถึงสมาชิกในแถวที่ i สดมภ์หรือหลักที่ j ตัวอย่างเช่น เมตริกซ์ A ซึ่งมักเขียนในรูปแบบดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A เป็นเมตริกซ์ที่มี m แถว n สดมภ์ หรืออาจกล่าวว่าเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ โดยทั่วไปรูปแบบของเมตริกซ์ A ดังกล่าวอาจเขียนได้ดังนี้

$$A = \{a_{ij}\} \text{ เมื่อ } i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$$

หรือ $$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

ในกรณีที่เมตริกซ์ใดมีจำนวนแถวและจำนวนสดมภ์เท่ากัน นั่นคือ m = n เมตริกซ์นั้นมีชื่อเรียกว่า เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)

เมตริกซ์ใดประกอบด้วยสมาชิกที่เรียงกันอยู่ในแถวเพียงแถวเดียว หรือเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $1\times n$ เมตริกซ์นั้นมีชื่อเรียกว่า เมตริกซ์แถว (Row Matrix) หรือเวกเตอร์แถว (Row Vector) อาทิ

$$B = [b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n]$$

ส่วนเมตริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เรียงกันอยู่ในสดมภ์เพียงสดมภ์เดียว หรือเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $m \times 1$ เมตริกซ์นั้นมีชื่อเรียกว่า เมตริกซ์หลัก (Column Matrix) หรือเวกเตอร์หลัก (Column Vector) อาทิ

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ A ที่แต่ละแถวได้รับการเรียงใหม่ให้อยู่ในรูปหลัก หรือแต่ละหลักได้รับการเรียงใหม่ให้อยู่ในรูปแถว เมตริกซ์ในรูปใหม่นี้มีชื่อว่า ทรานสโพสของเมตริกซ์ A (Transpose of A) เช่น แทนด้วย A' หรือ A^T เช่น

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ จะได้ $A' = \left[a_{ji}\right]_{n \times m}$

สำหรับเมตริกซ์ใดๆ ที่มีทรานสโพสเท่ากับเมตริกซ์นั้น กล่าวคือ $A = A'$ เมตริกซ์นั้นมีชื่อเรียกว่าเมตริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

สมมติเมตริกซ์ A, B, C และ X ดังต่อไปนี้

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ A เป็นเมตริกซ์ทั่วไปขนาด (3×3) ที่สมาชิกแต่ละตัวแทนด้วยพารามิเตอร์ตัวเดียวกัน คือ a แต่มีความแตกต่างกันที่ตำแหน่ง โดยเลขตัวแรกจะบอกแถวนอนที่สมาชิกอยู่ ส่วนตัวที่สองจะบอกหลัก เช่น a_{13} เป็นสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 และหลักที่ 3

เมตริกซ์ B ที่ขนาด (2×3) การนับจำนวนแถวนอนของเมตริกซ์ทำได้โดยนับจากบนลงล่าง ส่วนการนับจำนวนหลักทำได้โดยนับจากซ้ายไปขวา ใน B สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 2 (b_{12}) คือ 8 และสมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1 (b_{21}) คือ 5

เมตริกซ์ C เป็นเมตริกซ์แถว (Row Matrix) หรือเวกเตอร์แถว (Row Vector) ที่มีขนาด (1×3)

เมตริกซ์ X เป็นเมตริกซ์หลัก (Column Matrix) หรือเวกเตอร์หลัก (Column Vector) ขนาด (3×1)

2. การบวกและลบเมตริกซ์

การบวกและลบเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ใดๆ คือ A+B หรือ A-B มีเงื่อนไขอยู่ว่า เมตริกซ์ทั้งสองนั้นต้องมีขนาดเท่ากัน การบวกหรือการลบกันระหว่างเมตริกซ์ ก็คือ การนำเอาสมาชิกทุกตัวที่อยู่ในตำแหน่งตรงกันของเมตริกซ์ทั้งสองมาบวกหรือลบกัน เช่น สมาชิก a_{12} ในเมตริกซ์ A ก็ต้องบวกหรือลบสมาชิก b_{12} ในเมตริกซ์ B เป็นต้น

ดังนั้น ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

จะได้ว่า $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$

และ $A-B=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]_{m\times n}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$$\text{กำหนดให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

จงหา A+B และ A - B

<u>วิธีทำ</u>

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 0+5 & 3+2 \\ 2+4 & 5+1 & 1+3 \\ 3+2 & 1+0 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & 0-5 & 3-2 \\ 2-4 & 5-1 & 1-3 \\ 3-2 & 1-0 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

3. การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์

ในเรื่องของเมตริกซ์ สเกลาร์ (Scalar) คือ จำนวนจริงใดๆ อาทิ 4, -3, 0.05 และ $\sqrt{2}$ เป็นต้น การคูณเมตริกซ์ด้วยเสกลาร์นั้น ก็คือการนำเอาสเกลาร์ไปคูณสมาชิกทุกตัวในเมตริกซ์นั่นเอง

ดังนั้น ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\therefore kA = \left[k \times a_{ij}\right]_{m\times n}$$

หรือ $$Ak = \left[a_{ij} \times k\right]_{m\times n}$$

ซึ่ง $$kA = Ak$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $k = 5$ จงหา kA

<u>วิธีทำ</u>

$$kA = \begin{bmatrix} 2\times 5 & -1\times 5 & 1\times 5 \\ 3\times 5 & 2\times 5 & 4\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 15 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

4. การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์นั้น สิ่งที่ต้องพิจารณาคือ ขนาดหรือมิติของเมตริกซ์ เช่น การที่จะทำการคูณเมตริกซ์ A ซึ่งมีมิติ $(s\times t)$ ด้วยเมตริกซ์ B ซึ่งมีมิติ $(u\times v)$ นั้นต้องมีเงื่อนไขว่า จำนวนหลักที่ j ของเมตริกซ์ A จะต้องเท่ากับจำนวนแถวที่ i ของเมตริกซ์ B หรือ $t = u$ แล้วเอาผลคูณที่ได้ซึ่งมี j จำนวนนั้นรวมกันซึ่งจะเป็นตัวเลขตัวหนึ่ง นั้นคือ c_{ij}

ดังนั้น c_{11} คือ ผลรวมของผลคูณซึ่งเกิดจากการคูณแถวที่ 1 ใน A ด้วยหลักที่ 1 ใน B

c_{21} คือ ผลรวมของผลคูณซึ่งเกิดจากการคูณแถวที่ 2 ใน A ด้วยหลักที่ 1 ใน B

c_{31} คือ ผลรวมของผลคูณซึ่งเกิดจากการคูณแถวที่ 3 ใน A ด้วยหลักที่ 1 ใน B

c_{12} คือ ผลรวมของผลคูณซึ่งเกิดจากการคูณแถวที่ 1 ใน A ด้วยหลักที่ 2 ใน B

c_{22} คือ ผลรวมของผลคูณซึ่งเกิดจากการคูณแถวที่ 2 ใน A ด้วยหลักที่ 2 ใน B

c_{32} คือ ผลรวมของผลคูณซึ่งเกิดจากการคูณแถวที่ 3 ใน A ด้วยหลักที่ 2 ใน B

$$s\times t = u\times v$$

$$s\times v$$

ดังนั้นหาก $t = u$ เราจะได้ผลคูณของเมตริกซ์ AB เท่ากับเมตริกซ์ที่มีขนาด $(s\times v)$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 11\\ 7 & 12 & 3\end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B=\begin{bmatrix}8 & 2\\ 6 & 20\\ 7 & 12\end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad C=\begin{bmatrix}5 & 16 & 2\\ 4 & 3 & 9\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

จงหา 1) AB 2) BC 3) AC

<u>วิธีทำ</u>

1) $$AB=\begin{bmatrix}4(8)+9(6)+11(7) & 4(2)+9(20)+11(12)\\ 7(8)+12(6)+3(7) & 7(2)+12(20)-3(12)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}163 & 320\\ 149 & 290\end{bmatrix}$$

2) $$BC=\begin{bmatrix}8(5)+2(4) & 8(16)+2(3) & 8(2)+2(9)\\ 6(5)+20(4) & 6(16)+20(3) & 6(2)+20(9)\\ 7(5)+12(4) & 7(16)+12(3) & 7(2)+12(9)\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix}48 & 134 & 34\\ 110 & 156 & 192\\ 83 & 148 & 122\end{bmatrix}$$

3) AC

จะพบว่าไม่สามารถหาเมตริกซ์ผลลัพธ์ของเมตริกซ์ A คูณกับเมตริกซ์ C ได้ เนื่องจาก จำนวนหลักของเมตริกซ์ A ไม่เท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ C

5. กฎบางประการเกี่ยวกับการบวก การลบ และการคูณเมตริกซ์

5.1 กฎการสลับที่ (Commutative Law)

1) การบวกเมตริกซ์เป็นไปตามกฎการสลับที่ นั่นคือ

$A + B = B + A$

2) การลบเมตริกซ์เป็นไปตามกฎการสลับที่ นั่นคือ

$A - B = A + (-B) = (-B) + A$

3) การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์เป็นไปตามกฎการสลับที่ นั่นคือ

$kA = Ak$

4) การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์**ไม่เป็น**ไปตามกฎการสลับที่ นั่นคือ

$AB \neq BA$

5.2 กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Law)

1) การบวกเมตริกซ์เป็นไปตามกฎการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ

$A + (B + C) = (A + B) + C$

2) การลบเมตริกซ์เป็นไปตามกฎการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ

$$A - (B + C) = A + (-B) + (-C)$$
$$= A + (-B) + (-C)$$

5.3 กฎการกระจาย (Distributive Law)

ถ้า B และ C เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน และ A เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาดซึ่งสามารถคูณได้ด้วย B หรือ C การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ที่มีลักษณะดังกล่าว จะเป็นไปตามกฎการกระจาย นั่นคือ $A(B+C) = AB + AC$

6. เมตริกซ์เอกลักษณ์และเมตริกซ์ศูนย์

6.1 เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) นิยมเขียนแทนด้วย I เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวตามแนวเส้นทแยงมุมหลักคือ จากบนซ้ายลงมาล่างขวา มีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกอื่นนอกนั้นเป็น 0 นั่นคือ

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

สำหรับสัญลักษณ์ I_n หมายถึง เมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$ คุณสมบัติของเมตริกซ์เอกลักษณ์กล่าวโดยสรุปได้ดังนี้

1) เมตริกซ์เอกลักษณ์เป็นเมตริกซ์สมมาตร

2) เมตริกซ์เอกลักษณ์มีคุณสมบัติคล้ายเลข 1 ในวิธีพีชคณิต กล่าวคือ เมตริกซ์ใดเมื่อนำมาคูณกับเมตริกซ์เอกลักษณ์ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับเมตริกซ์นั้น นั่นคือ

$AI = IA = A$

3) เมตริกซ์เอกลักษณ์ใดเมื่อคูณด้วยตัวเอง จะยังคงเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ตัวเดิม นั่นคือ

$$I \times I = I^2 = I$$

ดังนั้นเมตริกซ์เอกลักษณ์ จึงเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเตนท์ (Idempotent Matrix) ด้วย กล่าวคือ เป็นเมตริกซ์ที่คูณตัวเองได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวเอง หรือ $A \times A = A$

6.2 เมตริกซ์ศูนย์ (Null Matrix) คือเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ทั้งนี้ขนาดของเมตริกซ์จะเป็นเท่าไรก็ได้

เมตริกซ์ศูนย์มีคุณสมบัติคล้ายเลขศูนย์ ในวิชาพีชคณิต กล่าวคือ

1) ถ้านำเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากับเมตริกซ์ศูนย์มาบวกหรือลบกับเมตริกซ์ศูนย์จะได้ผลลัพธ์เท่ากับเมตริกซ์นั้น

2) ถ้านำเมตริกซ์ใดๆ คูณกับเมตริกซ์ศูนย์ (โดย 2 เมตริกซ์สามารถคูณกันได้) จะได้เมตริกซ์ศูนย์

อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ AB = [0] ไม่จำเป็นที่ A = [0] หรือ B = [0]

7. ดีเทอร์มินันต์และเมตริกซ์ผกผัน

7.1 ดีเทอร์มินันต์ (Determinant)

7.1.1 ความหมายของดีเทอร์มินันต์

ดีเทอร์มินันต์เป็นเลขจำนวนจริงตัวหนึ่งซึ่งเกิดจากเมตริกซ์จัตุรัส ดีเทอร์มินันต์ขนาด $n \times n$ (หรือดีเทอร์มินันต์ที่มีอันดับ n) ของเมตริกซ์จัตุรัส A ที่มีขนาด $n \times n$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|A|$ หรือ det A ดังนี้

$$|A| \text{ หรือ } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น ถ้า } \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |A| \text{ หรือ } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ ซึ่งเป็นค่าจริงค่าเดียว}$$

จึงอาจกล่าวสรุปได้ว่า ดีเทอร์มินันต์เป็นค่าจริงค่าเดียว ซึ่งสามารถหาได้จากเมตริกซ์จัตุรัสเท่านั้น

ถ้าดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ใดมีค่าที่มิใช่ศูนย์ เมตริกซ์นั้นเป็นนอนซิงกูลาร์ (Nonsingular Matrix) แต่ถ้าดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ใดมีค่าเท่ากับศูนย์ เมตริกซ์นั้นเป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ (Singular Matrix) นั่นคือ สมาชิกในแถวหนึ่งหรือสดมภ์หนึ่งเกิดจากคูณสมาชิกในอีกแถวหนึ่งหรืออีกสดมภ์หนึ่งด้วยค่าคงที่

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาดีเทอร์มินันต์ของ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \qquad = (3)(7) - (5)(2) = 11$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad = (1)(6) - (3)(2) = 0$$

จากค่าดีเทอร์มินันต์ที่ได้จะเห็นว่า A เป็น Nonsingular Matrix ส่วน B เป็น Singular Matrix

ในกรณีที่เมตริกซ์มีขนาด 3× 3 กล่าวคือ $A = \left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ ค่า det A เรียกว่า ดีเทอร์มินันต์ลำดับที่ 3 ซึ่งจะหาได้จากการรวมกันของผลคูณของสมาชิก 3 ตัวในเมตริกซ์ตามขั้นตอนดังนี้

1) เลือกหลักใดๆ 1 หลัก หรือแถวใดๆ 1 แถว ในที่นี้เลือก แถวที่ 1

2) กำหนดสมาชิกตัวแรก ในแถวที่ 1 นั่นคือ a_{11} จากนั้นไม่คำนึงถึงสมาชิกอื่นในแถวที่ 1 และในสดมภ์ที่ 1 (ดูเมตริกซ์ (ก) ข้างล่าง) สำหรับสมาชิกที่เหลือซึ่งอยู่ในรูปเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 นั้น ให้หาดีเทอร์มินันต์แล้วคูณกับ a_{11}

3) กำหนดสมาชิกตัวที่ 2 ในแถวที่ 1 นั่นคือ a_{12} จากนั้นไม่คำนึงถึงสมาชิกอื่นในแถวที่ 1 และในสดมภ์ที่ 2 (ดูเมตริกซ์ (ข)) สำหรับสมาชิกที่เหลือซึ่งอยู่ในรูปเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 นั้น ให้หาดีเทอร์มินันต์ แล้วคูณกับ $(-1)a_{12}$

4) กำหนดสมาชิกตัวที่ 3 ในแถวที่ 1 นั่นคือ a_{13} จากนั้นไม่คำนึงถึงสมาชิกอื่นในแถวที่ 1 และในสดมภ์ที่ 3 (ดูเมตริกซ์ (ค)) สำหรับสมาชิกอื่นที่เหลือซึ่งอยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 นั้น ให้หาดีเทอร์มินันต์ แล้วคูณกับ a_{13}

4) นำผลคูณที่ได้จากข้อ 1, 2 และ 3 มารวมกัน

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(ก) (ข) (ค)

เพราะฉะนั้น

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det A

<u>วิธีทำ</u>

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[2(3) - 1(4)\right] - 3\left[5(3) - 6(4)\right] + 1\left[5(1) - 6(2)\right]$$

$$= 2(2) - 3(-9) + 1(-7)$$

$= 4 + 27 - 7$

$= 24$

เนื่องจาก $\det A \neq 0$ ดังนั้น A เป็น Nonsingular Matrix

<u>7.2 ไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ (Minors and Cofactors)</u>

พิจารณาจากเมตริกซ์ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ดีเทอร์มินันต์เมตริกซ์ขนาด 2 × 2 ที่นำมาคูณกับสมาชิก a_{11} a_{12} และ a_{13} นั้น มีชื่อเรียกว่า ไมเนอร์

ดังนั้นไมเนอร์ M_{ij} คือ ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ย่อย ที่เกิดจากการตัดสมาชิกในแถวที่ i และในสดมภ์ที่ j ออก นั่นคือ

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

จาก (1) ข้างต้นอาจเขียน det A ในรูปของไมเนอร์ได้ดังนี้

$$\det A = a_{11}M_{11} + (-1)a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \qquad (2)$$

สำหรับไมเนอร์ใดๆ ถ้านำเอาเครื่องหมายบวกลบมาพิจารณาด้วย เรียกว่า โคแฟคเตอร์ อาทิ แทนด้วย C_{ij} โคแฟคเตอร์จึงเป็นดีเทอร์มินันต์ตัวหนึ่ง $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

ในกรณีที่	$i+j$	เป็นเลขคู่	ค่า $(-1)^{i+j}$	เป็นบวก	นั่นคือ $C_{ij} = M_{ij}$
แต่ถ้า	$i+j$	เป็นเลขคี่	ค่า $(-1)^{i+j}$	เป็นลบ	นั่นคือ $C_{ij} = -M_{ij}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$$
$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$$

ดังนั้น ถ้าเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ ค่า det A อาจเป็นได้ในรูปโคแฟคเตอร์ ดังนี้

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \qquad (3)$$

วิธีการหาค่าดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ A ตามที่แสดงใน (3) มีชื่อเรียกว่า การกระจายของลาปลาซ (Laplace Expansion)

อย่างไรก็ดี การกำหนดสมาชิกเพื่อให้คูณกับโคแฟคเตอร์นั้น จะเลือกจากสมาชิกในแถวใดหรือในสดมภ์ใดก็ได้ ในกรณีที่สมาชิกบางตัวในเมตริกซ์เป็นศูนย์ การเลือกแถวหรือสดมภ์ที่มีสมาชิกเป็นศูนย์มากที่สุด จะช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้น

<u>ตัวอย่างที่ 6</u>

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา det A โดยวิธีการกระจายของ Laplace Expansion

<u>วิธีทำ</u> เลือกสมาชิกในสดมภ์ที่ 2 เป็นตัวคูณกับโคแฟคเตอร์

$$\det A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

แต่เนื่องจาก $a_{12} = 0$ และ $a_{32} = 0$

ดังนั้น $\det A = a_{22}C_{22}$

เมื่อ $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad = 3(6) - 5(7) \quad = -17$$

ดังนั้น det A = 4(-17) = -68

8. เมตริกซ์โคแฟคเตอร์และเมตริกซ์ผูกพัน (Co-Factor and Adjoint Matrices)

<u>8.1 เมตริกซ์โคแฟคเตอร์ (Co-Factor Matrix)</u>

เมตริกซ์โคแฟคเตอร์ คือ เมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวถูกเขียนแทนด้วยโคแฟคเตอร์ นั่นคือ เขียนแทน a_{ij} ด้วย C_{ij} ซึ่งเป็นค่าจริงค่าเดียว

ถ้า
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์โคแฟคเตอร์ C ของเมตริกซ์ A คือ

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

และทรานสโพสของเมตริกซ์โคแฟคเตอร์ C มีชื่อเรียกว่า เมตริกซ์ผูกพัน A (Adjoint matrix A หรือ Adj A)

$$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 7

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาเมตริกซ์โคแฟคเตอร์ C และเมตริกซ์ผูกพัน A

วิธีทำ

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -3 \\ -7 & -5 & 11 \\ 14 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 9 & -5 & 4 \\ -3 & 11 & -13 \end{bmatrix}$$

8.2 เมตริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

เมตริกซ์ใดๆ จะมีเมตริกซ์ผกผัน A^{-1} ได้ ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์นั้นเป็นเมตริกซ์จัตุรัส และเป็น Nonsingular Matrix

เมตริกซ์ผกผัน A^{-1} มีคุณสมบัติก็คือ เมื่อนำคูณกับเมตริกซ์ A แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือ

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

ดังนั้นถ้าเปรียบเมตริกซ์ A เป็นเลขจำนวนหนึ่ง เช่น 5 เมตริกซ์ผกผัน A^{-1} ก็คือส่วนกลับของเลขจำนวนนั้น คือ $\frac{1}{5}$ นั่นเอง ซึ่งเมื่อนำมาคูณกับเลขจำนวนนั้นแล้วจะมีค่าเท่ากับ 1

สำหรับเมตริกซ์ผกผัน A^{-1} สามารถหาได้โดยใช้สูตร ดังนี้

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงหาเมตริกซ์ผกผัน $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ดำเนินการเป็นขั้นตอน ดังนี้

1) ตรวจสอบว่า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่งปรากฏว่า A มีขนาด 3 × 3
2) ตรวจสอบว่า A เป็น Nonsingular Matrix กล่าวคือ $\det A \neq 0$

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 2(8+3) - 1(-2 - 15) - 3(1 - 20)$

$= 22 + 17 + 57$

$= 96$

3) หาเมตริกซ์โคแฟคเตอร์ C ของเมตริกซ์ A

$$C=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 4\\ 5 & -1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 17 & -19 \\ 1 & 19 & 7 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

4) ทรานสโพสของ C คือ Adj A

$$\therefore \text{Adj A} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 17 & 19 & -3 \\ -19 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

5) หาเมตริกซ์ผกผัน A^{-1} โดยใช้สูตร

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{96}\begin{bmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 17 & 19 & -3 \\ -19 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{96} & \frac{1}{96} & \frac{15}{96} \\ \frac{17}{96} & \frac{19}{96} & \frac{-3}{96} \\ \frac{-19}{96} & \frac{7}{96} & \frac{9}{96} \end{bmatrix}$$

9. คุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับเมตริกซ์

9.1 Elementary Operations

ปฏิบัติการเบื้องต้นของเมตริกซ์ คือการดำเนินการด้วยวิธีต่างๆ ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 การสลับที่ระหว่าง 2 แถวใดๆ (หรือ 2 สดมภ์ใดๆ)

วิธีที่ 2 การคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใด (หรือสดมภ์ใด) ด้วยค่าคงที่ที่มิใช่ศูนย์

วิธีที่ 3 การบวกแถว (หรือสดมภ์) ที่ถูกคูณด้วยค่าคงที่ที่มิใช่ศูนย์ (ตามวิธีที่ 2) เข้ากับแถวอื่น (หรือสดมภ์อื่น)

วัตถุประสงค์ของการดำเนินการดังกล่าวก็เพื่อเปลี่ยนรูปเมตริกซ์นั้นให้รูปแบบที่ต้องการ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ระบบสมการและการหาค่าลำดับชั้น (Rank) ของเมตริกซ์

ในการดำเนินการที่เรียกว่า Elementary Operations ของเมตริกซ์ เราจะกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

R_i	หมายถึง แถวที่ i
C_j	หมายถึง สดมภ์ที่ j
$R_2 \leftrightarrow R_3$	หมายถึง การสลับที่ระหว่างแถวที่ 2 และที่ 3
$C_1 \leftrightarrow C_2$	หมายถึง การสลับที่ระหว่างสดมภ์ที่ 1 และที่ 2
$-k\ R_1+R_2$	หมายถึง การคูณแถวที่ 1 ด้วย –k แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2

อย่างไรก็ดี ในการดำเนินการเกี่ยวกับเรื่องนี้ จะใช้วิธีการใดก่อนหลังก็ได้ โดยยึดหลักว่าใช้ขั้นตอนของการเปลี่ยนให้น้อยที่สุด เพื่อที่จะได้เมตริกซ์เอกลักษณ์เร็วและถูกต้อง

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงใช้วิธีการต่างๆ ของ Elementary Operations กับเมตริกซ์ A ที่กำหนดให้เพื่อเปลี่ยนให้เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$R_1 \leftrightarrow R_2$ จะได้

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} -3 & -3 & 6 \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$-3\ R_1+R_2$ จะได้

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} -3 & & \end{array} \\ C = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\frac{1}{2}R_2$ จะได้ $$D=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 5 & 4 & -3\end{bmatrix}$$

$1\ C_2 + C_3$ จะได้ $$E=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$-4\ R_2 + R_3$ จะได้ $$F=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$1\ R_2 + R_1$ จะได้ $$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$-5\ R_1 + R_3$ จะได้ $$H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$-\frac{1}{4}R_3$ จะได้ $$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$-1\ C_1 + C_3$ จะได้ $$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าเมตริกซ์สุดท้ายที่ได้จากการทำ Elementary Operations กับเมตริกซ์ A คือเมตริกซ์ J ซึ่งเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์และมีขนาดเท่าเดิม คือ ขนาด 3×3

เมตริกซ์ต่างๆ ที่ได้จาก Elementary Operations กับ A ไม่ว่าจะเป็นเมตริกซ์ B เมตริกซ์ C จนถึงเมตริกซ์ J เราเรียกเมตริกซ์เหล่านี้ว่าเป็นเมตริกซ์ที่สมมูล (Equivalent) กับเมตริกซ์ A

โดยทั่วไปเราสามารถใช้ Elementary Operations เพื่อเปลี่ยนรูปเมตริกซ์ใดๆ ให้เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ได้แต่จะมีเมตริกซ์ในบางกรณีที่ไม่สามารถดำเนินการให้เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมตริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวใด (หรือสดมภ์ใด) มีค่าเท่ากับผลคูณของสมาชิกในอีกแถวหนึ่ง (หรือสดมภ์หนึ่ง) กับค่าคงที่ เช่น

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าสมาชิกใน R_3 เท่ากับสมาชิกใน R_2 คูณด้วย 3 เมื่อเป็นดังนี้ การใช้ Elementary Operations กับเมตริกซ์ B ในที่สุดจะสามารถเปลี่ยนรูปได้เป็นเมตริกซ์ C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งปรากฏว่า C มิใช่เมตริกซ์เอกลักษณ์

10. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการ n สมการ และตัวแปร n ตัว คือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีลักษณะดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ในเมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่

ระบบสมการนี้ ถ้าเขียนในรูปเมตริกซ์ จะได้ดังนี้

$$AX = B$$

เมื่อ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

วิธีแก้สมการเชิงเส้นที่จะกล่าวถึงในที่นี้มี 3 วิธีคือ วิธีของเกาส์ (Guassian Method) วิธีที่ใช้เมตริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix) และวิธีที่ใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule) นอกจากนี้จะได้กล่าวถึงกรณีต่างๆ ของการแก้ระบบสมการด้วย เพื่อจะได้เป็นประโยชน์ต่อการทำความเข้าใจในเรื่องเศรษฐมิติ ในส่วนที่จะนำความรู้ทางเมตริกซ์ไปใช้ต่อไป

10.1 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยการใช้วิธีของเกาส์ (Guassian Method)

จากระบบสมการ AX = B

เมตริกซ์ A มีขนาด n × n, เมตริกซ์ X และเมตริกซ์ B ต่างก็มีขนาด n × 1 การแก้สมการโดยวิธีนี้ เราจะสร้าง Augmented Matrix กล่าวคือ นำสมาชิกของเมตริกซ์ B มารวมไว้กับเมตริกซ์ A กลายเป็นเมตริกซ์ A/B จากนั้นใช้วิธี Elementary Operations กับ Augmented Matrix A/B เพื่อหาค่าตัวแปรต่างๆ ได้

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 = -1$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$AX = B$$

หรือ $$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

สร้าง Augmented matrix $A|B$ ได้ $$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

จากนี้ใช้วิธี Elementary Operations เน้นเฉพาะแถวกับ Augmented matrix $A|B$ เพื่อเปลี่ยนให้เป็นเมตริกซ์เอชลอนแบบแถว

$\frac{1}{2}R_1$ จะได้ $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$-R_1 + R_2$ จะได้ $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$\frac{2}{7}R_2$ จะได้ $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{2}R_2 + R_1$ จะได้ $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

ดังนั้น จะได้ $X_1 = 2$, $X_2 = -1$ เนื่องจาก $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

10.2 การแก้ระบบสมการโดยการใช้เมตริกซ์ผกผัน

จากระบบสมการ $AX = B$

เมตริกซ์ A มีขนาด n × n เมตริกซ์ X และ B ต่างก็มีขนาด n × 1

ถ้า A เป็น Nonsingular Matrix แล้ว A จะมีเตริกซ์ผกผัน A^{-1} ให้หาเมตริกซ์ผกผัน A^{-1} แล้วนำไปคูณด้านหน้า (Per multiply) โดยตลอดของ (1) จะได้

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \qquad \text{เนื่องจาก } A^{-1}A = I$$

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ด้วยการใช้เมตริกซ์ผกผัน

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5$$

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16$$

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$

วิธีทำ เปลี่ยนระบบสมการข้างต้นให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

หรือ $AX = B$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

สำหรับเมตริกซ์ A ตามตัวอย่างนี้ ได้แสดงวิธีหาเมตริกซ์ผกผัน A^{-1} ไว้แล้วในตัวอย่างที่แล้ว

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{96} & \frac{1}{96} & \frac{15}{96} \\ \frac{17}{96} & \frac{19}{96} & -\frac{3}{96} \\ -\frac{19}{96} & \frac{7}{96} & \frac{9}{96} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{96} & \frac{1}{96} & \frac{15}{96} \\ \frac{17}{96} & \frac{19}{96} & -\frac{3}{96} \\ -\frac{19}{96} & \frac{7}{96} & \frac{9}{96} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5\left(\frac{11}{96}\right) & +16\left(\frac{1}{96}\right) & +9\left(\frac{15}{96}\right) \\ -5\left(\frac{17}{96}\right) & +16\left(\frac{19}{96}\right) & +9\left(-\frac{3}{96}\right) \\ -5\left(-\frac{19}{96}\right) & +16\left(\frac{7}{96}\right) & +9\left(\frac{9}{96}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

10.3 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยการใช้กฎของคราเมอร์

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีนี้เป็นการนำเอาดีเทอร์มินันต์มาใช้ประโยชน์ สมมติว่าระบบสมการเชิงเส้นคือ AX = B กฎของคราเมอร์ในการหาตัวแปรคือ

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

เมื่อ x_i คือ ตัวแปรที่ i

$|A|$ คือ ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์สัมประสิทธ์ของตัวแปร

$|A_i|$ คือ ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ซึ่งกำหนดขึ้นใหม่จากเมตริกซ์ A โดยการแทนที่สมาชิกในสดมภ์ที่ i ด้วยสมาชิกของเมตริกซ์ B

ตัวอย่างที่ 12 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$2x_1 - 3x_2 = 11$$

$$x_1 + 5x_2 = -1$$

วิธีทำ

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 2(5) - 1(-3)$

$= 13$

จากนั้น จะได้ $\det A_1 = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 11(5) - (-1)(-3)$

$= 52$

และ $\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(-1) - 1(11)$

$= -13$

$$\therefore \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-13}{13} = -1$$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ถ้า $G = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $H = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา

1) G + H และ H + G   2) G – H และ H – G

2. จงหาผลคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} m & p \\ n & q \\ o & r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s & v \\ t & w \\ u & x \end{bmatrix}$

3. จงหา Adjoint ของเมตริกซ์ nonsingular ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 1/2 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. จงใช้ <u>หลักที่ 2</u> หา minor cofactor ของเมตริกซ์ 3×3 ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -3 & 1/2 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$

5. จงใช้วิธีการของเกาส์ เมตริกซ์ผกผัน และคราเมอร์ แก้ปัญหาระบบสมการต่อไปนี้

1) อุปทาน: $-7P + 14Q = -42$

อุปสงค์: $3P + 12Q = 90$

2) IS Equation: $0.4Y + 150i = 209$

LM Equation: $0.1Y - 250i = 35$

เอกสารอ้างอิง

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** **3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.**

Klein, M. W. (2002). *Mathematical Methods for Economics.* 2nd ed. Boston : Pearson.

Blume, L. and Simon C. (1945). *Mathematics for Economists.* New York : Norton& Company.

ดาราวรรณ วิรุฬหผล. (2544). ***การวิเคราะห์เชิงปริมาณขั้นสูง.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

บุญสม ศิริโสภณา และประสาร บุญเสริม. (2539). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์.*** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นราทิพย์ ชุติวงศ์. (2544). ***เศรษฐศาสตร์การจัดการ.*** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 4

โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming)

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนทราบและเข้าใจที่มาและความหมายของโปรแกรมเชิงเส้น
2. เพื่อให้ผู้เรียนทราบลักษณะปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงเส้นในการแก้ปัญหา
3. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจองค์ประกอบและรูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้น
4. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง

เนื้อหา

1. ความหมายของโปรแกรมเชิงเส้น
2. ลักษณะปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงเส้น
3. ส่วนประกอบของโปรแกรมเชิงเส้น
4. สมมติฐานของโปรแกรมเชิงเส้น
5. รูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้น
6. ตัวอย่างการสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

ปัจจุบันโปรแกรมเชิงเส้น เป็นเทคนิคเชิงปริมาณอย่างหนึ่งซึ่งเป็นที่นิยมนำไปใช้อย่างแพร่หลายในการดำเนินงานของธุรกิจ โปรแกรมเชิงเส้นเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นแทนปัญหาที่เกิดขึ้นในองค์การ เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่ดีที่สุดตามเป้าหมายที่ตั้งไว้ และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่มีอยู่ในปัญหานั้นๆ โดยที่ความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ในเป้าหมายและในเงื่อนไขของปัญหาจะอยู่ในรูปเส้นตรง โปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำไปใช้เพื่อช่วยตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาการจัดสรรทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งอาจวัดในรูป<u>กำไรสูงสุด หรือ ต้นทุนต่ำสุด</u>

โปรแกรมเชิงเส้นมีแนวคิดริเริ่มมาจากนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์หลายท่าน เริ่มจาก Von Neuman ใช้ทฤษฎีการหาค่าต่ำสุด-สูงสุด ในปี ค.ศ. 1928 และได้มีการพัฒนาเรื่อยมา จนกระทั่งระหว่างสงครามโลกครั้งที่ 2 กองทัพอากาศสหรัฐอเมริกาได้นำไปใช้แก้ปัญหาด้านการขนส่งที่เกิดขึ้นจนเป็นที่นิยมใช้ในวงการทหาร ต่อมาในปี ค.ศ. 1945 นักเศรษฐศาสตร์ชื่อ ดานท์ซิก (George B.Dantzig) ได้เริ่มสร้างรูปแบบทั่วไปของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น และพัฒนาวิธีการอย่างมีระบบ ในการหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น และในปี ค.ศ. 1947 ดานท์ซิกก็ได้พัฒนาวิธีการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่เรียกว่า วิธีซิมแพล็กซ์ (Simplex) ทำให้โปรแกรมเชิงเส้นเป็นที่ยอมรับและนำไปใช้อย่างแพร่หลายโดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางธุรกิจและอุตสาหกรรม (ประกอบ, น.1) เพราะเป็นวิธีที่แก้ปัญหาได้รวดเร็ว แม่นยำ และใช้แก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ได้อย่างกว้างขวางยิ่งขึ้น

1. ความหมายของโปรแกรมเชิงเส้น (วาทินี, น.1)

เส้นตรง หมายถึง ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันภายในตัวแบบจะต้องมีความสัมพันธ์กันแบบเส้นตรงหรือกล่าวได้ว่าทุกๆ ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเส้นตรง

โปรแกรม หมายถึง การวางแผนในกิจกรรมต่างๆ ที่มีวัตถุประสงค์หรือเป้าหมายและมีความต้องการกระทำให้สัมฤทธิผลตามแผนการนั้นๆ

ดังนั้น โปรแกรมเชิงเส้นตรง หมายถึง การวางแผนกิจกรรมต่างๆ ที่เกี่ยวข้องเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimal Result) ตามเป้าหมายที่ตั้งไว้ และมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขที่มีอยู่

2. ลักษณะปัญหาที่ใช้

โปรแกรมเชิงเส้น ส่วนใหญ่นำไปใช้ในการตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด เช่น วัตถุดิบ เวลา แรงงาน เงิน เครื่องจักร เป็นต้น โดยมีจุดมุ่งหมายที่จะจัดสรรทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด หรือเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด หรืออาจอาจกล่าวโดยรวมว่าเป็นการตัดสินใจเพื่อแสวงหาจุดเหมาะสมที่สุด (Optimizing) ส่วนใหญ่นำไปใช้วิเคราะห์ Optimization Problem เช่น ปัญหา Maximization และปัญหา Minimization (ปัญหาที่ทำให้สิ่งที่ต้องการมีค่าสูงสุดและต่ำสุดตามลำดับ) เช่น ทำให้เกิดกำไรสูงสุด ต้นทุนต่ำสุด ผลผลิตมากที่สุด การครองตลาดมากที่สุด ผู้บริโภครู้จักสินค้ามากที่สุด จัดสรรตัวแทนจำหน่ายอย่างไรจึงจะได้งานมากที่สุด เป็นต้น โปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำไปใช้กับปัญหาได้หลายลักษณะ เช่น การวางแผนด้านการผลิต การลงทุน การขนส่งสินค้า การจัดสรรงบประมาณ การจัดคนเข้าทำงาน เป็นต้น

<u>2.1 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้โปรแกรมเชิงเส้น</u> (ประกอบ, น.2)

ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้เทคนิคโปรแกรมเชิงเส้นที่พบเห็นโดยทั่วไป ได้แก่

1) ปัญหาการผลิต (Product Mix Problem) เป็นการพิจารณาหาปริมาณสินค้าแต่ละประเภทที่ควรจะทำการผลิต เพื่อที่จะให้การใช้ทรัพยากรที่มีอยู่ไม่ว่าจะเป็น เครื่องจักร วัตถุดิบ แรงงาน นั้นเป็นไปอย่างเหมาะสม เพื่อที่จะได้ผลตอบแทนสูงสุด

2) ปัญหาการผสมสาร (Blending Problem) เป็นการพิจารณาหาปริมารสารหรือวัตถุดิบชนิดต่างๆ ที่จะนำมาผสมกันหรือนำมาใช้ในการผลิตสินค้าประเภทต่างๆ ตามคุณสมบัติที่ได้กำหนดไว้ เพื่อที่จะได้มีค่าใช้จ่ายต่ำสุด

3) ปัญหาการขนส่ง (Transportation Problem) เป็นการพิจารณาหาปริมาณสินค้าที่จะทำการขนส่งจากแหล่งผลิตสินค้าไปยังผู้บริโภคหรือจุดหมายปลายทาง เพื่อให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่ำสุด หรือส่งสินค้าถึงจุดหมายปลายทางได้เร็วที่สุด

4) ปัญหาการมอบหมายงาน (Assignment Problem) เป็นการพิจารณาการมอบหมายงานที่จะต้องทำให้กับบุคลากรหรือเครื่องจักร เพื่อให้งานที่ได้รับมอบหมายแล้วเสร็จในเวลาที่เร็วที่สุด หรือเสียค่าใช้จ่ายให้น้อยที่สุด

5) ปัญหาการลงทุน (Investment Project Selection) เป็นการพิจารณาจัดสรรเงินลงทุนในโครงการลงทุนต่างๆ เพื่อให้ได้รับผลตอบแทนสูงที่สุด

6) ปัญหาการเลือกสื่อโฆษณา (Media Selection) เป็นการพิจารณาเลือกสื่อโฆษณาชนิดต่างๆ เพื่อให้ข้อมูลหรือข่าวสารที่ต้องการเผยแพร่ออกสู่เป้าหมายเป็นจำนวนมากที่สุด หรือโดยเสียค่าใช้จ่ายในการโฆษณาน้อยที่สุด

7) ปัญหาการตัดกระดาษ (Trim Loss Problem) เป็นการพิจารณารูปแบบหรือวิธีการตัดกระดาษ (หรือสินค้าอื่นๆ ที่มีคุณสมบัติคล้ายคลึงกัน เช่น การตัดผ้า การตัดแผ่นเหล็ก) เพื่อที่จะหารูปแบบการตัดในขนาดมาตรฐานที่มีอยู่ออกเป็นขนาดและปริมาณต่างๆ ตามความต้องการ เพื่อที่จะให้มีเศษ (ส่วนที่ใช้ประโยชน์ต่อไปไม่ได้) น้อยที่สุด

8) ปัญหาทางด้านการทหาร อาจนำเอาโปรแกรมเชิงเส้นมาใช้ในการพิจารณาวางแผนการส่งกำลังบำรุง การเลือกกำหนดจำนวนอาวุธยุทโธปกรณ์ การกำหนดยุทธศาสตร์

3. ส่วนประกอบของโปรแกรมเชิงเส้น

ส่วนประกอบของโปรแกรมเชิงเส้นตรง ได้แก่

1) ตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ (Decision Variable)

หมายถึง สิ่งที่ต้องการหาผลลัพธ์หรือสิ่งที่เป็นเป้าหมายสูงสุดของปัญหานั้นๆ มักกำหนดเป็นตัวอักษร เช่น x_1, x_2, x_3 เป็นต้น

2) สมการเป้าหมาย (Objective Function)

หมายถึง สมการเส้นตรงที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ทางด้านกำไรสูงสุด/ต้นทุนต่ำสุด หรือ สิ่งที่ต้องการทำให้เกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุด เช่น

$Max\, Q = f(x, y)$ หาค่า x, y ที่ดีที่สุด ที่ทำให้ $Q = f(x, y)$ มีค่าสูงสุด

$MinC = g(x, y)$ หาค่า x, y ที่ดีที่สุด ที่ทำให้ $C = g(x, y)$ มีค่าต่ำสุด

3) สมการข้อจำกัด หรือ สมการเงื่อนไข (Constraints)

หมายถึง สมการ หรือ อสมการเส้นตรงที่บอกให้ทราบถึงอัตราการใช้ทรัพยากรและจำนวนทรัพยากรที่ธุรกิจมีอยู่ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง ถ้าปัญหาดังกล่าวมีข้อจำกัดเพียงข้อเดียว สามารถใช้วิธีแคลคูลัส โดยเพิ่ม Lagrangian Multiplier (λ) เข้าไป ใน Lagrangian Equation ที่สร้างขึ้น แต่ถ้ามีข้อจำกัดมากกว่า 1 เงื่อนไข และอยู่ในรูป System of Inequalities (สมการที่มีเครื่องหมาย $\geq$ หรือ $\leq$) ใช้วิธี Linear Programming

4) ค่าของตัวแปร

หมายถึงค่าตัวแปรทุกตัวของโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งจะต้องไม่เป็นค่าที่ติดลบ

4. สมมติฐานของโปรแกรมเชิงเส้น

สมมติฐานของโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่สำคัญมี 5 ข้อ คือ

1) แบ่งแยกได้ (Divisibility)

หมายถึง ตัวแปรของโปรแกรมไม่จำเป็นต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม อยู่ในรูปเศษส่วนหรือทศนิยมได้

2) เป็นเส้นตรง (Linearity)

หมายถึง สมการเป้าหมายและข้อจำกัดต้องเป็นสมการหรืออสมการที่มีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง ตัวแปรในตัวแบบต้องยกกำลังหนึ่งเท่านั้น

3) ความแน่นอน(Certainly)

หมายถึง ไม่มีการเปลี่ยนแปลง เช่น กำไรต่อหน่วยของการผลิตสินค้าแต่ละชนิด ต้องทราบปริมาณการใช้ทรัพยากรในการผลิตสินค้า 1 หน่วย และปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ แต่ในทางปฏิบัติมักไม่ทราบข้อมูลอย่างถูกต้องแน่นอน ดังนั้นใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้ต้องระวังข้อสมมติในเรื่องนี้ไว้ด้วย

4) บวกเข้าด้วยกันได้(Additively)

หมายถึง การผลิตสินค้าจำนวน x_1 หน่วย มีกำไรต่อหน่วย 2 บาท และการผลิตสินค้าอีกชนิดหนึ่งจำนวน x_2 หน่วย มีกำไรต่อหน่วย 3 บาท เมื่อผลิตรวมกันจะให้กำไรรวม 18 หน่วย

5) ความสัมพันธ์ที่แน่นอน(Proportionality)

หมายถึง การเปลี่ยนตัวแปรตัวหนึ่งจะมีผลกระทบต่อตัวแปรอื่นเป็นอัตราส่วนแน่นอน เช่น สมการเป้าหมาย $2x_1 + 3x_2 = 18$ สมมติว่าคำเฉลย คือ $x_1 = 3,\ x_2 = 4$ ถ้าเพิ่มการผลิต x_1 1 หน่วย (จาก 3 เป็น 4 หน่วย) จะทำให้ผลิต x_2 ลดลง $\frac{2}{3}$ หน่วย

5. รูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้น

Maximize (or Minimize): $C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Subject to:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \quad (\le, \ge, =) \quad b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \quad (\le, \ge, =) \quad b_2 \\
\vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \quad (\le, \ge, =) \quad b_m
\end{aligned}
$$

And $x_1, \quad x_2, \ldots x_n \quad \ge 0$

หรือ เขียนอีกรูปแบบหนึ่งได้ว่า

Maximize (or Minimize): $C = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

Subject to: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (\le, \ge, =) \quad b_i$

And $x_j \ge 0$

$i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

โดยที่ C = ฟังก์ชันจุดมุ่งหมายที่ต้องการให้มีค่าสูงสุด/ต่ำสุด

x_j = กิจกรรมหรือตัวแปรนโยบายที่จะทำให้สามารถบรรลุจุดมุ่งหมาย

c_j = สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j ในสมการเป้าหมาย (กำไรต่อหน่วยหรือต้นทุนต่อหน่วย)

a_{ij} = อัตราการใช้ทรัพยากรของปัจจัยการผลิตชนิดที่ i ที่ใช้ในการผลิต x_j 1 หน่วย

b_i = จำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ของเงื่อนไขบังคับชนิดที่ i

6. ตัวอย่างการสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1 โรงงานอลูมิเนียมแห่งหนึ่งผลิตอลูมิเนียม 2 ชนิด x_1 และ x_2 โดยชนิดแรกต้องใช้การหลอม 6 ชั่วโมง การรีด 3 ชั่วโมง และการตัด 1 ชั่วโมง ชนิดที่ 2 ต้องใช้การหลอม 2 ชั่วโมง การรีด 5 ชั่วโมง และการตัด 4 ชั่วโมง ใน 1 สัปดาห์ โรงงานมีชั่วโมงสำหรับการหลอมรวม 36 ชั่วโมง การรีดรวม 30 ชั่วโมง และการตัดรวม 20 ชั่วโมง การผลิตอลูมิเนียมชนิดที่ 1 ได้กำไรหน่วยละ 450 บาท และชนิดที่ 2 ได้กำไรหน่วยละ 360 บาท ปัญหา คือ เพื่อให้โรงงานได้รับกำไรสูงสุด ใน 1 สัปดาห์ โรงงานควรผลิตอลูมิเนียมแต่ละชนิดเท่าไร

ตารางที่ 4.1 ขั้นตอนการผลิตของโรงงานอลูมิเนียม

ขั้นตอนการผลิต	เวลาผลิตอลูมิเนียม 1 หน่วย (ชั่วโมง)		ความสามารถของเครื่องจักร ใน 1 สัปดาห์ (ชั่วโมง)
	x_1	x_2	
หลอม	6	2	36
รีด	3	5	30
ตัด	1	4	20
กำไร (บาท)	450	360	

วิธีทำ เป้าหมาย : Maximize Profit

เงื่อนไข : เวลาการทำงานของเครื่องจักรทั้ง 3 ชนิด

ปัญหานี้สามารถเขียนในรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ Linear Programming ได้ดังนี้

สมมติให้ x_1 = ปริมาณอลูมิเนียมชนิดที่ 1 ที่ผลิตได้ใน 1 สัปดาห์ (หน่วย)

x_2 = ปริมาณอลูมิเนียมชนิดที่ 2 ที่ผลิตได้ใน 1 สัปดาห์ (หน่วย)

P = กำไรของโรงงานใน 1 สัปดาห์ (บาท)

Linear Programming อยู่ในรูป

Maximize $P = 450x_1 + 360x_2$

Subject to: $6x_1 + 2x_2 \leq 36$

$3x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 + 4x_2 \leq 20$

and $x_1, x_2 \geq 0$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. คนทำขนมปังกำไร $4 จากการผลิตเค้กแต่งงาน (x_1) และ $3 จากการผลิตเค้กวันเกิด (x_2) ในการทำเค้กแต่ละชนิดต้องผ่านกระบวนการสามขั้นตอนคือ ผสม อบและแต่งหน้าเค้ก โดยที่ในการทำเค้กแต่งงานต้องใช้การผสม 4 นาที การอบ 90 นาที และการแต่งหน้าเค้ก 8 นาที ส่วนเค้กวันเกิดต้องใช้การผสม 6 นาที การอบ 15 นาที และการแต่งหน้าเค้กอีก 4 นาที หากคนทำขนมเค้กดังกล่าวมีเวลา 120 นาทีสำหรับการผสม 90 นาทีสำหรับการอบ และ 96 นาทีสำหรับการแต่งหน้า จงเขียนโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อแสดงส่วนผสมที่เหมาะสมที่จะทำให้คนทำขนมปังได้รับกำไรสูงสุด

2. ผู้ผลิตผลไม้กวนได้กำไร $15 จากผลไม้กวนชนิดพิเศษ (x_1) และ $6 จากผลไม้กวนชนิดปกติ ($x_2$) โดยที่ผลไม่กวนชนิดพิเศษต้องใช้เวลาในการปอก 7.5 นาที ใช้เวลาในการกวน 20 นาที และใช้เวลาในการบรรจุกระป๋องอีก 8 นาที ผลไม้ชนิดปกติต้องใช้เวลาในการปอก 5 นาที ใช้เวลาในการกวน 30 นาที และใช้เวลาในการบรรจุกระป๋องอีก 8 นาที ผู้ผลิตดังกล่าวมีเวลา 150 สำหรับการปอกผลไม้ มีเวลาสำหรับการกวน 540 นาที และมีเวลา 120 นาทีสำหรับการบรรจุกระป๋อง จงเขียนโปรแกรมเชิงเส้นแสดงส่วนผสมที่เหมาะสมที่จะทำให้ผู้ผลิตรายนี้ได้รับกำไรสูงสุด

3. โรงงานผลิตอาหารเช้าซีริลแห่งหนึ่งต้องการผลิตซีริลยี่ห้อใหม่ซึ่งใช้เมล็ดธัญพืช 2 ชนิด (x_1 และ x_2) โดยซีริลใหม่นี้จะต้องมีคาร์โบไฮเดรตอย่างน้อย 128 หน่วย โปรตีนอย่างน้อย 168 หน่วย และฟรุกโตสอย่างน้อย 120 หน่วย เมล็ดพืชชนิดที่สองมีคาร์โบไฮเดรต 4 หน่วย โปรตีน 7 หน่วย และฟรุกโตส 32 หน่วย สำหรับต้นทุนของเมล็ดธัญพืชชนิดที่หนึ่งเท่ากับ $7 ต่อบุชเชล และของเมล็ดธัญพืชชนิดที่สองเท่ากับ $2 ต่อบุชเชล จงเขียนโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาส่วนผสมที่เหมาะสมที่จะทำให้โรงงานแห่งนี้เสียต้นทุนต่ำที่สุด

4. นักภูมิทัศน์ (Landscaper) ต้องการผสมปุ๋ยซึ่งประกอบด้วยฟอสเฟตอย่างน้อย 50 หน่วย ไนเตรทอย่างน้อย 240 หน่วย และแคลเซียมอย่างน้อย 210 หน่วย ปุ๋ยยี่ห้อที่หนึ่งให้ฟอสเฟต 1 หน่วย ไนเตรท 6 หน่วย และแคลเซียม 15 หน่วย ปุ๋ยยี่ห้อที่สองให้ฟอสเฟต 5 หน่วย ไนเตรท 8 หน่วย และแคลเซียม 6 หน่วย โดยปุ๋ยยี่ห้อที่หนึ่งและที่สองมีต้นทุนปอนด์ละ $2.50 และ $5 ตามลำดับ จงเขียนโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาส่วนผสมที่เหมาะสมที่จะทำให้นักภูมิทัศน์รายนี้เสียต้นทุนต่ำสุด

เอกสารอ้างอิง

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** 3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.

Edward T. Dowling. (1991). ***Theory and Problems of Mathematical Methods for Business and Economics.***

ประกอบ จิรกิติ. (2534). ***การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์บัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์.

นราทิพย์ ชุติวงศ์. (2544). ***เศรษฐศาสตร์การจัดการ.*** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***โปรแกรมเชิงเส้นตรง.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 5
การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนนำตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นมาแก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟได้
2. เพื่อให้ผู้เรียนนำตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นมาแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนนำหลักการวิธีคู่เสมอกันมาประยุกต์แก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น
4. เพื่อให้ผู้เรียนประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นกับปัญหาในเชิงเศรษฐศาสตร์ได้

เนื้อหา

1. การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีกราฟ
2. การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์
3. การหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีคู่เสมอกัน

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

ในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น สามารถทำได้โดยนำตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นที่สร้างไว้ในบทที่ 4 นำมาพัฒนาเพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดได้ 3 วิธีด้วยกัน คือ 1.วิธีกราฟ 2. วิธีซิมเพล็กซ์ และ3.วิธีคู่เสมอกัน นอกจากนี้ ปัจจุบันจะพบว่าเราสามารถแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้เช่นกัน สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึง 3 วิธีแรก ดังมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การแก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟ

การแก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟ เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด ที่ช่วยให้เข้าใจขั้นตอน และขอบเขตของการหาคำเฉลยที่ดีที่สุด แต่ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่ใช้วิธีกราฟหาคำเฉลยต้องเป็นปัญหาที่มีขนาดเล็ก คือมีตัวแปร 2-3 ตัวเท่านั้น ถ้าตัวแปรมากไปกว่านี้จะใช้วิธีซิมเพล็กซ์

1.1 ขั้นตอนในการแก้ปัญหา

1) ลากเส้นแสดงสมการเงื่อนไข หรือสมการข้อจำกัดทุกสมการ
2) ระบุบริเวณหรือพื้นที่ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ สอดคล้องกับเงื่อนไข ซึ่งเรียกว่า Feasible Region (FR = พื้นที่ที่ประกอบด้วยค่าตัวแปรเลือกต่างๆ ที่มีคุณสมบัติครบตามเงื่อนไขทุกเงื่อนไข) วิธีปฏิบัติ กำหนดจุดขึ้นมา 1 จุด เพื่อดูว่า จุดนั้นสอดคล้องกับอสมการหรือไม่
3) ลากเส้นสมการเป้าหมาย โดยสมมติค่าเป้าหมายมา 1 ค่า ที่ทำให้สมการเป้าหมายตัดผ่าน FR ต้องเคลื่อนเส้นเป้าหมายไปเรื่อยๆ จนถึงจุดสุดท้ายของ FR ที่ให้คำเฉลยที่ดีที่สุด หรืออาจลากเส้นโดยวิธีหาความชันของเส้นสมการเป้าหมายก็ได้
4) อ่านค่าตัวแปรที่จุดสัมผัส Optimum Point ในกรณีที่ Scale ไม่ชัดเจน ให้คำนวณค่าตัวแปร (x_1, x_2) ที่จุด Optimum Point จากสมการเงื่อนไข 2 สมการที่ตัดกัน ณ จุดนั้น

1.2 การแก้ปัญหา กรณีปัญหาค่าสูงสุด

ในการแก้ปัญหา กรณีที่เป็นปัญหาค่าสูงสุด จะแตกต่างกันตรงขั้นตอนข้อ 3) นั่นคือ ถ้าเป็นปัญหาค่าสูงสุด จะต้องพยายามลากขนานเส้นสมการเป้าหมายให้ห่างจุดกำเนิดมากที่สุด โดยยังคงสัมผัส FR ที่จุดใดจุดหนึ่ง จุดสัมผัสระหว่างเส้นสมการเป้าหมาย และ FR เป็นจุดที่ดีที่สุด (Optimum Point)

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

<u>วิธีทำ</u>

Maximize $Z = 10x_1 + 6.2x_2$

Subject to:

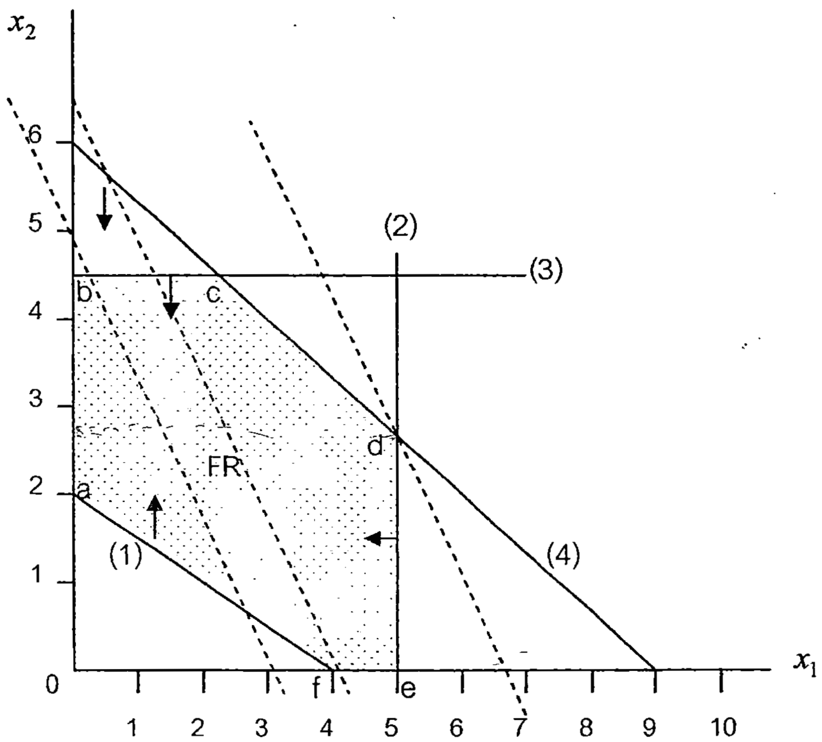
$$x_1 + 2x_2 \geq 4 \qquad (1)$$

$$x_1 \leq 5 \qquad (2)$$

$$x_2 \leq 4.5 \qquad (3)$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 54 \qquad (4)$$

and $x_1, x_2 \geq 0$



<u>ภาพที่ 5.1</u> ผลเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 1

หลังจากที่ลากเส้นสมการเงื่อนไข 4 สมการแล้วดังภาพที่ 5.1 จะได้พื้นที่ abcdef เป็นพื้นที่ที่เป็นไปได้ของคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้น และเมื่อลากเส้นสมการเป้าหมาย ก็จะได้จุดที่ดีที่สุดของโปรแกรม ณ จุดd เมื่ออ่านค่าจะกราฟ จะพบว่าที่จุด Optimum Point คือ $x_1 = 5$ ขณะที่ x_2 จะเป็นค่าที่เป็นทศนิยม หากสเกลไม่ชัดเจนจะทำให้คำตอบคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้นเราอาจใช้วิธีหาคำตอบจากสมการ ณ จุด d ได้ดังนี้

จากกราฟ คำนวณหา x_1, x_2 จากสมการ (2) และ (4)

$$x_1 = 5 \quad (2)$$

$$6x_1 + 9x_2 = 54 \quad (4)$$

ดังนั้น $$x_2 = \frac{\{54 - 6(5)\}}{9}$$

$$= \frac{8}{3}$$

แทนค่า x_1 และ x_2 ในสมการเป้าหมาย

$$Max\ Z = 10\ (5) + 6.2\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= 66.53$$

1.3 การแก้ปัญหา กรณีปัญหาต่ำสุด

ในการแก้ปัญหา กรณีที่เป็นปัญหาค่าสูงสุด จะแตกต่างกันตรงขั้นตอนข้อ 3) นั่นคือ ถ้าเป็นปัญหาค่าสูงสุด เราต้องพยายามลากเส้นขนานของเส้นสมการเป้าหมายให้ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด โดยยังคงสัมผัส FR ที่จุดใดจุดหนึ่ง จุดสัมผัสระหว่างเส้นสมการเป้าหมาย และ FR เป็นจุด Optimum Point

ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ

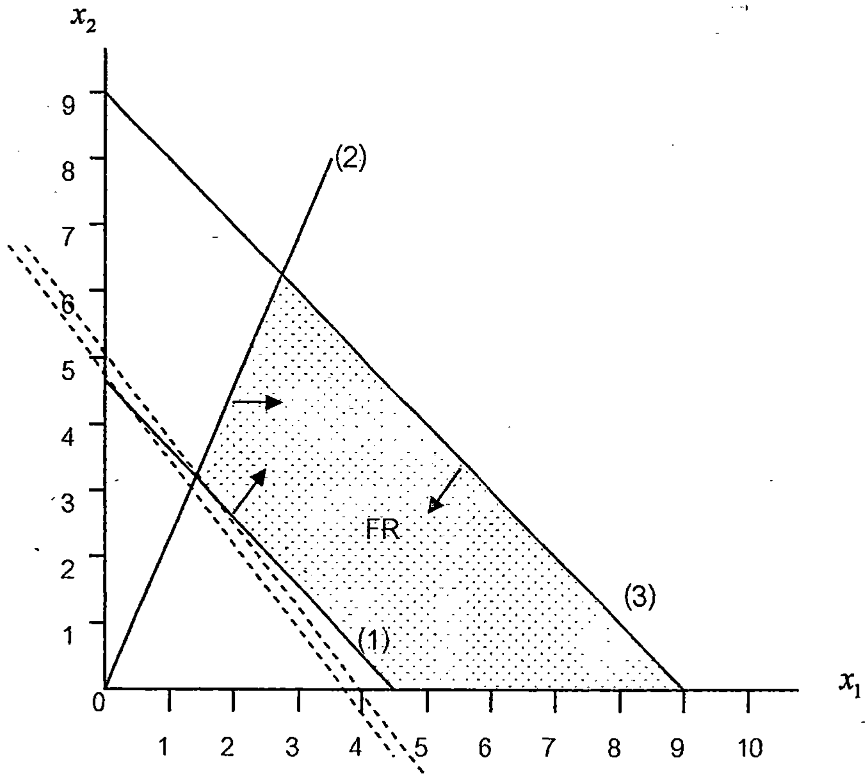
Minimize $Z = 3x_1 + 2x_2$

Subject to: $x_1 + x_2 \geq 4.5$ (1)

$x_2 - 2x_1 \leq 0$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 9$ (3)

and $x_1, x_2 \geq 0$



ภาพที่ 5.2 ผลเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 2

จากภาพที่ 5.2 ที่จุด Optimum Point คำนวณหา x_1, x_2 จากสมการเงื่อนไข (1) และ (2)

$$x_1 + x_2 = 4.5 \quad (1)$$

$$x_2 - 2x_1 = 0 \quad (2)$$

ดังนั้น $x_2 = 2x_1$ แทนค่าใน (1)

$$x_1 + 2x_1 = 4.5$$

$$3x_1 = 4.5$$

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = 3$$

แทนค่า x_1 และ x_2 ในสมการเป้าหมาย:

$$Min\ Z = 3(1.5) + 2(3) = 10.5$$

1.4 คำเฉลยที่เป็นไปได้ของโปรแกรมในกรณีต่างๆ

1) คำเฉลยที่ดีที่สุดมีมากกว่า 1 ค่า (Infinitely Many Solutions)

ในบางปัญหาอาจมีผลเฉลยที่เหมาะสมมากกว่า 1 ค่า หมายถึง มีค่า x_1, x_2 เป็นค่าอื่นได้อีก โดยสามารถให้ค่าผลลัพธ์เท่ากัน เช่น ให้กำไรสูงสุดเท่ากัน หรือต้นทุนต่ำสุดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3

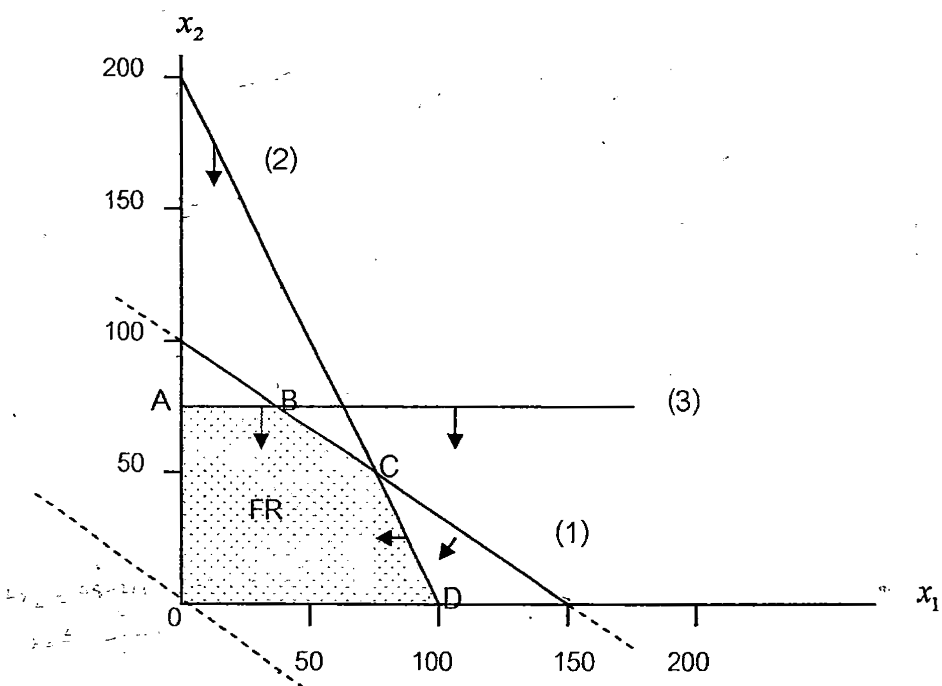
วิธีทำ Maximize $Z = 50x_1 + 75x_2$

Subject to: $2x_1 + 3x_1 \le 300$ (1)

$5x_1 + 2x_2 \le 400$ (2)

$2x_2 \le 160$ (3)

and $x_1, x_2 \ge 0$



ภาพที่ 5.3 ผลเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 3

จากภาพที่ 5.3 บริเวณผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ OABCD ลากเส้นสมการเป้าหมาย แล้วเลื่อนเส้นขนานของเส้นสมการเป้าหมายไม่สัมผัสจุดยอดใดๆ ของ FR แต่ทับกับเส้นสมการเงื่อนไขข้อ 1 พอดี โดยจะมีส่วนเฉพาะเส้นตรง BC ที่อยู่ใน FR ซึ่งหมายความว่าจุดทุกจุดบนเส้น BC เป็นคำเฉลยที่ดีที่สุด

ให้ค่า Z เท่ากัน อาทิ

$x_1 = 30,\ x_2 = 80 \qquad Z = 7{,}500$

$x_1 = 54,\ x_2 = 64 \qquad Z = 7{,}500$

ปัญหาลักษณะนี้ แสดงให้เห็นว่า มีทางเลือกที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาได้หลายทาง ซึ่งแต่ละทางให้ผลตอบแทนตามเป้าหมายที่ดีที่สุดเหมือนกัน

2) คำเฉลยที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solution)

ลักษณะคำเฉลยแบบนี้จะเกิดขึ้นในกรณีปัญหาที่หาค่าสูงสุดเท่านั้น เมื่อปรากฏว่าบริเวณผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มีค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งสองตัวสูงขึ้นเท่าไรก็ได้โดยไม่มีสิ้นสุด และค่าสมการเป้าหมายก็จะเพิ่มสูงขึ้นเท่าใดก็ได้โดยไม่ฝืนสมการเงื่อนไขตามปัญหาที่ตั้งไว้ คำเฉลยกรณีนี้เป็นไปไม่ได้ในความเป็นจริง สาเหตุที่เกิดขึ้นอาจเป็นเพราะสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงไม่ถูกต้อง เช่น มีเงื่อนไขบางประการที่ควรจะระบุไว้ แต่มิได้เขียนเป็นเงื่อนไขบังคับในโปรแกรมเชิงเส้นตรง

<u>ตัวอย่างที่ 4</u>

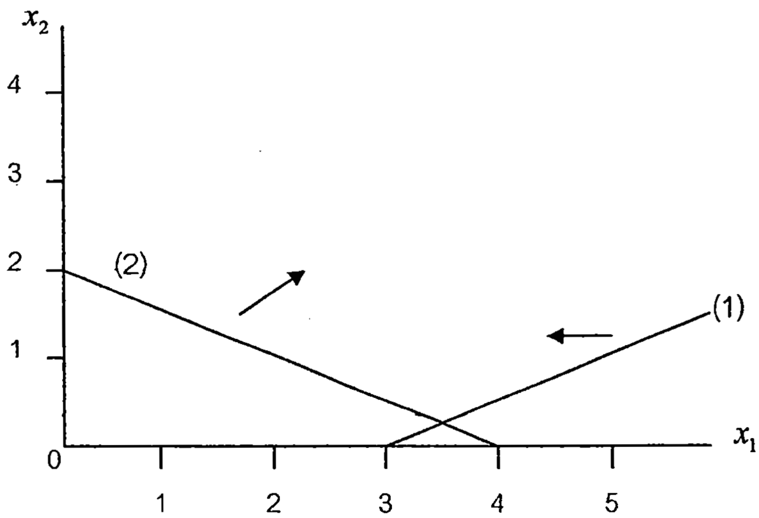
<u>วิธีทำ</u>

Maximize $\quad Z = 2x_1 + 3x_2$

Subject to: $\quad 2x_1 - 3x_2 \le 6 \qquad (1)$

$3x_1 + 6x_2 \ge 12 \qquad (2)$

and $\quad x_1, x_2 \ge 0$



ภาพที่ 5.4 โปรแกรมเชิงเส้นที่คำเฉลยมีลักษณะที่ไม่มีขอบเขต

จากภาพที่ 5.4 แสดงให้เห็นถึงบริเวณ FR ขยายกว้างออกไปอย่างไม่มีขีดจำกัด ผลคือ ค่า x_1, x_2 เพิ่มสูงขึ้นได้ไม่จำกัด ค่า Z ก็เพิ่มอย่างไม่จำกัดตามการสูงขึ้นของค่า x_1, x_2

3) ไม่มีคำเฉลยที่เป็นไปได้ (Infeasible Solution)

นั่นคือเป็นกรณีที่โปรแกรมเชิงเส้นไม่มีคำเฉลยใดที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไข หรือไม่สามารถหาพื้นที่ FR ได้นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 5

วิธีทำ

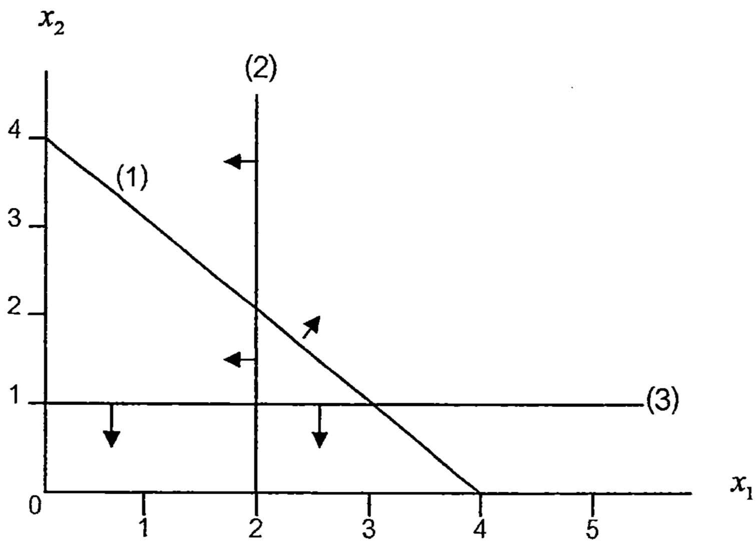
Minimize $Z = 2x_1 + 4x_2$

Subject to: $x_1 + x_2 \geq 4$ (1)

$x_1 \leq 2$ (2)

$x_2 \leq 1$ (3)

and $x_1, x_2 \geq 0$



<u>ภาพที่ 5.5</u> โปรแกรมเชิงเส้นที่ไม่มีคำเฉลยที่เป็นไปได้

จากภาพที่ 5.5 จะเห็นว่า ไม่มีพื้นที่ร่วมของทุกๆ อสมการเลย ปัญหานี้จึงไม่สามารถหาคำเฉลยได้

2. การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

ถึงแม้ว่าวิธีกราฟจะเป็นวิธีที่ง่ายและไม่ยุ่งยาก แต่มีข้อจำกัดว่าสามารถใช้ได้กับโปรแกรมเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรเพียง 2-3 ตัวเท่านั้น ดังนั้นถ้าปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงมีขนาดใหญ่ จะใช้วิธีหาคำเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์

วิธีซิมเพล็กซ์ เป็นวิธีการคำนวณที่มีลักษณะเป็นการคำนวณย้อนซ้ำขั้นตอน นั่นคือ จะคำนวณซ้ำๆ กัน จนกว่าจะได้ผลเฉลยที่ดีที่สุด

1) ศัพท์ที่พบบ่อยในวิธีซิมเพล็กซ์

(1) Extreme Points (จุดยอด) คือ จุดตัดระหว่างสมการเงื่อนไข 2 สมการ ค่าของจุดยอดนี้อยู่บนขอบของพื้นที่รูป FR หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ จุดหักมุมของ FR

(2) Basis Solution (คำเฉลยพื้นฐาน หรือ คำตอบเบื้องต้น) คือ คำตอบใดๆ ของโปรแกรมเชิงเส้นหรือค่าของตัวแปร ณ จุดใดๆ ใน FR

(3) Basis Feasible Solutions (คำเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้) คือ ค่าของตัวแปรที่

จุด Extreme Point จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งมีคุณสมบัติครบตามเงื่อนไข BFS ที่ Extreme Point จุดหนึ่งจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้น

2) ตัวแปรส่วนขาดและตัวแปรส่วนเกิน

(1) ตัวแปรส่วนขาด (Slack Variable) เป็นตัวแปรที่เพิ่มเข้ามาในอสมการที่มีเครื่องหมาย $\leq$ เพื่อเปลี่ยนอสมการนี้เป็นสมการ ต้องไม่เป็นค่าติดลบ ใช้สัญลักษณ์ในสมการว่า S_i (i = 1, 2,...,n) ซึ่ง $S_i > 0$ แสดงว่า ทรัพยากรยังไม่ถูกนำไปใช้ เช่น $2x_1 + x_2 \leq 80$

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 80$$

(2) ตัวแปรส่วนเกิน เป็นตัวแปรที่เพิ่มเข้าไปในอสมการที่มีเครื่องหมาย $\geq$ เพื่อเปลี่ยนอสมการนี้เป็นสมการ ใช้สัญลักษณ์เช่นเดียวกันกับตัวแปรส่วนขาด คือ S_i และต้องไม่เป็นค่าติดลบ แต่เนื่องจากการเพิ่มตัวแปรนี้ทำให้คำตอบเบื้องต้นเป็นไปไม่ได้ เช่น $x_1 \geq 10$

$$x_1 - S_2 = 10$$

$S_2 = -10$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ($\because$ ค่าติดลบไม่ได้)

ดังนั้นจึงมีการบวกตัวแปรเทียม (Artificial Variable) เข้าไปในสมการ เพื่อจะได้มีคำเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ ใช้สัญลักษณ์ว่า $A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

ตัวแปรนี้เป็นตัวแปรชั่วคราว ต้องพยายามเอาออกจากตาราง Simplex คือ ให้มีค่าเท่ากับ 0 โดยกำหนดสัมประสิทธิ์ของ A ให้มีค่าติดลบสูงสุดในสมการเป้าหมาย Maximize ในทำนองกลับกัน กำหนดสัมประสิทธิ์ของ A ให้มีค่าบวกสูงสุดในสมการเป้าหมาย Minimize

ในที่นี้ ให้อักษร M แสดงสัมประสิทธิ์หน้า A อาทิเช่น

Maximize $\quad Z = 30x_1 + 20x_2$

Subject to $\quad 2x_1 + x_2 \leq 80$

$\qquad x_1 \geq 10$

and $\quad x_1, x_2 \geq 0$

สามารถใช้ตัวแปรส่วนเกินและส่วนขาดเปลี่ยนอสมการเป็นสมการได้ดังนี้

Maximize $\quad Z = 30x_1 + 20x_2 + 0S_1 - 0S_2 + MA_1$

Subject to $\quad 2x_1 + x_2 + S_1 = 80$

$\qquad x_1 - S_2 + A_1 = 10$

and $\quad x_1,\ x_2, S_1, S_2, A_1 \geq 0$

ในสมการเป้าหมาย ค่าสัมประสิทธิ์หน้า S_i มีค่าเท่ากับ 0 เนื่องจาก S_i ไม่มีผลกระทบต่อสมการเป้าหมาย

3) การหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์

เป็นวิธีคำนวณคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยการหาคำเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ (Basic Feasible Solutions) ของระบบสมการเงื่อนไข พร้อมกับตรวจสอบว่า เป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ (Optimal Solution) พร้อมกันไป การหาคำเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะดำเนินการโดยเคลื่อนย้าย Basic Feasible Solutions จากจุดยอดหนึ่งไปอีกจุดยอดหนึ่งที่อยู่ใกล้เคียงกัน โดยต้องมีตัวแปรอย่างน้อยจำนวน n – m ตัว ที่มีค่าเท่ากับ 0

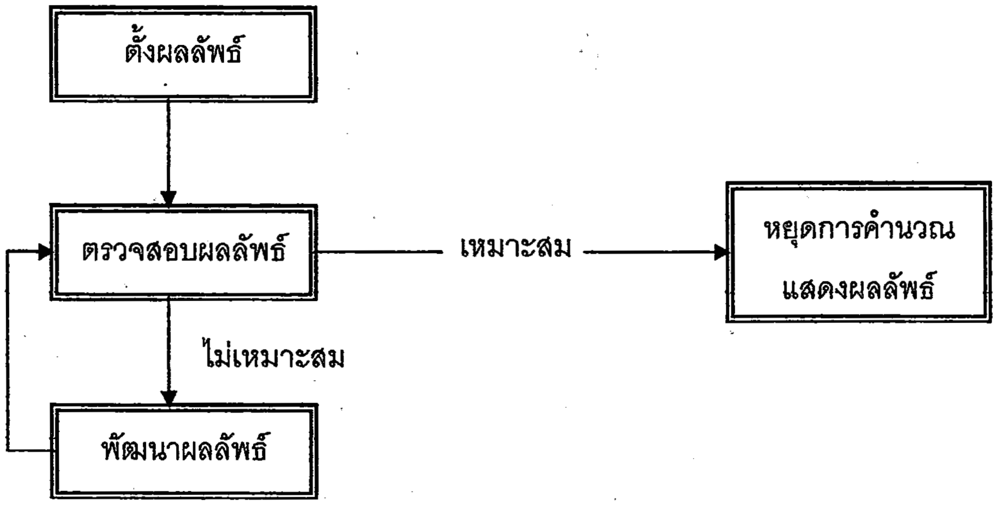
ระบบสมการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ประกอบด้วย m สมการ และตัวแปร n ตัว

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงมักมีสมการน้อยกว่าตัวแปร คำตอบเบื้องต้น (Basic Solution) จะต้องมีคำเฉลยที่เท่ากับ 0 อย่างน้อยเท่ากับ n – m จำนวนตัวแปรที่กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 เรียกว่า Non-Basis Variable (ตัวแปรอมูลฐาน) ส่วนตัวแปรที่เหลือจะมีค่าไม่เท่ากับ 0 เรียกว่า Basic Variable (ตัวแปรมูลฐาน)

ขั้นตอนการคำนวณ แบ่งได้เป็น 3 ขั้นตอนหลัก คือ

1. ตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น
2. ตรวจสอบผลลัพธ์
3. พัฒนาผลลัพธ์ใหม่



ภาพที่ 5.6 กระบวนการหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์

2.1 การแก้ปัญหาค่าสูงสุด และเงื่อนไขทุกข้อมีเครื่องหมาย $\leq$

รายละเอียดและขั้นตอนการแก้ปัญหาค่าสูงสุด อธิบายดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงคำนวณหาคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นตรง โดยวิธี Simplex

Maximize $P = 5x_1 + 3x_2$

Subject to $6x_1 + 2x_2 \leq 36$

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$

$2x_1 + 4x_2 \leq 28$

and $x_1, x_2 \geq 0$

วิธีทำ ขั้นตอนของ Simplex

ขั้นที่ 1 ตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น (สร้างตารางแรก)

1.1 เปลี่ยนสมการเงื่อนไขทุกข้อให้อยู่ในรูปสมการ โดยใช้ Dummy Variables (ในตัวอย่างนี้คือ ตัวแปรส่วนขาด) ซึ่งไม่ทำให้ค่าเป้าหมายเปลี่ยนแปลง

Maximize $P = 5x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Subject to $6x_1 + 2x_2 + S_1 = 36$

$5x_1 + 5x_2 + S_2 = 40$

$2x_1 + 4x_2 + S_3 = 28$

and $x_1, \; x_2, \; S_1, \; S_2, \; S_3 \geq 0$

สมการโปรแกรมเชิงเส้นตรงรูปใหม่ที่ได้นี้ เรียกว่า โปรแกรมขยาย (Augmented Program)

1.2 เขียนโปรแกรมขยายโดยให้ตัวแปรทุกตัวอยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมาย (=)

Maximize $P - 5x_1 - 3x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$

Subject to $6x_1 + 2x_2 + S_1 = 36$

$5x_1 + 5x_2 + S_2 = 40$

$2x_1 + 4x_2 + S_3 = 28$

and $x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \geq 0$

1.3 สร้างตารางซิมเพล็กซ์ตารางแรก โดยเรียงลำดับตามแถวตั้งและแถวนอนดังนี้

ตารางที่ 5.1 ตารางแรกของโปรแกรมเชิงเส้น

ตัวแปรในคำตอบ	P	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ค่าคงที่	แถว
P	1	-5	-3	0	0	0	0	0
S_1	0	6	2	1	0	0	36	1
S_2	0	5	5	0	1	0	40	2
S_3	0	2	4	0	0	1	28	3

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 40 \\ 28 \end{bmatrix}$$

And $x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \geq 0$

1.4 การอ่านค่าตัวแปร

(1) Column ใดที่มีเลข 1 ตัวเดียว นอกนั้นเป็น 0 จึงจะอ่านค่าตัวแปรได้ ถ้าไม่ใช่เลข 1 ยังอ่านค่าไม่ได้ ตัวแปรในช่องค่าคงที่เหล่านี้เป็นตัวแปรในคำตอบ เช่น ตาราง 1 อ่านค่าได้ว่า P = 0, $S_1 = 36$, $S_2 = 40$, $S_3 = 28$

(2) Column ที่มีเลขอื่นที่มิใช่เลข 0 มากกว่าตัวเดียว อ่านค่าตัวแปรได้ว่า มีค่าเท่ากับ 0 อาทิ ตาราง 1 x_1, x_2 = 0

<u>ขั้นที่ 2</u> ตรวจสอบผลลัพธ์

การตรวจสอบว่า คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด ตรวจดูตัวเลขในแถวที่ 0 (แถวแรก) ว่ายังมีตัวเลขที่มีค่าลบ (-) อยู่หรือไม่ ถ้ายังไม่ใช่ตารางที่มี Optimal Solutions ต้องพัฒนาผลลัพธ์ไปเรื่อยๆ จนไม่มีค่าติดลบ (-)

จากตาราง 1 จะพบว่า แถวแรกยังมีค่าติดลบอยู่ แสดงว่ายังไม่ใช่ตารางที่มี Optimal Solution และยังไม่มีการผลิตใดๆ (x_1, x_2 = 0) จึงยังไม่มีกำไร (P = 0) ซึ่งเป็นเป้าหมายของการผลิต ฉะนั้นในขั้นต่อไปต้องเลือกว่าจะผลิตสินค้าใดก่อน และการผลิตสินค้านั้น ได้กำไรเท่าไร เลือกตัวแปรเข้ามาในคำตอบ แล้วคำนวณผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

<u>ขั้นที่ 3</u> พัฒนาผลลัพธ์ใหม่ คือการกำหนดว่า กิจกรรมใดควรถูกดึงเข้ามาในเซทของผลลัพธ์ และกิจกรรมใดควรถูกดึงออกไปจากเซทของผลลัพธ์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ การพิจารณาตัวแปรว่าควรมีการสับเปลี่ยนกันอย่างไร จึงจะทำให้ค่าในสมการเป้าหมายสูงมากที่สุด
โดยวิธีเลือกมีขั้นตอนดังนี้

(1) <u>จะดึงอะไรเข้ามา</u>

ให้พิจารณาในแถวที่ 0 เลือกตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ติดลบมากที่สุดเข้าไปเป็น Column ที่ถูกเลือก เนื่องจากถ้าตัวแปรนั้นเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้ระดับกำไรเพิ่มมากกว่าตัวแปรอื่น ตามตาราง 1 จะเห็นว่า ตัวแปร x_1 มีอัตรากำไรต่อหน่วย 5 หน่วย สูงกว่า x_2 ที่มีอัตรากำไรต่อหน่วยเพียง 3 บาท Column x_1 ที่เลือกได้ เรียกว่า คอลัมน์หลัก หรือ Pivot Column

(2) <u>จะเอาอะไรออกไป</u>

(2.1) เลือก Pivot Row โดยเอาค่าสัมประสิทธิ์ใน Pivot Column ยกเว้น แถวที่ 0 และเฉพาะที่มีค่าบวก (+) ไปหารค่าคงที่ ผลหารที่มีค่าเล็กที่สุดอยู่ในแถวใด แถวนั้นเป็น Pivot Row จากตาราง 1 ได้ว่า

$$Min\left\{\frac{36}{6}\ \frac{40}{5}\ \frac{28}{2}\right\} = \frac{36}{6} \qquad \text{แถวที่ 1 เป็น Pivot Row}$$

(2.2) เลือก Pivot Element ซึ่งหมายถึง ตัวเลขที่ตัดกันระหว่าง Pivot Row กับ Pivot Column จากตาราง 1 Pivot Element คือ 6

(2.3) ทำการปรับเพิ่ม-ลด เพื่อทำให้ Pivot Element เท่ากับ 1 และค่าสัมประสิทธิ์ในแถวอื่นของ Pivot Column เท่ากับ 0 นั่นคือ พยายามทำให้ Pivot Column มีลักษณะ

	x_1
แถว 0	0
แถว 1	1
แถว 2	0
แถว 3	0

ทั้งนี้เพื่อให้ค่าสัมประสิทธิ์ในระบบสมการ Basic Feasible Solutions เป็น Identity Matrix นั่นเอง

(2.4) ปัญหาต่อไปนี้ พัฒนาผลลัพธ์ต่อไปนี้หรือไม่ ให้ดูค่าสัมประสิทธิ์ในแถว 0 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์นี้ยังมีค่าติดลบ แสดงว่า ยังไม่ใช่คำเฉลยที่ดีที่สุด ต้องทำ Pivot Step ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าสัมประสิทธิ์ในแถว 0 ไม่มีค่าติดลบ

<u>ตารางที่ 5.2</u> ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 1

ตัวแปรในคำตอบ	P	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ค่าคงที่	แถว
P	1	-5	-3	0	0	0	0	$1r_0$
S_1	0	6	2	1	0	0	36	$1r_1$
S_2	0	5	5	0	1	0	40	$1r_2$
S_3	0	2	4	0	0	1	28	$1r_3$

Pivot Column = x_1 Pivot Row = $Min\left\{\frac{36}{6}\ \frac{40}{5}\ \frac{28}{2}\right\} = \frac{36}{6}$ = แถวที่ 1 r_1

Pivot Element = 6

<u>ตารางที่ 5.3</u> ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 2

ตัวแปรในคำตอบ	P	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ค่าคงที่	แถว
P	1	0	-4/3	5/6	0	0	30	$2r_0=1r_0+5(2r_1)$
x_1	0	1	1/3	1/6	0	0	6	$2r_1=1r_1/6$
S_2	0	0	10/3	-5/6	1	0	10	$2r_2=1r_2-5(2r_1)$
S_3	0	0	10/3	-1/3	0	1	16	$2r_3=1r_3-2(2r_1)$

Pivot Column คือ x_2 Pivot Row: $Min\left\{\frac{6}{1/3}\ \frac{10}{10/3}\ \frac{16}{10/3}\right\} = \frac{10}{10/3}$ = r_2

Pivot Element = 10/3

<u>ตารางที่ 5.4</u> ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 3

ตัวแปรในคำตอบ	P	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ค่าคงที่	แถว
P	1	0	0	1/2	2/5	0	34	$3r_0=2r_0+(4/3)(3r_2)$
x_1	0	1	0	1/4	-1/10	0	5	$3r_1=2r_1-(1/3)(3r_2)$
x_2	0	0	1	-1/4	3/10	0	3	$3r_2=2r_2\times(3/10)$
S_3	0	0	0	1/2	-1	1	6	$3r_3=2r_3-(10/3)(3r_2)$

จากตารางที่ 3 จะเห็นว่า ค่าสัมประสิทธิ์ไม่มีติดลบในแถว 0 แสดงว่าได้รับคำเฉลยที่ดีที่สุด และอ่านคำเฉลยจากตารางได้ว่า x_1 = 5, x_2 = 3, S_3 = 6, P = 34

<u>2.2 การแก้ปัญหาค่าต่ำสุด และเงื่อนไขทุกข้อมีเครื่องหมาย ≥</u>

รายละเอียดและขั้นตอนการแก้ปัญหาค่าสูงสุด อธิบายดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงคำนวณหาคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นตรง โดยวิธี Simplex

Minimize $C = 0.6x_1 + x_2$

Subject to $10x_1 + 4x_2 \geq 20$

$5x_1 + 5x_2 \geq 20$

$2x_1 + 6x_2 \geq 12$

and $x_1, x_2 \geq 0$

<u>วิธีทำ</u> ขั้นตอนของ Simplex

<u>ขั้นที่ 1</u> ตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น (สร้างตารางแรก)

1.1 เปลี่ยนสมการเงื่อนไขทุกข้อให้อยู่ในรูปสมการ โดยใช้ Dummy Variables (ตัวแปรส่วนเกินและตัวแปรเทียม) ซึ่งไม่ทำให้ค่าเป้าหมายเปลี่ยนแปลง

Minimize $C = 0.6x_1 + x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$

Subject to $10x_1 + 4x_2 - S_1 + A_1 = 20$

$5x_1 + 5x_2 - S_2 + A_2 = 20$

$2x_1 + 6x_2 - S_3 + A_3 = 12$

and $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

1.2 ย้ายตัวแปรทุกตัวอยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมาย (=)

Minimize $C - 0.6x_1 - x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MA_1 - MA_2 - MA_3 = 0$

Subject to $10x_1 + 4x_2 - S_1 + A_1 = 20$

$5x_1 + 5x_2 - S_2 + A_2 = 20$

$2x_1 + 6x_2 - S_3 + A_3 = 12$

and $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

1.3 สร้างตาราง Simplex ตารางแรก โดยเรียงลำดับตามแถวตั้งและแถวนอนดังนี้

ตารางที่ 5.5 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 1

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่าคงที่	แถว
C	1	-6/10	-1	0	0	0	-M	-M	-M	0	$1r_0$
S_1	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20	$1r_1$
S_2	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20	$1r_2$
S_3	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12	$1r_3$

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่าได้ใส่ตัวแปรหุ่นเทียมเข้ามาในสมการเพื่อช่วยในการคำนวณ ซึ่งตัวแปรเหล่านี้มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า 0 ไม่ได้ (ต้องเท่ากับ 0) ดังนั้นเราจึงต้องทำการคำนวณให้สัมประสิทธิ์หน้า A (M) มีค่าเท่ากับ 0

ตารางที่ 5.6 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 2

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่าคงที่	แถว
C	1	$-\frac{6}{10}+17M$	-1+15M	-M	-M	-M	0	0	0	52M	$2r_0=1r_0+$ $M(1r_1+1r_2+1r_3)$
A_1	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20	$2r_1=1r_1$
A_2	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20	$2r_2=1r_2$
A_3	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12	$2r_3=1r_3$

ต่อไปของปัญหาการหาค่าต่ำสุด คือกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรหุ่นเทียมนี้ให้มีค่าสูงๆ ที่ทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปร (x_1, x_2) ในแถว 0 มีค่าเป็นบวก ในตัวอย่างนี้ สมมติให้ M = 10 แทนค่าในตารางที่ 2

ตารางที่ 5.7 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 3

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่าคงที่	แถว
C	1	847/5	149	-10	-10	-10	0	0	0	520	$3r_0$
A_1	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20	$3r_1$
A_2	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20	$3r_2$
A_3	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12	$3r_3$

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบผลลัพธ์

การตรวจสอบว่า คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ ในกรณีปัญหาค่าต่ำสุด ตรวจดูเลขในแถวที่ 0 (แถวแรก) ว่า ยังมีตัวเลขที่มีค่าบวก (+) อยู่หรือไม่ (ยกเว้นตัวแปรหุ่นเทียม) ถ้ามียังไม่ใช่ตารางที่มี Optimal Solutions ต้องพัฒนาผลลัพธ์ไปเรื่อยๆ จนค่าสัมประสิทธิ์ในแถว 0 ไม่มีค่าบวก (+)

จากตารางที่ 3 จะพบว่า แถวแรกยังมีค่าเป็นบวกอยู่ (มีค่าเป็นลบในสมการต้นทุน) แสดงว่ายังไม่ใช่ตารางที่มี Optimal Solution หมายความว่า ระดับต้นทุนจะสามารถลดลงได้อีกหากนำกิจกรรมที่มีค่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวเข้ามาเป็น Basic Feasible Solutions ฉะนั้นในขั้นต่อไปต้องเลือกว่าจะผลิตสินค้าใดก่อน และการผลิตสินค้านั้น จึงจะเสียต้นทุนต่ำสุด เลือกตัวแปรเข้ามาในคำตอบ แล้วคำนวณผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

<u>ขั้นที่ 3</u> พัฒนาผลลัพธ์ใหม่ คือการกำหนดว่า กิจกรรมใดควรถูกดึงเข้ามาในเซตของผลลัพธ์ และกิจกรรมใดควรถูกดึงออกไปจากเซตของผลลัพธ์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ การพิจารณาตัวแปรว่าควรมีการสับเปลี่ยนกันอย่างไร จึงจะทำให้ค่าในสมการเป้าหมายต่ำสุด
โดยมีวิธีเลือกดังต่อไปนี้

(1) จะดึงอะไรเข้ามา

ให้พิจารณาในแถวที่ 0 เลือกตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าบวกที่สุดเข้าไปเป็น Column ที่ถูกเลือก ในตัวอย่างนี้ Column x_1 เป็นคอลัมน์หลัก หรือ Pivot Column

(2) จะเอาอะไรออกไป

(2.1) เลือก Pivot Row โดยเอาค่าสัมประสิทธิ์ใน Pivot Column ยกเว้น แถวที่ 0 และเฉพาะที่มีค่าบวก (+) ไปหารค่าคงที่ ผลหารค่าคงที่ ผลหารที่มีค่าเล็กที่สุดอยู่ในแถวใด แถวนั้นเป็น Pivot Row จากตาราง 1 ได้ว่า

$$Min\left\{\frac{20}{10} \quad \frac{20}{5} \quad \frac{12}{2}\right\} = \frac{20}{10}$$

แถวที่ 1 เป็น Pivot Row

(2.2) เลือก Pivot Element ซึ่งหมายถึง ตัวเลขที่ตัดกันระหว่าง Pivot Row กับ Pivot Column จากตาราง 3 Pivot Element คือ 10

(2.3) ทำการปรับเพิ่ม-ลด เพื่อทำให้ Pivot Element เท่ากับ 1 และค่าสัมประสิทธิ์ในแถวอื่นของ Pivot Column เท่ากับ 0 นั่นคือ พยายามทำให้ Pivot Column มีลักษณะ

	x_1
แถว 0	0
แถว 1	1
แถว 2	0
แถว 3	0

ทั้งนี้เพื่อให้ค่าสัมประสิทธิ์ในระบบสมการ Basic Feasible Solutions เป็น Identity Matrix นั่นเอง

(2.4) ปัญหาต่อไปคือ พัฒนาผลลัพธ์ต่อไปหรือไม่ ให้ดูค่าสัมประสิทธิ์ในแถว 0 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร (ยกเว้นตัวแปรหุ่นเทียม) นี้ยังมีค่าเป็นบวก แสดงว่า ยังไม่ใช่คำเฉลยที่ดีที่สุด ต้องทำ Pivot Step ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าสัมประสิทธิ์ในแถว 0 ไม่มีค่าบวก

ตารางที่ 5.8 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 3

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่าคงที่	แถว
C	1	847/5	149	-10	-10	-10	0	0	0	520	$3r_0$
A_1	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20	$3r_1$
A_2	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20	$3r_2$
A_3	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12	$3r_3$

Pivot Column = x_1 Pivot Row $= Min\left\{\frac{20}{10} \quad \frac{20}{5} \quad \frac{12}{2}\right\} = \frac{20}{10}$ = แถวที่ 1

Pivot Element = 10

ตารางที่ 5.9 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 4

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่าคงที่	แถว
C	1	0	$\frac{2031}{25}$	$\frac{347}{50}$	-10	-10	$-\frac{847}{50}$	0	0	$\frac{906}{5}$	$4r_0=3r_0-(847/5)4r_1$
x_1	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	0	0	2	$4r_1=3r_1/10$
A_2	0	0	3	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	$4r_2=3r_2-5(4r_1)$
A_3	0	0	$\frac{26}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1	$-\frac{1}{5}$	0	1	8	$4r_3=3r_3-2(4r_1)$

Pivot Column คือ x_2 Pivot Row = $Min\left\{\frac{2}{2/5} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{8}{26/5}\right\} = \frac{8}{26/5}$ = แถว 3

Pivot Element = 26/5

ตารางที่ 5.10 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 5

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่าคงที่	แถว
C	1	0	0	$\frac{248}{65}$	-10	$\frac{731}{130}$	$-\frac{898}{65}$	0	$-\frac{2031}{130}$	$\frac{3654}{65}$	$5r_0=4r_0-\frac{2031}{130}(5r_3)$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{26}$	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{26}$	0	$-\frac{1}{13}$	$\frac{18}{13}$	$5r_1=4r_1-(2/5)(5r_3)$
A_2	0	0	0	$\frac{5}{13}$	-1	$\frac{15}{26}$	$-\frac{5}{13}$	1	$-\frac{15}{26}$	$\frac{70}{13}$	$5r_2=4r_2-3(5r_3)$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{5}{26}$	$-\frac{1}{26}$	0	$\frac{5}{26}$	$\frac{20}{13}$	$5r_3=4r_3\times(5/26)$

Pivot Column คือ S_3 Pivot Row $= Min\left\{\frac{18/13}{1/13} \quad \frac{70/13}{15/26}\right\} = \frac{70/13}{15/26} = \frac{28}{3}$ = แถว 2

Pivot Element = 15/26

ารางที่ 5.11 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 6

แปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่า	แถว
C	1	0	0	1/1	-19/75	0	-151/15	-731/75	-10	56/15	$6r_0=5r_0-(731/130)(6r_2)$
x_1	0	1	0	5	2/15	0	1/6	-2/15	0	2/3	$6r_1=5r_1-(1/13)(6r_2)$
S_3	0	0	0	-1/6	-26/15	1	-2/3	26/15	-1	28/3	$6r_2=5r_2\times 26/15$
x_2	0	0	1	2/3	-1/3	0	-1/6	1/3	0	10/3	$6r_3=5r_3+(5/26)(6r_2)$
				1/6							

Pivot Column คือ S_1 Pivot Row $= Min\left\{\frac{28/3}{2/3} \quad \frac{10/3}{1/6}\right\} = \frac{28/3}{2/3} =$ แถว 2

Pivot Element = 2/3

ตารางที่ 5.12 ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 7

ตัวแปร	C	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	ค่า	แถว
C	1	0	0	0	$-\frac{6}{75}$	$-\frac{1}{10}$	-10	$-\frac{744}{75}$	$-\frac{99}{10}$	$\frac{14}{5}$	$7r_0=6r_0-(1/15)(7r_2)$
x_1	0	1	0	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{4}$	3	$7r_1=6r_1-(1/6)(7r_2)$
S_1	0	0	0	1	$-\frac{13}{5}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{13}{5}$	$-\frac{3}{2}$	14	$7r_2=6r_2\times 3/2$
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	1	$7r_3=6r_3-(1/6)(7r_2)$

จากตาราง 7 จะเห็นได้ว่า เป็นตารางที่มีผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของสมการเป้าหมาย เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ในแถว 0 ไม่มีค่าเป็นบวก ดังนั้น อ่านค่าตัวแปรได้ว่า จะมีการใช้ $x_1 = 3$ หน่วย $x_2 = 1$ หน่วย ซึ่งระดับการใช้ดังกล่าวเสียค่าใช้จ่าย 2.80 บาท อันเป็นระดับที่ต่ำที่สุดแล้ว และระดับการใช้งานดังกล่าว ทำให้สมการเงื่อนไขข้อที่ 1 ยังได้รับเกินระดับขั้นต่ำตามข้อบังคับอยู่อีก 14 หน่วย

3. การหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีคู่เสมอกัน (Dual Program)

ลักษณะควบคู่ (Duality) เป็นลักษณะที่บ่งบอกว่า โปรแกรมเชิงเส้นใดๆ จะมีคู่ของมันเสมอ ไม่ว่าจะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดก็ตาม โดยโปรแกรมที่เป็นคู่นั้น จะมีฟังก์ชันเป้าหมายตรงข้าม อาทิ ถ้าปัญหาเดิมของโปรแกรมเชิงเส้นเป็นปัญหาค่าสูงสุด คือ Maximize P ก็จะมีโปรแกรมเชิงเส้นในลักษณะปัญหาการหาค่าต่ำสุด คือ Minimize P^* เป็นคู่อยู่ และในทางกลับกัน ถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าต่ำสุด คือ Minimize C ก็จะมีโปรแกรมเชิงเส้นเป็นปัญหาหาค่าสูงสุด คือ Maximize C^* เป็นคู่อยู่

<u>3.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง Primal กับ Dual</u>

เราเรียกโปรแกรมเชิงเส้นเริ่มแรก (ปัญหาเดิม) ว่า Primal Program และโปรแกรมเชิงเส้นที่เป็นคู่ว่า Dual Program

ถ้าผลลัพธ์ที่ดีที่สุดใน Primal ของปัญหา Maximize คือ $\overline{P}$ และผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของ Duality ของปัญหา Minimize คือ $\overline{P}^*$ โดยที่ $\overline{P} = \overline{P}^*$ เสมอ

ในทำนองเดียวกัน ถ้าผลลัพธ์ที่ดีที่สุดใน Primal ของปัญหา Minimize คือ $\overline{C}$ และผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของ Duality ของปัญหา Maximize คือ $\overline{C}^*$ โดยที่ $\overline{C} = \overline{C}^*$ เสมอ

ดังนั้น ในการหาคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นที่ต้องการ เราอาจจะเลือกหาคำตอบจากโปรแกรม Dual หรือ Primal P แล้วแปรคำตอบที่ได้เป็นคำตอบของอีกโปรแกรมหนึ่ง

1) รูปแบบความสัมพันธ์ กรณีโปรแกรม Primal เป็นปัญหาสูงสุด

<u>Primal</u>

$$Max\,P = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Subject to $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 12 \\ 42 \end{bmatrix}$

And $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

<u>Dual</u>

$$Min\,P^* = 12y_1 + 42y_2$$

Subject to $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

And $y_1, y_2 \ge 0$

2) รูปแบบความสัมพันธ์ กรณีโปรแกรม Primal เป็นปัญหาต่ำสุด

$MinC = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3$

Subject to $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

And $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$MaxC^* = 2y_1 + 5y_2$

Subject to $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

And $y_1, y_2 \geq 0$

3.2 กฎของการแปลงโปรแกรม Primal ให้เป็นโปรแกรม Dual

1) เปลี่ยนเป้าหมาย ถ้าปัญหาเดิมเป็นค่าสูงสุด เปลี่ยนเป็นค่าต่ำสุด ในทำนองเดียวกัน ถ้าปัญหาเดิมเป็นค่าต่ำสุด ก็เปลี่ยนเป็นค่าสูงสุด เช่น Max P ใน Primal เป็น Min P^* ใน Dual หรือ Min C ใน Primal เป็น Max C^* ใน Dual

2) เครื่องหมาย Inequalities ของเงื่อนไขใน Primal ต้องตรงกันข้ามกับเครื่องหมาย inequalities ใน Dual ส่วนเงื่อนไขในตัวแปรต้องไม่เป็นลบ

3) สัมประสิทธิ์เมตริกซ์ของเงื่อนไขใน Dual คือ Transpose (สลับที่แถวนอน เป็นแถวตั้ง) ของสัมประสิทธิ์เมตริกซ์ใน Primal

4) Row Vector ของสัมประสิทธิ์ในสมการเป้าหมายของ Primal เปลี่ยนเป็น Column Vector ของค่าคงที่ในเงื่อนไขใน Dual ในทำนองเดียวกัน Column Vector ของตัวคงที่ของเงื่อนไขใน Primal เปลี่ยนเป็น Row Vector ของสัมประสิทธิ์ในสมการเป้าหมายของ Dual

จากตัวอย่างข้างต้น สามารถเขียนในรูปสมการ ได้ดังนี้

Primal	Dual
$Max\ P = c'x$	$Min\ P^* = b'y$
Subject to $Ax \leq b$	Subject to $A'y \geq c$
And $x \geq 0$	And $y \geq 0$
$Min\ C = c'x$	$Max\ C^* = b'y$
Subject to $Ax \geq b$	Subject to $A'y \leq c$
And $x \geq 0$	And $y \geq 0$

โดยที่ x เป็น Column Vector ของตัวแปรเลือกใน Primal Program

c' เป็น Row Vector ของค่าสัมประสิทธิ์ในเป้าหมาย

b เป็น Column Vector ของค่าคงที่ในเงื่อนไข

A เป็นเมตริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเงื่อนไข

y เป็น Column Vector ของตัวแปรเลือกในโปรแกรม Dual

ทั้งนี้จำนวน Element y ขึ้นอยู่กับ จำนวนเงื่อนไขใน Primal

3.2 ทฤษฎีลักษณะคู่ควบ (Duality Theorems)

ถ้า Primal เป็น Program Min C จะมี Dual เป็น Program Max C* คำตอบของ Primal ประกอบด้วย $\bar{x}_i$ และ $\bar{C}$ ส่วนคำตอบของ Dual ประกอบด้วย $\bar{y}_j$ และ $\bar{C}^*$

ถ้า Primal เป็น Program Max P จะมี Dual เป็น Program Min P* คำตอบของ Primal ประกอบด้วย $\bar{x}_i$ และ $\bar{P}$ ส่วนคำตอบของ Dual ประกอบด้วย $\bar{y}_j$ และ $\bar{P}^*$

ทฤษฎีที่ 1 ถ้า Primal และ Dual ของโปรแกรมเชิงเส้นตรงใดมีคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว ค่าของสมการเป้าหมายต้องเท่ากันเสมอ เช่น ถ้ามี $\bar{C}$ จะมี $\bar{C}^*$ โดยที่ $\bar{C} = \bar{C}^*$ เสมอ หรือถ้ามี $\bar{P}$ จะมี $\bar{P}^*$ โดยที่ $\bar{P} = \bar{P}^*$ เสมอ

ทฤษฎีที่ 2 ตัวแปรในปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงสัมพันธ์กับ Dummy Variable ดังนี้

ให้ s_i เป็น Dummy Variable ใน Primal i = 1, 2, 3, ..., m

t_j เป็น Dummy Variable ใน Dual j = 1, 2, 3, ..., n

(1) ถ้าในคำตอบที่ดีที่สุดของ Dual มี $\bar{y}_i > 0$ แล้ว ในคำตอบที่ดีที่สุดของ Primal จะมี $\bar{s}_i = 0$ ซึ่งแสดงว่าเงื่อนไขที่ i ใน Primal มีเครื่องหมาย " = " เมื่อตัวแปรเลือกมีค่าดีที่สุด ในทางกลับกัน คำตอบที่ดีที่สุดของ Primal มี $\bar{x}_j > 0$ แล้ว ในคำตอบที่ดีที่สุดของ Dual จะมี $\bar{t}_j = 0$

(2) ถ้าในคำตอบที่ดีที่สุดของ Dual มี $\bar{t}_j > 0$ แล้ว (เงื่อนไขที่ t ของ Dual เป็น inequality) ในคำตอบที่ดีที่สุดของ Primal จะมี $\bar{x}_j = 0$ ในทางกลับกัน คำตอบที่ดีที่สุดของ Primal มี $\bar{s}_i > 0$ แล้ว ในคำตอบที่ดีที่สุดของ Dual จะมี $\bar{y}_i = 0$

เมื่อคำตอบที่ดีที่สุดของ Primal และ Dual เป็นไปตามทฤษฎีแล้ว แสดงว่าในการหาคำตอบที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้นตรงสามารถหาคำตอบได้จากโปรแกรมที่ง่ายกว่า ส่วนความสัมพันธ์ในทฤษฎี 2 แสดงว่าคำตอบที่ดีที่สุดของ Dual บอกรายละเอียดต่างๆ ที่สามารถนำไปหาคำตอบที่ดีที่สุดใน Primal ได้

โดยส่วนใหญ่แล้ว จุดประสงค์ของการใช้โปรแกรม Dual ก็เพื่อช่วยลดขั้นตอนยุ่งยากในการต้องคำนวณหาผลเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรม Primal กรณีปัญหาค่าต่ำสุด เพื่อเปลี่ยนเป็นปัญหาค่าสูงสุดในโปรแกรม Dual แล้วค่อยแปลงผลเฉลยกลับเป็นโปรแกรม Primal ในที่สุด

3.3 การหาคำตอบ Primal จากคำตอบของ Dual ด้วยวิธีกราฟ

ตัวอย่างที่ 8 โรงงานผลิตสเตอริโอ 3 ชนิด คือ ชนิดมาตรฐาน ชนิดคุณภาพดี และชนิดประหยัด ได้กำไรเครื่องละ 1500 2000 และ 2400 บาท ตามลำดับ การผลิตสเตอริโอแบบมาตรฐาน 1 เครื่อง เสียเวลาประกอบระบบภายใน 3 ชั่วโมง และประกอบส่วนนอก 1 ชั่วโมง การผลิตสเตอริโอแบบคุณภาพดี 1 เครื่อง เสียเวลาประกอบระบบภายใน 3 ชั่วโมง และประกอบส่วนนอก 5 ชั่วโมง การผลิตสเตอริโอแบบประหยัด 1 เครื่องเสียเวลาประกอบระบบภายใน 3 ชั่วโมง และประกอบส่วนนอก 2 ชั่วโมง โรงงานมีแรงงานสำหรับประกอบระบบภายใน 120 ชั่วโมง และประกอบระบบภายนอก 60 ชั่วโมง โรงงานควรผลิตสเตอริโอชนิดละกี่เครื่อง จึงจะได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ ให้ x_1 = ปริมาณการผลิตสเตอริโอแบบมาตรฐาน

x_2 = ปริมาณการผลิตสเตอริโอแบบคุณภาพดี

x_3 = ปริมาณการผลิตสเตอริโอแบบประหยัด

P = กำไรที่โรงงานได้รับ (กำไรต่อหน่วย)

Primal

$$Max\ P = 1500x_1 + 2000x_2 + 2400x_3$$

Subject to $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 120$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 60$

And $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเป้าหมาย คือ กำไรต่อหน่วย

สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการเงื่อนไขคือ อัตราการใช้ทรัพยากรต่อหน่วยในการผลิต (ในที่นี้อัตราการใช้เวลาในการประกอบสเตอริโอ 1 หน่วย ในแต่ละประเภท)

ค่าคงที่ในเงื่อนไข คือ ปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ในระยะเวลาหนึ่ง (ความสามารถในการประกอบ)

Dual

$$Min \quad P^* = 120y_1 + 60y_2$$

Subject to $\quad 3y_1 + y_2 \geq 1500 \quad (1)$

$\quad 3y_1 + 5y_2 \geq 2000 \quad (2)$

$\quad 3y_1 + 2y_2 \geq 2400 \quad (3)$

And $\quad y_2, y_2 \geq 0$

โดยกำหนดให้

P^* = มูลค่าการผลิตของทรัพยากรที่ใช้ในระยะเวลาหนึ่ง

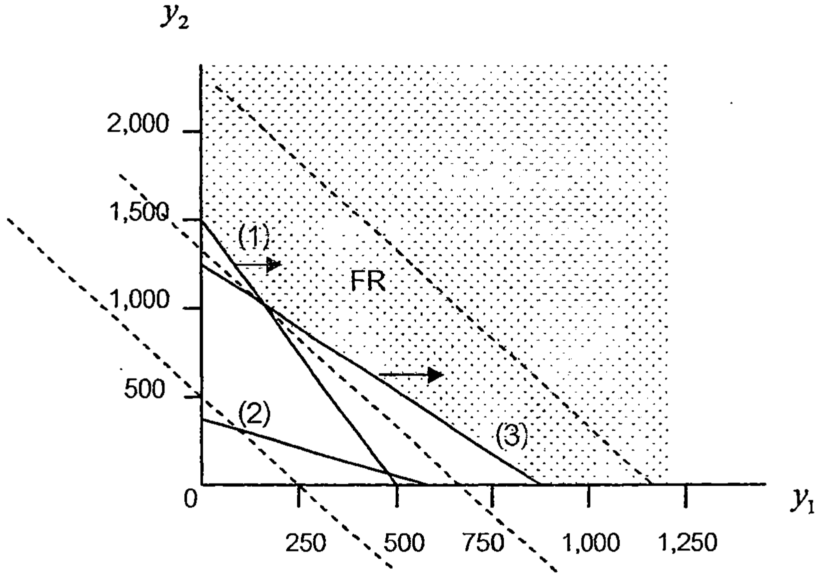
y_1 = อัตราค่าแรงงานที่ใช้ในการประกอบภายใน

y_2 = อัตราค่าแรงงานที่ใช้ในการประกอบภายนอก

สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเป้าหมาย คือ ปริมาณทรัพยากรที่ใช้เพื่อการผลิต (ปริมาณแรงงานที่ใช้ประกอบภายใน และภายนอก ตามลำดับ)

สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการเงื่อนไขคือ การใช้ทรัพยากรต่อหน่วยการผลิต (แรงงานที่ใช้ประกอบในแต่ละขั้นตอนการผลิต)

คำนวณคำตอบโปรแกรมเชิงเส้นตรง โดยวิธีกราฟจาก Dual Program



ภาพที่ 5.7 ผลเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงในตัวอย่างที่ 8

จากภาพที่ 5.7 จะได้คำตอบของโปรแกรม Dual ณ จุดตัดของสมการที่ (1) และ (3) แก้สมการหาคำตอบได้ดังนี้

$$3y_1 + y_2 = 1500$$

$$3y_1 + 2y_2 = 2400$$

จะได้ค่า $y_2 = 900$

$$y_1 = 200$$

แทนค่า y_1 และ y_2 ในสมการเป้าหมาย $P^* = 120(200) + 60(900)$

$= 78{,}000$ บาท

สามารถนำผลเฉลยในปัญหา Dual มาหาผลเฉลยในปัญหา Primal ได้

คำตอบใน Primal หาได้จาก:

แทนค่า $\bar{y}_2 = 900,\ \ \bar{y}_1 = 200$ ในเงื่อนไขของ Dual พบว่า

ในเงื่อนไขที่ (1) $3y_1 + y_2 = 3(200) + 900 = 1500$

ในเงื่อนไขที่ (2) $3y_1 + 5y_2 = 3(200) + 5(900) > 2000$

ในเงื่อนไขที่ (3) $3y_1 + 2y_2 = 3(200) + 2(900) = 2400$

จากทฤษฎีลักษณะควบคู่

ใน Dual มี $\bar{t}_j > 0$ แล้ว ใน Primal จะมี $\bar{x}_j = 0$

ใน Dual มี $\bar{t}_j = 0$ แล้ว ใน Primal จะมี $\bar{x}_j \ge 0$

พิจารณาสมการ (4) (5) และ (6) จะเห็นว่า

$3y_1 + y_2 = 1500$ แสดงว่า $\bar{t}_1 = 0$

$3y_1 + 5y_2 > 2000$ แสดงว่า $\bar{t}_2 > 0$

$3y_1 + 2y_2 = 2400$ แสดงว่า $\bar{t}_3 = 0$

ดังนั้น ใน Primal จะมี $\bar{x}_1 > 0 \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \bar{x}_3 > 0$

ทำให้เงื่อนไขใน Primal เหลือเพียง

$$3x_1 + 3x_3 = 120$$

$$x_1 + 2x_3 = 60$$

จะได้คำเฉลยคือ $x_1 = 20 \quad x_3 = 20$

และเป้าหมายคือ $P = 1500x_1 + 2400x_3$

$= 78{,}000$ บาท

3.4 การหาคำตอบ Primal จากคำตอบของ Dual โดยวิธีสร้างตารางซิมเพล็กซ์

1) กรณีโปรแกรม Dual เป็นปัญหาหาค่า Maximization และเงื่อนไขมีเครื่องหมาย ≤

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยใช้โปรแกรม Dual

โปรแกรม Primal

$$Min\ C = 120x_1 + 60x_2$$

Subject to $3x_1 + x_2 \geq 1500$

$3x_1 + 5x_2 \geq 2000$

$3x_1 + 2x_2 \geq 2400$

And $x_1, x_2 \geq 0$

วิธีทำ เปลี่ยนเป็นโปรแกรม Dual

$$Max\ C^* = 1500y_1 + 2000y_2 + 2400y_3$$

Subject to $3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 120$

$y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 60$

And $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

ในกรณีนี้ เมื่อสร้างตารางซิมเพล็กซ์สำหรับ Dual Program จนได้ตารางสุดท้ายแล้ว จะอ่านคำตอบของ Dual Program และ Primal Program ได้พร้อมกัน

หาคำตอบ Dual โดยสร้างตาราง Simplex ใส่ s_1, s_2 ใน Dual Program

$$Max \qquad C^* - 1500y_1 - 2000y_2 - 2400y_3 - 0s_1 - 0s_2 = 0$$

Subject to $\qquad 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + s_1 = 120$

$\qquad y_1 + 5y_2 + 2y_3 + s_2 = 60$

And $\qquad y_1, y_2, y_3, s_1, s_2 \geq 0$

<u>ตารางที่ 5.13</u> ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 1

ตัวแปรในคำตอบ	C^*	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	ค่าคงที่
C^*	1	-1500	-2000	-2400	0	0	0
s_1	0	3	3	3	1	0	120
s_2	0	1	5	2	0	1	60

Pivot Column = y_3 Pivot Row = แถวที่ 3 Pivot Element = 2

<u>ตารางที่ 5.14</u> ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 2

ตัวแปรในคำตอบ	C^*	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	ค่าคงที่
C^*	1	-300	4000	0	0	1200	12000
s_1	0	3/2	-9/2	0	1	-3/2	30
s_2	0	1/2	5/2	1	0	1/2	30

Pivot Column = y_1 Pivot Row = แถวที่ 2 Pivot Element = 3/2

<u>ตารางที่ 5.15</u> ตารางซิมแพล็กซ์: ตาราง 3

ตัวแปรในคำตอบ	C^*	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	ค่าคงที่
C^*	1	0	3100	0	200	900	12000
y_1	0	1	-3	0	2/3	-1	30
y_3	0	0	1	1	-1/3	0	30

จากตารางสุดท้าย จะได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดคือ $C^* = 78,000$ $\bar{y}_1 = 20$ $\bar{y}_2 = 0$ $\bar{y}_3 = 20$

เราสามารถอ่านคำตอบของ Primal ได้จากตาราง Simplex ตารางสุดท้ายของ Dual ได้ทันที โดยพิจารณาจากค่าตัวแปรส่วนขาด ในแถวที่ 0 เป็นค่าของตัวแปรเลือกใน Primal (s_1, s_2 เป็น x_1, x_2 ใน Primal)

กรณีนี้อ่านคำตอบของ Primal ได้ว่า

$$C = 78,000 \quad x_1 = 200 \quad x_2 = 900$$

x_1 = สัมประสิทธิ์ของ s_1 ในแถว 0 = 200

x_2 = สัมประสิทธิ์ของ s_2 ในแถว 0 = 900

2) กรณีโปรแกรม Dual เป็นปัญหาหาค่า Minimization และเงื่อนไขที่มีเครื่องหมาย $\geq$

ในกรณี Dual Program เป็นโปรแกรม Minimization สัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 ของตารางสุดท้ายมีค่าเป็น 0 หรือติดลบ ให้อ่านค่าของตัวแปรเลือกใน Primal จากค่าสัมบูรณ์ของ Dummy variables ที่ตรงกันในแถวที่ 0 ส่วนค่าของตัวแปรเป้าหมายอ่านได้ทันทีจากค่าคงที่

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สมมติให้หน่วยธุรกิจแห่งหนึ่งทำการผลิตถุงนอน (x_1) และเต้นท์ (x_2) ซึ่งถุงนอนต้องใช้แรงงานเพื่อทำการตัด 2 ชั่วโมง เพื่อทำการเย็บ 5 ชั่วโมง และเพื่อการเคลือบกันน้ำอีก 1 ชั่วโมง ส่วนเต้นท์แต่ละหลังต้องใช้แรงงานเพื่อการตัด 1 ชั่วโมง เพื่อการเย็บ 5 ชั่วโมง และเพื่อการเคลือบกันน้ำอีก 3 ชั่วโมง กำหนดให้ทรัพยากรที่มีอยู่ในปัจจุบันของหน่วยธุรกิจนี้คือ ชั่วโมงสำหรับการตัดไม่เกิน 14 ชั่วโมง ชั่วโมงสำหรับการเย็บไม่เกิน 40 ชั่วโมง และชั่วโมงสำหรับการเคลือบกันน้ำไม่เกิน 18 ชั่วโมง นอกจากนี้ยังทราบว่ากำไรในการผลิตและจำหน่ายถุงนอนแต่ละถุงเป็น \$50 ต่อถุง และเต้นท์เป็น \$30 ต่อหลัง จากข้อมูลดังกล่าวข้างต้นจงใช้วิธีกราฟแก้ปัญหาโปรแกรมเพื่อจัดสรรทรัพยากรที่เหมาะสมที่สุดเพื่อหากำไรสูงสุด

2. จงหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดจากปัญหาต่อไปนี้ด้วยวิธีกราฟ

$$\text{Min: } Z = 4x_1 + 2x_2$$

Subject to:
$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

And $x_1, x_2 \geq 0$

3. จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้เพื่อหาคำตอบที่ดีที่สุด

3.1 Max: $\pi = 20x_1 + 8x_2$

Subject to:
$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 180$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 160$$

And $x_1, x_2 \geq 0$

3.2 Max: $\pi = 8x_1 + 2x_2$

Subject to:
$$5x_1 + 4x_2 \leq 216$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 180$$
$$12x_1 + 2x_2 \leq 312$$

And $x_1, x_2 \geq 0$

4. จงใช้ทฤษฎีบทคู่ควบ (Dual program) แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบที่ดีที่สุดของโปรแกรมชั้นต้น (Primal program)

4.1 Min: $C = 225x_1 + 180x_2$

Subject to:

$$8x_1 + x_2 \geq 32$$
$$7x_1 + 4x_2 \geq 112$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 54$$

And $x_1, x_2 \geq 0$

4.2 Min: $C = 540x_1 + 900x_2$

Subject to:

$$3x_1 + 15x_2 \geq 195$$
$$4x_1 + 5x_2 \geq 140$$
$$10x_1 + 2x_2 \geq 80$$

And $x_1, x_2 \geq 0$

เอกสารอ้างอิง

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** Singapore: McGraw-Hill International Editions. 3rd Edition.

Edward T. Dowling. (1991). ***Theory and Problems of Mathematical Methods for Business and Economics.***

ประกอบ จิรกิติ. (2534). ***การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์บัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์.

นราทิพย์ ชุติวงศ์. (2544). ***เศรษฐศาสตร์การจัดการ.*** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***โปรแกรมเชิงเส้นตรง.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 6

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในลักษณะของฟังก์เอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอกาลิทึม
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำฟังก์ชันลอกาลิทึมไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรงได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ทางด้านเศรษฐศาสตร์การเงินและการเงินธุรกิจได้

เนื้อหา

1. ลักษณะและคุณสมบัติของฟังก์เอกซ์โปเนนเชียล
2. ลักษณะและคุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม
3. การใช้ฟังก์ชันลอการิทึมแก้ปัญหาฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรง
4. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์และการเงินธุรกิจ

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

เนื่องจากการศึกษาทางด้านเศรษฐศาสตร์ โดยเฉพาะตัวแปรทางด้านเศรษฐศาสตร์มหภาค มักอยู่ในรูปของอัตราการเติบโต (The Growth of Variable) อาทิ ผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศเบื้องต้น (Gross Domestic Product: GDP), รายได้ประชาชาติ (National Income), กำลังแรงงาน (Labor Force) รวมถึงการวิเคราะห์ทางด้านการเงิน อาทิ การคำนวณหามูลค่าปัจจุบันและอนาคตของสินทรัพย์ต่างๆ ซึ่งตัวแปรดังกล่าวนั้นมักจะอยู่ในรูปของเลขยกกำลังที่มีจำนวนมากๆ หรืออาจอยู่ในรูปของลอการิทึม ดังนั้นในบทนี้จึงจะกล่าวถึงลักษณะของของฟังก์ชันดังกล่าว

เนื้อหาในบทนี้แบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกเป็นการกล่าวถึงลักษณะของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในทางคณิตศาสตร์ และส่วนที่สองเป็นการกล่าวถึงการนำฟังก์ชันทั้งสองไปประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์และทางการเงินธุรกิจ

1. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function)

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลจะมีความแตกต่างกับฟังก์ชันยกกำลัง (Power Function) ในด้านของรูปแบบของฟังก์ชัน นั่นคือ ฟังก์ชันยกกำลัง จะมีฐานเป็นตัวแปรและมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใดๆ เช่น x^3 ในขณะที่ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล จะมีฐานเป็นจำนวนจริงใดๆ และมีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปร โดยสามารถเขียนในรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$y = a^x, \qquad a > 0 \ \text{ และ } a \neq 1$$

โดยที่ y คือ ตัวแปรตาม

x คือ ตัวแปรอิสระ

a คือ จำนวนจริงใดๆ

<u>1.1 ลักษณะทั่วไปของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล</u>

1) โดเมนของฟังก์ชันเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด ส่วนเรนจ์ของฟังก์ชันจะเป็นเซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด นั่นคือสำหรับค่าของ x ทุกค่า (รวมทั้ง $x \leq 0$) แล้ว $y > 0$

2) สำหรับ $a > 0$ ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเมื่อ $0 < a < 1$ ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันลดและเว้า

3) เมื่อนำมาเขียนกราฟจะได้เส้นโค้งอยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 และ 2 โดยมีจุดตัดบนแกน y ที่ (0, 1) และมีเส้นกำกับแนว (Asymptote) หรือมีแกน x เป็นแนวของกราฟ (มีความชันเป็นบวก) ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนกราฟ $y = 3^x$ $y = 3^{-x}$

<u>วิธีทำ</u> ให้สมมติค่า x เพื่อหาค่า y แล้วนำไปเขียนบนแกน x และ y

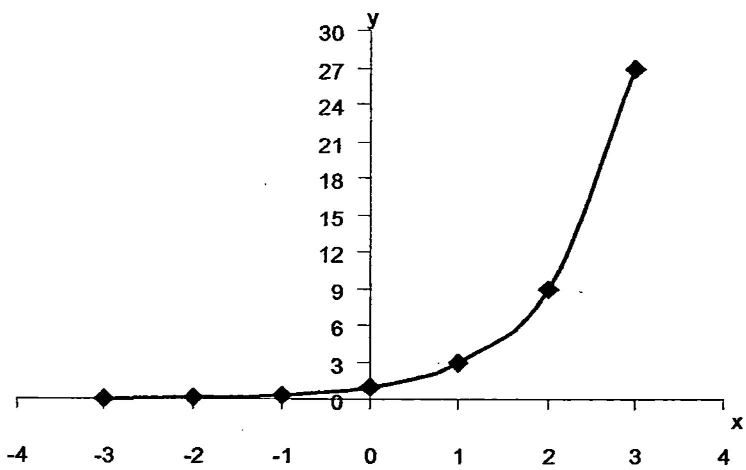
<u>ตารางที่ 6.1</u> ค่า x และ y ตามสมการ $y = 3^x$ $y = 3^{-x}$

(a) $y = 3^x$

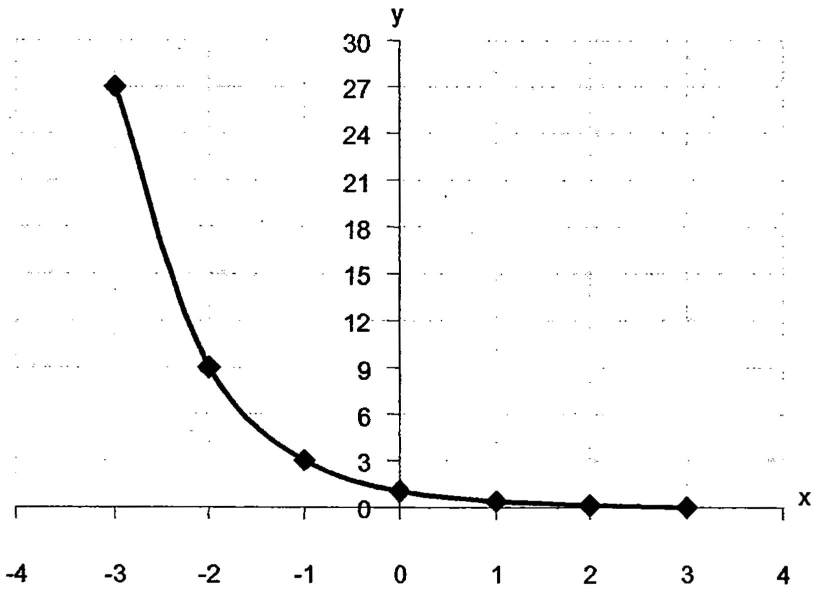
x	y
-3	0.04
-2	0.11
-1	0.33
0	1.00
1	3.00
2	9.00
3	27.00

(b) $y = 3^{-x}$

x	y
-3	27.00
-2	9.00
-1	3.00
0	1.00
1	0.33
2	0.11
3	0.04



<u>ภาพที่ 6.1</u> กราฟแสดงฟังก์ชัน $y = 3^x$



ภาพที่ 6.2 กราฟแสดงฟังก์ชัน $y = 3^{-x}$

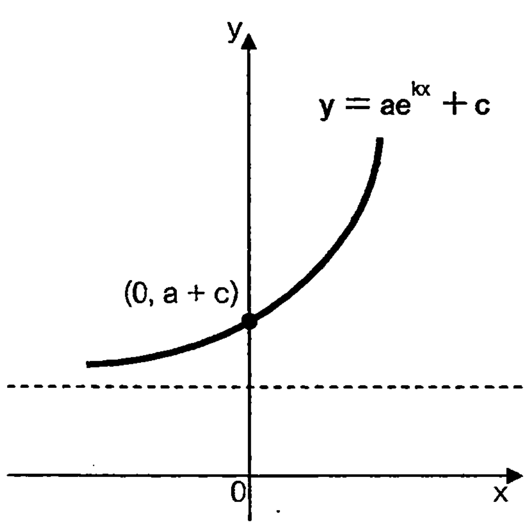
จากภาพที่ 6.1 และภาพที่ 6.2 จะเห็นได้กราฟที่อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 และ 2 โดยมีจุดตัดบนแกน y ที่ (0, 1) และมีแกน x เป็นแนวของกราฟ (แต่ความชันแตกต่างกัน) แต่ในการศึกษากราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล จะพิจารณาเฉพาะค่า a ที่มีค่าเป็นบวกเท่านั้น ทั้งนี้เพราะเมื่อ b มีค่าเป็นลบแล้วจะไม่สามารถเขียนกราฟมาตรฐานได้

ตัวแบบทั่วไปของเอกซ์โปเนนเชียลฟังก์ชันที่นำไปใช้ในทางเศรษฐศาสตร์ คือ

$$y = ae^{kx} + c$$

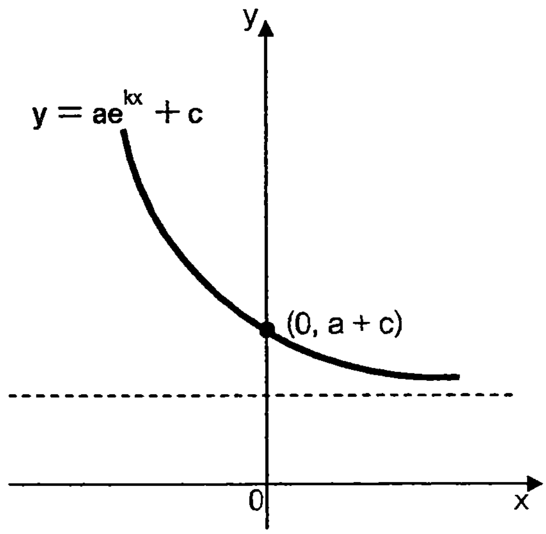
โดยที่ a, k, c, e เป็นค่าคงที่และ e มีค่าประมาณ 2.71828

สำหรับกราฟของสมการ $y = ae^{kx} + c$ อาจเขียนได้ 2 แบบ ดังภาพที่ 6.3.1 และภาพที่ 6.3.2 โดยทั้งสองภาพ กำหนดค่า c ให้เป็นศูนย์หรือบวก



ภาพที่ 6.3.1 กราฟ $y = ae^{kx} + c$

เมื่อ $a > 0, k > 0, c \geq 0$



ภาพที่ 6.3.2 กราฟ $y = ae^{kx} + c$

เมื่อ $a > 0, k < 0, c \geq 0$

ภาพที่ 6.3 กราฟแสดงฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

นอกจากกราฟที่กล่าวข้างต้นแล้วนั้น กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลยังมีรายละเอียดอีกมาก ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ $|c|$ และค่าของ k บ่อยครั้งที่ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลอยู่ในรูป $y = e^x$ โดยมี e เป็นฐาน และ e มีค่าเท่ากับ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\Delta x}\right)^{\Delta x}$ หรือมีค่าประมาณ 2.71828 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลที่มีฐาน e จะเรียกชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันล็อกธรรมชาติ (Natural Exponential Function) ซึ่งจะพบมากในการวิเคราะห์ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ขั้นสูง

ตัวอย่างเช่น $y = e^x$ ซึ่งบางครั้งมีการใช้ในรูปสัญลักษณ์อื่น เช่น $y = \exp(x)$

$y = e^{3x}$ ซึ่งบางครั้งมีการใช้ในรูปสัญลักษณ์อื่น เช่น $y = \exp(3x)$

$y = e^{rx}$ ซึ่งบางครั้งมีการใช้ในรูปสัญลักษณ์อื่น เช่น $y = \exp(rx)$

(โดยที่ exp ที่ใช้ย่อมาจาก Exponential)

1.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

คุณสมบัติต่างๆ ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล:

1) $x^a\left(x^b\right)=x^{a+b}$

2) $\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$

3) $\left(x^a\right)^b=x^{ab}$

4) $(xy)^a=x^a y^a$

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^a=\frac{x^a}{y^a}$

6) $\frac{1}{x^a}=x^{-a}$

7) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

8) $\sqrt[a]{x}=x^{\frac{1}{a}}$

9) $\sqrt[b]{x^a}=x^{\frac{a}{b}}=\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a$

10) $x^{-\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{1}{x^{\frac{a}{b}}}$

2. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Function)

ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันผกผันของเอกโปเนนเชียล โดยที่เมื่อสลับที่ตัวแปรทั้งสองของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล เช่น $f(x) = y = a^x$ จะได้ฟังก์ชันใหม่ เป็น $g(y) = x = a^y$ เรียกฟังก์ชัน g ว่า ฟังก์ชันลอการิทึมที่มีฐาน a และแทนการเขียนในรูป $x = a^y$ ได้ดังนี้

$\therefore$ $y = \log_a x$, เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึมที่มีฐาน a

ฟังก์ชันลอการิทึมที่มีกำลังเลขฐาน 10 เรียกว่า Common Logarithm ซึ่งเขียนได้ว่า $\log_{10}x$ หรือ $\log x$ เช่น $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2$ ดังนั้น 2 คือ Common Log ของ 100

ทั้งนี้ ค่าของลอการิทึมและแอนติลอการิทึมใดๆ สามารถเปิดตารางหาค่าได้ในภาคผนวกท้ายเล่ม

2.1 คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

ถ้า a, x, y เป็นจำนวนจริงบวก, n เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 1$:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^n = n \log_a x$

4) $\log_a a = 1$

5) $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$

ตัวอย่างที่ 2 การคำนวณหาค่า common log ของจำนวนจริงต่อไปนี้

1) log 10

จากคุณสมบัติข้อที่ 4) $\log_a a =$ 1 ดังนั้น $\log_{10} 10 = 1$

2) log 0.1

จากคุณสมบัติข้อที่ 5) และ 4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \log 0.1 &= \log_{10} 10^{-1} \\ &= (-1) \times \log_{10} 10 \\ &= (-1) \times 1 \qquad = -1 \end{aligned}$$

3) $\log_4 16$

จากคุณสมบัติข้อที่ 5) และ 4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \log_4 16 &= \log_4 4^2 \\ &= (2) \times \log_4 4 \\ &= (2) \times 1 \qquad = 2 \end{aligned}$$

4) $\log_a x^4 y^5$

จากคุณสมบัติข้อที่ 1) และ 3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\log_a x^4 y^5 &= \log_a x^4 + \log_a y^5 \\ &= 4\log_a x + 5\log_a y\end{aligned}$$

5) $\log_a u^2 v^{-3}$

จากคุณสมบัติข้อที่ 1) และ 3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\log_a u^2 v^{-3} &= \log_a u^2 + \log_a v^{-3} \\ &= 2\log_a u - 3\log_a v\end{aligned}$$

<u>2.2 ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Log)</u>

ลอกธรรมชาตินี้มักถูกนำไปใช้อธิบายอัตราการเจริญเติบโตที่ต่อเนื่อง

2.2.1 คุณสมบัติของลอกธรรมชาติ

คุณสมบัติของลอกธรรมชาติ:

1) $\ln e = 1$ 2) $\ln 1 = 0$

3) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ 4) $\ln e^x = x$

5) $e^{\ln a} = a$

ตัวอย่างที่ 3 การคำนวณฟังก์ชันลอกธรรมชาติ

1) $7.5\,e^{x-3} = 150$

$e^{x-3} = 150/7.5$

$e^{x-3} = 20$

ใส่ ln ทั้งสองข้างเพื่อกำจัด e :

$\ln e^{x-3} = \ln 20$

$x - 3 = \ln 20$

$x = \ln 20 + 3$

$= 5.99573$

2) $4\ln x + 9 = 30.6$

$\ln x = (30.6 - 9)/4$

$\ln x = 5.4$

ใส่ e ทั้งสองข้างเพื่อกำจัด ln :

$e^{\ln x} = e^{5.4}$

$x = e^{5.4}$

$= 221.40642$

3. การใช้ฟังก์ชันลอการิทึมเปลี่ยนรูปฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรง (Non-linear function)

เนื่องจากฟังก์ชันที่ใช้ในการวิเคราะห์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ จะมีทั้งฟังก์ชันที่เป็นเส้นตรงหรือสมการเชิงเส้น ซึ่งมีกระบวนการหรือขั้นตอนในการวิเคราะห์ค่อนข้างน้อย แต่มีบางครั้งที่จำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันที่ไม่ใช้เส้นตรง เช่น ฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas ซึ่งทำให้ก่อนจะถึงขั้นตอนของการคำนวณจะต้องทำการแปลงผันให้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเสียก่อนโดยใช้ลอการิทึม ดังนี้

ฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas: $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$

ตามคุณสมบัติของลอการิทึมสามารถแปลงสมการข้างต้น ได้ว่า

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $P = 1{,}000(1+0.03)^6$

ใส่ log ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\log P &= \log 1{,}000 + \log 1.03^6 \\
&= \log_{10} 10^3 + (6 \times (\log_{10} 1.03)) \\
&= 3 + (6 \times 0.0128) \qquad (\text{เปิดตาราง } \log 1.03 = 0.0128) \\
&= 3.0768
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\log P &= 3.0768 \\
P &= \text{antilog } 3.0768 \\
&= 1{,}194
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 4 จะเห็นว่า แอนติลอกของ 3.0768 (antilog 3.0768) คือ 1,194 นั้นหาได้จากวิธีการย้อนกลับจากวิธีการหาค่าลอการิทึมของตัวเลขใดๆ

2.3.1 การหาค่า log ของ N (เลขใดๆ)

ต้องมีการแปลงค่าที่ต้องการให้อยู่ในรูปต่อไปนี้ โดย N = ค่าที่ต้องการหาค่าลอการิทึม

$$N = a(10)^x, \quad 0 < a < 10$$

ถ้า $N = 521 = 5.21\ (10)^2$ $(a = 5.21,\ 10^x = 10^2)$

10^x เรียกว่า Characteristic เป็นกำลังของ 10 ในตัวอย่างคือ 2 (ค่า x อาจเป็น 0, บวก, ลบ หรือทศนิยมก็ได้

a เรียกว่า Mantissa อ่านได้จากตาราง Common Logarithm จากตัวอย่างอ่านค่า 5.21 ได้จากลำดับที่ 52 ช่องที่ 1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.7168

$$\log 521 = \log 5.21\,(10)^2 = 2 + 0.7168 = 2.7168$$

2.3.2 การหาค่าแอนติลอการิทึม (Antilogarithm)

กระบวนการหาค่าแอนติลอกของฟังก์ชันลอการิทึมใดๆ นั้นเป็นวิธีการย้อนกลับจากวิธีการหาค่าลอการิทึมของตัวเลขใดๆ

$$\log_{10} N = A$$

$$N = \text{antilog } A$$

เช่น N = antilog 3.9253 หาค่า N ในตารางที่ตรงกับค่า Mantissa 0.9253 แล้วคูณด้วย 10 ยกกำลังด้วย Characteristic 3

$$= 8.42(10)^3 = 8420$$

เนื่องจากในตารางแอนติลอกนั้น ค่า N จะมีทศนิยมเพียงสองตำแหน่งเท่านั้น หากเราต้องการหาแอนติลอกที่มีทศนิยมมากกว่าสองตำแหน่งอาจทำได้โดยใช้การประมาณค่าลอการิทึม (Interpolation)

ในตาราง Common Logarithm N เป็นเลขจำนวนที่มีทศนิยม 2 ตำแหน่ง เช่น

$$\log_{10} 5.20 = 0.7160$$

$$\log_{10} 5.21 = 0.7168$$

ถ้าต้องการหาค่า $\log_{10} 5.205$ ไม่มีในตาราง ต้องคำนวณหาค่าเอง

$$\log_{10} 5.20 < \log_{10} 5.205 < \log_{10} 5.21$$

$$\therefore \quad \log_{10} 5.205 = \log_{10} 5.20 + \frac{(5.205 - 5.20)}{(5.21 - 5.20)}\left[\log_{10} 5.21 - \log_{10} 5.20\right]$$

$$= 0.7160 + \frac{5}{10}\left[0.7168 - 0.7160\right] = 0.7164$$

ดังนั้นเมื่อย้อนกลับไปที่ตัวอย่างที่ 4 เมื่อเราทราบว่า

$$\log P = 3.0768$$

$$P = \text{antilog } 3.0768$$

ค่า antilog 3.0768 นั้นประกอบด้วย Characteristic คือ 3 ทำให้ได้ 10^3

และ Mantissa คือ 1.194 ได้จากการเปิดตาราง antilog ที่ค่า N เท่ากับ 0.0768 ซึ่งจะเท่ากับ 1.194

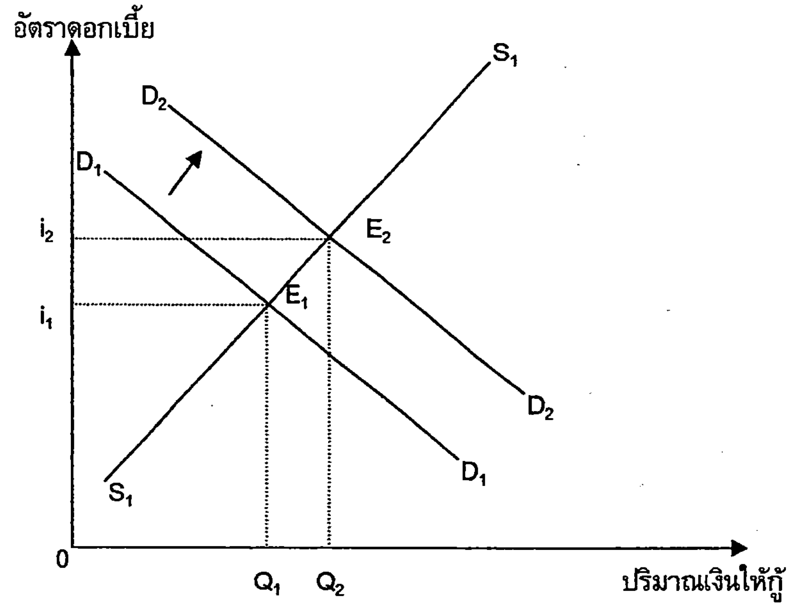
ดังนั้น $P = 1.194 \times 10^3 = 1{,}194$

3. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์และการเงินธุรกิจ

มีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาของตัวแปรที่มีความสัมพันธ์ในลักษณะฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

3.1 ดอกเบี้ย (Interest)

ในการกู้ยืมเงินนั้น อัตราดอกเบี้ยจะเป็นตัวกลางในการกำหนดว่า ต้นทุนของเงินทุนควรจะเป็นเท่าใด (บริกแฮม แปลโดย เริงรัก, น. 117) ซึ่งในทางเศรษฐศาสตร์อัตราดอกเบี้ยก็คือราคาหรือผลตอบแทนของเงินซึ่งถูกกำหนดมาจากอุปสงค์และอุปทานของเงินลงทุนในตลาดการเงิน



ภาพที่ 6.4 การกำหนดขึ้นของอัตราดอกเบี้ยดุลยภาพ

จากภาพที่ 6.4 แกนตั้งแทนระดับอัตราดอกเบี้ย แกนนอนแทนปริมาณเงิน เส้น D_1D_1 เป็นเส้นความต้องการเงินลงทุนของธุรกิจ และเส้น S_1S_1 เป็นเส้นเงินออมของระบบเศรษฐกิจ ดังนั้นอัตราดอกเบี้ยดุลยภาพเกิดจากจุดตัดของเส้น D_1D_1 กับเส้น S_1S_1 อัตราดอกเบี้ยดุลยภาพจึงเป็น Oi_1 และปริมาณเงินกู้ดุลยภาพคือ OQ_1 และถ้าในระบบเศรษฐกิจภาคธุรกิจเกิดมีการผลิตสินค้าและบริการใหม่ๆ (New Innovation) จะมีผลทำให้เส้นอุปสงค์ของเงินทุนเคลื่อนจากเส้น D_1D_1 ไปเป็น D_2D_2 แล้วอัตราดอกเบี้ยดุลยภาพใหม่จะสูงขึ้นเป็น Oi_2 และปริมาณเงินทุนให้กู้จะเท่ากับ OQ_2

3.2 การทบต้นดอกเบี้ย (Compound Interest)

ในการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น มีคำสำคัญเบื้องต้นที่ควรทราบ ดังนี้

ดอกเบี้ย : เป็นค่าธรรมเนียมในรูปเงินตราซึ่งผู้ได้รับผลประโยชน์จำนวนหนึ่งจ่ายให้แก่เจ้าของเงินเพื่อเป็นค่าตอบแทนที่ให้ยืมเงินจำนวนนั้น ไปแสวงหาผลประโยชน์ในระยะเวลาหนึ่ง

เงินต้น : เงินที่ประชาชนฝากไว้กับธนาคาร หรือเงินที่ธนาคารให้ยืม

อัตราดอกเบี้ย : คือสัดส่วนของดอกเบี้ยกับเงินต้น ในระยะเวลาหนึ่ง เท่ากับ

$$\text{อัตราดอกเบี้ย} = \left(\frac{\text{ดอกเบี้ย}}{\text{เงินต้น}}\right) \times 100$$

<u>ดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว</u> (Simple Interest) คือ ดอกเบี้ยที่ได้รับจากเงินต้นเป็นจำนวนคงที่เท่ากันตลอดระยะเวลา

$$I = P.i.n$$

โดยที่ I = ดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว

P = เงินต้น

i = อัตราดอกเบี้ยต่อปี

n = จำนวนปี

<u>เงินรวม</u> คือ เงินต้นที่เพิ่มพูนมูลค่าเพิ่มขึ้นเมื่อสิ้นสุดระยะเวลาหนึ่ง มูลค่าที่เพิ่มขึ้นคือดอกเบี้ยที่เพิ่มขึ้นนั่นเอง

เงินรวม = เงินต้น + ดอกเบี้ย

$$S = P + P.i.n$$

$$S = P\left(1 + i.n\right)$$

<u>การคำนวณดอกเบี้ยทบต้น</u>

มีเงินต้น (P) จำนวนหนึ่ง ฝากไว้ที่ธนาคารหรือลูกหนี้ยืม โดยมีอัตราดอกเบี้ย i % ต่อปี ดังนั้น

เมื่อสิ้นปีที่ 1 มูลค่าเงินรวม $S_1 = P + iP$

$$S_1 = P(1+i) = P_1$$

เมื่อสิ้นปีที่ 2 มูลค่าเงินรวม $S_2 = P_1 + iP_1$

$$S_2 = P(1+i) + i\left[P(1+i)\right]$$

$$S_2 = P(1+i)^2$$

เมื่อสิ้นปีที่ 3 มูลค่าเงินรวม $S_t = P(1+i)^t$

ถ้าดอกเบี้ยทบต้น m ครั้งต่อปี บุคคลนั้นจะได้รับอัตราดอกเบี้ยเท่ากับ $\frac{i}{m}$ จำนวน m ครั้งต่อปี ดังนั้น เมื่อถึงสิ้นปีที่ t

มูลค่าเงินรวม $S_t = P(1+\frac{i}{m})^{mt}$

และในกรณีที่ดอกเบี้ยทบต้นอย่างต่อเนื่องไม่หยุดยั้ง $m \to \infty$ จะได้ว่า

$$S_t = \lim_{m\to\infty} P(1+\frac{i}{m})^{mt}$$

คูณชี้กำลังด้วย $\frac{i}{i}$ ทำให้

$$S_t = P \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{m}{i}\right)it}$$

เนื่องจาก $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

จะได้ว่า

$$S_t = Pe^{it}$$

ในทางเศรษฐศาสตร์และธุรกิจได้มีการศึกษาที่มีฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ได้แก่ การหาค่าเงินรวม การวิเคราะห์อัตราการขยายตัวของยอดขาย รายได้ประชาชาติ ต้นทุน กำไร

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> สมมติว่านายแสนสุขนำเงินแต๊ะเอียจำนวน 1,000 บาทที่ได้จากอาม่า ไปฝากธนาคารได้อัตราดอกเบี้ย 6 เปอร์เซ็นต์ต่อปี ท่านคิดว่าเมื่อสิ้นปีที่ 4 นายแสนสุข จะมีเงินรวมเท่าใด หากกำหนดให้มีการคิดดอกเบี้ยทบต้น

(ก) ปีละ 1 ครั้ง (ข) ทุกครึ่งปี

<u>วิธีทำ</u> (ก) คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 1 ครั้ง

สูตร $S = P(1+i)^t$

แทนค่า P = เงินต้น 1,000 บาท

I = อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี

t = 4 ปี

$$S = 1{,}000(1+0.06)^4$$

ใส่ log ทั้งสองข้าง $\log S = \log 1{,}000 + 4\log(1+0.06)$

$$= \log 10^3 + 4\log 1.06$$

$$= 3 + 4(0.0253)$$

$$\log S = 3.0759$$

$\therefore S = \text{antilog}3.0759 \approx 1{,}191$ บาท

(ข) คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกครึ่งปี (ปีละ 2 ครั้ง)

ค่า m = 2 แทนค่าใน $S = P\left[1+\dfrac{i}{m}\right]^{mt}$

$$= 1{,}000\left[1+\frac{0.06}{2}\right]^{2(3)}$$

$$= 1{,}000(1+0.03)^6$$

ใส่ log ทั้งสองข้าง $\log S = \log 1{,}000 + 6\log 1.03$

$$= \log 10^3 + 6(0.0128)$$

$$\log S = 3 + 0.0768 = 3.0768$$

$\therefore S = \text{antilog } 3.0768 = 1{,}194$ บาท

<u>3.3 การประยุกต์ใช้ดอกเบี้ยทบต้น</u>

3.3.1 การคิดดอกเบี้ยเงินฝากธนาคาร (Saving Account)

การคำนวณเป็นแบบ Compound Interest Daily

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> คำนวณมูลค่าเงินฝาก Saving Account 5,000 บาท หลังจากฝาก 31 วัน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี คำนวณทบต้นทุกวัน (การคิดอัตราดอกเบี้ยของธนาคารใช้ 360 วัน ใน 1 ปี)

<u>วิธีทำ</u>

$$S = P(1+i)^{n}$$

$P = 5{,}000$, $n = 31$ วัน, $i = \dfrac{0.08}{360}$ ต่อวัน

$$S = 5{,}000\left(1+\frac{0.08}{360}\right)^{31}$$

$S = 5034.56$ บาท

3.2.2 มูลค่าปัจจุบัน_(Present Value)

1) มูลค่าปัจจุบันคิดเป็นระยะๆ (Discrete growth)

$$P = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}$$

2) มูลค่าปัจจุบันคิดอย่างต่อเนื่อง (Continuous growth)

$$P = Se^{-it}$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ถ้าธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 15 ต่อปี จะต้องฝากเงินเท่าไรในปัจจุบัน เพื่อให้ได้รับเงิน 100,000 บาท ในเวลา 10 ปีข้างหน้า เมื่อธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ 2 ครั้ง

<u>วิธีทำ</u>

$$P = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}$$

$S = 100{,}000$ $i = 0.15$ ต่อปี $m = 2$ ครั้งต่อปี $t = 10$

$$P = 100{,}000\left(1+\frac{0.15}{2}\right)^{-2(10)}$$

$$P = \frac{100,000}{1.075^{20}}$$

$$\log P = \log 100,000 - 20\log 1.075$$

$$\log P = 5 - 20\ (0.0314) = 5 - 0.628 = 4.372$$

$$P = \text{antilog} 4.372 = 2.355 \times 10^{4} = 23,550$$

อ่านค่าจากตาราง

$$\log 1.07 = 0.0294$$

$$\log 1.08 = 0.0334$$

$$\therefore \quad \log 1.075 = 0.0314$$

เมื่อ

$$\text{antilog} 0.3729 = 2.36$$

$$\text{antilog} 0.3711 = 2.35$$

$$\therefore \quad P = 23,550 \text{ บาท}$$

ดังนั้นต้องฝากเงิน 23,550 บาท ในปัจจุบัน

3.3.3 มูลค่าในอนาคต (Future Value)

1) การเพิ่มมูลค่าเป็นระยะๆ (Discrete growth)

$$S_t = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

เมื่อ S = มูลค่าในอนาคต

P = มูลค่าในปัจจุบัน

i = อัตราดอกเบี้ยต่อช่วงเวลา

t = ช่วงเวลา

2) การเพิ่มค่าอย่างต่อเนื่อง (Continuous growth)

$$S_t = Pe^{it}$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> ประชากร 1,000,000 คน เพิ่มในอัตราร้อยละ 3 ต่อปี

ก. ในระยะ t ปี มีประชากรเท่าไร

ข. ภายหลัง 2 ปี มีประชากรเท่าไร

<u>วิธีทำ</u>

ก. จาก
$$S_t = Pe^{it}$$
$$= 1{,}000{,}000e^{(0.03)t}$$

ข.
$$S_2 = 1{,}000{,}000e^{(0.03)2} = 1{,}061{,}836.547 \quad \text{คน}$$

3) การลดค่าเป็นระยะๆ (แบบไม่ต่อเนื่อง)

เมื่อสิ้นปีที่ 1 มูลค่ารวม
$$S_t = P - iP$$
$$S_t = P(1-i) = P_1$$

เมื่อสิ้นปีที่ 2 มูลค่ารวม
$$S_2 = P_1 - iP_1$$
$$= P(1-i) + i\left[P(1-i)\right]$$
$$= P(1-i)^2$$

เมื่อสิ้นปีที่ t

มูลค่ารวม $S_t = P(1-i)^t$

ถ้าดอกเบี้ยทบต้น m ครั้งต่อปี

มูลค่ารวม $S_t = P\left(1 - \dfrac{i}{m}\right)^{mt}$

4) การลดค่าอย่างต่อเนื่อง

$$S = Pe^{-it}$$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ถ้าป่าไม้ถูกทำลายร้อยละ 10 ต่อปี ปี พ.ศ. 2530 มีป่าไม้ 200,000 ไร่ พ.ศ. 2535 จะมีป่าไม้เท่ากับเท่าไร

<u>วิธีทำ</u> จาก $S = Pe^{-it}$

เมื่อ $P = 200{,}000$, $i = 0.10$ และ $t = 5$

$$S = 200{,}000\ e^{-0.10\times 5} = 121{,}300$$

ดังนั้น พ.ศ. 2535 จะมีป่าไม้เท่ากับ 121,300 ไร่

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงเปลี่ยนสมการลอการิทึมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเอกซ์โปแนนเชียล

ก. $\log_{13} 169 = 2$ ข. $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$

ค. $\log_5 125 = 3$ ง. $\log_4 \left(\frac{1}{64}\right) = -3$

จ. $\log_6 \left(\frac{1}{36}\right) = -2$ ฉ. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

2. จงเปลี่ยนสมการเอกซ์โปเนนเชียลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปลอการิทึม

ก. $64 = 8^2$ ข. $81 = 3^4$

ค. $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ ง. $7 = 49^{1/2}$

จ. $4 = 8^{2/3}$ ฉ. $216 = 36^{3/2}$

3. ถ้านำเงิน 5,450 บาท ไปลงทุนโดยได้ดอกเบี้ยทบต้น $3\frac{4}{5}$% ต่อปี จะได้เงินรวมเท่าใด เมื่อครบ 7 ปีพอดี

4. กำหนดให้ $Q = 1{,}000K^{0.4}L^{0.5}$ โดยที่ K = 80, L = 220 ให้ใช้ logหาค่า Q (หน่วยเป็นกิโลกรัม/กรัม)

5. ถ้านำเงินต้น 1,000 บาท ไปฝากธนาคารได้อัตราดอกเบี้ย 6 % ต่อปี จงหามูลค่าของเงินรวมในปีที่ 3 ถ้ามีการคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นดังนี้

ก. ทบต้นปีละ 1 ครั้ง

ข. ทบต้นทุกครึ่งปี

ค. ทบต้นทุก 3เดือน

เอกสารอ้างอิง

Brigham, E.F. and Ehrhardt M.C. (2002). *Financial Management : Theory and Practice.* 10 th ed. Singapore : Thomson Learning.

Wisniewski M. (1996). *Introductory Mathematical Methods in Economics.* 2nd ed. London : McGraw -Hill.

มานพ วราภักดิ์. (2546). ***ทฤษฎีดอกเบี้ย.*** กรุงเทพฯ : ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ดาราวรรณ วิรุฬหผล. (2544). ***การวิเคราะห์เชิงปริมาณขั้นสูง.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

รัชนี มุขแจ้ง. (2540). ***คณิตศาสตร์สำหรับการเงิน.*** พิษณุโลก : ภาควิชาพาณิชยศาสตร์ คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

บริกแฮม, ยูจีน และ ฮูสตัน, โจเอล เอฟ. (2544). *Fundamentals of Financial Management.* แปลและเรียบเรียงโดย เริงรัก จำปาเงิน. กรุงเทพฯ : บุ๊คเน็ท

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันลอกาลิทึม.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 7
แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรและการประยุกต์

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับอนุพันธ์
2. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในการคำนวณอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรได้
4. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำแนวคิดเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรไปประยุกต์กับปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ได้
5. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร
6. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดกับปัญหาเศรษฐศาสตร์ได้

เนื้อหา

1. ความชันและค่าลิมิต
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร
3. อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร
4. การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรในทางเศรษฐศาสตร์
5. การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร
6. การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในทางเศรษฐศาสตร์

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบทดสอบในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

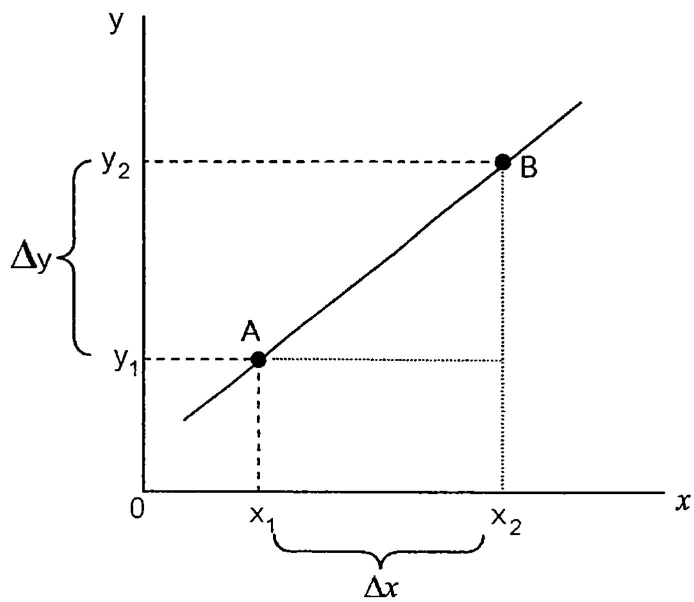
1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

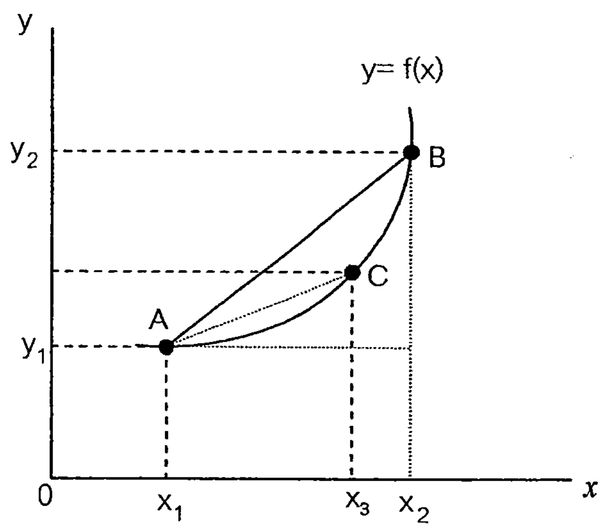
1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

1. ค่าความชันและลิมิต

โดยปกติในฟังก์ชันเส้นตรงนั้นเราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันได้จากการหาค่าสัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรบนแกนตั้ง เทียบกับค่าตัวแปรบนแกนนอน (การเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x หรือ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) ซึ่งจะได้ค่าความชันที่มีค่าคงที่ตลอดทั้งเส้น พิจารณาภาพที่ 7.1



ภาพที่ 7.1 ความชันของฟังก์ชันเส้นตรง



ภาพที่ 7.2 ความชันของฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรง

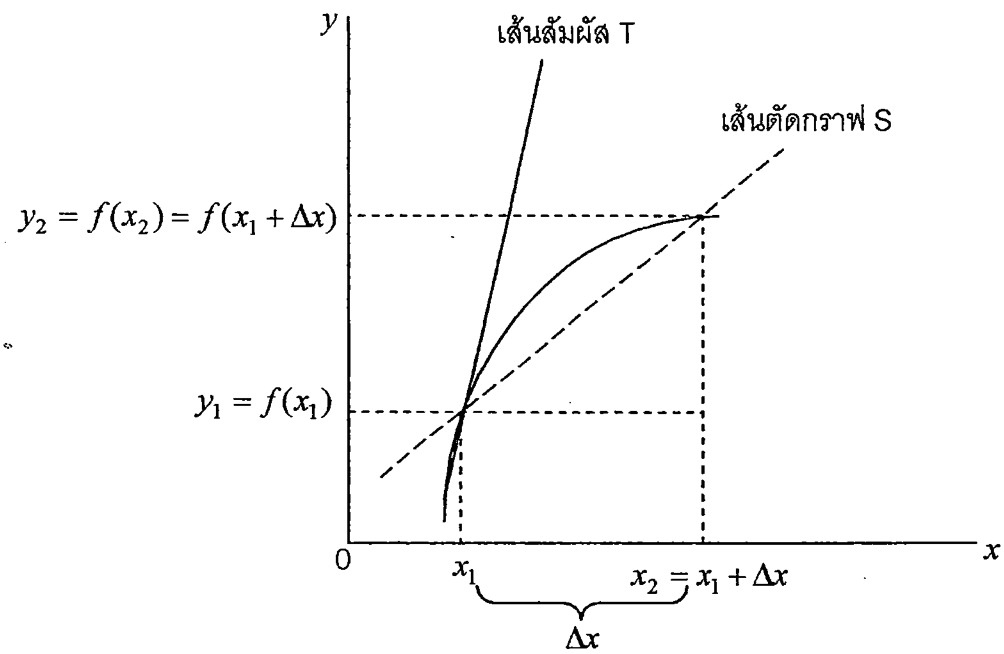
ในทางตรงข้ามหากต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรง ค่าความชันในแต่ละจุดของฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรงจะแตกต่างกัน พิจารณาภาพที่ 7.2

ในภาพที่ 7.2 จะพบว่าเส้นตรง AB มีความชันที่สูงกว่าเส้นโค้ง AB มาก และขณะเดียวกันเส้นตรง AC ก็มีความชันที่สูงกว่าเส้นโค้ง AC แต่จะมีความแตกต่างกันเล็กน้อย ทำให้เห็นได้ว่ายิ่งค่าของฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้จุด A ค่าความชันของเส้นตรงและไม่ใช่เส้นตรงจะมีความแตกต่างกันน้อยลงจนกระทั่งเท่ากันที่จุด A

ดังนั้นเราจึงพัฒนาแนวคิดในการหาความชันของฟังก์ชันที่ไม่ใช่เส้นตรงได้โดยใช้วิธีการคำนวณจาก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ และให้ Δx มีขนาดเล็กลงๆ จนกระทั่งเข้าใกล้ 0 (อัตราการเปลี่ยนแปลงของ x เป็นศูนย์) นั่นคือการหาลิมิต (Limit) หรือที่นักคณิตศาสตร์เรียกว่าการหาอนุพันธ์ (Derivative) ของฟังก์ชัน

<u>1.1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร</u>

อนุพันธ์ (Derivative) คือ การหาอัตราของการเปลี่ยนแปลงระหว่างตัวแปรตามต่อตัวแปรอิสระ ณ ระดับใดระดับหนึ่ง หรืออาจกล่าวง่ายๆ ได้ว่า อนุพันธ์ คือ การหาความชันของเส้นสัมผัสของฟังก์ชัน y = f(x) (เส้นสัมผัส T) ณ จุดใดจุดหนึ่ง พิจารณาในภาพที่ 7.3



<u>ภาพที่ 7.3</u> อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

เมื่อกำหนดให้ $x_2 = x_1 + \Delta x$ และ $y_2 = f(x_1 + \Delta x)$ อาจเขียนความชันของเส้นตัดกราฟในรูปของสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equation) ได้ว่า

$$S = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1}$$

$$S = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ถ้าระยะห่างระหว่าง x_2 และ x_1 เล็กลงเรื่อยๆ นั่นคือ ถ้า $\Delta x \to 0$ เส้นตัดแกนจะหมุนรอบหลัก (Pivot) ไปทางซ้ายและค่อยๆ เข้าใกล้เส้นสัมผัสไปเรื่อยๆ และเมื่อความชันของเส้นตัดแกนเข้าใกล้ 0 ($\Delta x \to 0$) แล้ว ลิมิตดังกล่าวจะเป็นความชันของเส้นสัมผัสของเส้น T เขียนสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\text{ความชัน T} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

สัญลักษณ์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่นิยมใช้ในทางคณิตศาสตร์มีหลายสัญลักษณ์ อาทิ $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, f', $D_x f(x)$, $D_x y$ แล้วแต่จะเลือกใช้

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

สมการ $y = f(x)$ ระบุให้เราทราบว่า ค่าของ y ขึ้นอยู่กับค่าของ x ดังนั้น การหาอัตราของการเปลี่ยนแปลงจึงเป็นที่ทราบว่า ต้องหาอัตราของการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x หรือกล่าวได้ว่า อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ $\frac{dy}{dx}$

การหาอนุพันธ์จำเป็นต้องกำหนดทุกครั้งว่าหาอัตราของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามแบบใดต่อตัวแปรอิสระแบบใด เช่น

ตัวแปรตาม	=	ระยะทาง (s)
ตัวแปรอิสระ	=	เวลา (t)

ดังนั้น อนุพันธ์ของ s เทียบกับ t คือ $\frac{ds}{dt}$

ถ้า S = S(t) เราจะได้

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหา $f(2)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x)=2x^2$ ในรูปของการหาลิมิต

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = 2x^2$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x\to 2} 2x^2 = 2\times 2^2 = 8$$

กฎว่าด้วยลิมิต

กฎข้อที่ 1 ลิมิตของค่าคงที่

$$\lim_{x\to a} K = K$$

กฎข้อที่ 2 ลิมิตเลขยกกำลัง

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$; เมื่อ n = จำนวนเต็มบวก

กฎข้อที่ 3 ลิมิตของผลบวก และผลลบระหว่างฟังก์ชัน

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

กฎข้อที่ 4 ลิมิตของผลคูณระหว่างฟังก์ชัน

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \times \left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$$

กฎข้อที่ 5 ลิมิตของผลหารระหว่างฟังก์ชัน

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad ; \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

กฎข้อที่ 6 ลิมิตของผลคูณระหว่างค่าคงที่กับฟังก์ชัน

$$\lim_{x\to a}[K\ f(x)] = K \lim_{x\to a} f(x)$$

กฎข้อที่ 7 ลิมิตของรากที่ n ของฟังก์ชัน

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

กฎข้อที่ 8 ลิมิตของฟังก์ชันยกกำลัง

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$; เมื่อ n > 0

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงใช้กฎว่าด้วยลิมิตหาค่าลิมิตต่อไปนี้

<u>วิธีทำ</u>

(1) $\lim_{x \to 5} 52$

จากกฎข้อที่ 1 $\lim_{x \to a} K = K$ ดังนั้น $\lim_{x \to 5} 52$ จึงมีค่าเท่ากับ 52 (ค่าคงที่)

(2) $\lim_{x \to 4} x^3$

จากกฎข้อที่ 2 $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ ดังนั้น $\lim_{x \to 4} x^3 = 4^3 = 64$

(3) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} 4x^2$

จากกฎข้อที่ 2 และ 6 จะได้ว่า $\lim_{x \to \frac{1}{2}} 4x^2 = 4 \lim_{x \to \frac{1}{2}} x^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{4} = 1$

(4) $\lim_{x \to 5} (x^2 + 2x)$

จากกฎข้อที่ 3 จะได้ว่า $\lim_{x \to 5} (x^2 + 2x) = \lim_{x \to 5} x^2 + \lim_{x \to 5} 2x$

$= \lim_{x \to 5} x^2 + 2 \lim_{x \to 5} x$

$= 5^2 + (2 \times 5) = 25 + 10$

$= 35$

(5) $\lim_{x \to 4} [(x+8)(x-5)]$

จากกฎข้อที่ 4 จะได้ว่า $\lim_{x \to 4} [(x+8)(x-5)] = \lim_{x \to 4} (x+8) \times \lim_{x \to 4} (x-5)$

$= (4+8) \times (4-5)$

$= -12$

<u>1.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuous Function)</u>

อาจกล่าวได้อย่างง่ายว่า ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องก็คือ ฟังก์ชันที่มีลักษณะของเส้นกราฟที่ไม่ขาดช่วง สามารถลากเส้นกราฟโดยที่ไม่ต้องยกปากกาขึ้นจากกระดาษ ทั้งนี้ในการระบุว่าฟังก์ชันใดๆ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องต่อเมื่อ ฟังก์ชันนั้นมีคุณสมบัติครบสามประการ

กำหนดให้ $\lim_{x \to a} f(x)$ ฟังก์ชัน f(x) จะต่อเนื่องที่จุด a เมื่อมีคุณสมบัติครบทั้ง 3 เงื่อนไขต่อไปนี้

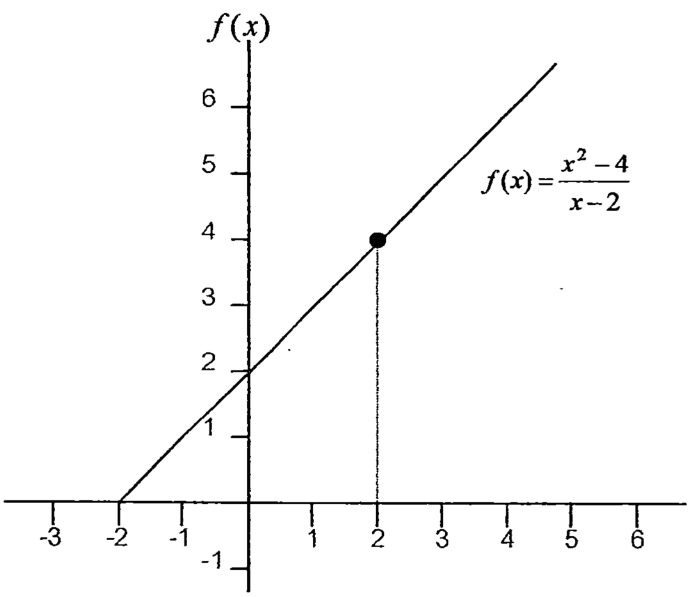
(1) หาค่า f(a) ได้

(2) หาค่า $\lim_{x \to a} f(x)$ ได้

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหา $\lim_{x \to 2} f(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}; x \neq 2$ พร้อมทั้งบอกด้วยว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

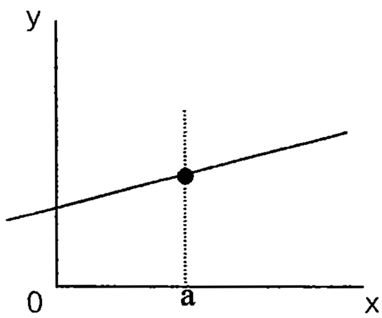


x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	2
1	3
1.5	3.5
1.75	3.75
2.25	4.25
2.5	4.5
3	5
4	6

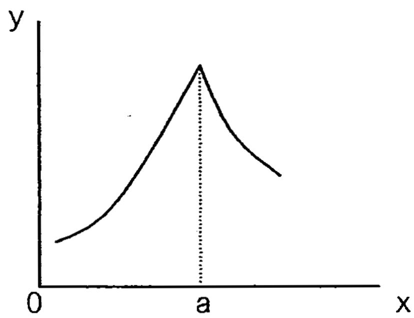
<u>ภาพที่ 7.4</u> กราฟแสดง $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}; x \neq 2$

พิจารณาภาพที่ 7.4 จะเห็นว่า ที่ $x=2$ ไม่มีจริงในทางคณิตศาสตร์ แต่เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางซ้าย ($x \to 2^-$) จะทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 และเมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางขวา ($x \to 2^+$) จะทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 เช่นกัน ดังนั้นลิมิตมีอยู่จริง แต่ ณ จุดที่ $x=2$ ไม่สามารถหา $f(2)$ ได้ ฟังก์ชันดังกล่าวจึงไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง

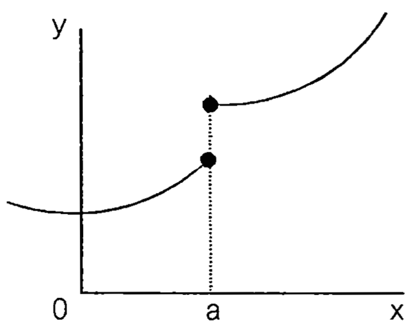
ฟังก์ชันใดๆ ที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity) ทั้งนี้เพราะไม่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขทั้ง 3 ของความต่อเนื่องที่กล่าวไปแล้ว ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องจะเกิดขึ้น 4 ลักษณะด้วยกัน ดังได้แสดงไว้ในภาพที่ 7.5 (ภาพที่ 7.5.1 ถึง 7.5.4)



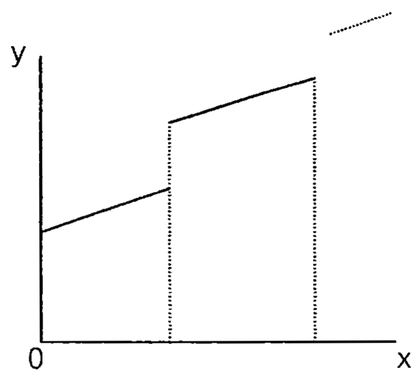
ภาพที่ 7.5.1



ภาพที่ 7.5.2



ภาพที่ 7.5.3



ภาพที่ 7.5.4

ภาพที่ 7.5 ลักษณะความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันต่างๆ

ลักษณะที่ 1 ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ดังภาพที่ 7.5.1 กล่าวคือ ณ จุด a หา f(a) ไม่ได้ แต่สามารถหา $\lim_{x \to a} f(a)$ ได้ (Missing-Point Discontinuity)

ลักษณะที่ 2 ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ดังภาพที่ 7.5.2 กล่าวคือ ณ จุด a หา f(a) ไม่ได้ แต่เมื่อ x $\longrightarrow$ a ค่าของ $f(x) \to \infty$ คือเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด (Infinite Discontinuity)

ลักษณะที่ 3 ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ดังภาพที่ 7.5.3 กล่าวคือ ณ จุด a หา $\lim_{x \to a} f(x)$ ไม่ได้ คือลิมิตซ้ายไม่เท่ากับลิมิตขวา (Finite Discontinuity)

ลักษณะที่ 4 ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ดังภาพที่ 7.5.4 เนื่องจากเป็นลักษณะของฟังก์ชันที่มีกราฟขาดเป็นช่วงๆ หรือกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันใดๆ ที่มีโดเมนเป็นเซตจำกัด (Finite Set) เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่าไม่ต่อเนื่อง (Discrete Function)

สรุป ลิมิตและความต่อเนื่องไม่จำเป็นต้องไปด้วยกันเสมอ นั่นคือ ลิมิตอาจมีอยู่จริง ณ จุดใดจุดหนึ่งโดยที่ฟังก์ชันนั้นไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องที่จุดนั้น อย่างไรก็ตามฟังก์ชันจะไม่ต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่ง ถ้าลิมิตไม่มีอยู่จริงที่จุดนั้น โดยสรุปก็คือลิมิตเป็นเงื่อนไขจำเป็น (Necessary) แต่ไม่เพียงพอ (Sufficient) สำหรับความต่อเนื่อง

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

2.1 อนุพันธ์ (Derivative)

ดังที่กล่าวแล้วว่า อนุพันธ์ คือการหาอัตราของการเปลี่ยนแปลงระหว่างตัวแปรตามต่อตัวแปรอิสระ ณ ระดับใดระดับหนึ่ง หรืออาจกล่าวได้ว่า อนุพันธ์ คือ การหาค่าลิมิตของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $\frac{dy}{dx}$ โดยทั่วไปอ่านว่า "ดีวาย บาย ดีเอ็กซ์"

2.2 กฎการหาอนุพันธ์

กฎข้อที่ 1 กำหนดให้ y = f(x) = K = ค่าคงที่

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 0$

กฎข้อที่ 2 กำหนดให้ y = f(x) = K g(x), K = ค่าคงที่

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = K\frac{d\,g(x)}{dx} = K\ g'(x)$

กฎข้อที่ 3 กำหนดให้ y = f(x) = $x^n, \quad n \quad \varepsilon \quad R$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

กฎข้อที่ 4 กำหนดให้ y = f(x) = $u \pm v, \quad u = g(x) \quad v = h(x)$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

กฎข้อที่ 5 กำหนดให้ y = u.v, u = g(x), v = h(x)

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.v + \frac{dv}{dx}.u$

กฎข้อที่ 6 กำหนดให้ $y = \frac{u}{v}, u = g(x), v = h(x)$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{du}{dx}.v - \frac{dv}{dx}.u\right]}{v^2}$$

กฎข้อที่ 7 กำหนดให้ y = f(u), u = g(x)

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้ $y = 1 - 3x^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(1-3x^5)}{dx} \\ &= \frac{d(1)}{dx} - \frac{d(3x^5)}{dx} \\ &= \frac{d(1)}{dx} - 3\frac{dx^5}{dx} \\ &= 0 - 3(5x^4) \quad = -15x^4\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ $S = (t^2 + 2t)\sqrt{t}$ จงหา $\frac{ds}{dt}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{d(t^2+2t)}{dt} . t^{\frac{1}{2}} + \frac{dt^{\frac{1}{2}}}{dt} . (t^2+2t) \\ &= (2t+2)t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(t^2+2t) \\ &= \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดให้ $y = u^n, u = f(x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{du^n}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= n\, u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

3. อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

การหาอนุพันธ์ที่ได้กล่าวไปแล้ว เป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$, $f'(x), \frac{d\,f(x)}{dx}, D_x y$ เมื่อ y = f(x) อย่างไรก็ตาม เราก็สามารถหาอนุพันธ์ได้ต่อไปเรื่อยๆ ดังเช่น อนุพันธ์ของ $\frac{dy}{dx}$ ก็จะมีค่าเท่ากับ $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^2y}{dx^2}$ และการหาอนุพันธ์ในลักษณะนี้เรียกว่า อนุพันธ์อันดับที่สอง หรืออาจใช้สัญลักษณ์ $f''(x)$ หรือ $D_x^2 y$ ก็ได้

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> กำหนดให้ $y = x^5 + x^4 + x^2 + 3x$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(x^5 + x^4 + x^2 + 3x\right)}{dx} = 5x^4 + 4x^3 + 2x + 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(5x^4 + 4x^3 + 2x\right)}{dx} = 20x^3 + 12x^2 + 2$$

การหาอนุพันธ์อันดับที่สาม ก็คือการหาอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่สอง นั่นคือ $\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}$ หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$ หรือ $f'''(x)$ และถ้าจะหาอนุพันธ์อันดับที่ n เราก็ใช้สัญลักษณ์ในลักษณะเดียวกัน

คือ $\frac{d^n y}{dx^n}$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ $P = 3Q^5 - 2Q^2 + 1$ จงหา $\frac{d^3P}{dQ^3}$

<u>วิธีทำ</u>

$$P = 3Q^5 - 2Q^2 + 1$$

$$\frac{dP}{dQ} = 15Q^4 - 4Q$$

$$\frac{d^2P}{dQ^2} = 60Q^3 - 4$$

$$\frac{d^3P}{dQ^3} = 180Q^2$$

4. การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรในทางเศรษฐศาสตร์

<u>4.1 แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยสุดท้าย</u>

ในทางเศรษฐศาสตร์ เรื่อง หน่วยสุดท้าย (Marginal Concept) ซึ่งใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์นั้นมีความสำคัญ เพราะเป็นหัวใจของการนำไปวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโภคและพฤติกรรมของผู้ผลิตว่าจะบริโภคมากน้อยเพียงใดเพื่อให้ได้อรรถประโยชน์รวมสูงสุด หรือในแง่ผู้ผลิตจะเลือกผลิตปริมาณสินค้าจำนวนเท่าใดเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด นอกจากการวิเคราะห์ในระดับจุลภาคแล้ว แนวคิดเรื่องหน่วยสุดท้ายยังใช้ได้กับกรณีการวิเคราะห์ในระดับมหภาค ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาเรื่องความโน้มเอียงหน่วยสุดท้ายในการบริโภค (MPC) ความโน้มเอียงหน่วยสุดท้ายในการออม (MPS) ฯลฯ ดังจะกล่าวต่อไป

1) การวิเคราะห์พฤติกรรมผู้บริโภค

ผู้บริโภคที่มีเหตุผลเชิงเศรษฐกิจจะแสวงหาความพอใจรวมสูงสุดโดยจะเลือกบริโภคสินค้าจนถึงจุดที่อรรถประโยชน์หน่วยสุดท้าย (MU) เท่ากับศูนย์ ซึ่งตรงกับจุดที่อรรถประโยชน์รวมสูงสุด (TU) ตามรูปที่ 7.6.1 และ 7.6.2

จากฟังก์ชันอรรถประโยชน์

$$U = f(Q)$$

โดยที่

U = ระดับอรรถประโยชน์ทั้งหมดหน่วยเป็นยูทิล

Q = ปริมาณสินค้าชนิดหนึ่งที่ผู้บริโภคทำการบริโภค

ดังนั้น อรรถประโยชน์หน่วยสุดท้าย จะหาได้จากการบริโภคสินค้า 1 ชนิดนั้นเพิ่มขึ้น 1 หน่วย จะได้อรรถประโยชน์ทั้งหมดเปลี่ยนไปจากเดิมกี่ยูทิล ซึ่งเขียนเป็นรูปคณิตศาสตร์ ดังนี้

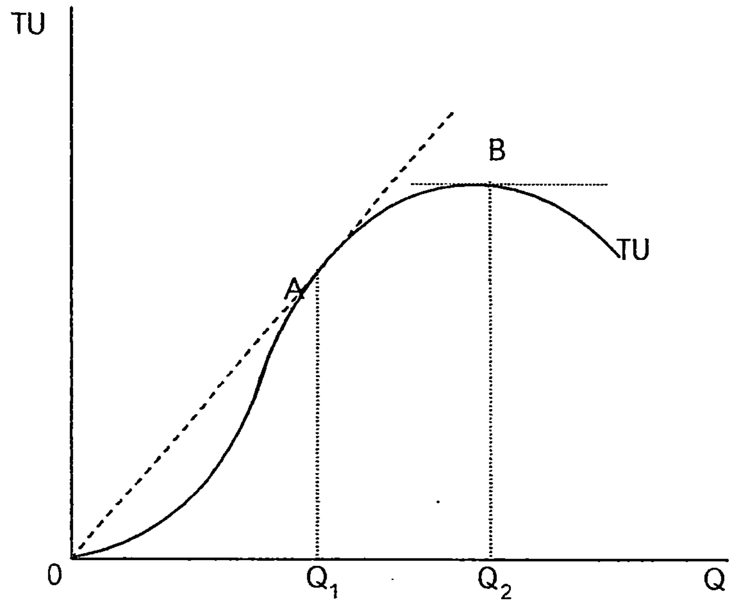
$$MU = \frac{dU}{dQ}$$

จากรูปที่ 7.6.2 ณ ระดับปริมาณการบริโภคที่จุด Q_1 หน่วย จะให้อรรถประโยชน์หน่วยสุดท้ายสูงสุด

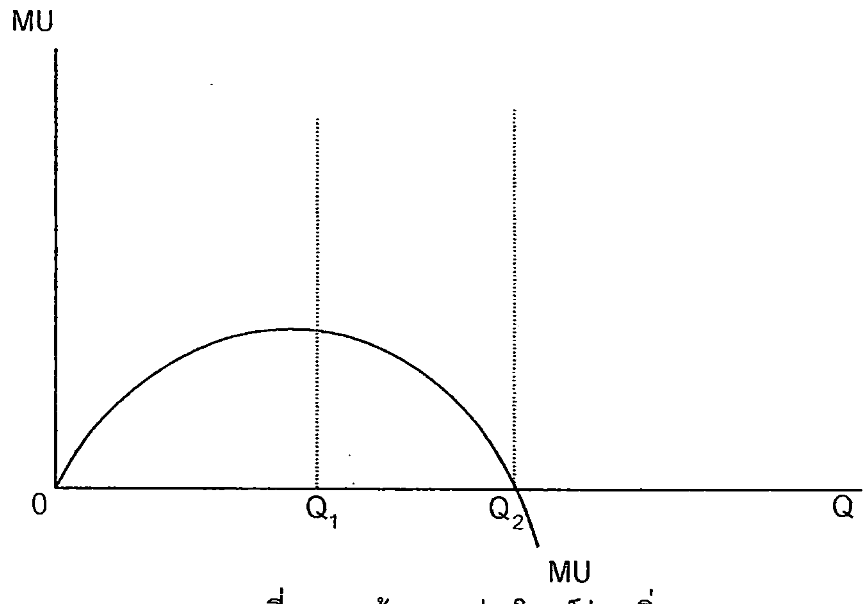
$$\frac{dMU}{dQ} = \frac{d^2U}{dQ^2} = 0$$

แต่ ณ จุด Q_1 นี้ ผู้บริโภคยังไม่ได้อรรถประโยชน์รวมสูงสุด เพราะหากเขาบริโภคเพิ่มจำนวนมากขึ้น เขาจะยิ่งได้อรรถประโยชน์รวมเพิ่มสูงขึ้น แม้ว่าจะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลงก็ตาม และถ้าเขาทำการบริโภคเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนได้อรรถประโยชน์รวมสูงสุด ณ ระดับการบริโภคที่จุด Q_2 หน่วย ที่จุดนี้จะพบว่าอรรถประโยชน์หน่วยสุดท้ายเป็นศูนย์พอดีหรือที่สามารถแสดงด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$MU = \frac{dU}{dQ} = 0$$



ภาพที่ 7.6.1 เส้นอรรถประโยชน์รวม



ภาพที่ 7.6.2 เส้นอรรถประโยชน์ส่วนเพิ่ม

ภาพที่ 7.6 อรรถประโยชน์รวมและอรรถประโยชน์ส่วนเพิ่ม

4.2 การวิเคราะห์พฤติกรรมผู้ผลิต

โดยทั่วไปเป้าหมายสำคัญของผู้ผลิตคือการแสวงหากำไรสูงสุด (Maximize Profit) โดยการเลือกทำการผลิต ณ จุดที่ได้กำไรสูงสุด นั่นคือ ณ ระดับการผลิตที่มีต้นทุนหน่วยสุดท้าย (Marginal Cost: MC) เท่ากับรายรับหน่วยสุดท้าย (Marginal Revenue: MR)

1) รายรับหน่วยสุดท้าย เนื่องจากผู้ผลิตทำการขายสินค้าให้แก่ผู้ซื้อไปจำนวน Q หน่วย ในราคาหน่วยละ P บาท จะทำให้ได้รายรับรวม (Total Revenue: TR) คือ

$$TR = P.Q \qquad \text{หน่วย: บาท}$$

ฉะนั้นหากเขาขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นอีก 1 หน่วย เขาจะได้รายรับรวมเพิ่มขึ้นอีกกี่บาท รายรับรวมที่ได้เพิ่มขึ้นจากขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นอีก 1 หน่วยนี้เรียกว่า รายรับหน่วยสุดท้าย ซึ่งสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = P \qquad \text{หน่วย: บาท}$$

ส่วนรายรับเฉลี่ย (Average Revenue: AR) เป็นการพิจารณาว่าผลผลิต 1 หน่วย ก่อให้เกิดรายรับเฉลี่ยเท่ากับเท่าใด ซึ่งเกิดจาก

$$AR = \frac{TR}{Q} \qquad \text{หน่วย: บาท}$$

2) ต้นทุนหน่วยสุดท้าย ในการผลิต ผู้ผลิตจำเป็นต้องมีค่าใช้จ่ายเป็นผลตอบแทนให้กับเจ้าของปัจจัยการผลิต ซึ่งค่าใช้จ่ายทั้งหมดนี้เรียกต้นทุนการผลิตรวม โดยที่หากผู้ผลิตต้องการผลิตเพิ่มขึ้น ก็จำเป็นต้องใช้ปัจจัยเพิ่มขึ้น ทำให้ค่าใช้จ่ายหรือต้นทุนการผลิตเพิ่มขึ้นตาม ดังนั้นต้นทุนการผลิตรวมของสินค้า (Total Cost: TC) จึงเป็นฟังก์ชันของจำนวนสินค้า นั่นคือ

$$TC = f(Q) \qquad \text{หน่วย: บาท}$$

หากผู้ผลิตเพิ่มจำนวนการผลิตออกไปอีก 1 หน่วย จะพบว่าต้นทุนรวมจะเพิ่มสูง การเพิ่มสูงขึ้นในต้นทุนรวมนี้ เรียกว่า ต้นทุนหน่วยสุดท้าย (Marginal Cost: MC) ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$MC = \frac{dTC}{dQ} \qquad \text{หน่วย: บาท}$$

ส่วนต้นทุนเฉลี่ย (Average Cost: AC) เป็นการพิจารณาว่าผลผลิต 1 หน่วยที่เกิดขึ้นก่อให้เกิดต้นทุนเฉลี่ยเท่ากับเท่าใด ซึ่งคำนวณจาก

$$AC = \frac{TC}{Q} \qquad \text{หน่วย: บาท}$$

3) ผลผลิตหน่วยสุดท้าย ผลผลิตเกิดจากการทำงานร่วมกันของปัจจัยการผลิต ซึ่งในทางเศรษฐศาสตร์แบ่งปัจจัยการผลิตออกเป็น 2 ประเภทคือ ปัจจัยคงที่ (Fixed Factor) และปัจจัยผันแปร (Variable Factor) เมื่อนำปัจจัยทั้งหมดที่มีอยู่มาใช้ในกระบวนการผลิตจะก่อให้เกิดผลผลิต เรียกว่า ผลผลิตรวม (Total Product: TP) ส่วนผลผลิตหน่วยสุดท้าย (Marginal Product: MP) เป็นการเปลี่ยนแปลงในผลผลิตรวมอันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงในปัจจัยการผลิตประเภทผันแปร

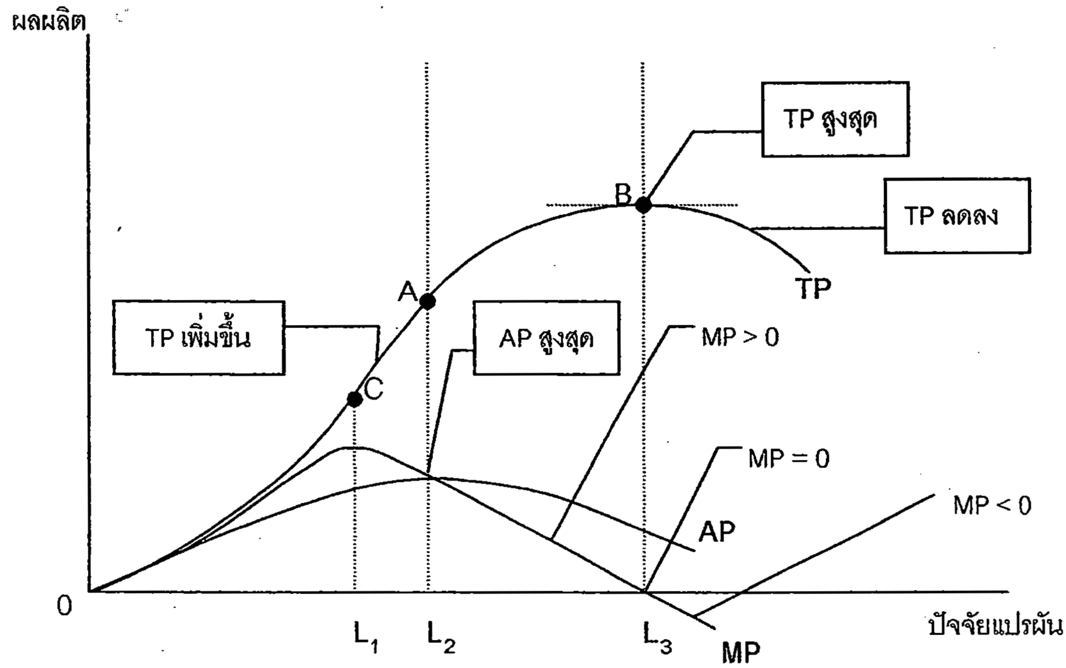
(Variable Factors) ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ ปัจจัยแรงงาน (Labor: L) เป็นปัจจัยผันแปร สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ดังนี้

$$MP = \frac{dTP}{dL}$$

นอกจากนี้ หากพิจารณาว่าการใช้ปัจจัยการผลิต L 1 หน่วย จะทำให้ได้ผลผลิตกี่หน่วยหรือที่เรียกว่า ผลผลิตเฉลี่ย (Average Product: AP) นั่นคือ

$$AP = \frac{TP}{L}$$

ลักษณะของเส้นการผลิตต่างๆ พิจารณาได้จากภาพที่ 7.7



ภาพที่ 7.7 เส้นผลผลิตหน่วยสุดท้าย เส้นผลผลิตเฉลี่ย และเส้นผลผลิตรวม

4.3 ความโน้มเอียงหน่วยสุดท้ายในการบริโภค (Marginal Propensity to Consume: MPC, b)

นักเศรษฐศาสตร์ได้ศึกษาพฤติกรรมการใช้จ่ายในการบริโภคของครัวเรือนแล้วพบความสัมพันธ์ระหว่างการใช้จ่ายในการบริโภคกับรายได้ในมือบุคคลหลังจากหักภาษีแล้ว (Disposable Income) โดยมีรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$$C = a + bY_d$$

โดย a คือ ระดับการใช้จ่ายเพื่อการบริโภคที่จำเป็นสำหรับการดำรงชีพอยู่ได้

b คือ สัดส่วนของการใช้จ่ายในการบริโภคที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อรายได้ที่อยู่ในมือบุคคลเปลี่ยนแปลงไป 1 หน่วย หรือที่เรียก b จึงเป็นความโน้มเอียงหน่วยสุดท้ายในการบริโภค ซึ่งเท่ากับ $\frac{dC}{dY}$

C คือ การใช้จ่ายในการบริโภค

Y_d คือ รายได้ที่อยู่ในมือบุคคล

ในทางปฏิบัติพบว่าค่า MPC หรือค่า b นี้จะเข้าไปเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์อีกหลายเรื่อง อาทิ

1) การศึกษาเรื่องตัวทวีภาษีอากร (Tax Multiplier)
2) การศึกษาเรื่องตัวทวีของการซื้อสินค้าและบริการของรัฐบาล (Government Purchasing Multiplier)
3) การศึกษาเรื่องตัวทวีของเงินโอน (Transfer Payment Multiplier)
4) การศึกษาเรื่องตัวทวีการค้ากับต่างประเทศ (Foreign Trade Multiplier)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหาฟังก์ชันรายรับหน่วยสุดท้าย (MR) จากฟังก์ชันอุปสงค์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และคำนวณหาค่า MR เมื่อปริมาณการผลิตเป็น 4 หน่วย และ 10 หน่วย

ก) $Q = 36 - 2P$

ข) $44 - 4P - Q = 0$

<u>วิธีทำ</u>

ก) จาก $Q = 36 - 2P$

จัดรูปใหม่ได้ $2P = 36 - Q$

$P = 18 - 0.5Q$

จากแนวคิด รายรับรวม $(TR) = P \cdot Q$

แทนค่า P ใน TR ได้ $TR = (18 - 0.5Q) \cdot Q$

$= 18Q - 0.5Q^2$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = \frac{d(18Q - 0.5Q^2)}{dQ}$$

$= 18 - Q$

แทนค่า $Q = 4$ หน่วยใน MR ได้ $MR = 18 - 4 = 14$

แทนค่า $Q = 10$ หน่วยใน MR ได้ $MR = 18 - 10 = 8$

(ข) จาก $44 - 4P - Q = 0$

จัดรูปใหม่ได้ $4P = 44 - Q$

4 หารทั้งสองข้าง $P = 11 - \frac{Q}{4} = 11 - 0.25Q$

จากแนวคิดรายรับรวม (TR) $= P.Q$

แทนค่า P ใน TR ได้ TR $= (11 - 0.25Q)Q$

$= 11Q - 0.25Q^2$

จาก $MR = \frac{dTR}{dQ}$

$$\therefore \quad MR = \frac{d\left(11Q - 0.25Q^2\right)}{dQ} = 11 - 0.5Q$$

แทนค่า $Q = 4$ หน่วยใน MR ได้ MR $= 11 - 0.5(4) = 9$

แทนค่า $Q = 10$ หน่วยใน MR ได้ MR $= 11 - 0.5(10) = 6$

4.4 ความยืดหยุ่นของอุปสงค์และความยืดหยุ่นของอุปทาน

4.4.1 ความยืดหยุ่นของอุปสงค์

ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ หมายถึง การวัดเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงในปริมาณอุปสงค์ที่สืบเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของปัจจัยที่กำหนดอุปสงค์ ซึ่งอาจมีหลายปัจจัย เช่น อาจเป็นราคาของสินค้าชนิดนั้นหรือเรียกว่า ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา (Price Elasticity of Demand, ε_p) หรืออาจเป็นรายได้ของผู้บริโภค ที่เรียกว่า ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (Income Elasticity of Demand, ε_i) หรืออาจเป็นราคาสินค้าชนิดอื่นที่เกี่ยวข้องซึ่งเรียกว่า ความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์ (Cross Elasticity Demand, ε_C) ฉะนั้นเวลาพิจารณาความยืดหยุ่นของอุปสงค์จึงแบ่งได้เป็น 3 ประเภทสำคัญๆ คือ

1) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา
2) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้
3) ความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์

ดังจะมีรายละเอียดและตัวอย่างการคำนวณในหัวข้อย่อยต่อไปนี้

สูตรการคำนวณความยืดหยุ่นของอุปสงค์

1.) การคำนวณหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาเป็นการวัดเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงของปริมาณความต้องการซื้อสินค้าชนิดหนึ่ง เมื่อราคาสินค้าชนิดนั้นเปลี่ยนแปลงไป 1 เปอร์เซ็นต์

สูตรการคำนวณหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาเขียนได้เป็น

$\varepsilon_p = \frac{P_i}{Q_i} \cdot \frac{dQ_i}{dP_i}$ หรือจะเขียนเป็น $\varepsilon_p = \frac{dQ_i}{dP_i} \cdot \frac{P_i}{Q_i}$

โดยที่ ε_p คือ ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา

P_i คือ ระดับราคาสินค้าชนิดที่ i

Q_i คือ ปริมาณความต้องการจะซื้อสินค้าชนิดที่ i

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยให้ราคา (P) เท่ากับ 3 และ 5 บาทต่อหน่วย

กำหนดสมการอุปสงค์ คือ $Q = 75 - 5P$

<u>วิธีทำ</u>

จาก $Q = 75 - 5P$

ได้ $\frac{dQ}{dP} = -5$

ณ P = 3 แทนค่าใน Q ได้ 75 – 5(3) = 75 – 15 = 60 หน่วย นำค่า Q ที่ได้นี้ไปแทนค่าในสูตรการหาค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาได้ว่า

จาก $\varepsilon_p = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$

แทนค่า P = 3, Q = 60 และ $\frac{dQ}{dP} = -5$ ใน ε_p ได้ผลเป็นดังนี้

$$\varepsilon_p = -5\left(\frac{3}{60}\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$$

ดังนั้น ณ ราคา = 3 บาทต่อหน่วย ปริมาณผลผลิต 60 หน่วย จะมีความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาเป็น -0.25

ณ P = 5 แทนค่าใน Q ได้ 75 – 5(5) = 75 – 25 = 50 หน่วย นำค่า Q ที่ได้นี้ไปแทนค่าในสูตรการหาค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาได้ว่า

จาก $\varepsilon_p = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$

แทนค่า P = 5, Q = 50 และ $\frac{dQ}{dP} = -5$ ใน ε_{11} ได้ผลเป็นดังนี้

$$\varepsilon_p = -5\left(\frac{5}{50}\right) = -\frac{1}{2} = -0.5$$

ดังนั้น ณ ราคา = 5 บาทต่อหน่วย ปริมาณผลผลิต 50 หน่วย จะมีความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาเป็น -0.5

ถ้า $\varepsilon_p < 1$	สินค้านั้นเป็นสินค้าจำเป็น (Necessary Goods)
ถ้า $\varepsilon_p > 1$	สินค้านั้นเป็นสินค้าฟุ่มเฟือย (Luxury Goods)

2.) การคำนวณหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (ε_i) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้เป็นการวัดเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงของความต้องการสินค้าชนิดหนึ่งเมื่อรายได้ของผู้บริโภคเปลี่ยนแปลงไป 1 เปอร์เซ็นต์ โดยสมมติให้ราคาสินค้าชนิดนั้นยังคงที่

สูตรในการคำนวณหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ของรายได้จะเป็น

$$\varepsilon_i \text{ หรือ } \eta = \frac{I}{Q} \cdot \frac{dQ}{dI}$$

โดยที่ ε_i คือ ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้

I คือ รายได้ของผู้บริโภค

Q คือ ปริมาณความต้องการสินค้าชนิดหนึ่ง

ค่า ε_i จะเป็นได้ทั้งค่าบวก, ค่าลบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของสินค้าที่ผู้บริโภคทำการบริโภค กล่าวคือ

1) ถ้า ε_i มีค่าเป็นบวก (มากกว่าศูนย์) แสดงว่าเป็นสินค้าปกติ (Normal Goods)
2) ถ้า ε_i มีค่ามากกว่า 1 แสดงว่าเป็นสินค้าฟุ่มเฟือย (Luxuries Goods)
3) ถ้า ε_i มีค่าเป็นบวกและน้อยกว่า 1 แสดงว่าเป็นสินค้าจำเป็น (Necessities Goods)
4) ถ้า ε_i มีค่าเป็นลบ (น้อยกว่าศูนย์) แสดงว่าเป็นสินค้าด้อย (Inferior Goods)

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> นายชัยมีรายได้ 300 บาทต่อเดือน เขาซื้อกุ้งรับประทาน 25 กิโลกรัมต่อเดือน สมมติว่าราคากุ้งไม่เปลี่ยนแปลงและราคาอื่นๆ ก็มิได้เปลี่ยนแปลง และฟังก์ชันการบริโภคกุ้งต่อรายได้ เป็น $Q = 20 + 0.1I$ จงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้สำหรับกุ้ง

<u>วิธีทำ</u>

จากสูตร $\varepsilon_i = \dfrac{dQ}{dI} \cdot \dfrac{I}{Q}$

$Q = 20 + 0.1I$

หา $\dfrac{dQ}{dI}$ จะได้ $= 0.10$

เมื่อกำหนดให้ Y = 300, Q = 25

แทนค่าใน ε_i $\varepsilon_i = 0.10\left(\dfrac{300}{25}\right) = 1.2$

นั่นคือ ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้สำหรับกุ้งเป็น 1.2

3.) การคำนวณหาความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์ ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ เป็นการวัดเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงในการบริโภคสินค้าชนิดหนึ่ง (เช่น สินค้า x) เมื่อราคาสินค้าอีกชนิดหนึ่ง (เช่น สินค้า y) เปลี่ยนแปลงไป 1 เปอร์เซ็นต์

สูตรการคำนวณหารความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์เป็นดังนี้

$$\varepsilon_c = \frac{P_y}{Q_x} \cdot \frac{dQ_x}{dP_y}$$

โดย ε_c คือ ค่าความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์ เมื่อให้ราคาสินค้า y เปลี่ยนแปลงไป จะกระทบปริมาณความต้องการซื้อ x เท่าใด

P_y คือ ระดับราคาสินค้า y

Q_x คือ ปริมาณความต้องการซื้อสินค้า x

ค่า ε_c จะเป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ แล้วแต่ว่าสินค้า x และ y มีลักษณะอย่างไร กล่าวคือ

1) ถ้าสินค้า x กับสินค้า y เป็นสินค้าประกอบกัน (Complementary Goods) จะพบว่า ε_c มี<u>ค่าลบ</u> เช่น ถ้าลูกเทนนิสมีราคาแพงขึ้น ผู้เล่นเทนนิสจะซื้อลูกเทนนิสลดลง ไม้เทนนิสก็จะขายได้น้อยลงตามไปด้วย เป็นต้น

2) ถ้าสินค้า x กับสินค้า y เป็นสินค้าทดแทนกัน (Substituted Goods) จะพบว่า ε_c มี<u>ค่าบวก</u> เช่น ถ้าราคาเนื้อไก่แพงขึ้น ปริมาณความต้องการซื้อเนื้อไก่จะลดลง โดยผู้บริโภคบางส่วนจะหันไปซื้อเนื้อหมูแทนเนื้อไก่ เพราะฉะนั้นความต้องการเนื้อหมูจะเพิ่มขึ้น เป็นต้น

3) ถ้าสินค้า x กับสินค้า y ไม่เกี่ยวข้องกันเลย ค่า ε_c จะมีค่าเป็นศูนย์

4.4.2 ความยืดหยุ่นของอุปทาน

ความยืดหยุ่นของอุปทาน คือ การวัดเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงในปริมาณความต้องการที่จะขาย เมื่อราคาของสินค้าเปลี่ยนแปลงไป 1 เปอร์เซ็นต์

สูตรการคำนวณความยืดหยุ่นของอุปทาน

การคำนวณจะใช้สูตร $$\varepsilon_s = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$$

โดยที่	ε_s	คือ ค่าความยืดหยุ่นของอุปทาน
	P	คือ ระดับราคาขายของสินค้าชนิดหนึ่ง
	Q	คือ ปริมาณความต้องการที่จะขายของสินค้าชนิดหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าความยืดหยุ่นของอุปทาน เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ให้ โดยราคาของต่อหน่วยเป็น 3 บาท และ 5 บาท

$$Q = -2 + 0.8P$$

วิธีทำ

$$\frac{dQ}{dP} = 0.8$$

ณ P = 3 บาทต่อหน่วย, Q = -2 + (0.8) (3) = -2 + (2.4)

= 0.4

แทนค่า P = 3, Q = 0.4 และ $\frac{dQ}{dP} = 0.8$ ในสูตร $\varepsilon_s = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$

ได้ $$\varepsilon_s = \frac{3}{0.4}(0.8) = 6$$

ณ P = 5 บาทต่อหน่วย, Q = -2 + (0.8) (5) = -2 + (4)

= 2

แทนค่า P = 5, Q = 2 และ $\frac{dQ}{dP} = 0.8$ ในสูตร $\varepsilon_s = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$

ได้ $$\varepsilon_s = \frac{5}{2}(0.8) = 2$$

4.5 การแสวงหากำไรสูงสุด

ในทางปฏิบัติ แม้ว่าผู้ประกอบการจะเลือกทำการผลิต ณ ระดับผลผลิตต่างๆ กัน และจะเผชิญกับลักษณะของต้นทุนที่แตกต่างกันด้วย แต่ทุกๆ คนจะมุ่งแสวงหากำไรสูงสุดไม่ว่าจะอยู่ในตลาดที่มีการแข่งขันสมบูรณ์หรือตลาดแข่งขันไม่สมบูรณ์ก็ตาม

4.5.1 การแสวงหากำไรสูงสุดในตลาดแข่งขันสมบูรณ์

เนื่องจากเส้นอุปสงค์ต่อสินค้าหรือบริการของลูกค้าที่ผู้ผลิตแต่ละรายในตลาดแข่งขันสมบูรณ์จะเผชิญนั้น จะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกนนอน โดยผู้ผลิตทุกๆ รายจะต้องขายสินค้าโดยตั้งราคาขายต่อหน่วยตามราคาตลาด (ซึ่งกำหนดโดยเส้นอุปสงค์ต่อสินค้าในตลาด ตัดกับเส้นอุปทานสินค้าในตลาด) ซึ่งจะมีอยู่เพียงราคาเดียว คือ P บาทต่อชิ้น ฉะนั้น กำไร (π)ที่ผู้ผลิตได้รับจากการขายสินค้านี้ จะเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ

$$\pi = TR - TC$$

โดย π คือ กำไร

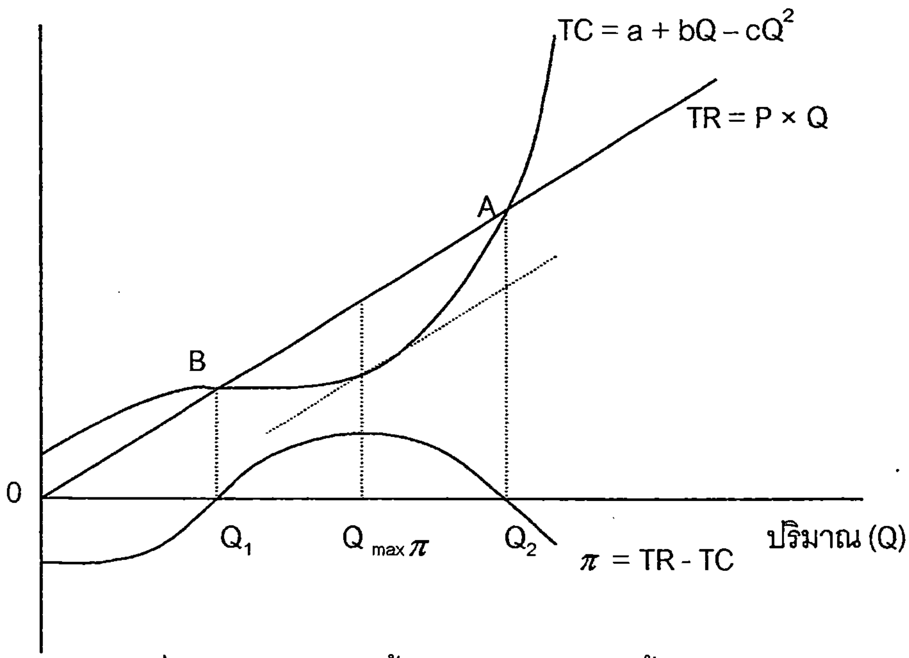
TR คือ รายรับรวม

(เกิดจากราคาขายต่อชิ้น (P) คูณปริมาณสินค้าที่ขายได้ (Q))

TC คือ ต้นทุนทั้งหมด

หากนำข้อมูลรายรับจากการขายสินค้า และข้อมูลต้นทุนการผลิตของผู้ผลิตรายหนึ่งมาวาดกราฟได้ดังแสดงในภาพที่ 7.8 ซึ่งจากภาพจะเห็นว่า ผู้ผลิตจะเลือกผลิตที่จุดซึ่งได้กำไรสูงสุด นั่นคือ ที่จุดที่รายรับทั้งหมด ลบ ด้วยต้นทุนทั้งหมดแล้ว ได้กำไรสุทธิสูงสุด ณ ช่วงที่ TR และ TC ห่างกันมากที่สุด ที่ระดับปริมาณการผลิตดังกล่าวจะมีค่าความชันของเส้นกราฟทั้งสองเท่ากันพอดี นั่นคือ MR = MC นั่นเอง ฉะนั้น เงื่อนไขที่ให้กำไรสูงสุดคือ การผลิต ณ จุดที่ MC = MR = P หรือระดับราคานั่นเอง

กำไร, ต้นทุน, รายรับ



ภาพที่ 7.8 ฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด ฟังก์ชันรายรับทั้งหมด และฟังก์ชันกำไร

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ฟังก์ชันต้นทุนรวมเป็น $TC = 0.04Q^3 - 0.9Q^2 + 10Q + 5$ ให้คำนวณหาระดับผลผลิตที่ทำธุรกิจรายนี้ได้กำไรสูงสุด โดยธุรกิจนี้อยู่ในตลาดแข่งขันสมบูรณ์ที่ต้องตั้งราคาขายสินค้า 4 บาทต่อชิ้น ซึ่งเท่ากับผู้ขายรายอื่นๆ ในตลาด

วิธีทำ

จากเงื่อนไขกำไรสูงสุด ณ จุดผลิตที่

$$MR = MC$$

เมื่อ $$TC = 0.04Q^3 - 0.9Q^2 + 10Q + 5$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 0.12Q^2 - 1.8Q + 10$$

ในตลาดแข่งขันสมบูรณ์ $MR = P$

แทนค่า $MR = MC = P$

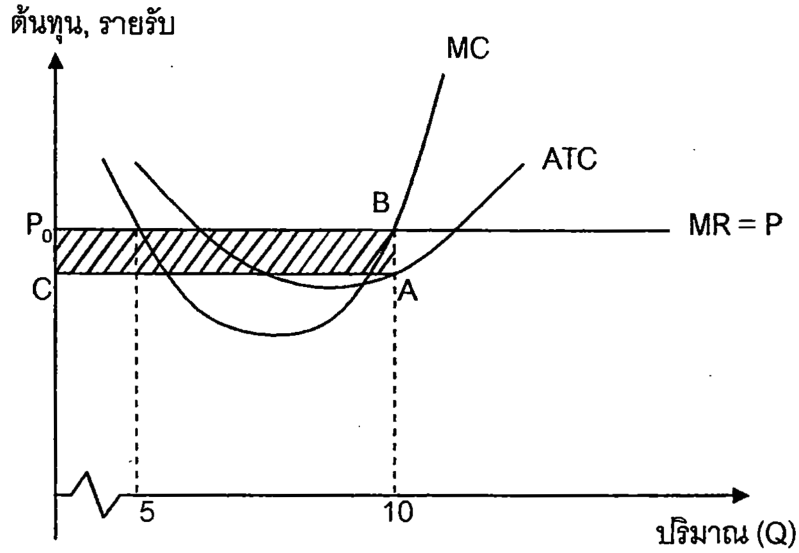
$$0.12Q^2 - 1.8Q + 10 = 4$$

$$0.12Q^2 - 1.8Q + 6 = 0$$

$$(Q-5)(Q-10) = 0$$

$$Q = 5, 10$$

เราสามารถแสดงโดยภาพได้ดังนี้



ภาพที่ 7.9 ปริมาณการผลิตที่ให้กำไรสูงสุด

จากภาพที่ 7.9 จะเห็นว่า มีระดับผลผลิต 2 ระดับ คือ Q = 5 และ Q=10 หน่วย ที่ MR=MC แต่เมื่อทดสอบเงื่อนไขเพียงพอ (Sufficient Condition) กล่าวคือ TC จะต่ำสุดเมื่อ $\frac{d^2TC}{dQ^2} > 0$

ดังนั้น $\frac{d^2TC}{dQ^2}$ = 0.24Q - 0.18

แทน Q=5; $\frac{d^2TC}{dQ^2}$ = -0.6 (น้อยกว่าศูนย์)

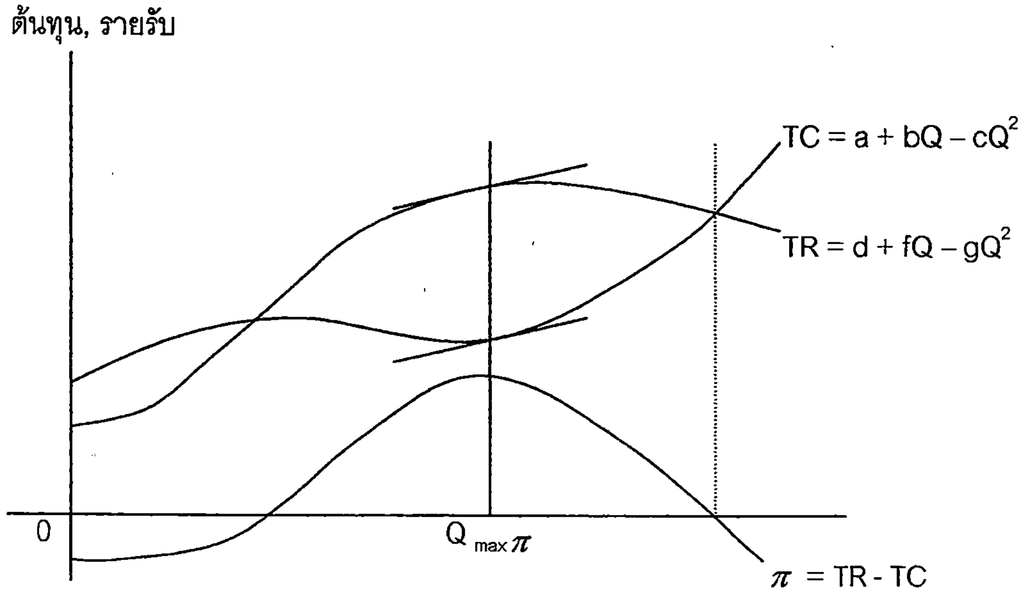
แทน Q=10; $\frac{d^2TC}{dQ^2}$ = 0.6 (มากกว่าศูนย์)

ดังนั้นผู้ผลิตเลือกผลิต ณ จุดที่กำไรสูงสุด โดยกำไรคือกำไรคือพื้นที่ ABP_0C และเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด ผู้ผลิตจะเลือกผลิตที่ Q = 10

4.5.2 การแสวงหากำไรสูงสุดในตลาดแข่งขันไม่สมบูรณ์: กรณีตลาดผูกขาด

ในขณะที่ตลาดแข่งขันไม่สมบูรณ์ ราคาสินค้าจะไม่เป็นราคาเดียว เพราะผู้ผลิตมีไม่มากราย หรือมีการรวมกลุ่มกัน เพราะฉะนั้น TR จะไม่เป็นเส้นตรง ดังในกรณีที่ตลาดมีการแข่งขันสมบูรณ์ เพราะว่า P จะเป็นฟังก์ชันของ Q

อย่างไรก็ตาม เงื่อนไขกำไรสูงสุดก็คือจุดที่ห่างกันมากสุดของเส้นโค้ง TC และ TR ซึ่งก็คือจุดที่ slope ของทั้ง 2 เส้นเท่ากันนั่นเอง นั่นคือ $\frac{dTC}{dQ}=\frac{dTR}{dQ}$ ซึ่งในทางเศรษฐศาสตร์ $\frac{dTC}{dQ}$ คือ MC, $\frac{dTR}{dQ}$ ก็คือ MR ดังนั้นเงื่อนไขกำไรสูงสุดได้แก่ MC = MR ดังแสดงในภาพที่ 7.10



ภาพที่ 7.10 ปริมาณการผลิตที่ให้กำไรสูงสุดในตลาดแข่งขันไม่สมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 14 ผู้ผลิตซึ่งเป็นผู้ผูกขาดมีเส้นอุปสงค์ต่อสินค้าเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Demand Curve) ที่เขียนได้เป็น P = 100 – 4Q ทำการผลิตโดยเส้นต้นทุนหน่วยสุดท้าย (MC) คงที่ ณ 20 บาท เส้นต้นทุนการผลิตทั้งหมดก็เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น คือ C = 50 + 20Q จงหาระดับผลผลิตที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ จากเงื่อนไขกำไรสูงสุดคือ MC = MR

เมื่อ C = 50 + 20Q

$$MC=\frac{dTC}{dQ}=20$$

ในขณะที่

$$TR=P\times Q$$

$$=(100-4Q)\times Q$$

$$TR=100Q-4Q^2$$

$$MR=\frac{dTR}{dQ}=100-8Q$$

จากเงื่อนไข กำไรสูงสุด MC = MR

แทนค่าจะได้ $$100-8Q=20$$

$$80-8Q=0\,,\; Q=10$$

นั่นคือ ผู้ผลิตจะผลิต ณ จุดที่ให้กำไรสูงสุด ในที่นี้คือ

Q = 10 นั่นเอง

ขาย ณ ราคา: P = 100 - (4×10)

= 60 บาท ต่อหน่วย

กำไรทั้งหมด = TR – TC

= (60 × 10) – 50 + (20 × 10)

= 600 – 250

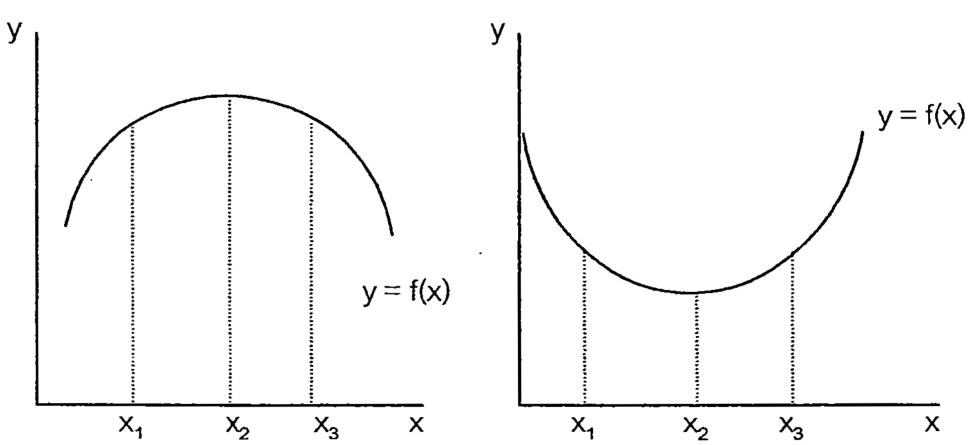
= 350 บาท

ดังนั้น ผู้ผลิตจะผลิต 10 หน่วยในราคา 60 บาทต่อหน่วย และได้กำไรทั้งหมดเท่ากับ 350 บาท

5. การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

<u>5.1 ฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นและฟังก์ชันค่าลดลง (Increasing and Decreasing Functions)</u>

ถ้ากำหนดให้ $y = f(x)$ ขณะที่ x ค่อยๆ เพิ่มค่าขึ้นเรื่อยๆ ค่าของ y จะเปลี่ยนไป 3 ลักษณะ คือ ค่อยๆ เพิ่มขึ้น จนถึงจุดสูงสุด แล้วค่อยๆ ลดค่าลง ช่วงที่ x เพิ่มค่าขึ้น ทำให้ y เพิ่มค่าขึ้น เรียกว่า <u>ฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น</u> (Increasing Function) ส่วนช่วงที่ x เพิ่มค่าขึ้น แล้วทำให้ y ลดค่าลง จะเรียกว่า <u>ฟังก์ชันค่าลดลง</u> (Decreasing Function) พิจารณาภาพที่ 7.11



ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันเพิ่ม

<u>ภาพที่ 7.11</u> ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

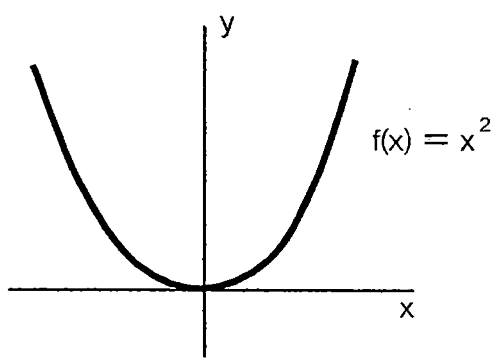
ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเพิ่มหรือลดที่จุด x ใดๆ นั้น พิจารณาได้จาก**อนุพันธ์อันดับหนึ่ง** (First derivative test)

- ถ้า $f'(x) > 0$ ที่ $x = x_1$ ชี้ว่าฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นที่ x_1
- ถ้า $f'(x) < 0$ ที่ $x = x_3$ ก็แสดงว่า ฟังก์ชันค่าลดลงที่ x_3
- ถ้า $f'(x) = 0$ ที่ $x = x_2$ ก็แสดงว่า ฟังก์ชันนั้นจะมีค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด

5.2 ความโค้งของเส้น (Convexity of Curve)

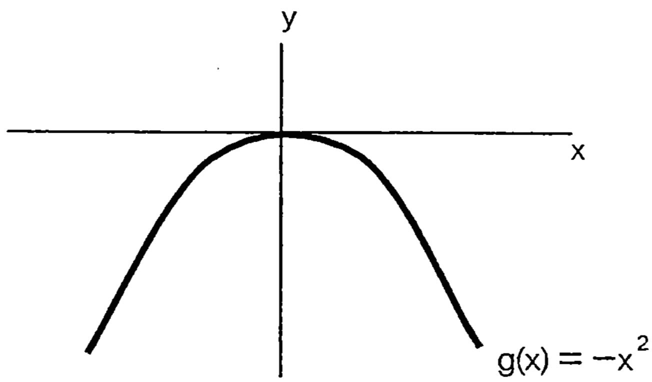
ความโค้งของเส้นจะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อความชันของแต่ละจุดบนเส้นนั้นเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับสอง มีประโยชน์ในการบอกรูปร่างคร่าวๆ ของกราฟจากฟังก์ชัน โดยสามารถบอกได้ว่ากราฟจะหงายขึ้นหรือคว่ำลงในช่วงใดช่วงหนึ่ง

ฟังก์ชันที่มีลักษณะโค้งลง (Convex Function) จะมีความชันของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในช่วงนั้นๆ เมื่อค่า x เพิ่มค่าขึ้น ซึ่งความชันของฟังก์ชันจะเพิ่มขึ้นในช่วงนั้นๆ ก็ต่อเมื่อเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับสองเป็นบวก นั่นคือ $f''(x) > 0$ และ**เส้นสัมผัสจะอยู่ใต้กราฟ** กราฟจะมีลักษณะ**หงายขึ้น** และเพื่อให้เข้าใจง่ายเข้า ฟังก์ชันโค้งลงจะเป็นฟังก์ชันที่มีส่วนโค้งพุ่งเข้าหาแกน x หนังสือบางเล่มเรียกว่า ฟังก์ชันเว้าเข้าแกน x ดังภาพที่ 7.12



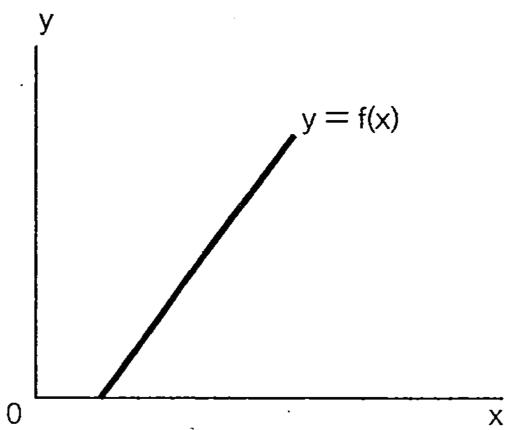
ภาพที่ 7.12 ฟังก์ชันที่มีลักษณะโค้งลง

ฟังก์ชันที่มีลักษณะโค้งขึ้น (Concave Function) จะมีความชันลดลงเรื่อยๆ ในช่วงนั้น เมื่อค่า x เพิ่มค่าขึ้น เครื่องหมายอนุพันธ์อันดับสองมีค่าเป็นลบ นั่นคือ $g''(x) < 0$ และ**เส้นสัมผัสอยู่เหนือรูปกราฟตลอดทั้งเส้น** ลักษณะกราฟจะคว่ำลง หนังสือบางเล่ม เรียกว่า ฟังก์ชันโป่งออกจากแกน x ดังภาพที่ 7.13



<u>ภาพที่ 7.13</u> ฟังก์ชันที่มีลักษณะโค้งขึ้น

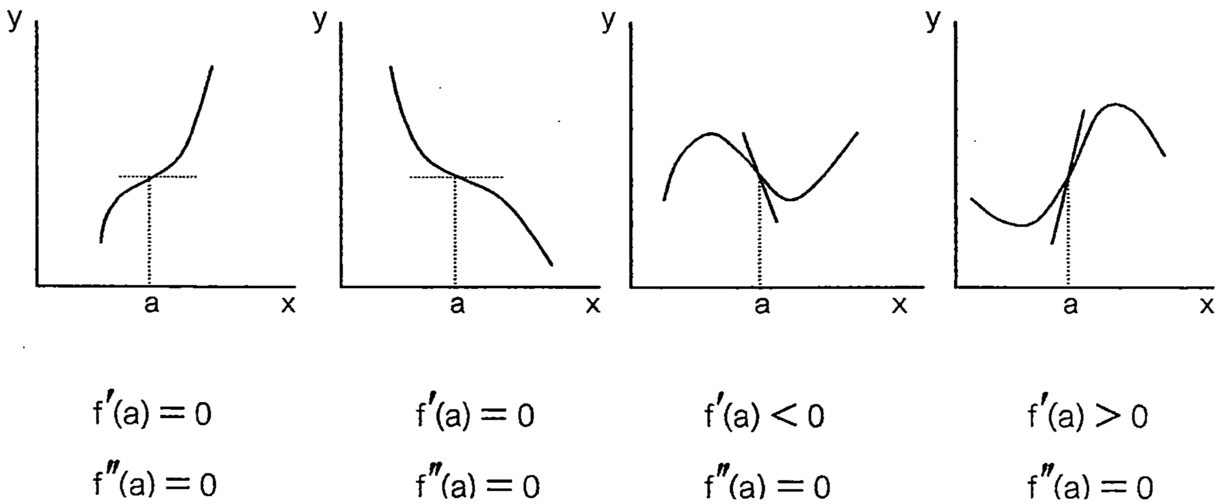
สำหรับฟังก์ชันที่มีความชันของเส้นไม่เปลี่ยนแปลงเลย หมายความว่า $f''(x) = 0$ เรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น ดังภาพที่ 7.14



<u>ภาพที่ 7.14</u> ฟังก์ชันเชิงเส้น

<u>5.3 ลักษณะของจุดเปลี่ยนเว้า (Point of Inflection)</u>

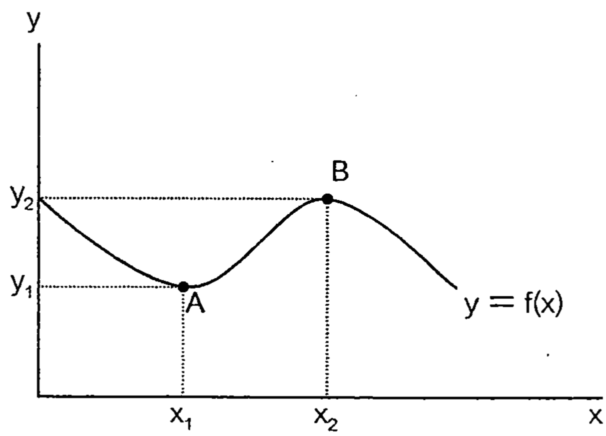
จุดวกกลับหรือจุดเปลี่ยนความเว้า (Point of Inflection) ซึ่งก็คือจุดที่ความชันของฟังก์ชันเปลี่ยนจากโค้งคว่ำ $f'(x) < 0$ เป็นโค้งหงาย $f'(x) > 0$ หรือจากโค้งหงายกลายเป็นโค้งคว่ำ



ภาพที่ 7.15 ลักษณะของจุดเปลี่ยนเว้า

5.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร (Maxima and Minima of One Variable Function)

จุดหรือค่าวิกฤติ (Critical Point or Value) เป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่จุด x นั้นๆ จะเกิดขึ้นเมื่อฟังก์ชันอยู่ในช่วงการเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์ คือต้องไม่เพิ่มหรือลด ณ จุด x นั้นๆ และการที่ฟังก์ชันไม่เพิ่มหรือลดที่ x นั้นๆ ก็ต่อเมื่อ $f'(x) = 0$



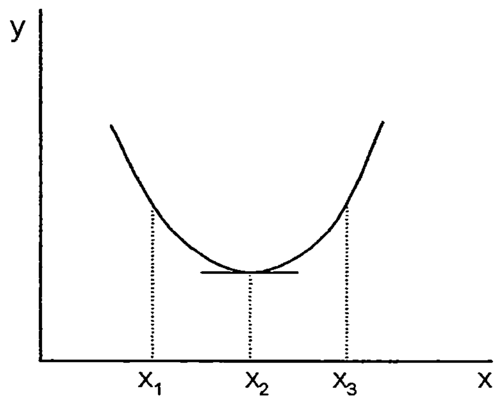
ภาพที่ 7.16 ค่าสูงสุด ต่ำสุดของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

จากภาพที่ 7.16 ข้างต้น จะพบว่า A เป็นจุดต่ำสุดของเส้น กับ B เป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชันนี้ เรียกว่า จุดสุดยอด (Critical Point) และค่าสุดยอด (Critical Value) คือ y_1 และ y_2

5.5 เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอสำหรับค่าสุดยอด (Necessary and Sufficient Conditions for an Extreme Value)

การหาค่าสุดยอดดังกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า เส้นสัมผัสตรงจุดนั้นๆ จะขนานกับแกนนอนเสมอ ในทางคณิตศาสตร์ ถ้า $y = f(x)$ จะได้ว่า $f'(x) = 0$ ซึ่งถือว่าเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นต่อการหาค่าสุดยอด อย่างไรก็ตามเงื่อนไขดังกล่าวนี้ยังไม่สามารถแยกแยะได้ว่า จุดสุดยอดดังกล่าวนั้นเป็นจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน ดังนั้นจึงควรจะมีเงื่อนไขเพิ่มเติมขึ้นเพื่อชี้ให้เห็นความแตกต่างกัน

จากความรู้เรื่องฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นและฟังก์ชันค่าลดลง ทำให้สามารถตรวจสอบได้ว่า ณ จุดที่ $f'(x) = 0$ นั้นเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยพิจารณาจากภาพที่ 7.17 เพื่อดูว่าเมื่อ x เปลี่ยนค่าไป ค่าของ $f(x)$ และความชันของ $f(x)$ จะเปลี่ยนแปลงค่าไปอย่างไร โดยสมมติให้ x เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ซึ่งจะพบว่าทางซ้ายของจุด x_2 ค่า $f'(x) < 0$ และเมื่อ x ค่อยๆ เพิ่มค่ามาถึง x_2 ค่าความชันของเส้นสัมผัสจะเพิ่มขึ้นคือจาก $f'(x) < 0$ เป็น $f'(x) = 0$ และเมื่อ x เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ($x > x_2$) ค่าความชันของเส้นสัมผัสก็จะเพิ่มขึ้นตาม เป็น $f'(x) > 0$ จากคำอธิบายดังกล่าวนี้ ในทางคณิตศาสตร์ กล่าวว่าเมื่อค่า x เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ แล้ว ทำให้ $f''(x) > 0$ ฟังก์ชันดังกล่าวจะมีค่าต่ำสุดที่จุด $f'(x) = 0$



ภาพที่ 7.17 ฟังก์ชันที่ให้ค่าต่ำสุด

ถ้า $x = x_1$ $\quad f'(x) < 0 \longrightarrow f''(x) > 0$

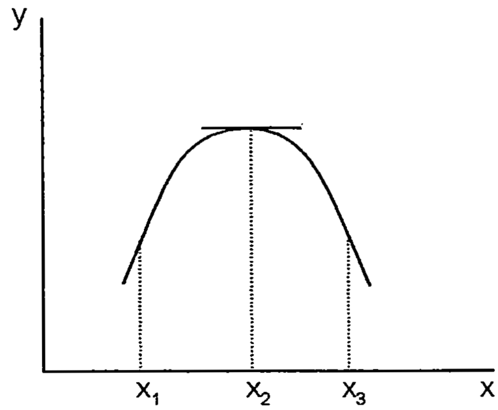
ถ้า $x = x_2$ $\quad f'(x) = 0 \longrightarrow f''(x) > 0$

ถ้า $x = x_3$ $\quad f'(x) > 0 \longrightarrow f''(x) > 0$

จากรูป ณ จุด x_1 ชี้ว่าฟังก์ชันกำลังลดลง

ณ จุด x_3 ชี้ว่าฟังก์ชันกำลังเพิ่มขึ้น

และ ณ จุด x_2 $f'(x) = 0$ และ $f''(x) > 0$ ในทุกๆ จุด แสดงว่า x_2 เป็นค่าต่ำสุด



ภาพที่ 7.18 ฟังก์ชันที่ให้ค่าสูงสุด

ถ้า $x = x_1$ $\qquad f'(x) > 0 \longrightarrow f''(x) < 0$

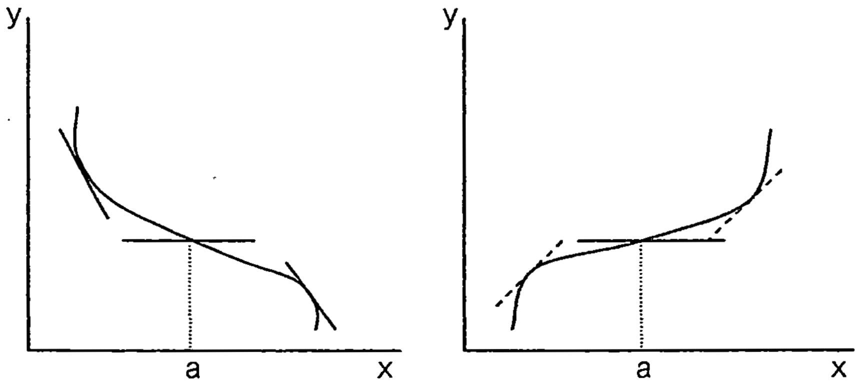
ถ้า $x = x_2$ $\qquad f'(x) = 0 \longrightarrow f''(x) < 0$

ถ้า $x = x_3$ $\qquad f'(x) < 0 \longrightarrow f''(x) < 0$

สำหรับภาพที่ 7.18 นั้นก็ใช้เหตุผลเดียวกัน ถ้าค่าความชันของเส้นสัมผัสเปลี่ยนไปในทางลดลง เมื่อ x เพิ่มค่าขึ้น หรือ $f''(x) < 0$ ฟังก์ชันดังกล่าวมีค่าสูงสุดที่ $f'(x) = 0$ ดังนั้นจากรูป สรุปได้ว่า ณ จุด x_1 เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น และ ณ จุด x_3 เป็นฟังก์ชันค่าลดลง และ ณ จุด x_2 $f'(x) = 0$ และ $f''(x) < 0$ ในทุกๆ จุด แสดงว่า x_2 เป็นค่าสูงสุด

การเปลี่ยนแปลงค่าความชันของเส้นสัมผัสดังกล่าว ถือว่าเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะแยกได้ว่าฟังก์ชันใดมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

บางกรณีที่จุดเดียวกันสามารถเป็นได้ทั้งค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดได้ในเวลาเดียวกัน คือค่าความชันของเส้นสัมผัสทางซ้ายมือและทางขวามือของจุด x = a ที่มี $f'(a) = 0$ นั้นมีเครื่องหมายเดียวกัน ดังภาพที่ 7.19



ภาพที่ 7.19 กรณีฟังก์ชันให้ทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุด

จากทั้งหมดข้างต้นนี้ พอสรุปเงื่อนไขของการหาค่าสูงสุด และต่ำสุดได้ดังแสดงไว้ใน ตารางที่ 7.1

ตารางที่ 7.1 สรุปเงื่อนไขของการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f'(x)$

เงื่อนไข	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	จุดวกกลับ
1. เงื่อนไขจำเป็น	$f'(a) = 0$	$f'(a) = 0$	$f'(a) = 0$
2. เงื่อนไขเพียงพอ หรือ	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	
พิจารณาการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของ $f'(x)$	- 0 + 	+ 0 - 	- 0 - + 0 +

การเรียกเงื่อนไขจำเป็น และเงื่อนไขเพียงพอนั้น บางครั้งใช้ชื่อว่า เงื่อนไขลำดับที่ 1 และ เงื่อนไขลำดับที่สอง ตามลำดับ ทั้งนี้เพราะอาศัย First Derivative และ Second Derivative เข้าช่วยในการพิจารณานั่นเอง

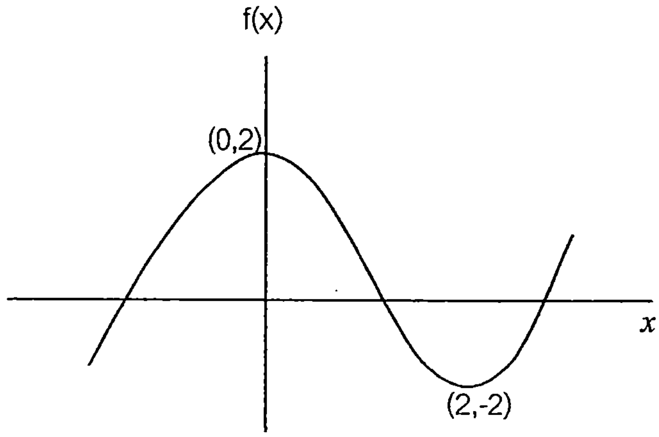
<u>ตัวอย่างที่ 15</u> จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ณ จุดที่ $x = 2$ และ $x = 0$ กราฟจะหงายหรือคว่ำ และจงหาช่วงที่กราฟจะหงายขึ้นหรือคว่ำลง

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์อันดับที่สอง: $f''(x) = 6x - 6$

ถ้า $x = 0$ เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับสองเป็นลบ $f''(x) = -6$

ถ้า $x = 2$ เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับสองเป็นบวก $f''(x) = 6$

จากเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับสอง สรุปได้ว่า กราฟจะมีลักษณะคว่ำลง ณ ที่ $x = 0$ และหงายขึ้นที่ $x = 2$ ดังภาพที่ 7.20



<u>ภาพที่ 7.20</u> กราฟแสดงโค้งคว่ำและโค้งหงาย

จะเห็นว่า กราฟจะคว่ำลง เมื่อ $f''(x) < 0$ และหงายขึ้นเมื่อ $f''(x) > 0$

ฉะนั้น จาก $f''(x) = 6x - 6$

$6x - 6 < 0$ เมื่อ $x < 1$

$6x - 6 > 0$ เมื่อ $x > 1$

จึงสรุปได้ว่า กราฟจะคว่ำลงเมื่อ $x < 1$ และหงายขึ้นเมื่อ $x > 1$ ดังภาพ

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> ฟังก์ชัน $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x$ ให้ (1) หาค่าวิกฤต (2) ทดสอบว่าค่าวิกฤติจะอยู่ที่ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (3) หาจุดเปลี่ยนเว้า (4) วาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u> 1. หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและให้เท่ากับ 0

$$y' = -3x^2 + 6x + 45 = 0$$

$$-3(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$-3(x + 3)(x - 5) = 0$$

$$x = -3, 5 \quad \text{ค่าวิกฤต}$$

2. หาอนุพันธ์อันดับที่สอง และประเมินค่าวิกฤต แล้วจึงทดสอบการเว้าเพื่อแยกระหว่างค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด

$$y'' = -6x + 6$$

$$y''(-3) = -6(-3) + 6 = 24 \quad > 0 \text{ เป็นค่าต่ำสุด}$$

$$y''(5) = -6(5) + 6 = -24 < 0 \text{ เป็นค่าสูงสุด}$$

3. หาจุดเปลี่ยนเว้าที่ $f''(x)$ และการเว้า

$$y'' = -6x + 6 = 0$$

$$x = 1$$

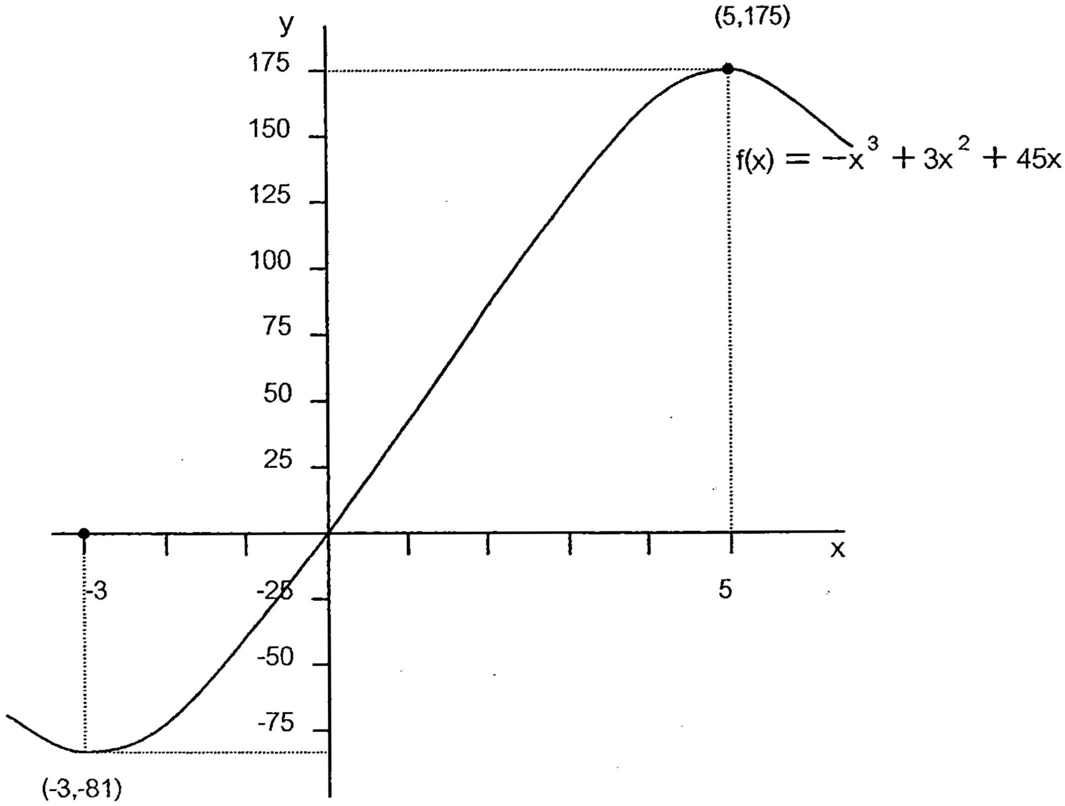
จากการที่ $f''(x) = 0$ ที่ $x = 1$ และ $f''(x)$ เปลี่ยนจากค่าต่ำสุดที่ $x = -3$ เป็นค่าสูงสุดที่ $x = 5$ แสดงว่า จุดเปลี่ยนเว้ามีอยู่จริงที่ $x = 1$

1.) แทนค่า x เพื่อหาค่า y

$$f(-3) = -(-3)^3 + 3(-3)^2 + 45(-3) = -81$$

$$f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 + 45(1) = 47$$

$$f(5) = -(5)^3 + 3(5)^2 + 45(5) = 175$$



ภาพที่ 7.21 กราฟแสดงจุดสูงสุด จุดต่ำสุดและจุดเปลี่ยนเว้า

6. การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุด-ค่าต่ำสุดในทางเศรษฐศาสตร์

การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด ได้นำมาประยุกต์ใช้ในวิชาเศรษฐศาสตร์เป็นอย่างมาก ดังต่อไปนี้

Optimization (Maximization และ Minimization)

- การแสวงหากำไรสูงสุด
- การแสวงหารายรับสูงสุด
- การแสวงหาต้นทุนต่ำสุด

6.1 การแสวงหากำไรสูงสุด

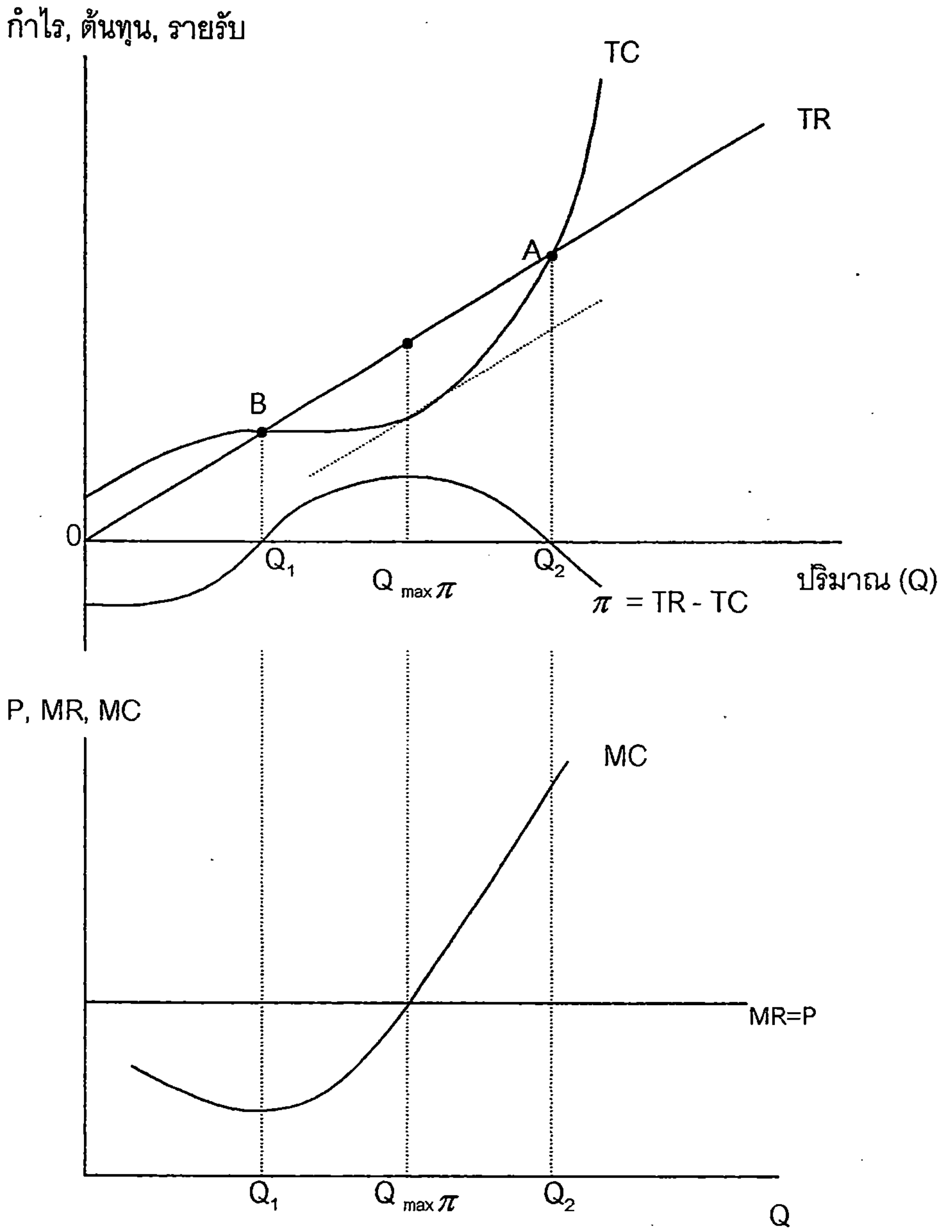
ฟังก์ชันกำไร $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, $Q =$ จำนวนผลผลิต

เงื่อนไขจำเป็น $\dfrac{d\pi}{dQ} = 0$

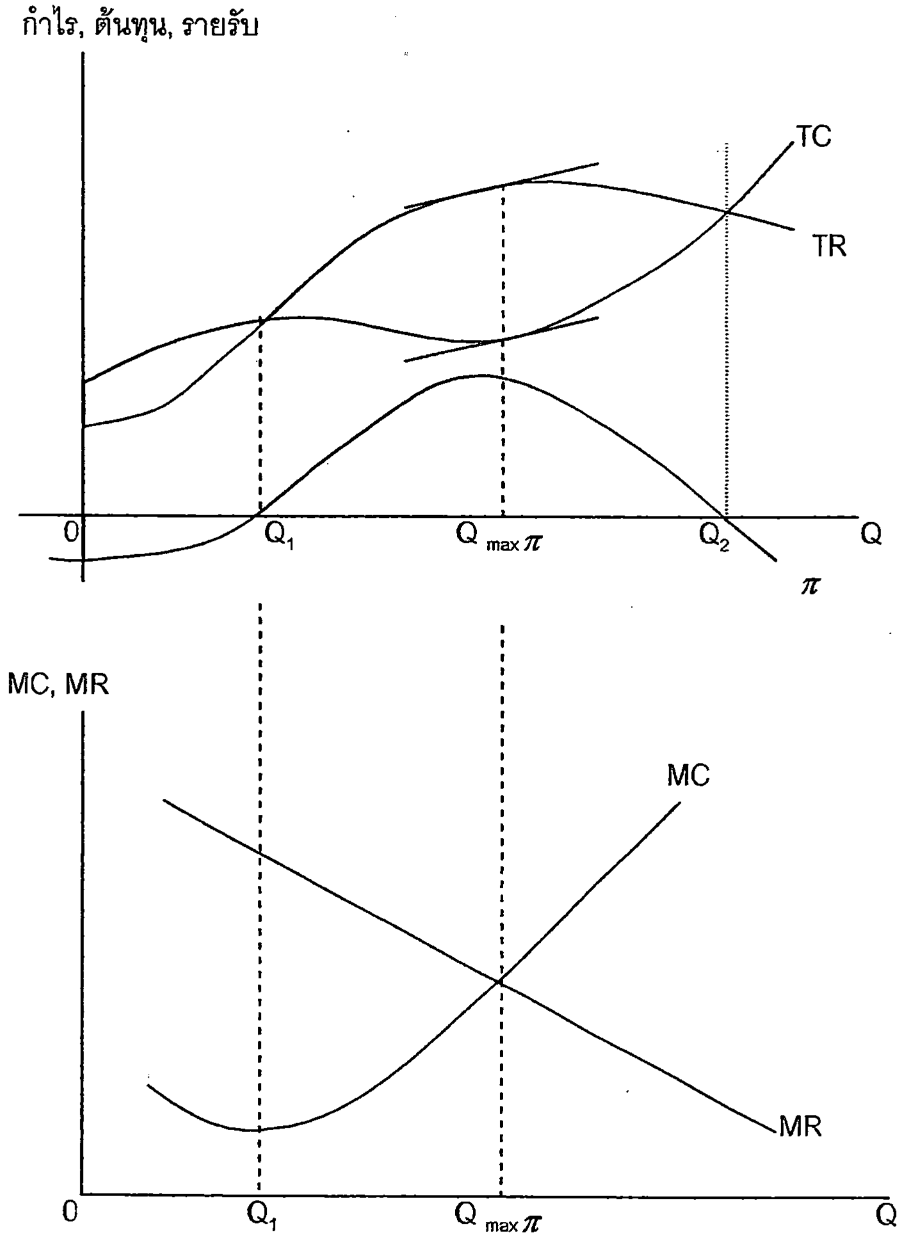
$$TR'(Q) - TC'(Q) = 0$$

$$MR = MC$$

เงื่อนไขเพียงพอ $\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$ (ต้องการกำไรสูงสุด)



ภาพที่ 7.22 กำไรสูงสุด กรณี: ตลาดแข่งขันสมบูรณ์



รูปที่ 7.23 กำไรสูงสุด กรณี: ตลาดแข่งขันไม่สมบูรณ์

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> กำหนดให้ $TR = 3300Q - 26Q^2$

$$TC = Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750$$

หากำไรสูงสุดของธุรกิจนี้

<u>วิธีทำ</u> สร้างฟังก์ชันกำไร

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = 3300Q - 26Q^2 - (Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750)$$

$$\pi = -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แล้วให้เท่ากับ 0 เพื่อหาจุดวิกฤต

$$\pi' = -3Q^2 - 48Q + 2880 = 0$$

$$= -3(Q^2 + 16Q - 960) = 0$$

$$= -3(Q - 24)(Q + 40) = 0$$

$Q = 24, -40$ จุดวิกฤต

หาอนุพันธ์อันดับสองและประเมินค่าจุดวิกฤตที่เป็นบวกเท่านั้น แล้วตรวจเครื่องหมายสำหรับการเว้า เพื่อให้แน่ใจว่าได้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

$$\pi'' = -6Q - 48$$

$\pi''(24) = -6(24) - 48 = -192 \quad < 0$ เป็นจุดสูงสุด

เพราะฉะนั้น กำไรสูงสุดที่ $Q = 24$ โดย

$$\pi = -(24)^3 - 24(24)^2 + 2880(24) - 750$$

$= 40,722$ บาท

<u>6.2 ความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนรวม (Total Cost) ต้นทุนเฉลี่ย (Average Cost) และต้นทุนหน่วยสุดท้าย (Marginal Cost)</u>

กำหนดให้ฟังก์ชันต้นทุนรวม $TC = C(Q)$

ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย $AC = \frac{TC}{Q}, \quad Q > 0$

$$= \frac{C(Q)}{Q}$$

$$\frac{dAC}{dQ} = \frac{d\left[C(Q)/Q\right]}{dQ}$$

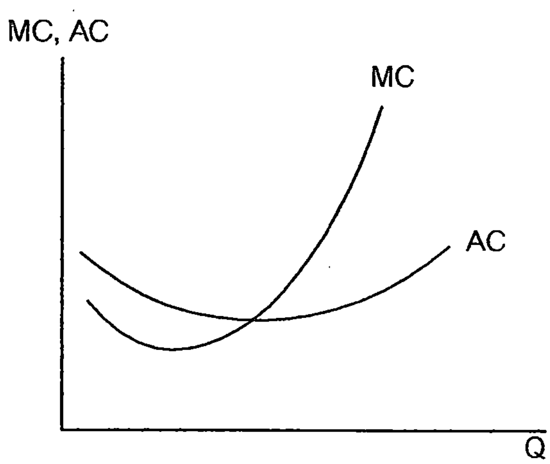
$$0 = \frac{QC'(Q) - C(Q)}{Q^2}$$

$\frac{dAC}{dQ} > 0$ ถ้า $C'(Q) > \left[\frac{C(Q)}{Q}\right]$ นั่นคือ MC > AC

$\frac{dAC}{dQ} < 0$ ถ้า $C'(Q) < \left[\frac{C(Q)}{Q}\right]$ นั่นคือ MC < AC

$\frac{dAC}{dQ} = 0$ ถ้า $C'(Q) = \left[\frac{C(Q)}{Q}\right]$ นั่นคือ MC = AC

ให้ความหมายทางเศรษฐศาสตร์ได้ว่า ความชันของเส้น AC จะเป็นบวก ศูนย์ หรือลบ เมื่อ MC อยู่สูงกว่า ตัดกับ หรือ ต่ำกว่า AC ตามลำดับ พิจารณาภาพที่ 7.24



<u>รูปที่ 7.24</u> เปรียบเทียบลักษณะของเส้น AC และ MC

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> กำหนด $TC = Q^3 - 24Q^2 + 600Q$ สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต้นทุนรวม ต้นทุนเฉลี่ย และฟังก์ชันต้นทุนหน่วยสุดท้าย ดังต่อไปนี้

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของ TC

$$TC' = MC = 3Q^2 - 48Q + 600$$

$$TC'' = 6Q - 48 = 0 \qquad \text{ดังนั้น } Q = 8$$

$$TC(8) = (8)^3 - 24(8)^2 + 600(8) = 3{,}776$$

จะเห็นได้ว่า ณ $Q < 8$, $TC'' < 0$

ณ $Q > 8$, $TC'' > 0$ ดังนั้นจุดวกกลับ คือ (8, 3776)

หา $$AC = \frac{TC}{Q} = Q^2 - 24Q + 600$$

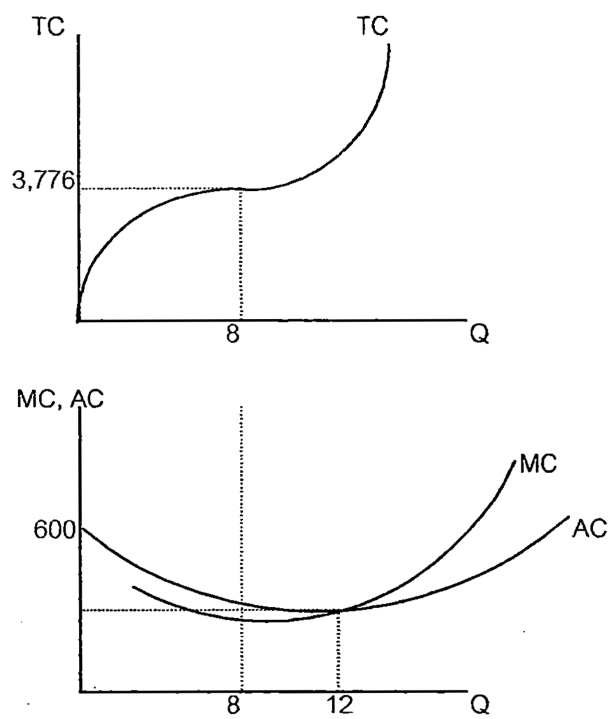
$AC' = 2Q - 24 = 0$ ได้ $Q = 12$ จุดวิกฤต

$AC'' = 2 > 0$ เป็นค่าต่ำสุด

หา $$MC = 3Q^2 - 48Q + 600$$

$MC' = 6Q - 48 = 0$ ได้ $Q = 8$ จุดวิกฤต

$MC'' = 6 > 0$ ค่าต่ำสุด



<u>ภาพที่ 7.25</u> ความสัมพันธ์ระหว่างเส้น AC, MC และ TC

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหา (1) ฟังก์ชันหน่วยสุดท้าย และ (2) ฟังก์ชันเฉลี่ย และทำการประเมินค่าฟังก์ชัน ณ $Q = 2$ และ $Q = 4$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $TC = Q^2 + 9Q + 16$ 1.2 $TR = 24Q^2 - Q^2$

1.3 $\pi = -Q^2 + 75Q - 12$

2. จงหาค่าสูงสุด โดย (1) ค่าวิกฤต (2) ทดสอบโดยใช้เงื่อนไขอนุพันธ์อันดับที่สอง และ (3) คำนวณหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $TR = 96Q - 2Q^2$

2.2 $\pi = -Q^2 + 25Q - 12$

2.3 $\pi = -\frac{1}{3}Q^3 - 7.5Q^2 + 450Q - 200$

2.4 $\pi = -2Q^3 - 15Q^2 + 3000Q - 1200$

3. จากฟังก์ชันผลผลิตรวม (Total Product: TP)

$$TP = 562.5L^2 - 15L^3$$

จงใช้อนุพันธ์เพื่อหาจุดต่างๆ แล้วนำไปวาดเส้น

(1) ผลผลิตมวลรวม (TP) (2) ผลผลิตเฉลี่ย (AP)

(3) ผลผลิตหน่วยสุดท้าย (MP) และ (4) อธิบายความสัมพันธ์ของเส้นทั้งสาม

4. จงใช้วิธี MR = MC ในการหา (1) กำไรสูงสุด (2) ทดสอบด้วยเงื่อนไขอนุพันธ์อันดับสอง เมื่อกำหนดให้

$TR = 800Q - 7Q^2$ $TC = 2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150$

$TR = 500Q - 11Q^2$ $TC = 3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175$

5. จงฟังก์ชันการบริโภคต่อไปนี้ จงหาค่าความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้าย (MPC)

7.1 $C = bY + C_0$ 7.2 $C = 0.85Y + 1250$

เอกสารอ้างอิง

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** 3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.

Blume, L. and Simon C. (1945). *Mathematics for Economists.* New York : Norton& Company.

นราทิพย์ ชุติวงศ์. (2542). ***ทฤษฎีเศรษฐศาสตร์จุลภาค.*** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

____________. (2544). ***เศรษฐศาสตร์การจัดการ.*** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***โปรแกรมเชิงเส้นตรง.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

สมนึก ทับพันธุ์. (2550). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 8
อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร และการประยุกต์

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองและสามารถนำมาวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ
3. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจความแตกต่างของอนุพันธ์และผลต่างอนุพันธ์
4. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์
5. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจแนวคิดในการหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้
6. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้

เนื้อหา

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร
2. การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง
3. การนำอนุพันธ์ย่อยมาใช้วิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ
4. อนุพันธ์ (Derivatives) และผลต่างอนุพันธ์ (Differential)
5. การประยุกต์ใช้ในเรื่องความยืดหยุ่นย่อย (Partial Elasticities)
6. การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร
7. การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุดและต่ำสุดทางเศรษฐศาสตร์
8. การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 2 ตัวแปร
9. การหาค่าสูงสุด-ค่าต่ำสุดโดยมีข้อจำกัด
10. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

การศึกษาในส่วนของบทที่ 7 นั้นเป็นการศึกษาถึงฟังก์ชันอนุพันธ์ที่มีเพียง 1 ตัวแปร กระบวนการศึกษาจึงไม่ซับซ้อนมากนักแต่ขณะเดียวกันก็มีข้อจำกัดในการนำไปประยุกต์ทางด้านเศรษฐศาสตร์ ทั้งนี้เป็นที่ทราบกันดีว่า แนวคิดทางด้านเศรษฐศาสตร์นั้นมีตัวแปรทางด้านเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวข้องมากมาย ดังนั้นเพื่อประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางมากยิ่งขึ้น ในบทที่ 8 นี้ จึงจะกล่าวถึงฟังก์ชันอนุพันธ์ที่มีตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไปหรืออนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

1. อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปร

คือการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ โดยที่ตัวแปรหนึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรอีกหลายๆ ตัว เนื่องจากกิจกรรมทางเศรษฐกิจหลายชนิดมักมีความเกี่ยวข้องกับปัจจัยหรือตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวแปร โดยจะได้มีการนำบทที่ 7 มาเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษา

ทั้งนี้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรสำหรับตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่ง สามารถทำได้โดยกำหนดให้ตัวแปรอิสระตัวอื่นๆ เป็นตัวแปรคงที่ อาทิ กำหนดฟังก์ชัน z ดังนี้

$$z = f(x, y)$$

หมายถึง ค่า z (ตัวแปรตาม) มีความสัมพันธ์หรือขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรอิสระ x และ y เมื่อเราต้องการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง z และ x ก็จะกำหนดให้ y เสมือนค่าคงที่ ดังนั้นเมื่อให้ y คงที่ เราจะได้อนุพันธ์ระหว่าง z และ x และแทนด้วยสัญลักษณ์อย่างใดอย่างหนึ่งดังต่อไปนี้

$\frac{\partial z}{\partial x}$ หรือ $\frac{\partial f}{\partial x}$ หรือ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ หรือ $f_x(x, y)$

f_x หรือ z_x หรือ f_1 (ถ้าให้ x เป็นตัวแปรอิสระตัวที่ 1)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราต้องการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง z และ y ก็จะกำหนดให้ x เสมือนค่าคงที่ ดังนั้นเมื่อให้ x คงที่ เราจะได้อนุพันธ์ระหว่าง z และ y และแทนด้วยสัญลักษณ์อย่างใดอย่างหนึ่งดังต่อไปนี้

$\frac{\partial z}{\partial y}$ หรือ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ หรือ $f_y(x, y)$

f_y หรือ z_y หรือ f_2 (ถ้าให้ y เป็นตัวแปรอิสระตัวที่ 2)

การหาอนุพันธ์ในลักษณะนี้ เรียกว่า การหาอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) รูปสมการทั่วไปของการหาอนุพันธ์ของ z เทียบกับ x โดย y คงที่ ซึ่งในทางปฏิบัติสามารถจะหาอนุพันธ์ย่อยได้หลายอันดับ โดยสูตรการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งจะเป็นดังนี้

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

และสำหรับการหาอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ y โดย x คงที่ จะเป็นดังนี้

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

ในทางเศรษฐศาสตร์ จะพบว่าฟังก์ชันต่างๆ มักจะมีตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปรเสมอ ไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันการผลิต ซึ่งประกอบด้วยปัจจัยแรงงานและปัจจัยทุน หรือฟังก์ชันการบริโภครวมของประเทศ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรรายได้ประชาชาติ ตัวแปรภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา เป็นต้น ซึ่งทำให้ในการวัดผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งต้องอาศัยอนุพันธ์ย่อย

โดยเทคนิค อนุพันธ์ย่อยจะแสดงผลของการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรตาม อันเนื่องมาจากตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่ง ในขณะที่ สมมติให้ตัวแปรอิสระอื่นคงที่ การหาอนุพันธ์ย่อยนี้จึงมีบทบาทสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาเชิงเปรียบเทียบ (Comparative Static Analysis) ซึ่งเป็นการศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรอิสระ ณ ระดับดุลยภาพ โดยสมมติให้ตัวแปรอิสระอื่นคงที่

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $Z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$ จงหา $\frac{\partial Z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial Z}{\partial y}$

วิธีทำ

$$Z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial(2x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(3y)x}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial x}$$

เมื่อกำหนดให้ y เป็นค่าคงที่

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4x + 3y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(3x)y}{\partial y} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial y}$$

เมื่อกำหนดให้ x เป็นค่าคงที่

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 3x - 12y$$

ตัวอย่างที่ 2 ฟังก์ชันการผลิต $Q = 36KL - 2K^2 - 3L^2$ จงหาผลผลิตหน่วยสุดท้ายของปัจจัยทุน (K) และผลผลิตหน่วยสุดท้ายของปัจจัยแรงงาน (L)

วิธีทำ ผลผลิตหน่วยสุดท้ายของปัจจัยทุน (Marginal physical product of capital: MP_K) คือ การเปลี่ยนแปลงในปริมาณผลผลิตอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงในปัจจัยทุน 1 หน่วย โดยให้ปัจจัยอื่นคงที่ เขียนในรูปคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

$$= 36L - 4K$$

ผลผลิตหน่วยสุดท้ายของปัจจัยแรงงาน (Marginal Physical Product of Labor: MP_L) คือ การเปลี่ยนแปลงในปริมาณผลผลิตอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงในปัจจัยแรงงาน 1 หน่วย โดยให้ปัจจัยอื่นคงที่ เขียนในรูปคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

$$= 36K - 6L$$

2. การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง

อนุพันธ์ย่อยอันดับสองชี้ให้เห็นว่า ฟังก์ชันเดิมมีรูปแบบเป็นอนุพันธ์ หรือฟังก์ชันดังกล่าวได้มีการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งไปครั้งหนึ่งแล้ว การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองก็ทำโดยนำมาหาอนุพันธ์ย่อยอีกครั้งหนึ่งหรือที่เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองนั่นเอง ทั้งนี้อาจเป็นการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเมื่อเทียบกับตัวแปรอิสระตัวเดิมหรืออาจเป็นการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเมื่อเทียบกับตัวแปรอิสระอื่น 1 ตัว โดยสมมติให้ตัวแปรอิสระที่เหลือคงที่หมด ซึ่งทั้งสองกรณีนี้จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

ฟังก์ชันการผลิต $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองได้ ดังนี้

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเมื่อเทียบกับ x_1 $\quad = \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = f_{x_1}$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเมื่อเทียบกับ x_1 อีกครั้ง $\quad = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} = f_{x_1 x_1}$

ขณะที่ หากอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองนั้น เทียบกับตัวแปรอิสระอื่น อาทิ

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเมื่อเทียบกับ $x_2 = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{x_1 x_2}$

ในการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเทียบกับอื่นนั้น เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยแบบไขว้ (Cross or Mixed Partial Derivative) เป็นค่าอนุพันธ์ที่แสดงถึงการที่ฟังก์ชันเดิมถูกหาอนุพันธ์ย่อยในส่วนที่เกี่ยวกับตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งในครั้งแรก แล้วนำไปหาอนุพันธ์ย่อยของผลลัพธ์ที่ได้ในส่วนที่เกี่ยวกับตัวแปรอิสระอีกตัวหนึ่งในครั้งที่สองต่อไป

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเมื่อเทียบกับ $x_2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = fx_2$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเมื่อเทียบกับ $x_2 = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} = fx_2x_2$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเมื่อเทียบกับ $x_1 = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_1} = fx_2x_1$

<u>ข้อสังเกต</u> ค่าที่คำนวณได้จาก fx_1x_2 และ fx_2x_1 ***จะมีค่าเท่ากันเสมอ*** ถ้าฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องในทุกๆ จุดของ (x_1, x_2) ข้อสรุปนี้รู้จักกันในชื่อที่ว่า "**ทฤษฎีของยัง**" (Young's Theorem)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองและอนุพันธ์ย่อยแบบไขว้สำหรับฟังก์ชัน $Z = 7x^3 + 9xy + 2y^5$

<u>วิธีทำ</u> อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่ง $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = Z_x = 21x^2 + 9y$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Z_y = 9x + 10y^4$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = Z_{xx} = 42x$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = Z_{yy} = 40y^3$$

อนุพันธ์ย่อยแบบไขว้ $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = Z_{xy} = 9$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = Z_{yx} = 9$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ฟังก์ชันความพอใจในการบริโภคสินค้า 2 ชนิด เป็นดังนี้ คือ $U = Q_1^{\,2} Q_2 + 3Q_1 Q_2^{\,2}$ โดยที่ U คือระดับความพอใจในการบริโภค Q_1 และ Q_2 คือ จำนวนสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 ตามลำดับที่บริโภค จงหาฟังก์ชันการบริโภคหน่วยสุดท้ายของสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 (Marginal Utility: MU_1, MU_2)

วิธีทำ จาก $$U = Q_1^{\,2} Q_2 + 3Q_1 Q_2^{\,2}$$

จะได้ $$MU_1 = 2Q_2 Q_1 + 3Q_2^2$$

$$MU_2 = Q_1^2 + 6Q_1 Q_2$$

3. การนำอนุพันธ์ย่อยมาใช้วิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ

การวิเคราะห์เปรียบเทียบที่เรียกว่า การวิเคราะห์เปรียบเทียบในเชิงสถิตย์ (Comparative-Static Analysis) นี้ เป็นการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงจุดดุลยภาพจากจุดหนึ่งไปอีกจุดดุลยภาพหนึ่ง การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวเกิดขึ้นเพราะตัวแปรอื่นๆ ได้เปลี่ยนแปลงไป เช่น ตัวแปรภายนอก (Exogenous Variable) หรือตัวแปรพารามิเตอร์ (Parameters)

3.1 แบบจำลองตลาดสินค้า (Market Model) ประกอบด้วยสมการ 2 สมการคือ

สมการอุปสงค์ $Q_d = a - bP \quad (a, b > 0)$

สมการอุปทาน $Q_s = -c + dP \quad (c, d > 0)$

โดยที่ Q_d = ปริมาณอุปสงค์

Q_s = ปริมาณอุปทาน

P = ราคาสินค้า

พารามิเตอร์ คือ a , b , c และ d

สภาวะดุลยภาพ $$Q_d = Q_s$$

$$a - bP = -c + dP$$

ราคาดุลยภาพ $$\boxed{\overline{P} = \frac{a+c}{b+d}}$$

ปริมาณดุลยภาพ $$\boxed{\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}}$$

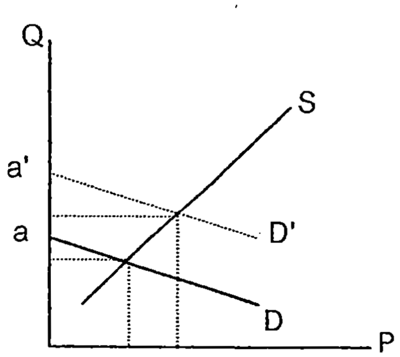
จะเห็นได้ว่า ทั้งราคาดุลยภาพ (Equilibrium Price) และปริมาณดุลยภาพ (Equilibrium Quantity) จะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ ดังนั้นถ้าพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไป ย่อมทำให้ ราคาและปริมาณที่จุดดุลยภาพเปลี่ยนแปลงไปจากจุดเดิม

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงดุลยภาพ เมื่อค่าของพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไป

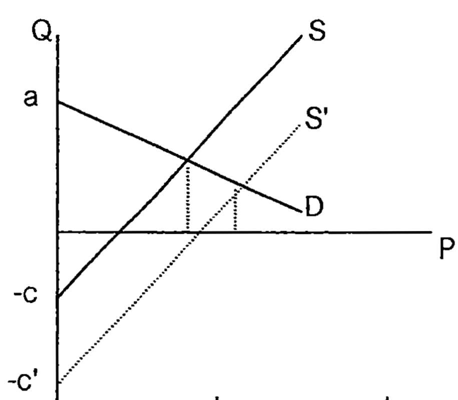
$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial a} = \frac{1}{(b+d)} > 0 \qquad \frac{\partial \overline{P}}{\partial c} = \frac{1}{(b+d)} > 0$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial b} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0 \qquad \frac{\partial \overline{P}}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0$$

แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ที่มีต่อดุลยภาพ



ภาพที่ 8.1.1 การเปลี่ยนแปลงของ a



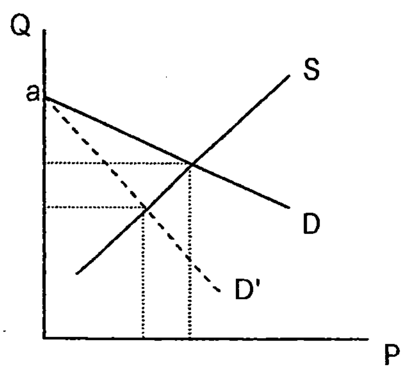
ภาพที่ 8.1.2 การเปลี่ยนแปลงของ c

ภาพที่ 8.1 การเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ a และ c

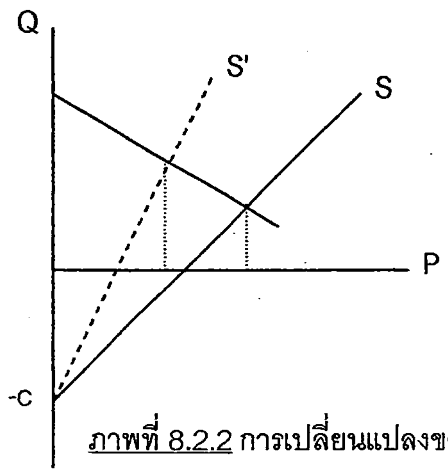
การเพิ่มจุดในแนวตั้ง (Vertical Intercept) เช่น การเพิ่มขึ้นใน a ทำให้เส้นอุปสงค์ Shift จาก D เป็น D' (ค่า b ไม่เปลี่ยนแปลง) จะทำให้ราคาดุลยภาพเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial a} > 0$ (ดังภาพที่ 8.1.1)

การเพิ่มขึ้นใน c จะทำให้เส้นอุปทาน Shift จาก S เป็น S' ราคาดุลยภาพเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial c} > 0$ (ดังภาพที่ 8.1.2)

ถ้า b เพิ่มค่าขึ้น จะทำให้เส้นอุปสงค์ชันมากขึ้น ราคาดุลยภาพจะลดลง ดังภาพที่ 8.2.1 และถ้า d เพิ่มค่าขึ้น จะทำให้เส้นอุปทานชันมากขึ้น ราคาดุลยภาพจะลดลง ดังภาพที่ 8.2.2 ซึ่งสอดคล้องกับ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial b}$ และ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial d} < 0$



<u>ภาพที่ 8.2.1</u> การเปลี่ยนแปลงของ b



<u>ภาพที่ 8.2.2</u> การเปลี่ยนแปลงของ d

<u>ภาพที่ 8.2</u> การเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ b และ d

<u>3.2 แบบจำลองรายได้ประชาชาติ (National Income Model)</u>

การหาอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) สามารถใช้หาผลการทำงานของตัวทวีต่างๆ ของแบบจำลองรายได้ประชาชาติ เช่น แบบจำลองรายได้ประชาชาติในระบบเศรษฐกิจแบบปิด ไม่มีภาครัฐบาล กรณีที่การลงทุนขึ้นกับรายได้ และภาษีขึ้นกับรายได้

รายได้ประชาชาติดุลยภาพดุลยภาพ เกิดขึ้น ณ ระดับที่

$$Y = C + I \tag{1}$$

กำหนดให้

Y คือ รายได้ประชาชาติ

C คือ ค่าใช้จ่ายในการอุปโภคบริโภคมวลรวม โดยระดับค่าใช้จ่ายในการลงทุนขึ้นอยู่กับรายได้ นั่นคือ $C = C_a + bY$

C_a คือค่าใช้จ่ายในการอุปโภคบริโภคที่เป็นอิสระจากรายได้ (Autonomous Variables หรือ Exogenous Variables) (โดยที่ $C_a > 0$)

b คือค่าความโน้มเอียงในการอุปโภคบริโภค (Marginal Propensity to Consume: MPC) (โดยที่ $0 < b > 1$)

I คือ ค่าใช้จ่ายในการลงทุน โดยระดับของค่าใช้จ่ายในการลงทุนขึ้นอยู่กับรายได้ นั่นคือ $I = I_a + iY$

I_a คือ ค่าใช้จ่ายในการลงทุนที่เป็นอิสระจากรายได้ ($I_a > 0$)

i คือ ค่าความโน้มเอียงในการลงทุน (Marginal Propensity to Investment: MPI)

แทนฟังก์ชันการลงทุนลงในสมการรายได้ประชาชาติดุลยภาพ สมการที่ (1)

$$Y = (C_a + bY) + (I_a + iY) \qquad (2)$$

$$Y = C_a + I_a + bY + iY \qquad (3)$$

$$Y = C_a + I_a + (b + i)Y$$

(4)

$$Y - (b + i)Y = C_a + I_a \qquad (5)$$

$$(1 - (b + i))Y = C_a + I_a \qquad (6)$$

ดังนั้น ระดับรายได้ประชาชาติดุลยภาพ (Equilibrium Income: Y_E)

$$Y_E = \frac{1}{(1 - (b + i))} \times [C_a + I_a] \qquad (7)$$

หรือ

$$Y_E = \frac{1}{(1 - b - i)} \times [C_a + I_a] \qquad (8)$$

สมการที่ (7) หรือสมการที่ (8) เรียกว่า สมการลดรูป (Reduce Form) แสดงรูปสมการอย่างง่ายในการคำนวณหาค่ารายได้ประชาชาติดุลยภาพ โดยในที่นี้ สามารถหาอนุพันธ์ย่อยของรายได้ (Y) ในส่วนที่เกี่ยวกับตัวแปรอิสระ หรือพารามิเตอร์ใด ก็จะได้หรือตัวทวี (Multiplier) สำหรับตัวแปรหรือพารามิเตอร์นั้น ได้แก่

(1) (Consumption Multiplier) หมายถึง ถ้า C_a เปลี่ยนแปลงไป โดยสิ่งอื่นคงที่ รายได้ประชาชาติจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร หรือก็คือ การหาอนุพันธ์ย่อยของ Y เมื่อเทียบกับ C_a

$$\frac{\partial Y}{\partial C_a} = \frac{1}{1-b-i}$$

(2) ตัวทวีการลงทุน (Investment multiplier) หมายถึง ถ้า I_a เปลี่ยนแปลงไป โดยสิ่งอื่นคงที่ รายได้ประชาชาติจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ก็คือการหาอนุพันธ์ย่อยของ Y เมื่อเทียบกับ I_a

$$\frac{\partial Y}{\partial I_a} = \frac{1}{1-b-i}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> สมมติให้ในระบบเศรษฐกิจแบบปิดไม่มีภาครัฐบาล มีฟังก์ชันต่างๆ ดังนี้

$C = 250 + 0.2Y$, $I = 150 + 0.3Y$ และ $Y = C + I$

จงหา

(1) ระดับรายได้ดุลยภาพ (หน่วยล้านบาท)

(2) ตัวทวีการลงทุน

<u>วิธีทำ</u>

(1) หาระดับรายได้ดุลยภาพ

รายได้ดุลยภาพ $Y = C + I$

จากสมการลดรูป $Y_E = \frac{1}{(1-b-i)} \times [C_a + I_a]$

จากโจทย์ C_0 = 250, I_0 = 150, b =0.2 และ i = 0.3

ดังนั้น

$$Y_E = \frac{1}{(1-0.2-0.3)} \times [250+150]$$

$$= \frac{1}{0.5} \times 400$$

= 800 ล้านบาท

(2) หาตัวทวีการลงทุน

จาก $\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1-b-i}$

ดังนั้น $\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1-0.2-0.3} = \frac{1}{0.5} = 2$

ตัวทวีเท่ากับ 2 หมายความว่า หากค่าใช้จ่ายในการลงทุนเปลี่ยนแปลงไปร้อยละ 1 จะทำให้ระดับรายได้เปลี่ยนแปลงไปร้อยละ 2

4. อนุพันธ์ (Derivatives) และผลต่างอนุพันธ์ (Differential)

อนุพันธ์ คือการศึกษาลักษณะอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ อาทิ $\frac{dy}{dx}$ จะหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ณ จุดใดจุดหนึ่งบนฟังก์ชัน $y = f(x)$ ต่อการเปลี่ยนแปลงที่น้อยมากของ x

ขณะที่ ผลต่างอนุพันธ์หรือดิฟเฟอร์เรนเชียล คือการศึกษาถึงขนาดการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงที่น้อยมากของอีกตัวแปรอิสระหนึ่ง อาทิ เราต้องการทราบว่า ค่าของ y จะเปลี่ยนแปลงไปเป็นปริมาณเท่าใด เมื่อ x เปลี่ยนค่าไปน้อยมาก

กล่าวได้อีกลักษณะหนึ่งคือ อนุพันธ์คือการพิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เป็นจำนวนหรือพจน์เดียวกัน แต่ดิฟเฟอร์เรนเชียลคือการพิจารณาค่า dy และ dx เสมือนเป็นจำนวนหรือตัวเลขคนละตัวกัน

อาทิ กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยให้ y แทนระยะทางเป็นกิโลเมตรที่รถวิ่งได้ และให้ x เป็นจำนวนชั่วโมงที่ขับรถ

ดังนั้น $f'(x)$ จึงหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางที่ได้ต่อการเปลี่ยนแปลงของเวลาที่ใช้ไป 1 หน่วย (นั่นคืออัตราความเร็วต่อชั่วโมง) ถ้าเพิ่มเวลาการขับรถไปอีก dx ชั่วโมง จะทำให้ได้ระยะทางเพิ่มขึ้นเท่ากับ dy กิโลเมตร ซึ่งจะเท่ากับอัตราความเร็วต่อชั่วโมงคูณด้วยจำนวนชั่วโมงที่ขับเพิ่ม นั่นคือ $dy = f'(x).\,dx$ เป็นรูปแบบของดิฟเฟอร์เรนเชียล

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $Y = X^2 + 3$ ดิฟเฟอร์เรนเชียลของ Y จะเท่ากับ

วิธีทำ

$$dY = f'(X).\,dX$$

$$dY = 2x.dX$$

4.1 ดิฟเฟอร์เรนเชียลรวม (Total Differential)

ถ้า y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว เช่น

$$y = f(x, w)$$

ดิฟเฟอร์เรนเชียลรวม หมายถึง การเปลี่ยนแปลงค่าของ y ทั้งหมดที่เกิดขึ้น ณ จุดใดจุดหนึ่ง เมื่อ x และ/หรือ w เปลี่ยนแปลงค่าไปน้อยมาก

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).\,dx + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right).\,dw$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> กำหนดให้ $Y = 3x^2w + \dfrac{4}{w^4}$

<u>วิธีทำ</u>

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).dx + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right).dw$$

$$dy = 6wx.dx + \left(3x^2 - \frac{16}{w^5}\right).dw$$

<u>4.2 อนุพันธ์รวมของตัวแปรหลายตัวแปร (Total Derivatives)</u>

1) อนุพันธ์รวมของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัวแปร

จาก Z = f(x, y) และ y = g(x) จะเห็นว่า ตัวแปร x และ y มีความเกี่ยวข้องกัน การเปลี่ยนแปลงใน x จะมีผลต่อ Z โดยตรง โดยผ่านฟังก์ชัน f และมีผลทางอ้อมโดยผ่านฟังก์ชัน g ดังภาพที่ 8.3

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

<u>ภาพที่ 8.3</u> กระบวนการส่งผ่านของอนุพันธ์รวม

เราสามารถหาอนุพันธ์รวมของตัวแปรอิสระ 2 ตัวแปร ได้โดยวัดผลกระทบทางตรงของ x ที่มีต่อ Z หรือ $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ บวกผลกระทบทางอ้อมของ x ต่อ Z ผ่านทาง y หรือ $\left[\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)\times\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right]$ ทำให้รูปแบบสมการของอนุพันธ์รวมของตัวแปรอิสระ 2 ตัวแปร เป็นดังนี้

$$\frac{dZ}{dx} = Z_x + Z_y.\frac{dy}{dx}$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ $Z = f(x, y) = 6x^3 + 7y$ โดยที่ $y = g(x) = 4x^2 + 3x + 8$ จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดเมื่อเทียบกับ x

<u>วิธีทำ</u> $$\frac{dZ}{dx} = Z_x + Z_y.\frac{dy}{dx}$$

$$Z_x = 18x^2 \qquad Z_y = 7$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x+3$$

$$\frac{dZ}{dx} = 18x^2 + 7(8x+3) = 18x^2 + 56x + 21$$

5. การประยุกต์ใช้ในเรื่องความยืดหยุ่นย่อย (Partial Elasticities)

<u>5.1 ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้และความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์</u>

ในกรณีที่ฟังก์ชันอุปสงค์มีหลายตัวแปร จะสามารถหาค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ได้ทั้งที่เป็นความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (ε_i) และความยืดหยุ่นของอุปสงค์ไขว้(ε_c) นั่นคือ ถ้ากำหนดให้

$$Q_x = a - bP_x + cP_y + dI$$

โดยที่ I = รายได้ของผู้บริโภค

P_x = ราคาสินค้า x

P_y = ราคาสินค้า y ซึ่งใช้ทดแทนสินค้า x ได้

Q_x = ปริมาณความต้องการจะซื้อสินค้า x

ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (ε_i) คือร้อยละการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์สินค้าที่สืบเนื่องมาการเปลี่ยนแปลงของรายได้ไปร้อยละ 1 โดยสมมติให้ตัวแปรอื่นๆ คงที่ ฉะนั้น อาจคำนวณหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ ด้วยสูตรต่อไปนี้

$$\varepsilon_i = \frac{\partial Q_x}{Q_x} \div \frac{\partial I}{I} = \frac{\partial Q_x}{\partial I} \times \left[\frac{I}{Q_x}\right]$$

นั่นคือเรากำลังสนใจว่า ปริมาณซื้อมีการไหวตัวต่อการเปลี่ยนแปลงของรายได้ในขนาดและทิศทางใด ดังนั้นเราจะปฏิบัติต่อตัวแปรอื่นๆ (P_x, P_y) เปรียบเสมือนค่าคงที่

ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ไขว้ และสูตรคำนวณหาความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์ (ε_c) คือ ร้อยละการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์สินค้าชนิดหนึ่ง ที่สืบเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงในราคาสินค้าอีกชนิดหนึ่งไปร้อยละ 1 โดยที่ตัวแปรอื่นๆ คงที่

$$\varepsilon_c = \frac{\partial Q_x}{Q_x} \div \frac{\partial P_y}{P_y} = \frac{\partial Q_x}{\partial P_y} \times \left[\frac{P_y}{Qx}\right]$$

นั่นคือเรากำลังสนใจว่า ปริมาณซื้อมีการไหวตัวต่อการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าอื่นที่เกี่ยวข้อง(สินค้า y) ในขนาดและทิศทางใด ดังนั้นเราจะปฏิบัติต่อตัวแปรอื่นๆ (P_x, I) ให้เปรียบเสมือนค่าคงที่ ค่าความยืดหยุ่นเหล่านี้ อาจเรียกชื่อรวมกันเป็นความยืดหยุ่นย่อย (Partial Elasticities)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ถ้าฟังก์ชันอุปสงค์สำหรับเนื้อโคขุนเป็น $Q_b = 4850 - 5P_b + 1.5P_p + 0.1I$ โดยที่ I คือรายได้ซึ่งเท่ากับ 10,000 บาท ราคาเนื้อโคขุน (P_b) เท่ากับ 200 บาทต่อกิโลกรัม ราคาเนื้อหมู (P_p) เท่ากับ 100 บาทต่อกิโลกรัม จงคำนวณหา

(1) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (ε_i)

(2) ความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์ (ε_c)

<u>วิธีทำ</u>

(1) หาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ $\varepsilon_c = \dfrac{\partial Q_b}{Q_b} \div \dfrac{\partial I}{I}$

หรือ $\varepsilon_c = \dfrac{\partial Q_b}{\partial I} \times \dfrac{I}{Q_b}$

จากฟังก์ชันอุปสงค์สำหรับเนื้อโคขุน

$$Q_b = 4850 - 5P_b + 1.5P_p + 0.1I$$

หา $\dfrac{\partial Q_b}{\partial I}$ จากสมการฟังก์ชัน Q_b: $\dfrac{\partial Q_b}{\partial I} = 0.1$

แทนค่าทุกค่าที่มีลงในสมการฟังก์ชัน Q_b ได้

$$Q_b = 4,850 - 5(200) + 1.5(100) + 0.1(10,000)$$

$$= 5,000 \text{ กิโลกรัม}$$

แทนค่า Q_b ลงในสมการ $\varepsilon_i = 0.1\dfrac{(10,000)}{5,000} = 0.2$

จะเห็นได้ว่า ε_i น้อยกว่า 1 แสดงว่า เนื้อโคขุนมีความยืดหยุ่นต่อรายได้ต่ำ นั่นคือ การเพิ่มขึ้นในรายได้จะส่งผลให้มีความต้องการบริโภคสินค้าเพิ่มขึ้นในสัดส่วนที่น้อยกว่ารายได้เพิ่ม ดังนั้น ส่วนแบ่งตลาดโดยเปรียบเทียบของสินค้าจะลดลงเมื่อระบบเศรษฐกิจขยายตัว ทั้งนี้เพราะความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้บ่งชี้หรือวัดศักยภาพของการเติบโตของตลาดสินค้านั้น

(2) หาความยืดหยุ่นของอุปสงค์ไขว้ $\varepsilon_c = \dfrac{\partial Q_b}{Q_b} \div \dfrac{\partial P_p}{P_p}$

$$\varepsilon_c = \frac{\partial Q_b}{\partial P_p} \times \frac{P_p}{Q_b}$$

จากสมการอุปสงค์ หา $\dfrac{\partial Q_b}{\partial P_p} = 1.5$

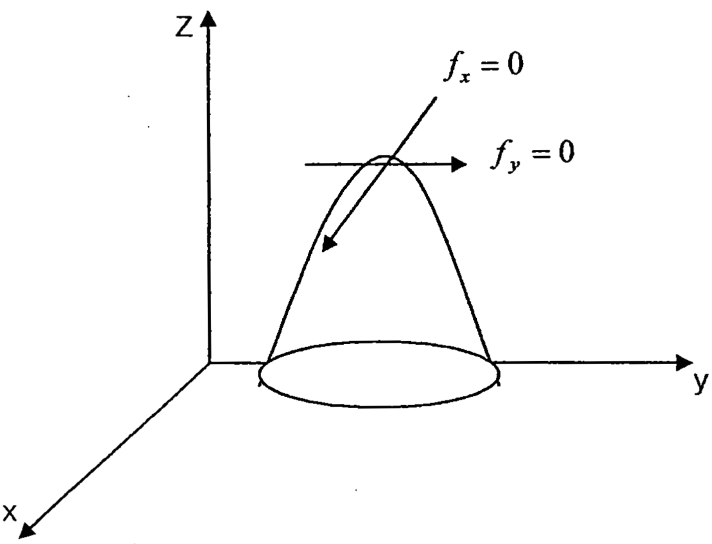
จากข้อ (1) คำนวณได้ Q_b = 5,000 กิโลกรัมและ $\varepsilon_c = 1.5\dfrac{(100)}{5,000} = 0.03$

จะเห็นว่า ความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์มีค่าเป็นบวก (มากกว่าศูนย์) แสดงว่า สินค้าทั้งสองชนิด คือเนื้อโคขุนและเนื้อหมูเป็นสินค้าทดแทนกันได้

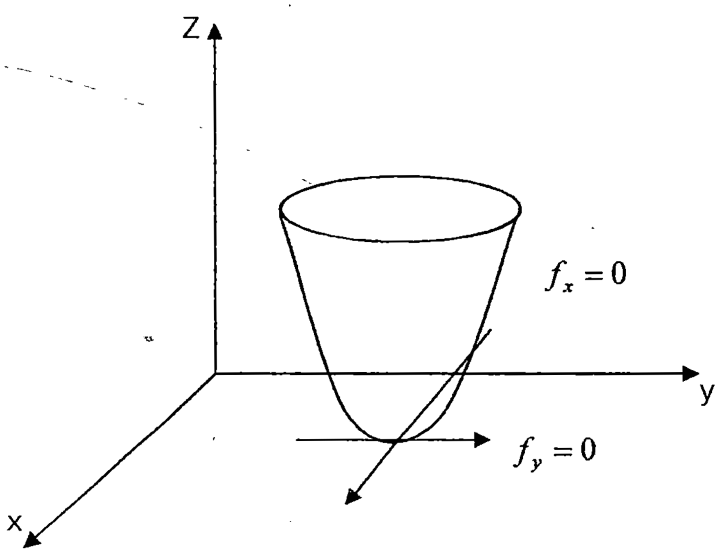
นอกจากนี้ เราสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ของสินค้าทั้งสองชนิดได้ โดยที่ ถ้าค่า ε_c เป็นลบ(น้อยกว่าศูนย์) แสดงว่าสินค้า 2 ชนิดที่พิจารณานั้นมีความสัมพันธ์กันแบบใช้ประกอบกัน และหากค่า ε_c เท่ากับศูนย์ แสดงว่าสินค้า 2 ชนิดที่กำลังพิจารณานั้นไม่เกี่ยวข้องกันเลย

6. การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร

กรณี 2 ตัวแปร เช่น กำหนดให้ $Z = f(x, y)$ ดังนั้นลักษณะกราฟของฟังก์ชันจะเป็น 3 มิติ



ภาพที่ 8.4.1 กรณีค่าสูงสุด



ภาพที่ 8.4.2 กรณีค่าต่ำสุด

ภาพที่ 8.4 ค่าเหมาะสมที่สุดกรณีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด

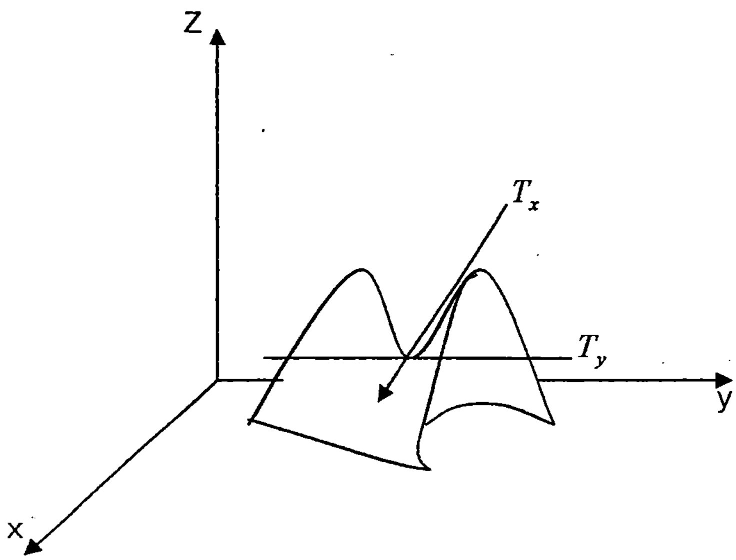
ในการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร มีเงื่อนไขสามประการ คือ

(1) <u>เงื่อนไขจำเป็น</u>

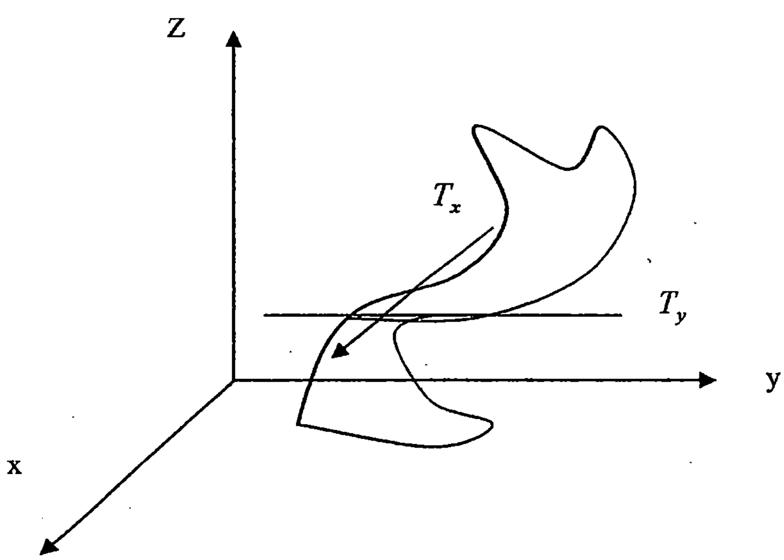
อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง แล้วให้เท่ากับศูนย์ ซึ่งบ่งชี้ว่า ณ จุดที่กำหนดให้ เรียกว่า จุดวิกฤต (critical point)

$$f_x = f_y = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad dZ = 0 \text{ ด้วย}$$

เงื่อนไขจำเป็นอย่างเดียวยังไม่สามารถแยกแยะได้ว่า จุดใดเป็นจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด เพราะจุดดังกล่าวอาจจะเป็นจุดวกกลับ เช่น รูปของอานม้า (รูปที่ 8.5) และใบพัด (รูปที่ 8.6)



<u>ภาพที่ 8.5</u> กราฟรูปอานม้า



<u>ภาพที่ 8.6</u> กราฟรูปใบพัด

จากรูปอานม้า ภาพที่ 8.5 จะเห็นว่า ณ จุด C ทั้ง T_x และ T_y มีค่าความชันเป็น 0 แต่ไม่มีคุณสมบัติเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด เนื่องจากจะมีค่าต่ำสุด เมื่อมองไปยังระนาบ O_{yz} และถ้ามองไปยังระนาบ O_{xz} จุด C จะเป็นค่าสูงสุด เราเรียกว่า จุดอานม้า (Saddle Point)

ในทำนองเดียวกัน จากรูปใบพัด ภาพที่ 8.6 แม้ว่าทั้ง T_x และ T_y มีค่าความชันเป็น 0 แต่ที่จุด D ไม่ใช่ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ลักษณะพื้นผิวบิด ไม่ว่าจะมองไปยังระนาบ O_{yz} หรือ O_{xz} แบบนี้เรียกว่า จุดเปลี่ยนเว้า (Inflection Point)

จากที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่า การที่จะหาเงื่อนไขยืนยันว่าเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ต้องดูการทำอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง

(2) <u>เงื่อนไขเพียงพอ</u>

จาก $Z = f(x)$ และ $dZ = f_x dx + f_y dy$ และ ณ จุดสุดยอดนี้ $dZ = 0$

ถ้าจุดสุดยอดเป็นจุดสูงสุด ไม่ว่า x หรือ y จะเปลี่ยนแปลงจากจุดนี้อย่างไร ค่าของ Z จะเปลี่ยนแปลงไปในทางลดลง คือจาก $dZ = 0$ ที่จุดสูงสุด เป็น $dZ < 0$ หรือเขียนได้ว่า $d^2Z < 0$

ในทำนองกลับกันถ้าจุดสุดยอดเป็นค่าต่ำสุด ไม่ว่า x หรือ y จะเปลี่ยนแปลงไปจากจุดนี้อย่างไร ค่า Z จะเพิ่มขึ้นโดยตลอด คือ จาก $dZ = 0$ ที่จุดต่ำสุด ไปเป็น $dZ > 0$ หรือเขียนได้ว่า $d^2Z > 0$

$$dZ = f_x dx + f_y dy$$

$$d^2Z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

จาก

$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + \frac{f_{xy}^{\ 2}}{f_{xx}}dy^2 + f_{yy}dy^2 - \frac{f_{xy}^{\ 2}}{f_{xx}}dy^2$$

$$= f_{xx}\left[dx^2 + 2\frac{f_{xy}}{f_{xx}}dxdy + \frac{f_{xy}^{\ 2}}{f_{xx}^2}dy^2\right] + \left[f_{yy} - \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}}\right]dy^2$$

$$= f_{xx}\left[dx + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}dy\right]^2 + \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}}\left[dy^2\right]$$

จะเห็นได้ว่า เทอมที่อยู่ในวงเล็บของสมการจะมีค่าเป็นบวกเสมอ ไม่ว่าค่า dx และ dy จะมีเครื่องหมายอะไร ดังนั้น ค่าของ d^2Z จึงขึ้นอยู่กับค่า f_{xx} และเทอม $\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}}$

จากคำอธิบายข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า

กรณีค่าสูงสุด	f_{xx} และ $f_{yy} < 0$	$(d^2Z < 0)$
กรณีค่าต่ำสุด	f_{xx} และ $f_{yy} > 0$	$(d^2Z > 0)$

(3) ผลคูณของอนุพันธ์ย่อยโดยตรงอันดับสองเมื่อประเมินที่จุดวิกฤต ต้องมากกว่าผลคูณของอนุพันธ์ย่อยที่ไขว้อันดับที่สองที่จุดวิกฤต

$f_{xx}.f_{yy} > (f_{xy})^2$ หรือ $f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ แสดงว่า ฟังก์ชัน $Z = f(x, y)$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดจริง

$f_{xx}.f_{yy} < (f_{xy})^2$ หรือ $f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ แสดงว่า ฟังก์ชัน $Z = f(x, y)$ นี้ให้ค่าทั้งสูงสุดและต่ำสุดในเวลาเดียวกัน

เราสามารถนำเทอม $f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2$ เขียนในรูปดีเทอร์มิแนนท์ ได้ว่า

$$f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = |H|$$ มีชื่อเรียกว่า HESSIAN DETERMINANT

ตารางที่ 8.1 เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอในการหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน $Z = f(x, y)$

เงื่อนไข	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด
1. เงื่อนไขจำเป็น	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
2. เงื่อนไขเพียงพอ	$f_{xx}, f_{yy} > 0$ และ $\|H\| > 0$	$f_{xx}, f_{yy} < 0$ และ $\|H\| > 0$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดจากฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$

<u>วิธีทำ</u>

(1) เงื่อนไขจำเป็น

$$f_x = 2x + y - 3 \qquad = 0 \qquad (1)$$

$$f_y = x + 2y \qquad = 0 \qquad (2)$$

แก้ระบบสมการโดย (2) ×2:

$$2x + 4y \qquad = 0 \qquad (3)$$

สมการ (3) - (1)

$$3y + 3 \qquad = 0$$

ดังนั้น $\qquad y \qquad = -1$

แทนค่า $y = -1$ ในสมการ (2): $\qquad x \qquad = 2$

ดังนั้นที่ $x = 2$ และ $y = -1$ ก่อให้เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

(2) เงื่อนไขเพียงพอ

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad = 2 \qquad \text{มีค่ามากกว่า 0}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad = 2 \qquad \text{มีค่ามากกว่า 0}$$

$$f_{xy} = f_{yx} \qquad = 1$$

หา Hessian determinant:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad = 3 \qquad \text{มีค่ามากกว่า 0}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าที่ $x = 2$ และ $y = -1$ เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าต่ำสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันคือ -1

7. การประยุกต์ใช้ค่าสูงสุดและต่ำสุดทางเศรษฐศาสตร์

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ได้นำมาประยุกต์ใช้ในวิชาเศรษฐศาสตร์เป็นอย่างมาก เช่น ในตลาดกึ่งแข่งขันกึ่งผูกขาด ผู้ผลิตสามารถควบคุมราคาสินค้าได้ บริษัทที่อยู่ในตลาดนี้มักจะผลิตสินค้าอย่างเดียวกันมากกว่า 1 แบบ เช่น ยาสีฟัน สบู่ หรือผงซักฟอกหลายยี่ห้อหรือหลายรูปแบบ เป็นต้น ผู้ผลิตควรผลิตสินค้าปริมาณเท่าไรที่ทำให้ได้รายรับสูงสุด กำไรสูงสุดหรือต้นทุนต่ำสุด เป็นต้น

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> ในการผลิตสินค้า 2 ชนิด คือ Q_1 และ Q_2 มีต้นทุนการผลิตดังนี้ คือ

$$TC = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

ราคาของสินค้าทั้งสองชนิดเท่ากับ 12 บาท และ 18 บาท ตามลำดับ จงหา

ก. ปริมาณ Q_1 และ Q_2 ที่ได้กำไรสูงสุด

ข. ต้นทุนรวมในการผลิต

ค. กำไรรวมสูงสุด

<u>วิธีทำ</u>

ก. ปริมาณผลผลิตที่ได้กำไรสูงสุด

$$\pi = TR - TC$$
$$= (P \times Q) - TC$$
$$= \{(P_1Q_1) + (P_2Q_2)\} - \{2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2\}$$
$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

(1) เงื่อนไขจำเป็น Max π เมื่อ $\pi' = \dfrac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 12 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \quad (2)$$

สมการ (1) $\times 4$: $48 - 16Q_1 - 4Q_2 = 0$ (3)

สมการ (3) – (2): $30 - 15Q_1 = 0$

$Q_1 = 2$

แทน $Q_1 = 2$ ในสมการ (1) $Q_2 = 4$

ดังนั้นที่ $Q_1 = 2$, $Q_2 = 4$ เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดด

(2) เงื่อนไขเพียงพอ

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 \quad \text{มีค่าน้อยกว่า 0}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -4 \quad \text{มีค่าน้อยกว่า 0}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -1$$

หา Hessian determinant:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \quad \text{มีค่ามากกว่า 0}$$

ดังนั้นที่ปริมาณ $Q_1 = 2$ หน่วย และ $Q_2 = 4$ หน่วย จะทำให้หน่วยผลิตได้รับกำไรสูงสุด

ข. ต้นทุนรวมในการผลิต

แทนค่า $Q_1 = 2$, $Q_2 = 4$ ลงในสมการ $TC = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$

$$TC = (2\times 2^2) + (2\times 4) + (2\times 4^2)$$

$$= 48$$

ดังนั้นต้นทุนรวมในการผลิตเท่ากับ 48 บาท

ค. กำไรรวมสูงสุด

แทนค่า $Q_1 = 2$, $Q_2 = 4$ ลงในสมการ $\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$

$$\pi = (12\times 2) + (18\times 4) - (2\times 2^2) - (2\times 4) - (2\times 4^2)$$

$$= 48$$

ดังนั้นกำไรรวมสูงสุดในการผลิตเท่ากับ 48 บาท

8. การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 2 ตัวแปร

$$Z = f(x_1, x_2 \dots, x_n)$$

เงื่อนไขจำเป็น
$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = f_1 = 0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = f_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
$$dZ = 0$$

เงื่อนไขเพียงพอ ถ้า $Z = f(x_1, x_2, x_3)$

$$d^2Z = \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$d^2Z = f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_1dx_2 + f_{13}dx_1dx_3 + f_{21}dx_2dx_1 + f_{22}dx_2^2 + f_{23}dx_2dx_3 + f_{31}dx_3dx_1 + f_{32}dx_3dx_2 + f_{33}dx_3^2$$

เมื่อทำกำลังสองสมบูรณ์

$$d^2Z = f_{11}\left[dx_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}dx_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}dx_3\right]^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}\left[dx_2 + \frac{f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}\right]^2$$

$$+ \frac{f_{11}f_{22}f_{33} - f_{11}f_{23}^2 - f_{22}f_{13}^2 - f_{33}f_{12}^2 + 2f_{12}f_{13}f_{23}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}(dx_3)^2$$

เทอมที่อยู่ในวงเล็บทั้งหมดจะเป็นบวก ไม่ว่าค่า dx_i จะเป็นค่าใด ดังนั้นค่าของ d^2Z จะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับเทอมที่อยู่หน้าวงเล็บ ซึ่งเทอมเหล่านี้ในความเป็นจริงคือ ดีเทอร์มินันต์ย่อย (Sub-determinant) ของ $|H|$ นั่นเอง ซึ่งภาษาทางคณิตศาสตร์ เรียกว่า **พรินซิเพิลไมเนอร์** (Principal minor) ของ $|H|$ เช่น

$$|H_1| = f_{11}$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น d^2Z ข้างต้นจึงเขียนในรูปพรินซิเพิลไมเนอร์ของเฮซเซี่ยนดีเทอร์มิแนนท์โดยเทอมที่อยู่ในวงเล็บจะใช้อักษร A, B, C แทนดังนี้ คือ

$$d^2Z = |H_1|A^2 + \frac{|H_2|}{|H_1|}B^2 + \frac{|H_3|}{|H_2|}C^2$$

ซึ่งทำให้เราสามารถสรุปเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับค่าสูงสุด และต่ำสุดได้ดังนี้ คือ

1. $d^2Z > 0$ เป็นค่าต่ำสุด ได้ต่อเมื่อ $|H_1| > 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| > 0$
2. $d^2Z < 0$ เป็นค่าสูงสุด ได้ต่อเมื่อ $|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| < 0$

ถ้าในกรณีที่ $Z = f(x_1, x_2 ..., x_n)$ เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอสำหรับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะสรุปได้ดังตาราง ดังนี้

<u>ตารางที่ 8.2</u> เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอสำหรับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $Z = f(x_1, x_2 ..., x_n)$

เงื่อนไข	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด
1. เงื่อนไขจำเป็น	$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$
2. เงื่อนไขเพียงพอ	$\|H_1\|, \|H_2\|, \ldots, \|H_n\| > 0$	$\|H_1\| < 0, \|H_2\| > 0, \|H_3\| < 0, \ldots$ สลับกันไป

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> กำหนดให้สมการเส้นอุปสงค์ของผู้ผลิตผูกขาดใน 3 ตลาด เป็นดังนี้คือ

ตลาดที่ 1: $P_1 = 36 - 4Q_1$

ตลาดที่ 2: $P_2 = 66 - 3Q_2$

ตลาดที่ 3: $P_3 = 52 - 5Q_3$

โดยในการผลิตสินค้า Q_1, Q_2, Q_3 นี้มีต้นทุนรวมทั้งสิ้น คือ $TC = 7 + 12Q$ เมื่อ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

จงหา ก. ผู้ผลิตจะขายสินค้าในตลาดทั้ง 3 อย่างไร จึงจะทำให้ได้กำไรรวมสูงสุด

ข. ราคาสินค้าในตลาดทั้ง 3

ค. กำไรสูงสุด

<u>วิธีทำ</u>

ก. ปริมาณผลผลิตที่ได้กำไรสูงสุด

$\pi = TR - TC$

เมื่อ $TR = ((36 - 4Q_1)Q_1) + ((66 - 3Q_2)Q_2) + ((52 - 5Q_3)Q_3)$

$= 36Q_1 - 4Q_1^2 + 66Q_2 - 3Q_2^2 + 52Q_3 - 5Q_3^2$ (1)

และ $TC = 7 + 12(Q_1 + Q_2 + Q_3)$

$= 7 + 12Q_1 + 12Q_2 + 12Q_3$ (2)

สมการ (1) + (2):

$$\pi = 24Q_1 - 4Q_1^2 + 54Q_2 - 3Q_2^2 + 40Q_3 - 5Q_3^2 - 7$$

(1) เงื่อนไขจำเป็น Max π เมื่อ $\pi' = \frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 24 - 8Q_1 = 0$ (1)

$Q_1 = 3$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 54 - 6Q_2 = 0$ (2)

$Q_2 = 9$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_3} = 40 - 10Q_3 = 0$ (3)

$Q_3 = 4$

ดังนั้นที่ $Q_1 = 3$, $Q_2 = 9$ และ $Q_3 = 4$ เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

(2) เงื่อนไขเพียงพอ

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}$ = -8 มีค่าน้อยกว่า 0

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}$ = -6 มีค่าน้อยกว่า 0

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_3^2}$ = -10 มีค่าน้อยกว่า 0

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2 \partial Q_1} = 0, \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_3} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_3 \partial Q_1} = 0, \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2 \partial Q_3} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_3 \partial Q_2} = 0$$

หา พรินซิเพิลไมเนอร์:

$|H_1| = -8$ มีค่าน้อยกว่า 0

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 48$$ มีค่ามากกว่า 0

$$|H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -480$$ มีค่าน้อยกว่า 0

ดังนั้นที่ปริมาณ $Q_1 = 3$หน่วย, $Q_2 = 9$ หน่วย และ $Q_3 = 4$ หน่วย จะทำให้หน่วยผลิตได้รับกำไรสูงสุด

ข. ต้นทุนรวมในการผลิต

แทนค่า $Q_1 = 3$, $Q_2 = 9$ และ $Q_3 = 4$ ลงในสมการ $TC = 7 + 12Q_1 + 12Q_2 + 12Q_3$

$$TC = 7 + (12 \times 3) + (12 \times 9) + (12 \times 4) = 199$$

ดังนั้นต้นทุนรวมในการผลิตเท่ากับ 199 บาท

ค. กำไรรวมสูงสุด

แทนค่า $Q_1 = 3$, $Q_2 = 9$ และ $Q_3 = 4$ ในสมการ

$$\pi = 24Q_1 - 4Q_1^2 + 54Q_2 - 3Q_2^2 + 40Q_3 - 5Q_3^2 - 7$$

$$\pi = (24 \times 3) - (4 \times 3^2) + (54 \times 9) - (3 \times 9^2) + (40 \times 4) - (5 \times 4^2) - 7$$

$$= 352$$

ดังนั้นกำไรรวมสูงสุดในการผลิตเท่ากับ 352 บาท

9. การหาค่าสูงสุด-ค่าต่ำสุดโดยมีข้อจำกัด

9.1 กรณีมีตัวแปร 2 ตัว

ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ในความเป็นจริงจะอยู่ภายใต้เงื่อนไขต่างๆ เช่น ความพอใจของผู้บริโภคสูงสุดภายใต้งบประมาณหรือรายได้ที่จำกัด หรือการลดต้นทุนการผลิต ถูกจำกัดด้วยปริมาณการผลิตที่ต้องการ เป็นต้น วิธีการคำนวณหาค่าวิกฤตภายใต้ฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไขจะใช้วิธีตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange Multipliers)

วิธีตัวคูณลากรานจ์ คือ เปลี่ยนปัญหาให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้อนุพันธ์ (Derivative) อันดับที่หนึ่งหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดได้ เช่น กรณีที่โจทย์กำหนดฟังก์ชัน $f(x,y)$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $g(x,y)=k$ (ค่าคงตัว) มาให้ เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ F ที่เรียกว่า Augmented Objective Function ได้โดย

(1) ให้เงื่อนไขบังคับเท่ากับศูนย์

$$0=k-g(x,y)$$

(2) คูณผลที่ได้จากข้อ (1) ด้วย λ (ตัวคูณลากรานจ์)

(3) บวกผลคูณกับฟังก์ชันต้นกำเนิด

จะได้ว่า $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[k-g(x,y)]$

เช่น ฟังก์ชันต้นกำเนิดคือ $f=x_1x_2+2x_1$

ฟังก์ชันข้อจำกัด คือ $4x_1+2x_2=60$

จะได้ฟังก์ชันใหม่ว่า $F=x_1x_2+2x_1+\lambda(60-4x_1-2x_2)$

เมื่อได้ฟังก์ชันใหม่แล้ว เราสามารถหาค่าเหมาะสมที่สุดได้โดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ F ในส่วนที่เกี่ยวกับตัวแปรอิสระทั้งสาม (x,y,λ) แล้วให้เท่ากับศูนย์ (เรียกว่า เงื่อนไขจำเป็น) และแก้ระบบสมการต่อไป เมื่อได้ค่าที่เหมาะสมหรือค่าวิกฤตของระบบสมการแล้ว จะต้องทำการทดสอบเงื่อนไขเพียงพอเพื่อให้ทราบว่าค่าวิกฤตดังกล่าวเป็นค่าที่ก่อให้เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ในการทดสอบเงื่อนไขเพียงพอ จะใช้วิธี Second-Order Condition ได้โดยอยู่ในรูปของ Determinant ซึ่ง Determinant นี้ เรียกว่า Bordered Hessian Determinant เป็นดีเทอร์มินันต์ที่ประกอบด้วยสมาชิกเป็นอนุพันธ์ย่อยที่ 2 ของฟังก์ชันเป้าหมายเทียบกับตัวแปรอิสระและสมาชิกในแถวนอนและแถวตั้งแถวแรก (หรือแถวสุดท้าย) เป็นค่าอนุพันธ์ย่อยของสมการข้อจำกัดเทียบกับตัวแปรอิสระ กล่าวคือ ในกรณีฟังก์ชันมีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & g_x \\ F_{yx} & F_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}$$ หรือเท่ากับ $\left|\overline{H}_2\right|$

ผลของ Second-Order condition ภายใต้ข้อจำกัด $dg = 0$ สามารถสรุปได้ว่า

$d^2 f$ จะมีค่าเป็นบวก (Positive Definite) ถ้า $\left|\overline{H}_2\right| < 0$

และ $d^2 f$ จะมีค่าเป็นลบ (Negative Definite) ถ้า $\left|\overline{H}_2\right| > 0$

ดังนั้นเงื่อนไขอันดับสองนี้จะระบุว่าค่า F เป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดในกรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว จะเป็นดังนี้

ค่าฟังก์ชัน F จะมีค่าสูงสุดหรือค่าของฟังก์ชัน f ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัดจะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\left|\overline{H}_2\right| > 0$

ค่าฟังก์ชัน F จะมีค่าต่ำสุดหรือค่าของฟังก์ชัน f ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัดจะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $\left|\overline{H}_2\right| < 0$

<u>ตารางที่ 8.3</u> เงื่อนไขการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดภายใต้ข้อจำกัดกรณีมีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

สมการเป้าหมาย: $f(x,y)$ ภายใต้ข้อจำกัด $g(x,y) = k$ (ค่าคงตัว)

$F(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda[k - g(x,y)]$

เงื่อนไข	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด
1. เงื่อนไขจำเป็น	$F_x = F_y = F_\lambda = 0$	$F_x = F_y = F_\lambda = 0$
2. เงื่อนไขเพียงพอ	$\left\|\overline{H}\right\| < 0$	$\left\|\overline{H}\right\| > 0$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> ให้ $\pi = -100 + 80x - 0.1x^2 + 100y - 0.2y^2$ จงหาค่า x และ y ที่ให้ค่า F สูงสุด ภายใต้ข้อจำกัด $x + y = 325$

สมการลากรานจ์: $F(x, y, \lambda)$

$$F = -100 + 80x - 0.1x^2 + 100y - 0.2y^2 + \lambda(325 - x - y)$$

เงื่อนไขจำเป็น: $F_x = F_y = F_\lambda = 0$

$F_x = 80 - 0.2x - \lambda = 0$ (1)

$F_y = 100 - 0.4y - \lambda = 0$ (2)

$F_\lambda = 325 - x - y = 0$ (3)

เมื่อแก้สมการค่าวิกฤติของระบบสมการนี้คือ

$$x = 183.3$$

$$y = 141.7$$

$$\lambda = 43.3$$

เงื่อนไขเพียงพอ: หา $|\overline{H}_2|$

$F_{xx} = -0.2,\ F_{yy} = -0.4,\ F_{xy} = F_{yx} = 0$

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & -0.4 \end{vmatrix} = 0.6 > 0 \text{ จึงเป็นกรณีค่าสูงสุด}$$

<u>9.2 กรณีมีตัวแปร n ตัว</u>

Objective Function: $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Subject to $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

การตัดสินว่า Critical Value ของ Z จะเป็น Maximum หรือ Minimum ขึ้นอยู่กับค่าเครื่องหมายของ d^2Z ว่าจะเป็นลบหรือบวก เราจะใช้เครื่องหมายของ Bordered Hessian เป็นเครื่องหมายบอกให้ทราบว่า d^2Z เป็น Positive Definite หรือ Negative Definite โดยสังเกตเครื่องหมายของ Bordered Principal Minors of the Hessian

ถ้าสมมติว่า Bordered Hessian ที่กำหนดมาให้คือ

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{21} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n & Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

เราสามารถนิยาม Bordered Principal Minors ได้คือ

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

$$|\overline{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ g_3 & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}$$

ซึ่ง Bordered Principal Minor ตัวสุดท้าย $|\overline{H}_n| = |\overline{H}|$

ในกรณี n-Variable Case นี้

(1) d^2Z เป็น Positive Definite ในกรณีที่เมื่อ $|\overline{H}_2|, |\overline{H}_3|, \ldots, |\overline{H}_n| < 0$ ดังนั้น Z เป็นค่าต่ำสุด

(2) d^2Z เป็น Negative Definite ในกรณีที่เมื่อ $|\overline{H}_2| > 0, |\overline{H}_3| < 0, |\overline{H}_4| > 0, \ldots$ สลับกัน (+,-,+,...) ดังนั้นค่า Z เป็นค่าสูงสุด

แต่หาก $|\overline{H}_i|$; i =2,...,n ไม่เป็นไปตามรูปแบบใน (1) และ (2) ค่าของ Z ณ จุดวิกฤต ดังกล่าวไม่เป็นจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด

10. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์

การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยมีข้อจำกัด เช่น การหาค่าต่ำสุดของอรรถประโยชน์ของผู้บริโภค ภายใต้งบประมาณจำกัด หรือการหาต้นทุนต่ำสุดภายใต้เงื่อนไขที่ต้องผลิตสินค้าอย่างน้อยที่สุดจำนวนหนึ่ง เป็นต้น

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> จงคำนวณระดับการผลิตสินค้า 2 ชนิด คือ x และ y ที่ทำให้ต้นทุนรวมต่ำสุด โดยมีเงื่อนไขว่า จำนวนผลผลิตรวมของสินค้าทั้งสองชนิด ต้องเท่ากับจำนวนที่กำหนด

ต้นทุนรวม $TC = 8x^2 - xy + 12y^2$

จำนวนผลผลิต $x + y = 42$

<u>วิธีทำ</u>

สมการลากรานจ์:

$$Z = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda(42 - x - y)$$

$$Z_x = 16x - y - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$Z_y = -x + 24y - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$Z_\lambda = 42 - x - y = 0 \quad (3)$$

เมื่อแก้สมการค่าวิกฤติของระบบสมการนี้คือ

$$x = 25$$

$$y = 17$$

$$\lambda = 383$$

เงื่อนไขเพียงพอ: หา $|\overline{H}_2|$

$Z_{xx} = 16$, $Z_{yy} = 24$, $Z_{xy} = Z_{yx} = -1$

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & -1 \\ 1 & -1 & 24 \end{vmatrix} = -42 < 0 \text{ จึงเป็นกรณีค่าต่ำสุด}$$

ดังนั้นผู้ผลิตควรผลิต $x = 25$ หน่วย และ $y = 17$ หน่วย เพื่อทำให้เสียต้นทุนต่ำสุด ค่า λ แสดงให้เห็นถึงเป้าหมายที่เปลี่ยนแปลงไปหากเราขยายหรือลดข้อจำกัดลง ซึ่งตามตัวอย่างที่ 13 ค่า λ หมายถึงหากเราเปลี่ยนแปลงจำนวนผลผลิตรวมจาก 42 หน่วยเป็น 43 หน่วย จะทำให้ต้นทุนรวมเปลี่ยนแปลงไป 383 บาท ($\frac{\partial \pi}{\partial k} = \lambda$)

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาค่า Extreme Value ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมตรวจสอบด้วยว่า เป็นจุดต่ำสุดหรือสูงสุด

   1) $Z = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$

   2) $Z = 29 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

2. กำหนดให้ฟังก์ชันอุปสงค์ของสินค้า 3 ชนิด เป็นดังนี้ คือ $P_1 = 63 - 4Q_1$, $P_2 = 105 - 5Q_2$, $P_3 = 75 - 6Q_3$ โดยต้นทุนในการผลิตทั้ง 3 ชนิดรวมกันเป็นดังนี้ คือ $C = 20 + 15Q + Q^2$ เมื่อ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ จงหา

   1) หน่วยการผลิตนี้จะขายสินค้าทั้ง 3 ชนิด เท่าไร จึงจะได้กำไรสูงสุด

   2) ราคา ณ จุดที่ได้กำไรสูงสุด

   3) กำไรสูงสุด

3. กำหนดให้ฟังก์ชันอุปสงค์ของสินค้า 2 ชนิด เป็นดังนี้ คือ $Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2$ และ $Q_2 = 35 - P_1 - P_2$ โดยต้นทุนในการผลิตสินค้า 2 ชนิดนี้รวม คือ $C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$ จงหา

   1) ปริมาณของสินค้าทั้ง 2 ชนิดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด

   2) กำไรสูงสุด

4. หน่วยธุรกิจแห่งหนึ่งมีกำไรตามสมการดังนี้ $\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ โดยมีความสามารถในการผลิตสินค้าเท่ากับ $x + y = 12$ จะผลิตสินค้า x และ y อย่างละเท่าไรจึงจะได้รับกำไรสูงสุด

5. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (ถ้ามี) ของ $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 5x$ โดยมีข้อจำกัดดังนี้ คือ $x - 2y = 0$

เอกสารอ้างอิง

Blume, L. and Simon C. (1945). *Mathematics for Economists.* New York : Norton&Company.

Chiang, Alpha C. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics.* 3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.

Wisniewski , M. (1996). *Introductory Mathematical Methods in Economics.* 2nd ed. London : McGraw -Hill.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมธิราช. (2544). ***เอกสารการสอนชุดคณิตเศรษฐศาสตร์และเศรษฐมิติเพื่อธุรกิจ หน่วยที่ 1-7.*** นนทบุรี : มหาวิทยาลัยบูรพา.

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***โปรแกรมเชิงเส้นตรง.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

สมนึก ทับพันธุ์. (2550). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์***. กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 9

อินทิกรัลแคลคูลัส (Integral Calculus)

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจอินทิกรัลแคลคูลัส
2. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ที่ต้องใช้อินทิกรัลแคลคูลัส
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้อินทิกรัลแบบจำกัดเขตในทางเศรษฐศาสตร์

เนื้อหา

1. การวิเคราะห์เชิงพลวัต
2. อินทิกรัลแคลคูลัส
3. ทฤษฎีบนพื้นฐานของอินทิกรัลแคลคูลัส
4. ลักษณะของปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ที่ใช้อินทิกรัลแคลคูลัส
5. การประยุกต์ใช้อินทิกรัลแบบจำกัดเขตในทางเศรษฐศาสตร์

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

1. การวิเคราะห์เชิงพลวัตร (Dynamic Analysis)

คือการวิเคราะห์ที่มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของตัวผันแปรทางเศรษฐกิจ หรือเพื่อศึกษาตัวผันแปรเหล่านั้น เมื่อเวลาผ่านไป จะเปลี่ยนแปลงเข้าสู่ระดับสมดุลระดับหนึ่งหรือไม่

เป็นการวิเคราะห์ทางเศรษฐกิจโดยมีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องหรือคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงตามกาลเวลา อาทิ $y = y(t)$ $t =$ เวลา

1.1 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงตามกาลเวลาของตัวผันแปรทางเศรษฐกิจ

(1) การเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง ค่าของตัวแปรทางเศรษฐกิจนั้นเกิดการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา หรือเกิดการเปลี่ยนแปลงทุกๆ ค่าของเวลา (Point of Time) เวลาเป็นตัวแปรต่อเนื่องด้วย อาทิ

$$y = y(t)$$

การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องนี้ จะใช้ Integral Calculus และ Differential Equation (สมการอนุพันธ์) ในการวิเคราะห์ เรียกการวิเคราะห์นี้ว่า Continuous Analysis

(2) การเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เกิดขึ้นเป็นระยะๆ หรือเกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง อาทิ เกิดการเปลี่ยนแปลงครั้งหนึ่งใน 1 เดือน, 1 ปี เวลาเป็นตัวผันแปรที่ไม่ต่อเนื่อง ทำให้ค่าของตัวแปรทางเศรษฐกิจเป็นตัวแปรที่ไม่ต่อเนื่องด้วย

$$y = y(t) \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

ในกรณีนี้ ค่าของเวลา เป็นเลขจำนวนเต็ม

การวิเคราะห์นี้จะใช้ Differential Equation (สมการผลต่างต่อเนื่อง) เรียกการวิเคราะห์นี้ว่า Period Analysis

ดังนั้นในการศึกษาเนื้อหาในบทที่ 9 และ 10 นี้จะเป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ในเชิงพลวัต โดยบทที่ 9 เป็นการศึกษาในส่วนของอินทิกรัล และในบทที่ 10 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับสมการผลต่างสืบเนื่อง ซึ่งเป็นการศึกษาการเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เกิดขึ้นเป็นระยะๆ หรือเกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง

2. อินทิกรัล แคลคูลัส

คือ การศึกษาการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของตัวแปรทางเศรษฐกิจว่า เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปแล้ว ค่าของตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เข้าสู่ระดับสมดุลที่แน่นอนระดับหนึ่งหรือไม่ หรือเปลี่ยนแปลงออกจากค่าสมดุลที่แน่นอนระดับหนึ่งตามเวลา

อินทิกรัลเป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่เรียกว่า การอินทิเกรต (Integration) ซึ่งมีความหมายอยู่ 2 ประการ คือ

(1) เป็นกระบวนการในการหาตัวผกผัน (Inverse) ของการหาอนุพันธ์ (Differentiation)

(2) เป็นวิธีการในการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง

2.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

หมายถึงอินทิกรัลที่ไม่ได้กำหนดเขตค่าโดเมนของ x อันเป็นผลทำให้อินทิกรัลที่ได้มีค่าไม่จำกัด

โดยกล่าวอย่างคร่าวๆ ได้ว่า อินทิกรัลเป็นการหาส่วนกลับหรือที่มาของ Derivative

นิยาม : ถ้า $f(x) = F'(x)$

ตามหลัก Differentiation: $\frac{d[F(x)+c]}{dx} = f(x) \quad c =$ ค่าคงที่

ดังนั้นส่วนกลับของ $f(x) \quad = \quad F(x)+c$

$$\int f(x)dx \quad = \quad F(x)+c$$

$\int f(x)dx$ อ่านว่า อินทิกรัล f ของ x เมื่อคำนึงถึง x

$F(x)+c$ คือ อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

กฎของการหาอินทิเกรต

(1) Constant Function $\int k dx = kx + c$

(2) Power Rule $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

(3) Exponential Rule $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$

(4) Logarithm Rule $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad , x > 0 \quad = \ln|x| + c$

(5) Integral of a Sum $\int [f(x) \pm g(x)] dx \quad = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$= F(x) \pm G(x) + c$

(6) Integral of a Multiple $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad , k$ คือ ค่าคงที่

(7) Substitution Rule $\int f(U) f'(U) dx = \int f(U) \frac{dU}{dx} dx$

(กฎว่าด้วยการสับเปลี่ยน) $\int f(U) \frac{dU}{dx} dx = \int f(U) dU = f(U) + c$

(8) Integration by Parts $\int U(x) V'(x) dx = U(x) V(x) - \int V(x) U'(x) dx$

$\int U dV = UV - \int V dU$

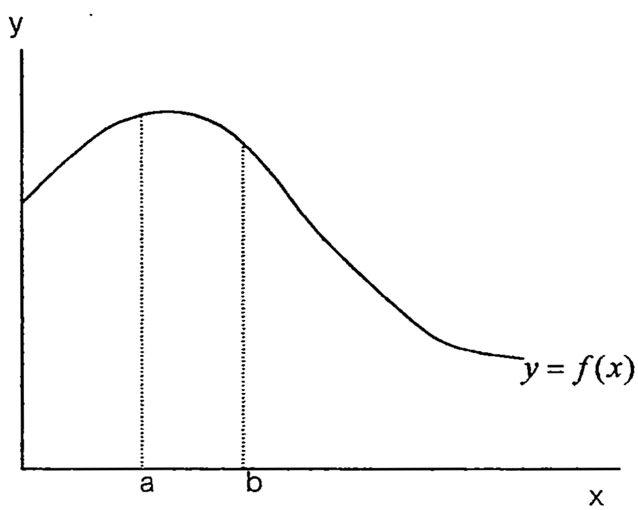
(9) $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c \Rightarrow \int e^U dU = e^U + c$ เมื่อ $U = f(x)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ x ที่ทำอนุพันธ์ได้

(10) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c \Rightarrow \int \frac{1}{U} dU = \ln U + c$ เมื่อ $U = f(x)$

2.2 อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral)

คือ อินทิกรัลที่ได้กำหนดเขตค่าโดเมนของ x ไว้แล้ว อันเป็นผลทำให้อินทิกรัลที่ได้นั้น มีค่าที่จำกัดแน่นอน

พิจารณา ภาพที่ 9.1 พื้นที่ใต้เส้นกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง เช่น $y = f(x)$ ระหว่าง $x = a$ และ $x = b$ $(a < b)$



ภาพที่ 9.1 อินทิกรัลจำกัดเขต

ให้ A = พื้นที่ใต้เส้นกราฟ

$$A = \lim_{n \to \alpha} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to b} \sum_{i=a}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

a เรียกว่า ขีดจำกัดล่างของการอินทิเกรต

b เรียกว่า ขีดจำกัดบนของการอินทิเกรต

3. ทฤษฎีบนพื้นฐานของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)

ค่าของตัวเลขของอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f(x) ในช่วง a ถึง b $(a \le b)$

หาได้โดย $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>3.1 คุณสมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต</u>

(1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$

(2) $\int_a^a f(x) = 0$

(3) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad a \le b \le c$

(4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad ,k =$ ค่าคงที่

(5) $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$

<u>3.2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)</u>

มี 2 ประเภทด้วยกันคือ

ก. <u>ขีดจำกัดของอินทิกรัลเป็นค่าอนันต์</u> (Infinite Limits)

$\int_a^\infty f(x)dx$ และ $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

เป็นอินทิกรัลที่มีขีดจำกัดหนึ่งเป็นค่าอนันต์ กรณีนี้ เราไม่สามารถหาค่าไม่ได้ อาทิ

$F(\infty) - F(a)$ หรือ $F(b) - F(-\infty)$

เพราะ ∞ ไม่ใช่เลขจำนวน แต่เราสามารถจะกำหนดให้เป็น ขีดจำกัดของอินทิกรัลตรงแบบ (Proper Integrals) โดยใช้ขีดจำกัด (Limits)

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ถ้าขีดจำกัดนี้มีค่าเกิดขึ้น เรียกว่า "การลู่เข้า" (Convergence) แต่ถ้าไม่เกิดขึ้น เรียกว่า "การลู่ออก" (Divergence)

ข. <u>อินทิกรัลที่เป็นค่าอนันต์</u> (Infinite Integrals)

คือ อินทิกรัลจำกัดเขต ซึ่งมีฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรต ให้ค่าไม่จำกัดในช่วงโดเมนของ x ช่วงใดช่วงหนึ่ง อันเป็นผลทำให้อินทิกรัลที่ได้ไม่จำกัดตามไปด้วย

$$\int_{0}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to 0}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{0} f(x)dx = \lim_{c\to 0}\int_{a}^{c} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{b} f(x)dx$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงประเมินค่าของ $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx$

จะพบว่า อินทิกรัลเป็นค่าอนันต์ เนื่องจากตัวส่วนเป็นศูนย์ การประเมินอินทิกรัล ต้องอาศัยแนวคิดว่าด้วยขีดจำกัด

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{1} \frac{1}{x}dx$$

เนื่องจาก $$\int_{a}^{1} \frac{1}{x}dx = \ln x + c \quad ; x > 0$$

$$= \ln 1 - \ln a = -\ln a$$

ดังนั้น $$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}(-\ln a)$$

$$a \to 0^+ = -\ln a \to -\infty$$

4. ลักษณะของปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ที่ใช้อินทิกรัลแคลคูลัส

Integral ใช้หาฟังก์ชันมวลรวม (Total Function) จาก ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Marginal Function) ดังนี้

<u>4.1 ฟังก์ชันต้นทุน</u>

$$TC = TC(Q)$$
$$AC = \frac{TC}{Q}$$
$$MC = \frac{dTC}{dQ} = TC'(Q)$$

ต้นทุนส่วนเพิ่ม = อนุพันธ์ของฟังก์ชันต้นทุนรวมทั้งหมด $TC = TC(Q)$ เมื่อคำนึงถึง Q

ต้นทุนทั้งหมด (Total Cost) = อินทิกรัลของฟังก์ชันต้นทุนส่วนเพิ่ม เมื่อคำนึงถึง Q

$$TC = \int MC.dQ$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ถ้าองค์กรธุรกิจมีต้นทุนส่วนเพิ่มตามสมการต่อไปนี้ $TC'(Q) = 3Q^2 - 4Q + 5$ จงคำนวณฟังก์ชันต้นทุนรวม $TC(Q)$

<u>วิธีทำ</u> $TC(Q) = \int (3Q^2 - 4Q + 5).dQ$

$= Q^3 - 2Q^2 + 5Q + C$

หาค่า TC

ให้ $Q = 0$ เพื่อหาต้นทุนคงที่

$TC(0) = C$

ดังนั้น TC = ต้นทุนคงที่ (Fixed Cost) = C_F

ดังนั้น $TC(Q) = Q^3 - 2Q^2 + 5Q + C_F$

ตัวอย่างที่ 3 ต้นทุนส่วนเพิ่ม $TC'(Q)$ เป็นฟังก์ชันของการผลิตสินค้า Q หน่วย อยู่ในรูป $TC'(Q) = 1.064 - 0.005Q$ จงหาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด และต้นทุนเฉลี่ย โดยมีต้นทุนคงที่ 16.3

วิธีทำ ต้นทุนทั้งหมด $TC(Q) = \int (1.064 - 0.005Q).dQ$

$$= 1.064Q - 0.0025Q^2 + C$$

ถ้า $Q = 0$ (ไม่มีการผลิต) จะมีต้นทุนคงที่ เท่ากับ 16.3

ดังนั้น ต้นทุนทั้งหมด: $TC(Q) = 1.064Q - 0.0025Q^2 - 16.3$

ต้นทุนเฉลี่ย : $\frac{TC}{Q} = 1.064 - 0.0025Q - \frac{16.3}{Q}$

4.2 ฟังก์ชันรายรับ

ฟังก์ชันอุปสงค์อาจอยู่ในรูป $P = F(Q)$

$P =$ ราคาต่อหน่วย

$Q =$ จำนวนหน่วย

รายรับทั้งหมด (Total Revenue: TR) $R(Q) = P.Q = F(Q).Q$

รายรับส่วนเพิ่ม (Marginal Revenue: MR) = $\frac{dTR}{dQ} = R'(Q) = Q.\,F'(Q) + F(Q)$

รายรับทั้งหมด คือ อินทิกรัลของฟังก์ชันรายรับส่วนเพิ่ม เมื่อคำนึงถึง Q

$$TR = \int R'(Q)dQ$$

$$= R(Q) + C$$

เพื่อประเมินหาค่าตัว C จะกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้นว่า รายรับเท่ากับ 0 ถ้าอุปสงค์เท่ากับ 0 รายรับเฉลี่ย $AR = \frac{P.Q}{Q} = P =$ อุปสงค์

ตัวอย่างที่ 4 ฟังก์ชันรายรับส่วนเพิ่มถูกกำหนดให้ดังนี้

$R'(Q) = 12 - 8Q + Q^2$ จงคำนวณหาฟังก์ชันรายรับทั้งหมดและฟังก์ชันอุปสงค์

วิธีทำ รายรับทั้งหมด $R(Q) = \int (12 - 8Q + Q^2)dQ$

ถ้า $Q = 0$, $R(0) = 0$ ดังนั้น $C = 0$

รายรับทั้งหมด $R(Q) = 12Q - 4Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$

ฟังก์ชันอุปสงค์ $P = 12 - 4Q + \frac{1}{3}Q^2$

4.3 ฟังก์ชันการบริโภคและการออม

ฟังก์ชันการบริโภค (Consumption Function)

$C = C(Y)$

$C =$ การบริโภคทั้งหมด

$Y =$ รายได้ทั้งหมด

ดังนั้นความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้าย (Marginal Propensity to Save: MPS)

$$\frac{ds}{dy} = 1 - \frac{dc}{dy} = 1 - C'(Y) = S'(Y)$$

$$MPS = 1 - MPC$$

ฟังก์ชันการบริโภคทั้งหมด คือ อินทิกรัลของฟังก์ชันการบริโภค C เมื่อคำนึงถึง Y

$$C = \int C'(Y)dY = C(Y) + C_0$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ MPC มีฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$\frac{dC}{dY} = C'(Y) = 0.7 + \frac{0.2}{\sqrt{Y}}$$

เมื่อรายได้ $Y = 0$ การบริโภค $C = 8$ ล้านบาท จงหาฟังก์ชันการบริโภค

<u>วิธีทำ</u>

$$C(Y) = \int (0.7 + \frac{0.2}{\sqrt{Y}})dY$$

$$C(Y) = 0.7Y + 0.4\sqrt{Y} + C_0$$

ถ้า $Y = 0$, $C = 8$ ดังนั้น $C_0 = 8$

$$C(Y) = 0.7Y + 0.4\sqrt{Y} + 8$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> สมมติว่า MPS มีสมการดังนี้

$$S'(Y) = 0.3 - 0.1Y^{-1/2}$$

ถ้า $Y = 0$, $S = 81$ จงหาฟังก์ชันการออม

<u>วิธีทำ</u>

$$S = \int \left(0.3 - 0.1Y^{1/2}\right)dY$$

$$= 0.3Y - 0.067Y^{3/2} + S_0$$

เมื่อ $S = 0$, $Y = 81$ ดังนั้น

$$S_0 = 24.543$$

ดังนั้นฟังก์ชันการออม คือ $S = 0.3Y - 0.067Y^{3/2} + 24.543$

4.4 การสะสมทุน (Capital Formation)

เนื่องจากการลงทุน (Investment) เป็นลักษณะของตัวแปรที่เป็น Flow หรือเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าการสะสมทุนในช่วงเวลาหนึ่งๆ และถ้าพิจารณากระบวนการสะสมทุนเป็นการสะสมอย่างต่อเนื่อง (Continuous) ตลอดระยะเวลาหนึ่งๆ ที่ทำการศึกษา (สมนึก, น.309)

ดังนั้นเราอาจเรียกการสะสมทุนว่าเป็นสต๊อกของทุน (Capital Stock) ก็ได้ โดยสต๊อกของทุนสามารถเขียนด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เป็นฟังก์ชันของเวลาได้ดังนี้

$$K = K(t)$$

อัตราการสะสมทุน: $$I(t) = \frac{dK}{dt} = K'(t)$$

$I(t)$ คือ มูลค่าการลงทุนสุทธิในช่วงเวลาที่ t

$K(t)$ คือ มูลค่าการสะสมทุนรวม ณ วันสิ้นสุดของช่วงเวลาที่ t

ดังนั้นมูลค่าการสะสมทุนรวมหรือสต๊อกของทุน ณ วันสิ้นสุดของช่วงเวลาที่ t ก็คืออินทิกรัลของอัตราการสะสมทุนหรือมูลค่าการลงทุนสุทธิ เมื่อคำนึงถึงเวลา t

$$\int I(t)dt = \int K'(t)dt = K(t) + K_0$$

Capital Stock เมื่อเริ่มต้นศึกษา $t = 0$, $K(0)$ เพื่อหาค่าคงที่ K_0

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าการหมุนเวียนของการลงทุนมีสมการ $I(t) = 3t^{1/2}$ และสต๊อกของทุนเริ่มต้นเมื่อเวลา $t = 0$ คือ $K(0)$ จงหาวิถีเวลา (time path) ของ K หรือ ฟังก์ชันที่แสดงถึงสต๊อกของทุน

วิธีทำ $$K = \int 3t^{1/2} dt$$

$$K = 2t^{3/2} + K_0$$

ถ้า $t = 0$, $K(0) \to K_0 = 0$

ดังนั้นวิถีของเวลาของ K ก็คือ $K(t) = 2t^{3/2}$

5. การประยุกต์ใช้อินทิกรัลแบบจำกัดเขตในทางเศรษฐศาสตร์

นำมาใช้ทางเศรษฐศาสตร์หลายประการ เช่น แนวคิดว่าด้วยส่วนเกินของผู้บริโภค (Consumer's Surplus) ส่วนเกินของผู้ผลิต (Producer's Surplus) รายรับเมื่อเปรียบเทียบกับต้นทุน การสะสมทุน และมูลค่าปัจจุบันของการหมุนเวียนเงินสด

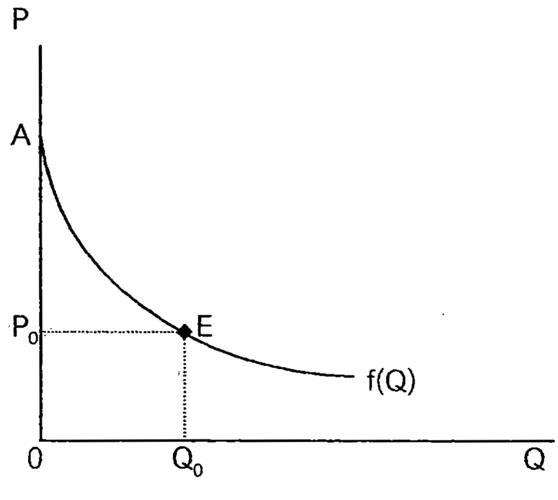
5.1 ส่วนเกินของผู้บริโภค (Consumer's Surplus)

ฟังก์ชันอุปสงค์ $P = f(Q)$ แสดงถึงระดับราคาต่างๆ ที่ผู้บริโภคเต็มใจจ่ายเพื่อซื้อสินค้าปริมาณต่างๆ กัน

สมมติว่า ดุลยภาพตลาดเกิดขึ้นที่ (Q_0, P_0) ผู้บริโภคทุกคนจ่ายในราคาเดียวกันคือ ราคาตลาด P_0 ผู้บริโภคก็จะได้รับผลประโยชน์จากข้อเท็จจริงที่ว่าจ่ายราคา P_0 เท่านั้น

ผลประโยชน์ทั้งหมดของผู้บริโภคสามารถแสดงได้โดยพื้นที่ภายใต้เส้นอุปสงค์ซึ่งอยู่เหนือเส้น $P = P_0$ พื้นที่นี้ Marshall เรียกว่าส่วนเกินของผู้บริโภค พิจารณาภาพที่ 9.2

$$\text{ส่วนเกินของผู้บริโภค} = \int_0^{Q_0} f(Q).dQ - P_0Q_0$$



ภาพที่ 9.2 ส่วนเกินผู้บริโภค

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดฟังก์ชันอุปสงค์ให้ดังนี้ $P = 32 - 4Q - Q^2$ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค (C.S.)

(ก.) ถ้า $Q_0 = 3$ (ข.) ถ้า $P_0 = 27$

วิธีทำ (ก.) ส่วนเกินผู้บริโภค $= \left(\int_0^{Q_0} f(Q)dQ\right) - P_0Q_0$

C.S. $= \left(32Q - 2Q^2 - \frac{Q^3}{3}\Big|_0^3\right) - (11 \times 3)$

$= 69 - 33 \quad = 36$

ดังนั้นส่วนเกินผู้บริโภคมีมูลค่าเท่ากับ 36 บาท

(ข.) ส่วนเกินผู้บริโภค $= \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - P_0Q_0$

ที่ราคาสินค้า (P_0) 27 บาท ปริมาณสินค้า (Q_0) คือ 1 หน่วย

$$C.S. = \left(32Q - 2Q^2 - \frac{Q^3}{3}\bigg|_0^1\right) - (27 \times 1)$$

$$C.S. = 29.67 - 27$$

$$C.S. = 2.67$$

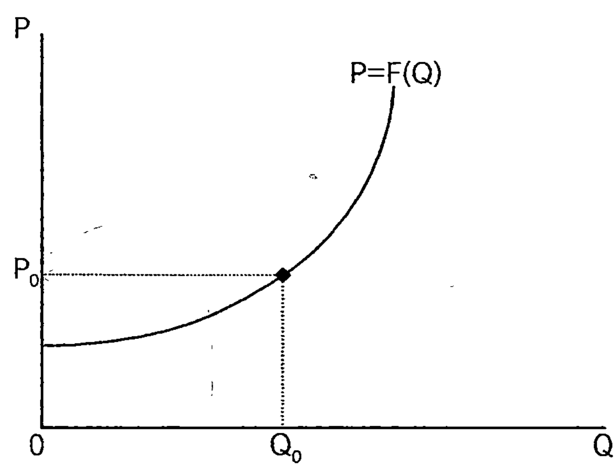
ดังนั้นส่วนเกินผู้บริโภคมีมูลค่าเท่ากับ 2.67 บาท

5.2 ส่วนเกินผู้ผลิต (Producer's Surplus)

ฟังก์ชันอุปทาน $P = F(Q)$ แสดงระดับราคาต่างๆ ที่ผู้ผลิตเต็มใจจะขายสินค้าต่างๆ กัน ถ้าดุลยภาพตลาดเกิดขึ้นที่ (P_0, Q_0) แล้ว ผู้ผลิตเต็มใจขายที่ราคาต่ำกว่า P_0 ก็จะได้รับประโยชน์จากข้อเท็จจริงที่ว่า ราคาที่เขาได้รับนี้คือ P_0

ผลประโยชน์ทั้งหมดของผู้ผลิต สามารถแสดงได้โดยพื้นที่ซึ่งอยู่เหนือเส้นอุปทาน และอยู่ต่ำกว่าเส้น $P = P_0$ พื้นที่ดังกล่าวเรียกว่า ส่วนเกินของผู้ผลิต (P.S) พิจารณา ภาพที่ 9.3

ส่วนเกินของผู้ผลิต $= P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} F(Q)dQ$



ภาพที่ 9.3 ส่วนเกินผู้ผลิต

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ถ้ากำหนดฟังก์ชันอุปทานให้ดังนี้ $P=(Q+2)^2$ และราคา $P_0 = 25$ จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต

<u>วิธีทำ</u> ที่ ราคาสินค้า (P_0) = 25 บาท ปริมาณสินค้า (Q_0) = 3 หน่วย

ส่วนเกินของผู้ผลิต $= P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} F(Q)dQ$

P.S. $= (25\times 3) - \left(\frac{(Q+2)^3}{3} \Big|_0^{3} \right)$

$= 75 - 41.67$

P.S. $= 33.33$

ดังนั้นส่วนเกินผู้ผลิตมีมูลค่าเท่ากับ 33.33 บาท

<u>5.3 รายรับเมื่อเปรียบเทียบกับต้นทุน (กำไร)</u>

กำไรรวม คือ อินทิกรัลของรายรับส่วนเพิ่มลบด้วยต้นทุนส่วนเพิ่มจากจำนวน 0 ถึง จำนวนซึ่งได้กำไรสูงสุด (Q_0)

$$\pi = \int_0^{Q_0} (MR - MC)dQ$$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาผลผลิตตรงจุดกำไรสูงสุด และคำนวณหากำไรรวมจากฟังก์ชันรายรับส่วนเพิ่ม และต้นทุนส่วนเพิ่มถูกกำหนดให้ $MR = 25 - 5Q - 2Q^2$

$$MC = 15 - 2Q - Q^2$$

<u>วิธีทำ</u>

ปริมาณผลผลิตที่ได้รับกำไรสูงสุด คือที่ $MR = MC$

$$25 - 5Q - 2Q^2 = 15 - 2Q - Q^2$$

เมื่อแก้สมการ ทำให้ได้ปริมาณผลผลิตที่ได้รับกำไรสูงสุดคือ $Q_0 = 2$ หน่วย

กำไรรวม: $\pi = \int_0^{Q_0} (MR - MC)dQ$

$$\pi = \int_0^{2} (25 - 5Q - 2Q^2 - 15 + 2Q + Q^2)dQ$$

$$= \int_0^{2} (10 - 3Q - Q^2)dQ$$

$$= 10Q - \frac{3}{2}Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 \Big|_0^2$$

$$= 11.33$$

ดังนั้นระดับผลผลิตที่กำไรสูงสุดเท่ากับ 2 หน่วย และระดับกำไรรวมเท่ากับ 11.33 บาท

5.4 การสะสมทุน

การสะสมทุนระหว่างระยะเวลา a,b

$$\int_a^b I(t)dt = K(b) - K(a)$$

$$= \int_a^b \frac{dK}{dt}dt = \int_a^b dK = K(t)\Big|_a^b$$

$K(t)$ = ปริมาณของทุน K ที่มีอยู่ในแต่ละจุดของเวลา

$I(t)$ = อัตราของการลงทุนสุทธิต่อปีในแต่ละจุดของเวลา

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า $I(t) = at^{1/2}$ ล้านบาทต่อปี จงหาการสะสมทุนระหว่างช่วงเวลา (1, 4)

วิธีทำ

$$K(t)\Big|_1^4 = \int_1^4 I(t)dt$$

$$= \int_1^4 at^{1/2}dt$$

$$= \frac{2}{3}at^{3/2}\Big|_1^4$$

$$= \frac{14}{3}a \text{ ล้านบาท}$$

ดังนั้นในช่วงเวลาตั้งแต่ปีที่ 1 ถึงปีที่ 4 มีการสะสมทุนคิดเป็นมูลค่า $\frac{14}{3}a$ ล้านบาท (เมื่อ a คือค่าคงที่ใดๆ)

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1.) $\int \frac{3}{2} dx$

2.) $\int 0\, dx$

3.) $\int \sqrt{2}\, dx$

4.) $\int \sqrt{x}\, dx$

5.) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

6.) $\int \frac{x^2}{2}\, dx$

7.) $\int \frac{3}{\sqrt{x}}\, dx$

8.) $\int (5x-3)^3(5)\, dx$

9.) $\int 8e^{2x+3} dx$

10.) $\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x} dx$

11.) $\int \frac{a}{\sqrt[b]{x^n}} dx$

12.) $\int (x^2-2x)^5(x-1)\, dx$

13.) $\int x^2 e^{3x^3}\, dx$

14.) $\int \frac{6x}{3x^2-10}\, dx$

15.) $\int \ln x\, dx$

16.) $\int xe^x\, dx$

2. ต้นทุนหน่วยสุดท้าย $C'(Q)$ เป็นฟังก์ชันของหน่วยผลิต Q อยู่ในรูป $C'(Q) = 2 + 60Q - 5Q^2$ จงหาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดและต้นทุนเฉลี่ย ถ้าต้นทุนคงที่ เท่ากับ 65

3. ถ้า $MPS = \frac{1}{3}$ เมื่อ $Y = 0, C = 11$ ล้านบาท จงหาฟังก์ชันการบริโภค

4. ถ้ากำหนดอุปสงค์และอุปทานตลาดดังนี้

อุปสงค์: $P = 60 - q - q^2$

อุปทาน: $P = 10 + 4q$

จงคำนวณหาส่วนเกินผู้บริโภคและส่วนเกินผู้ผลิต ณ ระดับราคาและปริมาณดุลยภาพ

5. ถ้าการหมุนเวียนของการลงทุนถูกกำหนดให้โดย $I(t) = 15t^{\frac{1}{4}}$ และสต็อกของทุนเริ่มต้นเมื่อ t = 0 คือ 30 จงหาฟังก์ชันที่แสดงถึงสต็อกของทุน K

เอกสารอ้างอิง

Blume, L. and Simon C. (1945). *Mathematics for Economists.* New York : Norton&Company.

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** **3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.**

Wisniewski , M. (1996). *Introductory Mathematical Methods in Economics.* 2nd ed. London : McGraw -Hill.

ดาราวรรณ วิรุฬหผล. (2544). ***การวิเคราะห์เชิงปริมาณขั้นสูง.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สมนึก ทับพันธุ์. (2550). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บทที่ 10

สมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equation)

ความมุ่งหมายของบทเรียน

1. เพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจรูปแบบของสมการผลต่างสืบเนื่อง
2. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในการหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตและลักษณะของการโน้มเข้าสู่ดุลย-ภาพ
4. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำแนวคิดสมการการผลต่างสืบเนื่องไปประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์ได้
5. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถี

เนื้อหา

1. สมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก (First-Order Linear Difference Equations)
2. การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก
3. เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ
4. การโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ
5. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์
    1) แบบจำลองใยแมงมุม (The Cobweb Model)
    2) แบบจำลองภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง
6. การวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถี

กิจกรรมและวิธีสอน

1. บรรยายในชั้นเรียน
2. อธิบายข้อซักถาม
3. ฝึกทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

อุปกรณ์การสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. แผ่นใสประกอบการบรรยายด้วยเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ
3. แบบทดสอบในชั้นเรียน

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมผู้เรียน
2. ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย

สมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equation) เป็นเครื่องมือหนึ่งในการศึกษาแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวเนื่องกับเวลา (t) เต็มหน่วย (Discrete Time) โดยค่าของตัวแปรตาม (y) จะเปลี่ยนไปก็ต่อเมื่อตัวแปรอิสระ (t) เปลี่ยนไปจากค่าจำนวนเต็มค่าหนึ่ง ไปสู่ค่าจำนวนเต็มอีกค่าหนึ่ง ค่าของเวลาในที่นี้หมายถึง ช่วงหรือคาบเวลา โดยที่ถ้า $t = 1$ หมายถึง คาบเวลา 1, $t = 2$ หมายถึง คาบเวลา 2 เป็นต้น ฉะนั้น ค่า y จะเป็นค่าของแต่ละคาบเวลา เขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้:

$$y = y(t)$$
$$t = 1, 2, 3, \ldots$$

ด้วยเหตุที่การวิเคราะห์ในลักษณะของเวลาเต็มหน่วย เวลา t จะต้องเป็นค่าจำนวนเต็มเท่านั้น ดังนั้นเมื่อต้องการเปรียบเทียบค่าของ y ระหว่างคาบเวลาที่ติดต่อกัน 2 คาบเวลา จึงต้องเขียนในรูป $\Delta y = 1$

$$\begin{aligned} y &= y_0 \quad , \quad 0 \le t < 1 \\ y &= y_1 \quad , \quad 1 \le t < 2 \\ y &= y_2 \quad , \quad 2 \le t < 3 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

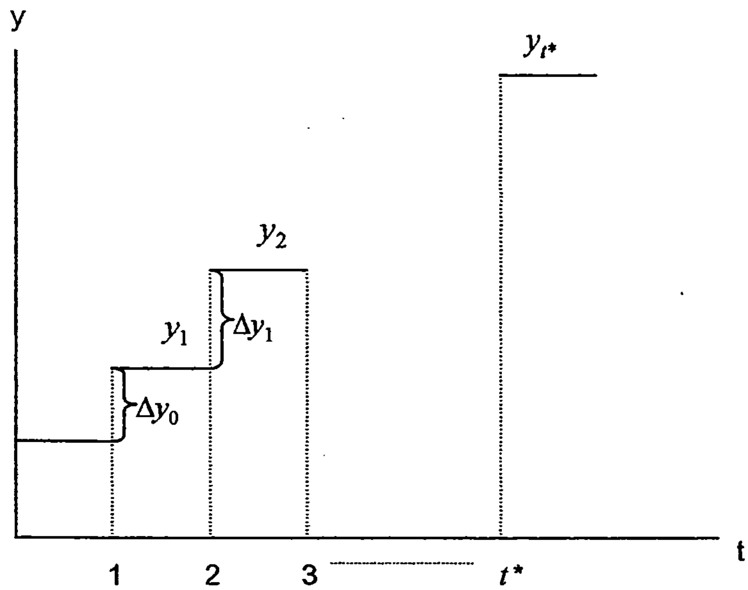
$\Delta t = 1$ เสมอ

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม ต่อ 1 ช่วงเวลา $= \Delta y$

Δy สามารถมีค่าได้หลายลักษณะ ขึ้นกับการเปลี่ยนแปลงคาบเวลาของ y ว่าได้เปลี่ยนจากคาบเวลาใด ไปสู่คาบเวลาใด จากสองคาบเวลาที่ติดต่อกันนั้น

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_2 \\ y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 \\ &\vdots \\ \Delta y_t &= y_{t+1} - y_t \end{aligned} \qquad (1)$$

อาทิ $\Delta y_t = 3$ หรือ $y_{t+1} - y_t = 3$ เราเรียกรูปแบบตามสมการที่ (1) ว่า **สมการผลต่างสืบเนื่อง** (Difference Equations) พิจารณาได้จากภาพที่ 10.1



ภาพที่ 10.1 การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่มีต่อช่วงเวลา

1. สมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก (First-Order Linear Difference Equations)

- ถ้า $y = y(t)$

ให้ y_t เป็นค่าของ y ในช่วงเวลาที่ t

และ y_{t+1} เป็นค่าของ y ในช่วงเวลาที่ $t+1$

ดังนั้น
$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t \qquad (1)$$

- ถ้า $\Delta y_t = k$ (2)

$$\therefore y_{t+1} - y_t = k \qquad (2')$$

หรือ
$$y_{t+1} = k + y_t \qquad (2'')$$

- ถ้า $\Delta y_t = r y_t$ (3)

$$\therefore y_{t+1} - y_t = r y_t$$

$$y_{t+1} = (1+r) y_t \qquad (3')$$

หรือ
$$y_{t+1} - (1+r) y_t = 0 \qquad (3'')$$

(2) และ (3) คือ สมการผลต่างสืบเนื่อง

(2') และ (2") คือ สมการผลต่างสืบเนื่องที่ Derived มาจากสมการที่ (2)

(3') และ (3") คือ สมการผลต่างสืบเนื่องที่ Derived มาจากสมการที่ (3)

(2), (2') และ (2") เป็น สมการผลต่างสืบเนื่องแบบ Non-homogenous

(3), (2') และ (3") เป็น สมการผลต่างสืบเนื่องแบบ Homogenous

ทั้งนี้ ทุกๆ สมการจัดเป็น สมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก ซึ่งแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หนึ่งช่วงเวลา คือ Δy_t หรือแสดงค่าความแตกต่างของ y ในช่วงเวลาหนึ่ง กับค่า y ในช่วงเวลาที่ผ่านมาหนึ่งช่วงเวลาติดต่อกัน $\left[y_{t+1} - y_t\right]$

2. การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับแรก

เป้าหมายของการหาผลเฉลย ก็คือ การหากาลวิถี (Time Path) ของตัวแปร $y(t)$ และกาลวิถีนั้นก็จะต้องขึ้นอยู่กับเวลา t

วิธีการหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องดังกล่าว จะสามารถดำเนินการได้ดังนี้

1) วิธีการทำซ้ำ (Iterative Method)

เป็นวิธีการหาผลเฉลยอย่างง่าย โดยเริ่มจากค่าของ y เบื้องต้น (y_0) แล้วหาค่า y_1 จากสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด เมื่อได้ y_1 ก็หาค่า y_2 ต่อไป ดำเนินการในลักษณะนี้ซ้ำกันต่อไปเรื่อยๆ ที่สุดก็จะได้กาลวิถีตามต้องการ

<u>ตัวอย่างที่1</u> กำหนดให้ $\Delta y_t = 2$ ค่าของ y เบื้องต้น คือ 15 จงหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องโดยใช้วิธีการทำซ้ำ

<u>วิธีทำ</u>

$$y_{t+1} - y_t = \Delta y_t$$

$$y_{t+1} - y_t = 2$$

$$y_{t+1} = y_t + 2$$

t = 0; $\quad y_1 = y_0 + 2$

t = 1; $\quad y_2 = y_1 + 2 = (y_0 + 2) + 2 = y_0 + 2(2)$

t = 2; $\quad y_3 = y_2 + 2 = (y_1 + 2) + 2 = \{(y_0 + 2) + 2\} + 2 = y_0 + 2(3)$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

กาลวิถี t $\quad y_t = y_{t-1} + 2 = y_0 + 2(t)$

ในกระบวนการหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง กรณี Homogenous Equation โดยวิธีการทำซ้ำ จะช่วยให้เราสามารถพัฒนาหาผลเฉลยในลักษณะทั่วไปได้ดังต่อไปนี้

สมมติสมการผลต่างสืบเนื่องคือ $y_{t+1} - by_t = 0$

จัดรูปสมการใหม่ $y_{t+1} = by_t$

แทนค่า t เป็นช่วงเวลาต่างๆ

$$
\begin{aligned}
y_1 &= by_0 \\
y_2 &= by_1 = b(by_0) = b^2 y_0 \\
y_3 &= by_2 = b(b^2 y_0) = b^3 y_0 \\
&\vdots \\
\text{ดังนั้น} \quad y_t &= b^t y_0
\end{aligned}
$$

สมมติให้ A เป็นค่าคงที่ใดๆ แทน y_0

$$\therefore \quad y_t = Ab^t \qquad \text{เป็นผลเฉลยในลักษณะทั่วไป}$$

จากรูปแบบของผลเฉลยทั่วไปจะเห็นได้ว่า กาลวิถี y_t จะขึ้นอยู่กับค่าของ b เป็นสำคัญ

2) วิธีมาตรฐานทั่วไป (General Method)

การพิจารณาหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องในรูปมาตรฐานทั่วไป จะมีลักษณะแนวคิดและหลักการดังต่อไปนี้

ถ้าสมการผลต่างสืบเนื่องที่ต้องการหาผลเฉลย คือ

$$y_{t+1} + ay_t = c \qquad ; a,\ c \text{ เป็นค่าคงที่}$$

เราสามารถหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง หรือหา y_t ได้ โดยที่ผลเฉลยลักษณะทั่วไปของสมการ จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

(1) Complementary Function: y_c คือผลเฉลยลักษณะทั่วไปของสมการลดรูป

(2) Particular Integral: y_p คือผลเฉลยเฉพาะใดๆ ของ Complete Non-homogenous Equations

y_c คือ ระดับดุลยภาพของ y

y_p คือ ส่วนเบี่ยงเบนของกาลวิถีจากดุลยภาพ

$\boxed{\text{หา } y_c}$:จาก Reduced Equation

(1) จาก $y_{t+1} + ay_t = c$

(2) $y_{t+1} + ay_t = 0$: สมการลดรูป หรือ Homogenous Equations

ให้ $y_t = Ab^t$

และ $Ab^t \neq 0$

ดังนั้น $y_{t+1} = Ab^{t+1}$

แทนค่า ใน (2)

$$Ab^{t+1} + aAb^t = 0$$
$$Ab^t(b+a) = 0$$
$$\because Ab^t \neq 0 \quad \therefore b + a = 0$$
$$b = -a$$
$$\therefore \quad y_c = A(-a)^t$$

$\boxed{\text{หา } y_p}$: กระทำได้โดยพิจารณาผลเฉลยเฉพาะของ Non-homogenous Equation ในลักษณะของค่าคงที่

➢ กรณี $a \neq -1$

ให้ $y_t = k$ (k = ค่าคงที่)

ดังนั้น $y_{t+1} = k$ ด้วย

จาก $y_{t+1} + ay_t = c$

$$k + ak = c$$
$$(1+a)k = c$$
$$k = \frac{c}{1+a}$$

$\therefore \quad y_p = \dfrac{c}{1+a}$, $a \neq 1$ แสดงระดับดุลยภาพที่ถาวร (stationary equilibrium)

➢ กรณี $a \neq -1$ ค่า $y_p = \dfrac{c}{1+a}$ จะหาค่าไม่ได้ จึงจำเป็นต้องหา y_p จากสมการที่มิใช่ค่าคงที่

ให้ $y_t = k\,t$ $\quad \therefore \; y_{t+1} = k(t+1)$

จาก $y_{t+1} + ay_t = c$

$$k\ (t+1) + a(kt) = c$$

$\because a = -1,\ k\ (t+1) - kt = c$

$$k = c$$

$\therefore \quad y_p = ct\ ,\ a = -1$ แสดงดุลยภาพสภาพเคลื่อนไหว (moving equilibrium) ที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า เราจะได้ผลเฉลยทั่วไป: $y_t = y_c + y_p$ ดังนี้

ผลเฉลยทั่วไป (General solution):

กรณี $a \neq -1$: $y_t = A(-a)^t + \dfrac{c}{1+a}$

กรณี $a = -1$: $y_t = A(-a)^t + ct$

$$= A + ct$$

ผลเฉลยเฉพาะเจาะจง (Definite solution): เป็นการแทนค่า $t = 0$ เพื่อหาค่า A ของสมการผลต่างสืบเนื่อง

กรณี $a \neq -1$ จาก $y_t = A(-a)^t + \dfrac{c}{1+a}$

$$t = 0,\ y_0 = A(-a)^0 + \frac{c}{1+a}$$

$$\therefore \quad y_t = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

กรณี $a = -1$ จาก $y_t = A + ct$

$$t = 0,\ A + c(0) = A$$

$$\therefore \quad y_t = y_0 + ct$$

ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถทดสอบความถูกต้องได้ดังกระบวนการต่อไปนี้

(1) ทดสอบการสนองตอบตามเงื่อนไขเบื้องต้น:

จากผลเฉลย Definite solution เมื่อ $a \neq -1$

$$y_t = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

เมื่อ $t = 0$:

$$y_0 = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right] + \frac{c}{1+a}$$

$$y_0 = y_0$$

$\therefore$ ผลเฉลยตอบสนองเงื่อนไขเบื้องต้นจริง

(2) ทดสอบเพื่อยืนยันสมการผลต่างสืบเนื่องดั้งเดิม:

จาก $y_{t+1} + ay_t = c$ (1)

Definite solution: $y_t = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}$

แล้ว $y_{t+1} = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a}$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า y_t และ y_{t+1} ใน (1) จะได้ว่า

$$\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} + \left\{\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}\right\} = c$$

$$\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} + a\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + a\left(\frac{c}{1+a}\right) = c$$

$$\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} - (-a)\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + a\left(\frac{c}{1+a}\right) = c$$

$$\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} - \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + a\left(\frac{c}{1+a}\right) = c$$

$$\left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} - \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^{t+1} + a\left(\frac{a}{1+a}\right) = c$$

$$\frac{c}{1+a} + a\left(\frac{c}{1+a}\right) = c$$

$$\frac{c}{1+a}(1+a) = c$$

$$c = c$$

นั่นคือ ผลเฉลยข้างต้นเป็นผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนดจริง

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง

$$y_{t+1} - 3y_t = 1 \text{ เมื่อ } y_0 = \frac{3}{2}$$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เป็นกรณีที่ $a \neq -1$

ผลเฉลยทั่วไป:

หา y_c จาก $y_c = A(-a)^t$

ดังนั้น $y_c = A(-(-3))^t = A(3)^t$

หา y_p จาก $y_p = \dfrac{c}{1+a} = \dfrac{1}{1+(-3)} = -\dfrac{1}{2}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่องนี้คือ $y_t = A(3)^t - \dfrac{1}{2}$

ผลเฉลยเฉพาะเจาะจง:

การแทนค่า $t = 0$ ในสมการผลเฉลยทั่วไปเพื่อหาค่า A

$t = 0$: $y_0 = A(3)^0 - \dfrac{1}{2}$

โจทย์กำหนดให้ $y_0 = \dfrac{3}{2}$

$$\frac{3}{2} = A - \frac{1}{2}$$

$$A = 2$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะเจาะจงของสมการผลต่างสืบเนื่องนี้คือ $y_t = 2(3)^t - \dfrac{1}{2}$

ข้อสังเกต:

สมการผลต่างสืบเนื่องที่หาผลเฉลยโดยวิธีมาตรฐานทั่วไป ต้องสร้างรูปแบบที่สัมประสิทธิ์ของ y_{t+1} เป็น "1" เท่านั้น

3. เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ

ตามที่ได้กล่าวแล้วว่า สมการผลต่างสืบเนื่องเป็นการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ในรูปลักษณะของเวลาเต็มหน่วย (Discrete Time) เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ จะขึ้นอยู่กับพจน์" Ab^t " เป็นสำคัญ และเมื่อ A เป็นค่าคงที่ใดๆ ทำให้เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพขึ้นกับค่า b

ถ้า y เปลี่ยนแปลงตามช่วงเวลา เมื่อเวลาผ่านไป เกิดสภาพสมดุลหรือไม่ สภาพสมดุลที่เกิดขึ้นเป็นอย่างไร มีเสถียรภาพหรือไม่ ซึ่งพิจารณาได้จาก General Solution ของ y (ซึ่งแสดงค่า y ในช่วงเวลาใดๆ)

$y_t = y_c + y_p$

$y_c = Ab^t$ คือค่า y_t ที่เบี่ยงเบนจากระดับสมดุล

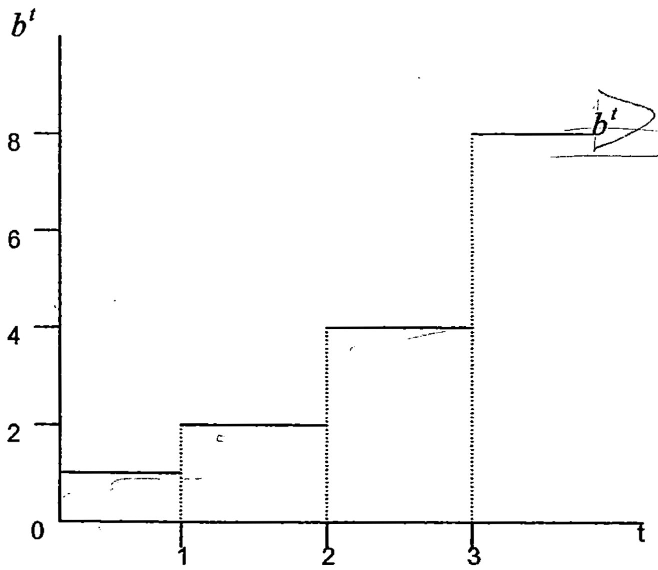
y_p คือ ระดับสมดุลของ y_t

เมื่อเวลาผ่านไป $t \to \infty$ ถ้า $y_c = 0$ ย่อมทำให้ $y_t \to y_p$ เกิดสภาพสมดุล

เนื่องจาก $y_c = Ab^t$, A, b เป็นค่าคงที่ ดังนั้นดุลยภาพของกาลวิถีจะมีเสถียรภาพหรือไม่ ขึ้นอยู่กับว่าเมื่อ $t \to \infty$ แล้ว y_c จะมีแนวโน้มอย่างไร เมื่อ t เพิ่มขึ้นตลอดไปนั้น ก็ขึ้นอยู่กับค่าของ y เป็นสำคัญตัวหนึ่ง

ในการวิเคราะห์นี้จะแบ่งค่าของ b ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้ ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$ ออกเป็น 7 ช่วงเขตค่าด้วยกัน

(1) $b > 1$, $|b| > 1$ เช่น $b = 2$ t = 0, 1, 2, 3,...



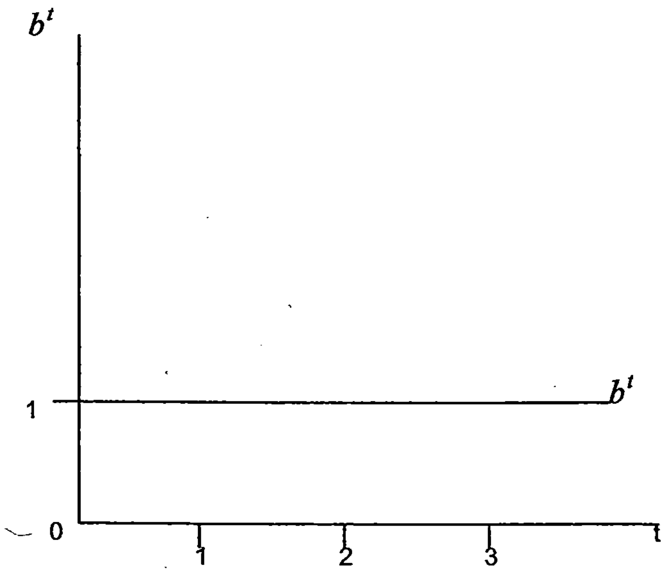
$b^t = (2)^t = 1, 2, 4, 8,...$

$\therefore b^t$ เพิ่มค่าขึ้น ตามค่า t ที่เพิ่มขึ้น

"Explosive non-oscillation"

ภาพที่ 10.2.1

(2) $b = 1, |b| = 1$ ให้ $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

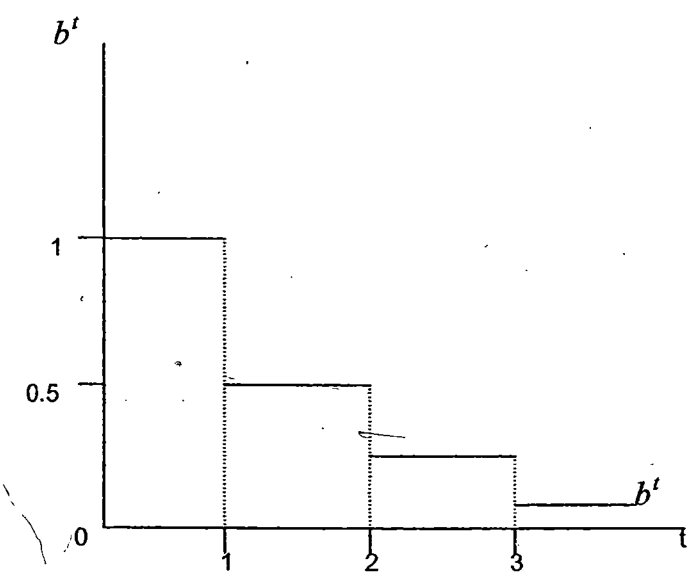


$b^t = (1)^t = 1, 1, 1, 1, \ldots$

"Constant"

ภาพที่ 10.2.2

(3) $0 < b > 1, |b| < 1$



อาทิ $b = \frac{1}{2}, t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

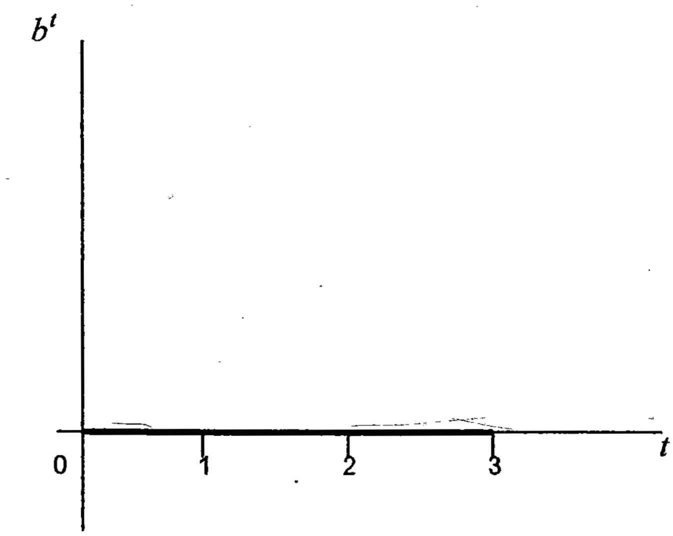
$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

$\therefore$ b^t จะลดค่าลงเรื่อยๆ เมื่อ t เพิ่มขึ้น

"Damped Non-oscillation"

ภาพที่ 10.2.3

(4) b =0, $|b| = 0$



$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

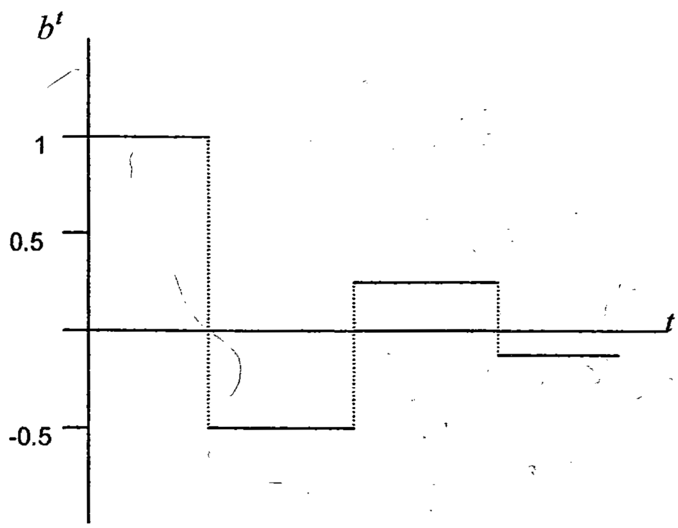
$(0)^t = 0$

เป็นเขตที่นอกเหนือความสนใจ เพราะเป็นเขตที่ $b = 0$ ทำให้ $b^t = 0$ และ $Ab^t = 0$ ขัดกับสมมติฐานที่ว่า $Ab^t \neq 0$

"Constant"

ภาพที่ 10.2.4

(5) -1 < b > 0, $|b| < 0$



อาทิ $b = \left(-\frac{1}{2}\right)$, t = 0, 1, 2, 3,...

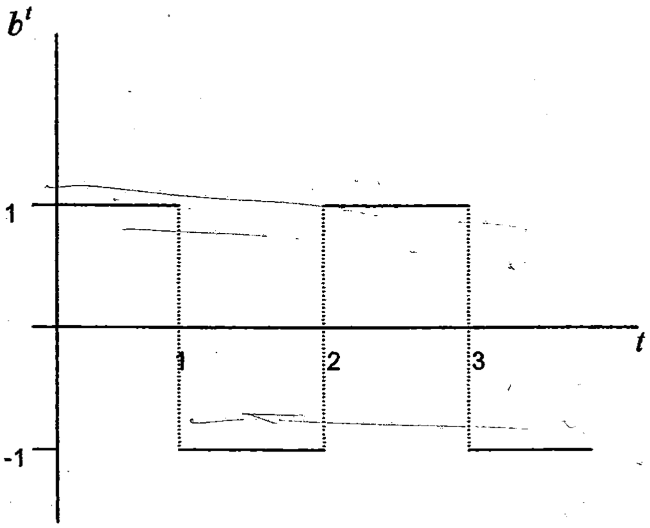
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^t = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$$

เมื่อ t เพิ่มค่าขึ้น ค่า b^t เป็นค่าบวกน้อยลง และลบน้อยลง สลับกลับกันไปมาเป็นช่วงๆ

"Damped oscillation"

ภาพที่ 10.2.5

(6) $b = -1,\ |b| = 1$



$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

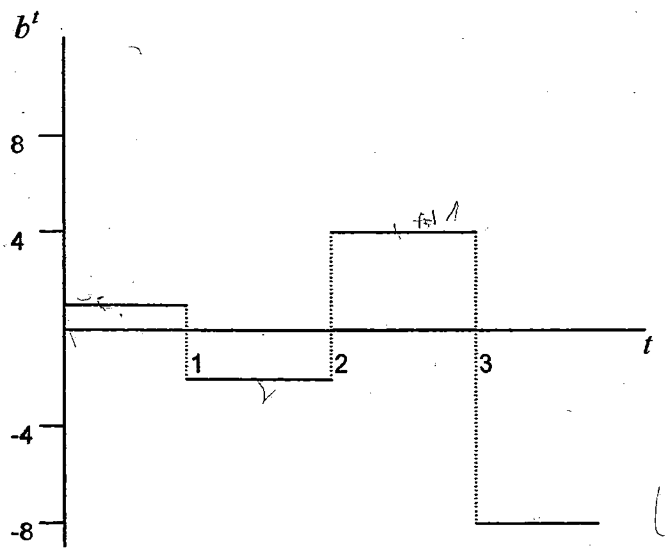
$(-1)^t = 1, -1, 1, -1, \ldots$

เมื่อ t เพิ่มค่า ค่า b^t สลับสับเปลี่ยนห่างจากแกนนอนเท่ากัน

"Damped oscillation"

<u>ภาพที่ 10.2.6</u>

(7) $b < -1,\ |b| > 1$



เช่น $b = -2$, t = 0, 1, 2, 3,...

$(-2)^t = 1, -2, 4, -8, \ldots$

เมื่อ t เพิ่มค่าขึ้น ค่า b^t บวกมากขึ้น สลับกันลบมากขึ้น

(มีแนวโน้มห่างจากแกนนอน)

"Explosive Oscillation"

<u>ภาพที่ 10.2.7</u>

<u>ภาพที่ 10.2</u> เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพในลักษณะต่างๆ

สรุป

(1) ถ้า $b > 0$ กาลวิถีจะไม่แกว่งกวัด (non-oscillatory) เขต (1), (2), (3)

(2) ถ้า $b < 0$ กาลวิถีจะแกว่งกวัด (oscillatory) เขต (5), (6), (7)

(3) ถ้า $|b| > 1$ กาลวิถีจะไม่โน้มเข้าสู่ค่าจำเพาะ เขต (1), (7) เรียก **Divergent**

(4) ถ้า $|b| < 1$ กาลวิถีจะโน้มเข้าสู่ค่าจำเพาะ เขต (3), (5) เรียก **Convergent**

บทบาทของ A

ค่าของ A มีบทบาทให้กาลวิถีขยายขนาดใหญ่ขึ้น หรือไม่ก็ย่อขนาดลง เช่น

- ถ้า $A > 1$ เช่น $A = 5$ กาลวิถีก็จะถูกขยายขึ้น
- ถ้า $0 < A < 1$ เช่น $A = \frac{1}{3}$ กาลวิถีก็จะถูกย่อขนาดลง

โดยไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเดิมของกาลวิถี b^t ที่ได้มาแต่อย่างใด นอกจาก A จะมีผลต่อขนาดแล้ว ยังมีผลต่อรูปร่างของกาลวิถีในลักษณะของการกลับตรงกันข้าม

ถ้า $A < 0$ เช่น $A = -1$ กาลวิถีจะกลับไปอยู่ด้านตรงข้ามของแกนนอนของภาพเดิมในลักษณะภาพสะท้อนกลับ (Mirror Effect)

ถ้า $A > 0$ เป็นภาพปกติ

สรุป A อาจมีบทบาทต่อขนาด และต่อรูปร่างของกาลวิถีในขณะเดียวกัน และพร้อมกันได้

4. การโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ

$$y_t = y_c + y_p \quad = \quad Ab^t + y_p$$

ถ้า $y_c \to 0$ ย่อมทำให้ $y_t \to y_p$ เกิดสภาพสมดุล

ถ้า $A = 0$ เกิดสภาพสมดุลเสมอ

ถ้า $A \neq 0$ และหาค่าได้ เมื่อเวลาผ่านไป $(t \to \infty)$ $b^t \to 0$ ย่อมเกิดสภาพสมดุล

ถ้า $|b| < 1$ เมื่อ t เพิ่มขึ้น $(t \to \infty)$ $b^t \to 0$ เสมอ

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาลักษณะแนวโน้มของกาลวิถี

$$y_t = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^t + 10$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ

$$A = 3$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$y_p = 10$$

จากการที่ $b = -\frac{1}{2} < 0$ ดังนั้นกาลวิถีจะแกว่งกวัด สลับกันไปมาระหว่างค่าบวกกับค่าลบ แต่ด้วยเหตุที่ $|b| = \frac{1}{2} < 1$ ดังนั้น การแกว่งกวัด (Oscillatory) ดังกล่าวจะแคบลงๆ เป็นลำดับ จะโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ y_p หรือดุลยภาพที่มีค่าเท่ากับ 10

5. การประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์

<u>5.1 แบบจำลองใยแมงมุม (The Cobweb Model)</u>

เป็นเรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์แบบจำลองภาวะตลาดสินค้าชนิดเดียว ในลักษณะที่การเสนอขาย (Supply) ขึ้นอยู่กับราคาสินค้าของช่วงเวลาก่อนหน้าคาบเวลาที่กำลังพิจารณาอยู่ มักเกี่ยวกับเรื่องราวของผู้ผลิตที่จะต้องวางแผนตัดสินใจเกี่ยวกับจำนวนหรือปริมาณผลผลิตก่อนที่จะมีการเสนอขายจริง 1 ช่วงคาบเวลา เช่น การผลิตทางการเกษตร ต้องวางแผนการผลิตหรือการเพาะปลูกล่วงหน้าให้เหมาะสมกับช่วงเวลาการเก็บเกี่ยวและการขาย เพราะการเพาะปลูกต้องอาศัยการดำเนินการ

ถ้าระดับราคาตลาดในช่วงเวลาที่ผ่านมาสูง จะจูงใจให้เกษตรกร ผลิตสินค้ามาขายในช่วงเวลานี้มาก

ตรงกันข้าม ถ้าระดับราคาตลาดในช่วงเวลาที่ผ่านมาต่ำ จะจูงใจให้เกษตรกรผลิตสินค้ามาขายในช่วงเวลานี้น้อย

โครงสร้างตลาด

ปริมาณซื้อ : $Q_t^d = a - bP_t$ $,a,\ b > 0$

ปริมาณขาย : $Q_t^s = -c + dP_{t-1}$ $,c,\ d > 0$

ราคาตลาด : $Q_t^d = Q_t^s$

ความสัมพันธ์ระหว่างราคาและปริมาณสินค้าในตลาด

$$\begin{aligned} Q_t^d &= Q_t^s \\ a - bP_t &= -c + dP_{t-1} \\ bP_t + dP_{t-1} &= a + c \end{aligned}$$

แปลงให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่อง และเลื่อนเวลา t ขึ้นอีก 1 คาบเวลา

$$bP_{t+1} + dP_t = a + c$$

ดังนั้น $$P_{t+1} + \frac{d}{b}P_t = \frac{a+c}{b}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองสมการผลต่างสืบเนื่อง $y_{t+1} + ay_t = c$ จะพบว่า

$y \rightarrow P$

$a \rightarrow \frac{d}{b}$ $\quad \frac{d}{b} \neq 1$ เนื่องจาก b และ $d > 0$

$c \rightarrow \frac{a+c}{b}$

➢ หาผลเฉลย กรณี $a \neq -1$

ผลเฉลยทั่วไป (General solution): $y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a}$

เมื่อ $y_c = A(-a)^t$ และ $y_p = \frac{c}{1+a}$

Complementary function: $P_c = A\left(\frac{-d}{b}\right)^t$

Particular integral: $$P_p = \left[\frac{a+c}{b}\right] \Big/ \left[1 + \frac{d}{b}\right] = \frac{a+c}{b+d} = \overline{P}$$

ผลเฉลยทั่วไป: $P_t = A\left(\frac{-d}{b}\right)^t + \frac{a+c}{b+d}$

ผลเฉลยเฉพาะเจาะจง (Definite Solution):

$$t=0 \rightarrow P_0 = A\left(\frac{-d}{b}\right)^0 + \frac{a+c}{b+d}$$

$$P_0 = A + \frac{a+c}{b+d}$$

$$A = P_0 - \frac{a+c}{b+d} = P_0 - \overline{P}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะเจาะจงคือ $P_t = (P_0 - \overline{P}) \times \left(\frac{-d}{b}\right)^t + \frac{a+c}{b+d}$

<u>การวิเคราะห์กาลวิถีลักษณะใยแมงมุม</u>

เมื่อได้กาลวิถีของราคาแล้ว ก็จะวิเคราะห์ลักษณะการโน้มตัวของกาลวิถีดังกล่าว

- $\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} > 0$ เนื่องจาก a, b, c และ $d > 0$ แสดงดุลยภาพที่เป็นจริงและคงที่
- ค่า $(P_0 - \overline{P})$ เปรียบได้กับค่าคงที่ A ในพจน์ Ab^t ดังนั้น

  $|P_0 - \overline{P}| > 0$ ราคาตลาดอยู่สูงกว่าราคาดุลยภาพ (แสดงการขยายขนาด)

  $|P_0 - \overline{P}| < 0$ ราคาตลาดอยู่ต่ำกว่าราคาดุลยภาพ (แสดงการย่อขนาด)

  $|P_0 - \overline{P}| = 0$ ราคาเข้าสู่ดุลยภาพ
- $\left(\frac{-d}{b}\right)$ เปรียบได้กับค่า b ในพจน์ Ab^t

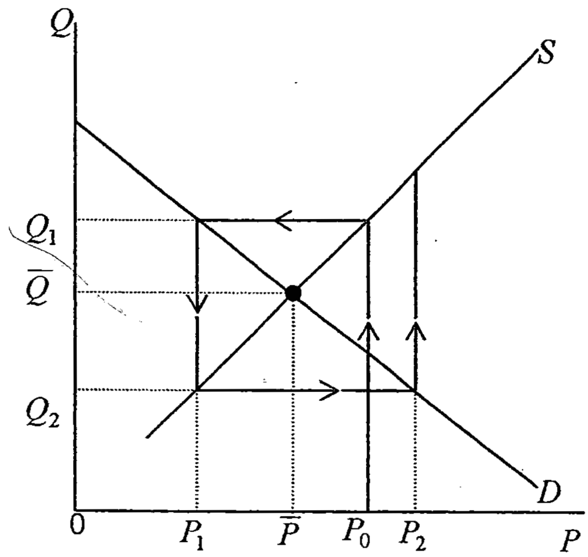
  ในที่นี้ d และ $b > 0$ ดังนั้น $\left(\frac{-d}{b}\right) < 0$

ดังนั้น $\left(\frac{-d}{b}\right)^t < 0$ ในช่วงเวลา $t = 1, 3, 5, \ldots$

และ $\left(\frac{-d}{b}\right)^t > 0$ ในช่วงเวลา $t = 0, 2, 4, \ldots$

ดังนั้น $\left(\frac{-d}{b}\right)^t$ จะเป็นกาลวิถีในรูป Oscillatory ซึ่งมีได้ 3 รูปแบบ ขึ้นกับค่าของ d และ b

(1) $b < d$: เส้นอุปทานมีความชันมากกว่าเส้นอุปสงค์, $\left|\frac{-d}{b}\right| > 1$ สมมติว่า ราคาเบื้องต้น $(P_0) > \overline{P} \rightarrow (P_0 - \overline{P}) > 0$ ใยแมงมุมมีลักษณะExplosive

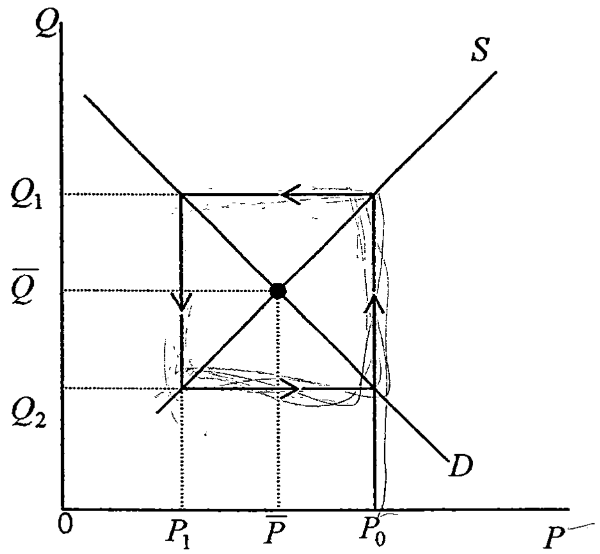


$P_t < \overline{P}$	ในช่วงเวลาเลขคี่
$P_t > \overline{P}$	ในช่วงเวลาเลขคู่
ทำให้	
$Q_t < \overline{Q}$	ในช่วงเวลาเลขคู่
$Q_t > \overline{Q}$	ในช่วงเวลาเลขคี่

ภาพที่ 10.3.1

ดังนั้นราคาและปริมาณสินค้าในตลาดในช่วงเวลาต่างๆ แตกต่างจากราคาดุลยภาพ และปริมารดุลยภาพมากขึ้นๆ ตามช่วงเวลา

(2) $b = d$: เส้นอุปทานมีความชันเท่ากับเส้นอุปสงค์, $\left|\frac{-d}{b}\right|$ = 1 สมมติว่า ราคาเบื้องต้น $(P_0) > \overline{P}$ $\rightarrow$ $(P_0 - \overline{P}) > 0$ ใยแมงมุมมีลักษณะ Regular



$P_t < \overline{P}$ ในช่วงเวลาเลขคี่

$P_t > \overline{P}$ ในช่วงเวลาเลขคู่

ทำให้

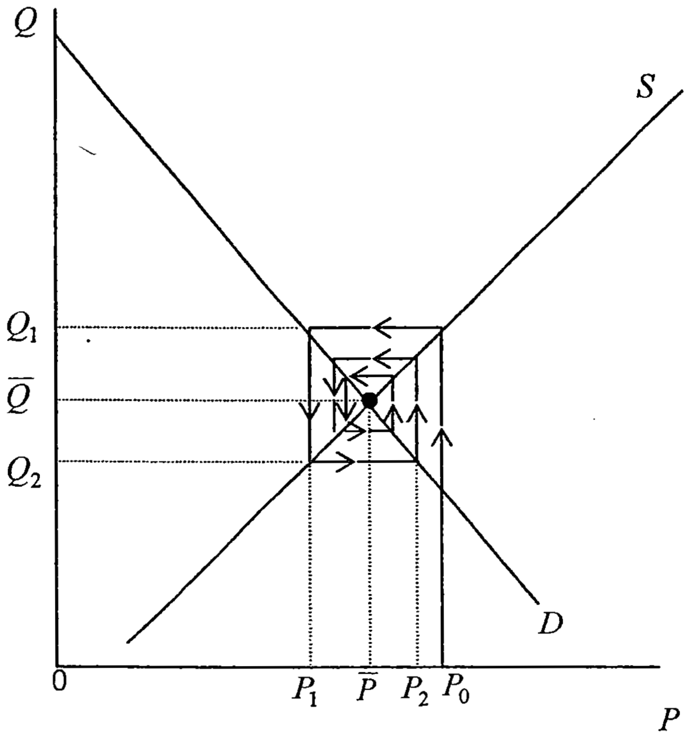
$Q_t < \overline{Q}$ ในช่วงเวลาเลขคู่

$Q_t > \overline{Q}$ ในช่วงเวลาเลขคี่

<u>ภาพที่ 10.3.2</u>

ดังนั้นราคาตลาดและปริมาณสินค้าในช่วงเวลาต่างๆ แตกต่างจากราคาดุลยภาพและปริมาณดุลยภาพเท่ากันทุกช่วงเวลาโดยมีค่าต่ำกว่า หรือสูงกว่าตลาดสลับกันไป

(3) $b > d$: เส้นอุปทานมีความชันน้อยกว่าเส้นอุปสงค์, $\left|\frac{-d}{b}\right| < 1$ สมมติว่า ราคาเบื้องต้น $(P_0) > \overline{P} \rightarrow (P_0 - \overline{P}) > 0$ ใยแมงมุมมีลักษณะ Damped



$P_t < \overline{P}$ ในช่วงเวลาเลขคี่

$P_t > \overline{P}$ ในช่วงเวลาเลขคู่

ทำให้

$Q_t < \overline{Q}$ ในช่วงเวลาเลขคู่

$Q_t > \overline{Q}$ ในช่วงเวลาเลขคี่

<u>ภาพที่ 10.3.3</u>

ดังนั้นราคาและปริมาณสินค้าในตลาดในช่วงเวลาต่างๆ จะลดลงตามช่วงเวลาเข้าสู่ดุลยภาพ $\overline{P}$

<u>ภาพที่ 10.3</u> ดุลยภาพเชิงพลวัตตามแบบจำลองใยแมงมุมในลักษณะต่างๆ

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> แบบจำลองภาวะตลาดของสินค้าชนิดหนึ่ง

$$Q_t^d = 20 - 3P_t$$

$$Q_t^s = -30 + 2P_{t-1}$$

และ $Q_t^d = Q_t^s \qquad (P_0 > \overline{P})$

อยากทราบว่า ก) กาลวิถีของราคาสินค้าชนิดนี้มีลักษณะอย่างไร

ข) ราคาดุลยภาพจะมีเสถียรภาพหรือไม่ อย่างไร

ก) จากโจทย์สมการดุลยภาพตลาดคือ $3P_{t+1} + 2P_t = 50$

สัมประสิทธิ์หน้า P_{t+1} ต้องเป็น 1 ดังนั้น

$$P_{t+1} + \frac{2}{3}P_t = \frac{50}{3} \qquad \text{เป็นกรณี } a \neq \text{-1}$$

หาผลเฉลยทั่วไป:

จากโจทย์ a =20, b = 3, c = 30 และ d =2

หา P_c โดยที่ $P_c = A\left(\frac{-d}{b}\right)^t$

$$P_c = A\left(-\frac{2}{3}\right)^t$$

หา P_p โดยที่ $P_p = \overline{P} = \frac{a+c}{b+d}$

$$P_p = \overline{P} = \frac{20+30}{3+2} = 10$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของตลาดสินค้านี้คือ $P_t = A\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 10$

ผลเฉลยเฉพาะเจาะจง:

เมื่อ $A = P_0 - \frac{a+c}{b+d} = P_0 - \overline{P}$ ดังนั้น $A = P_0 - 10$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะเจาะจงของตลาดสินค้านี้คือ

$$P_t = (P_0 - 10)\times\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 10$$ คือลักษณะกาลวิถีของราคาสิค้าชนิดนี้

ข) เนื่องจาก $\left(\frac{-d}{b}\right) < 0$ แสดงว่า กาลวิถีจะมีลักษณะกวัดแกว่ง

และ $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ แสดงว่าราคาในอนาคตจะลู่เข้าสู่ราคาดุลยภาพที่ระดับราคาเท่ากับ 10 นั่นคือราคามีเสถียรภาพเชิงพลวัต

5.2 แบบจำลองภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง

รูปแบบจำลองถูกกำหนดขึ้น จาก

(1) อุปสงค์และอุปทานในช่วงเวลาใดๆ ขึ้นอยู่กับราคาตลาดในช่วงเวลานั้น

(2) ราคาตลาดในช่วงเวลาใดๆ เป็นราคาที่ผู้ขายกำหนดขึ้นจากราคาในช่วงเวลาที่ผ่านมาหนึ่งช่วงเวลา และปริมาณสินค้าคงคลังในช่วงเวลาหนึ่งช่วงเวลา

- ถ้าปริมาณสินค้าคงคลังในช่วงเวลาที่ผ่านมายังคงมีสะสมอยู่ อันอาจเป็นผลจากระดับราคาของระยะเวลาที่ผ่านมา ผู้ขายก็จะกำหนดราคาในคาบปัจจุบันให้ต่ำกว่าระดับราคาในช่วงก่อนหน้า

- ถ้าปริมาณสินค้าคงคลังต่ำ ราคาในคาบปัจจุบันก็จะถูกกำหนดให้สูงกว่าในคาบก่อนหน้านี้

(3) การปรับตัวของราคา ซึ่งพิจารณาจากคาบเวลาหนึ่งไปสู่อีกคาบเวลาหนึ่ง มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นสัดส่วนตรงกันข้ามกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าคงคลัง

$$Q_t^d = a - bP_t \qquad a, b > 0$$

$$Q_t^s = -c + dP_t \qquad c, d > 0$$

$$P_{t+1} = P_t - r(Q_t^s - Q_t^d) \qquad r > 0$$

r คือค่าสัมประสิทธิ์การปรับตัวของราคาตลาดต่อการเปลี่ยนแปลงของระดับสินค้าคงคลัง

กาลวิถีของสมการ

จาก $$P_{t+1} = P_t - r(Q_t^s - Q_t^d) \qquad (1)$$

แทน Q_t^d และ Q_t^s ในสมการที่ (1)

$$P_{t+1} = P_t - r(-c + dP_t - a + bP_t)$$

$$P_{t+1} = P_t + r(a+c) - r(b+d)P_t$$

ดังนั้น $P_{t+1} - \{1 - r(b+d)\}P_t = r(a+c)$ (2)

ในสมการที่ (2) จัดเป็น Non-homogenous First Order Difference Equation

เปรียบเทียบกับแบบจำลองในทางคณิตศาสตร์

$y_{t+1} + ay_t = c$ จะพบว่า

$y \rightarrow P$

$a \rightarrow -\{1 - r(b+d)\}$ $\neq$ -1 $r, b, d > 0$

$c \rightarrow r(a+c)$

ผลเฉลยทั่วไป: กรณี $a \neq$ -1

รูปแบบทางคณิตศาสตร์ $y_t = A(-a)^t + \dfrac{c}{1+a}$

ผลเฉลยแบบเฉพาะเจาะจง: กรณี $a \neq -1$

รูปแบบทางคณิตศาสตร์ $y_t = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right] \times (-a)^t + \frac{c}{1+a}$

ดังนั้นกาลวิถีของแบบจำลองภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง

$$P_t = \left[P_0 - \frac{r(a+c)}{1-\{1-r(b+d)\}}\right] \times (1-r(b+d))^t + \frac{r(a+c)}{1-\{1-r(b+d)\}}$$

โดยมี $P_p = \frac{r(a+c)}{1-\{1-r(b+d)\}} = \frac{a+c}{b+d} = \overline{P}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะเจาะจงหรือกาลวิถีคือ

$$P_t = (P_0 - \overline{P}) \times \{1-r(b+d)\}^t + \overline{P}$$

<u>5.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถีภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง</u>

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของ P_t ขึ้นกับ $\{1-r(b+d)\}$ ซึ่งเปรียบได้กับค่า b ในพจน์ของ Ab^t นั่นคือเสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถีในการวิเคราะห์ภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลังจะขึ้นอยู่กับค่า r, b และ d

เนื่องจาก r, b และ d > 0 ฉะนั้นเขตค่าของ b ในรูปพจน์ Ab^t ที่แบ่งเป็น 7 เขตนั้น เขตค่าที่ $b > 1$ และ $b = 1$ ไม่มีความจำเป็นต้องพิจารณา ดังนั้นเขตค่าของ b ที่ต้องพิจารณามี 5 เขตคือ

(1) $r = \frac{1}{b+d}$ ทำให้ $\{1-r(b+d)\} = 0$ ดังนั้น $P_t = \overline{P}$ ทุกค่าของ t แสดงว่า ราคาตลาดที่กำลังศึกษาอยู่ในภาวะสมดุลตลอดเวลา

(2) $0 < r < \frac{1}{b+d}$ ทำให้ $\{1-r(b+d)\} < 1$ ดังนั้น $\{1-r(b+d)\}^t \to 0$

เมื่อ $t \to \infty$ ทำให้ $P_t \to \overline{P}$ กล่าวคือ ถ้าเริ่มศึกษา ราคาตลาดสูงกว่าราคาดุลยภาพ ($P_0 > \overline{P}$) เมื่อเวลาผ่านไป ราคาตลาดจะลดลงเข้าสู่ดุลยภาพ เป็น Non-Oscillatory and Convergent

(3) $\frac{1}{b+d} < r < \frac{2}{b+d}$ ทำให้ $-1 < \{1-r(b+d)\} < 0$ ดังนั้น $\{1-r(b+d)\}^t \to 0$

เมื่อ $t \to \infty$ ทำให้ $P_t \to \overline{P}$ กล่าวคือ ถ้าเริ่มศึกษา ราคาตลาดสูงกว่าราคาดุลยภาพ ($P_0 > \overline{P}$) เมื่อเวลาผ่านไป ราคาตลาดเปลี่ยนแปลงในลักษณะสูงกว่า ต่ำกว่าราคาดุลยภาพสลับกันไปตามช่วงเวลาและจะเข้าสู่ดุลยภาพในที่สุดเป็น Damped Oscillation

(4) $r = \dfrac{2}{b+d}$ ทำให้ $\{1 - r(b+d)\} = -1$ ดังนั้น $\{1 - r(b+d)\}^t \to \pm 1$

ตลาดไม่มีดุลยภาพ เมื่อ $t \to \infty$ ราคาตลาดเปลี่ยนแปลงในลักษณะสูงกว่า ต่ำกว่าราคาดุลยภาพสลับกันไปตามช่วงเวลา โดยแตกต่างจากราคาดุลยภาพเท่ากันเสมอ (Regular Oscillation)

(5) $r > \dfrac{2}{b+d}$ ทำให้ $\{1 - r(b+d)\} < -1$ ดังนั้น $\{1 - r(b+d)\}^t \to \pm\infty$

เมื่อ $t \to \infty$ ทำให้ $P_t \to \pm\infty$ ตลาดไม่มีดุลยภาพ เมื่อเวลาผ่านไป ราคาตลาดเปลี่ยนแปลงในลักษณะสูงกว่า ต่ำกว่า ราคาดุลยภาพสลับกันไปตามช่วงเวลา โดยแตกต่างจากราคาดุลยภาพมากขึ้น (Explosive Oscillation)

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> สมมติว่า แบบจำลองของภาวะตลาดของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ

$$Q_t^d = 20 - 3P_t$$

$$Q_t^s = -30 + 2P_t$$

$$P_{t+1} = P_t - 0.3(Q_t^s - Q_t^d)$$

อยากทราบว่า ก) กาลวิถีของราคาสินค้าชนิดนี้มีลักษณะอย่างไร

ข) ราคาดุลยภาพจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัตหรือไม่ อย่างไร

ก) ดุลยภาพของตลาดสินค้านี้คือ

$$P_{t+1} = P_t - 0.3(5P_t - 50)$$

จัดรูปสมการใหม่

$$P_{t+1} + 0.5P_t = 15$$

จากโจทย์ $a = 20$, $b = 3$, $c = 30$, $d = 2$ และ $r = 0.3$

ผลเฉลยเฉพาะเจาะจง:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{r(a+c)}{1 - \{1 - r(b+d)\}}\right] \times (1 - r(b+d))^t + \frac{r(a+c)}{1 - \{1 - r(b+d)\}}$$

หรือ $$P_t = (P_0 - \overline{P}) \times \{1 - r(b+d)\}^t + \overline{P}$$

แทนค่าตัวแปรจะได้ผลเฉลยเฉพาะเจาะจงคือ

$$P_t = (P_0 - 10) \times (-0.5)^t + 10$$ เป็นกาลวิถีของราคาสินค้าชนิดนี้

ข) เมื่อตรวจสอบ จะพบว่า $\frac{1}{b+d} < r < \frac{2}{b+d}$ ทำให้ -1 < $\{1 - r(b+d)\}$ < 0 ดังนั้น $\{1 - r(b+d)\}^t \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$ ทำให้ $P_t \to \overline{P}$ กล่าวคือ เมื่อเวลาผ่านไป ราคาตลาดเปลี่ยนแปลงในลักษณะสูงกว่า ต่ำกว่าราคาดุลยภาพสลับกันไปตามช่วงเวลาและจะเข้าสู่ดุลยภาพในที่สุดเป็น Damped Oscillation

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง $\Delta y_t = -0.2\,y_t$ โดยใช้วิธีการทำซ้ำ

2. จงหาลักษณะแนวโน้มของกาลวิถีตามแบบผลเฉลยทั่วไป (General Solution) และผลเฉลยเฉพาะเจาะจง (Definite Solution) ของสมการผลต่างสืบเนื่องต่อไปนี้

1) $y_{t+1} + 3y_t = 4$ โดยที่ $y_0 = 4$

2) $2y_{t+1} - y_t = 2$ โดยที่ $y_0 = 7$

3) $y_{t+1} = 0.2y_t + 8$ โดยที่ $y_0 = 1$

3. จงอธิบายลักษณะการเปลี่ยนแปลงตามเวลา และเขียนภาพประกอบ

1) $y_t = 3^t + 1$ 2) $y_t = 5\left(-\frac{1}{10}\right)^t + 3$

3) $y_t = 2\left(\frac{1}{3}\right)^t$ 4) $y_t = -3\left(\frac{1}{4}\right)^t + 2$

4. กำหนดให้ สมการอุปสงค์และอุปทานในแบบจำลองใยแมงมุมมาให้ จงหาดุลยภาพของราคาและพิจารณาว่าราคาเริ่มแรกจะเคลื่อนไหวเข้าสู่ดุลยภาพหรือไม่อย่างไร

1) $Q_t^d = 18 - 3P_t$ $Q_t^s = -3 + 4P_{t-1}$ ราคาเริ่มแรก = 15

2) $Q_t^d = 22 - 3P_t$ $Q_t^s = -2 + P_{t-1}$ ราคาเริ่มแรก = 10

3) $Q_t^d = 19 - 6P_t$ $Q_t^s = -5 + 6P_{t-1}$ ราคาเริ่มแรก = 4

5. ในตลาดสินค้าชนิดหนึ่ง พ่อค้าจะขึ้นราคา (ลดราคา) 10% ของปริมาณสินค้าคงคลังที่ลดลง (เพิ่มขึ้น) เสมอ ถ้าเส้นอุปสงค์มีความชันเท่ากับ -2 และเส้นอุปทานมีความชันเท่ากับ 14 ตามแกนของราคา จงศึกษาว่ากาลวิถีของราคา P_t จะมีลักษณะอย่างไร

6. ถ้าอุปสงค์ อุปทาน และราคาสินค้าชนิดหนึ่ง เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังสมการ

$$Q_t^d = 15 - 2P_t$$

$$Q_t^s = -3 + P_t$$

และ

$$P_{t+1} = P_t - \frac{1}{2}\left(Q_t^s - Q_t^d\right)$$

ถ้าในปี พ.ศ. 2535 สินค้าชนิดนี้มีราคา 20 บาท จงคำนวณราคาสินค้าชนิดนี้ในเวลาใดๆ หลังปี พ.ศ. 2535 พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงของราคาดังกล่าว

เอกสารอ้างอิง

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** 3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมธิราช. (2544). ***เอกสารการสอนชุดคณิตเศรษฐศาสตร์และเศรษฐมิติเพื่อธุรกิจ หน่วยที่ 1-7.*** นนทบุรี : มหาวิทยาลัยบูรพา.

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***โปรแกรมเชิงเส้นตรง.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

สมนึก ทับพันธุ์. (2550). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

บรรณานุกรม

Chiang, Alpha C. (1984). ***Fundamental Methods of Mathematical Economics.*** 3 rd ed. Singapore : McGraw-Hill.

Brigham, E.F. and Ehrhardt M.C. (2002). *Financial Management : Theory and Practice.* 10 th ed. Singapore : Thomson Learning.

Blume, L. and Simon C. (1945). *Mathematics for Economists.* New York : Norton&Company.

Edward T. Dowling. (1991). ***Theory and Problems of Mathematical Methods for Business and Economics.***

Klein, M. W. (2002). *Mathematical Methods for Economics.* 2nd ed. Boston : Pearson.

Sydsaeter K. & Hammond P. (1995). *Essential Mathematics for Economics Analysis.* 2nd ed. London : Pearson.

Wisniewski , M. (1996). *Introductory Mathematical Methods in Economics.* 2nd ed. London : McGraw -Hill.

กฤตยา ตติรังสรรค์สุข. (2547). ***เศรษฐศาสตร์มหภาคเบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภราดร ปรีดาศักดิ์. (2547). ***หลักเศรษฐศาสตร์จุลภาค.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ดาราวรรณ วิรุฬหผล. (2544). ***การวิเคราะห์เชิงปริมาณขั้นสูง.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

บริกแฮม, ยูจีน และ ฮูสตัน, โจเอล เอฟ. (2544). *Fundamentals of Financial Management.* แปลและเรียบเรียงโดย เริงรัก จำปาเงิน. กรุงเทพฯ : บุ๊คเน็ท

บุญสม ศิริโสภณา และประสาร บุญเสริม. (2539). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์.*** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นราทิพย์ ชุติวงศ์. (2542). ***ทฤษฎีเศรษฐศาสตร์จุลภาค.*** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

_______________. (2544). ***เศรษฐศาสตร์การจัดการ.*** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประกอบ จิรกิติ. (2534). ***การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์บัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมธิราช. (2544). ***เอกสารการสอนชุดคณิตเศรษฐศาสตร์และเศรษฐมิติเพื่อธุรกิจ หน่วยที่ 1-7.*** นนทบุรี : มหาวิทยาลัยบูรพา.

มานพ วราภักดิ์. (2546). ***ทฤษฎีดอกเบี้ย.*** กรุงเทพฯ : ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รัชนี มุขแจ้ง. (2540). ***คณิตศาสตร์สำหรับการเงิน.*** พิษณุโลก : ภาควิชาพาณิชยศาสตร์ คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

วาทินี เหลืองวัชราภรณ์. (2542). ***โปรแกรมเชิงเส้นตรง.*** (เอกสารประกอบคำบรรยาย).

สมนึก ทับพันธุ์. (2550). ***คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น.*** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อนุสรณ์ สรพรหม. (2544). ***คณิตศาสตร์บริหารธุรกิจและเศรษฐศาสตร์.*** กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล.

ภาคผนวก

ตารางภาคผนวกที่ 1 Logarithm

											Proportional Parts								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	5	5	6	7	8
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ตารางภาคผนวกที่ 1 Logarithm (ต่อ)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional Parts 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	1	2	3	4	5	5	6	7
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ตารางภาคผนวกที่ 2 Antilogarithms

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	3	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	3	4	5	6	6

226795

ตารางภาคผนวกที่ 2 Antilogarithms (ต่อ)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20