บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันโดยใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบค่าให้สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบ ได้มีเอกสารบทความงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งผู้วิจัยจะกล่าวรายละเอียดตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น
2. ปัญหาค่าขอบ
3. สมการเชิงฟังก์ชัน
4. การแก้ระบบสมการ
5. เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

ศิริพงษ์ ศรีพิพัฒน์ (2528) ปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad , x \geq x_0$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

เราจะหาผลเฉลย $\mathbf{y}(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไข โดยสมมติว่าปัญหามีผลเฉลยและกำหนดจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots$ และหาค่าของ $\mathbf{y}(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นผลเฉลย นั่นคือผลเฉลยเป็นจำนวนซึ่งเป็นค่าฟังก์ชัน ฟังก์ชัน $\mathbf{y}(x)$ เป็นผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา แต่เราไม่สามารถหาผลเฉลยนี้ได้ เราจะได้ค่าประมาณเท่านั้น

ทฤษฎีบท การมีผลเฉลยแน่นอนและมีผลเฉลยเดียว (The Existence and Uniqueness) ให้ $f(x, \mathbf{y})$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับ $a \leq x \leq b$ และทุกค่าของ $\mathbf{y}$ ถ้า $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ สอดคล้องเงื่อนไขของลิปชิตซ์ (Lipschitz Condition) กล่าวคือ สามารถหาค่าคงที่ $L > 0$ ที่ทำให้ $\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq L\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ และทุกค่า $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ ที่มี $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ เมื่อ $x = x_0$ จะมีผลเฉลยแน่นอนและมีผลเฉลยเดียว ให้ $\mathbf{y}_i$ เป็นค่าประมาณของ $\mathbf{y}(x_i)$ เมื่อ i=1, 2, 3, … จากที่กำหนดให้ เราได้ว่า $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$ เราจะหาสูตรเพื่อคำนวณค่าของ $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots$

วิธีของเทย์เลอร์

$y \in \mathbb{R}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้หลาย ๆ ครั้ง ในบริเวณหนึ่งที่ครอบคลุมจุด (x_0, y_0) และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณนี้ ถ้าฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นผลเฉลยที่แม่นตรงของปัญหาค่าเริ่มต้น เรากระจายฟังก์ชัน $y(x)$ รอบจุด x_0 โดยอนุกรมเทย์เลอร์ถึง k พจน์ ได้

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{R}$$

เมื่อ $\mathrm{R} = \dfrac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{(k+1)}$, $x_0 < \xi < x$ หรือ $x < \xi < x_0$

ถ้าให้ $x - x_0 = h$ เราจะได้ค่า $y(x_0 + h)$ เป็น

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$$

โดยมีความคลาดเคลื่อนที่เรียกว่าความคลาดเคลื่อนจากการตัด (Truncation Error)

$$\mathrm{R} = \frac{y^{(k-1)}(\xi)}{(k+1)!}h^{k+1}$$

ความคลาดเคลื่อนนี้เป็นความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ (Local Error) เฉพาะช่วงหนึ่งเท่านั้น จะเห็นว่าเราได้ประมาณค่าของ y ที่จุด $x_1 = x_0 + h$ โดยจุดนี้สามารถประมาณค่าของ $y(x_1 + h)$ ได้อีกกับสูตรดังกล่าว ระเบียบวิธีดังกล่าวเรียกว่า วิธีของเทย์เลอร์อันดับ k สูตรเป็นดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_i) \ , i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

เมื่อ y_i เป็นค่าประมาณของ $y(x_i)$ โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่เป็น $\mathrm{R} = \dfrac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}h^{k+1} = \mathbf{O}(h^{k+1})$ และค่าความคลาดเคลื่อนทั้งหมดเป็น $\mathbf{O}(h^k)$

กรณี $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

เราได้สูตร $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{y}'(x_i) + \dfrac{h^2}{2!}\mathbf{y}''(x_i) + \ldots + \dfrac{h^k}{k!}\mathbf{y}^{(k)}(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ เช่นเดียวกัน

เมื่อ $\mathbf{y}^{(k)}(x_i)$ เป็นอนุพันธ์อันดับ k ของส่วนประกอบของ $\mathbf{y}$ เทียบกับตัวแปร x_i

วิธีของรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง แนวความคิดที่ใช้ในระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตานี้คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณผลลัพธ์ในระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา คือ

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{\Phi}(x_i, \mathbf{y}_i, h)\cdot h \tag{2.2}$$

เมื่อ $\mathbf{\Phi}(x_i, \mathbf{y}_i, h)$ เรียกว่าฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment Function) คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดช่วงความกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาส่วนที่เพิ่มขึ้นจากผลลัพธ์เดิม โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบโดยทั่วไปได้

$$\mathbf{\Phi} = a_1\mathbf{k}_1 + a_2\mathbf{k}_2 + a_3\mathbf{k}_3 + \ldots + a_n\mathbf{k}_n \tag{2.3}$$

เมื่อ $a_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ป็นค่าคงที่และ

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i)\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(x_i + p_1h, \mathbf{y}_i + q_{11}\mathbf{k}_1h)\\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(x_i + p_2h, \mathbf{y}_i + q_{21}\mathbf{k}_1h + q_{22}\mathbf{k}_2h)\\
&\vdots\\
\mathbf{k}_n &= \mathbf{f}(x_i + p_{n-1}h, \mathbf{y}_i + q_{n-1,1}\mathbf{k}_1h + q_{n-2,2}\mathbf{k}_2h)
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

เมื่อ n คืออันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่เลือกใช้สำหรับค่า $\mathbf{k}_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ส่วนค่า p และ q ต่าง ๆ เป็นค่าคงที่

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (Fourth-Order Runge-Kutta Method) ถูกจัดว่าเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมใช้กันโดยแพร่หลายในการดัดแปลงสมการ (2.2) ถึง (2.4) ที่อยู่ในรูปทั่วไปโดยใช้ $n = 4$ ทำให้เกิดสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ซึ่งให้ค่าคลาดเคลื่อนในรูปแบบของความกว้างช่วงอันดับสี่ $\mathbf{O}(h^4)$

รูปแบบทั่วไปของสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ คือ

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \left[\frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)\right]\cdot h$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i)\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(x_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1h)\\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(x_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2h)\\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3h)
\end{aligned}$$

โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่เป็น $\mathbf{O}(h^5)$ และค่าความคลาดเคลื่อนทั้งหมดเป็น $\mathbf{O}(h^4)$

ปัญหาค่าขอบ

เราจะกล่าวถึงปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขที่จุดมากกว่าหนึ่งจุด อาจจะเป็นเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นและเงื่อนไขที่จุดปลายสุดท้าย ซึ่งเรียกว่า ปัญหาค่าขอบสองจุด ตัวอย่างเช่น ปัญหาการเปลี่ยนวงโคจรของยานอวกาศ มีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเป็น

$$\begin{aligned} x_1'' &= -kx_1 / r^3 \\ x_2'' &= -kx_2 / r^3 \end{aligned} \quad , t \in [t_0, t_f]$$

เมื่อ $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ และเงื่อนไขเป็น

$$x_1(t_0) = a_1,\ x_1(t_f) = b_1,\ x_2(t_0) = a_2,\ x_2(t_f) = b_2$$

สำหรับปัญหาข้างต้น เราอาจแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ โดยให้ $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_1'$ และ $y_4 = x_2'$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= -ky_1 / r^3 \\ y_4' &= -ky_2 / r^3 \end{aligned}$$

เมื่อ $r = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$ และเงื่อนไขเป็น

$$y_1(t_0) = a_1,\ y_1(t_f) = b_1,\ y_2(t_0) = a_2,\ y_2(t_f) = b_2$$

ดังนั้นปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวแปรเดียวจะต้องเป็นอันดับสองขึ้นไป หรือ ถ้าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งก็ต้องมีตัวแปรตามอย่างน้อยสองตัว และสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จำนวนเงื่อนไขต้องมีเท่ากับจำนวนตัวแปรตาม มิฉะนั้นอาจไม่ได้ผลเฉลย ถ้าจำนวนเงื่อนไขมากเกินไปอาจจะไม่มีผลเฉลย และถ้าจำนวนเงื่อนไขน้อยเกินไปก็อาจจะหาผลเฉลยเฉพาะรายไม่ได้

เราแบ่งปัญหาค่าขอบเป็น 2 แบบดังนี้

แบบแรก ถ้าเงื่อนไขค่าขอบอยู่ในแบบที่กำหนดค่าที่จุดปลาย สมมติ $\mathbf{y} = [x\ y]^t$ เงื่อนไขค่าขอบเป็น $\mathbf{y}(t_0) = y_0,\ \mathbf{y}(t_f) = y_f$ ซึ่งเรียกว่า ปัญหาค่าขอบปรกติ

แบบที่สอง เงื่อนไขค่าขอบอยู่ในแบบสมการ $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f)) = \mathbf{0}$ ซึ่งเรียกว่า ปัญหาสมการค่าขอบ

อำพล ธรรมเจริญ (2551) ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาค่าขอบมีหลายวิธี แต่ละวิธีมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกัน เช่น วิธีผลต่างจำกัด วิธีฟังก์ชันประมาณค่า และวิธียิงเป้า

วิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) มีวิธีการและแนวคิดดังนี้ แบ่งช่วงที่จะหาผลเฉลยเป็น n ช่วงเท่า ๆ กันด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (แต่ละช่วงมีความกว้างเท่ากับ h) แล้วแทนค่าอนุพันธ์ที่จุดต่าง ๆ ด้วยค่าประมาณในรูปสมการผลต่าง ผลที่ได้คือ สมการผลต่างซึ่งจะเป็น

ระบบพีชคณิต เมื่อหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ ก็จะได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบตามต้องการ โดยการประมาณค่าอนุพันธ์เรามักใช้สูตรผลต่างส่วนกลางและสูตรสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งเป็นวิธีการอันดับสอง

สำหรับวิธีผลต่างจำกัดสามารถใช้ได้ดีกับสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น แม้จะสามารถใช้กับปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ แต่ก็มีความยุ่งยากในการแก้สมการพีชคณิตขนาดใหญ่ที่ไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับสูง (สูงกว่าอันดับสอง) หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่ ความยุ่งยากในการแก้ระบบสมการพีชคณิตก็เพิ่มขึ้นหลายเท่า ค่าความคลาดเคลื่อนจากวิธีนี้โดยปกติมีค่าสูง

วิธีฟังก์ชันประมาณค่า (Collocation Method) มีแนวคิดคือ เราจะประมาณค่าของผลเฉลยด้วยฟังก์ชันที่เหมาะสมตลอดช่วงที่จะหาผลเฉลย ฟังก์ชันที่ประมาณค่าผลเฉลยต้องสอดคล้องกับสมการเชิงเส้นที่บางจุดและสอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบด้วย

สำหรับวิธีประมาณค่า มักจะใช้กับปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น ค่าความคลาดเคลื่อนมักจะสูง เพราะมีข้อจำกัดเกี่ยวกับฟังก์ชันประมาณค่าที่ใช้

วิธียิงเป้า (Shooting Method) วิธียิงเป้ามีหลักการง่าย ๆ คือ เราสมมติเงื่อนไขเริ่มต้นที่หายไป แล้วดำเนินการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น จะได้ค่าที่จุดปลายซึ่งอาจไม่ตรงกับเงื่อนไขแล้วกระทำการเปลี่ยนจุดเริ่มต้น เพื่อให้ค่าที่จุดปลายสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด หลักการดังกล่าวเหมือนกับการยิงเป้า คือ เราปรับทิศทางที่จุดเริ่มต้นโดยเล็งไปที่เป้า เมื่อยิงไปแล้วถ้าไม่ถูกเป้าก็ต้องปรับทิศทางใหม่จนกว่าจะยิงถูกเป้า

สำหรับวิธียิงเป้ามีข้อดีหลายข้อ ข้อหนึ่งคือใช้ได้ดีกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นแบบเชิงเส้น และกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่ โดยที่ไม่ยุ่งยากมากนัก และอีกข้อหนึ่งคือมีค่าคลาดเลื่อนน้อย เพราะว่าสามารถใช้ระเบียบวิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีประสิทธิภาพได้ (เช่นวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ หรือวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้) ข้อเสียคือ อาจไม่ลู่เข้าและไม่สามารถบอกได้แน่นอนว่าจะลู่เข้าหรือไม่ วิธีการของวิธียิงเป้าโดยละเอียดเป็นดังนี้

สมมติ $\mathbf{z} = [x^{t} \;\; y^{t}]^{t}$ ปัญหาค่าขอบปรกติเป็น

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) \,,\, t_0 \le t \le t_f$$

$$\mathbf{y}(t_0) = y_0 \,,\, \mathbf{y}(t_f) = y_f$$

เมื่อ $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ โดยที่ $\mathbf{f}$ ไม่ต้องเป็นฟังก์ชันก็ได้ สังเกตว่าค่า $\mathbf{y}(t_f)$ ขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}(t_0)$ ถ้าเรากำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{z}(t_0) = [x(t_0) \;\; y(t_0)]^{t}$ แล้วหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นจะได้ $\mathbf{y}(t_f)$ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_0))$$

จากเงื่อนไขที่จุดปลายสุดท้าย $\mathbf{y}(t_f)=\mathbf{y}_f$ เราได้สมการเป็น

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_0))=\mathbf{y}_f$$

โดย $\mathbf{x}(t_0)$ เป็นตัวไม่ทราบค่า วิธีการหา $\mathbf{x}(t_0)$ อาจกระทำได้โดยวิธีของนิวตัน หรือวิธีของบรอยเดน ขั้นตอนการแก้ปัญหาเป็นดดังนี้

1. สมมติค่า $\mathbf{x}(t_0)=a_0$ แก้ปัญหาค่าเริ่มต้นข้างล่างด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอันดับสูง เช่น วิธีของรุงเง-คุตตา หรือวิธีของเทย์เลอร์

$$\mathbf{z}'=\mathbf{f}(t,\mathbf{z})\ ,\ t_0\le t\le t_f$$

$$\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0\ ,\ \mathbf{x}(t_0)=a_0$$

ได้ค่า $\mathbf{F}(a_0)=\mathbf{y}(t_f)$

2. ตรวจสอบว่า $\mathbf{y}(t_f)=\mathbf{y}_f$ ถ้าใช่แสดงว่าผลที่ได้จากข้อ 1 เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ ถ้าไม่สอดคล้องก็ต้องเปลี่ยนค่า $\mathbf{x}(t_0)$ ใหม่

3. วิธีเปลี่ยนค่า $\mathbf{x}(t_0)$ กระทำได้หลายวิธีเช่น วิธีของนิวตัน หรือวิธีของบรอยเดน เมื่อได้ค่า $\mathbf{x}(t_0)$ แล้วหาค่า $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_0))$ ด้วยวิธีข้อ 1 กระทำจนกว่าจะได้ผลลัพธ์

สำหรับปัญหาสมการค่าขอบ

เราให้ $G(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{y}(t_0))=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t_0),\mathbf{F}(\mathbf{y}(t_0))]$

ปัญหาเป็นการแก้สมการ $G(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{y}(t_0))=\mathbf{0}$

สมการเชิงฟังก์ชัน

ภัททิรา เรืองสินทรัพย์ และวัชรพล พิมพ์เสริฐ (2548) สมการเชิงฟังก์ชัน (Functional Equations) คือ สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปรเป็นฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

สมการนี้เป็นสมการที่มีชื่อเสียงและเป็นที่รู้จักกันในชื่อของ “สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี” (Cauchy’s functional equation) หรือ “สมการเชิงฟังก์ชันการบวก” (additive functional equation) และผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว คือ $f(x)=cx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ นอกจากนี้ยังมีสมการที่มีชื่อเสียงอีกสมการหนึ่ง คือ

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

หรือ “สมการเชิงฟังก์ชันของเดอแลมเบิร์ท” (D’Alembert’s functional equation) โดยสังเกตเห็นว่าสมการดังกล่าวสอดคล้องกับเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติเอกลักษณ์หนึ่ง นั่นคือ

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cdot\cos y$$

ดังนั้นในบางครั้งจะเรียกสมการนี้ว่า “สมการเชิงฟังก์ชันโคไซน์” “cosine functional equation” และผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันโคไซน์ คือ $f(x)=\cos x$

โดยปกติแล้วการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน คือ การหาฟังก์ชันคำตอบหรือผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ ซึ่งการแก้สมการเชิงฟังก์ชันนั้นไม่มีหลักเกณฑ์ตายตัว อีกทั้งยังยากที่จะคาดเดาว่าจะทำด้วยวิธีใด ในขั้นแรกเราอาจทำโดยการทดลองแทนค่าบางค่าในสมการที่กำหนดให้ ซึ่งบางครั้งผลที่ได้จะนำไปสู่การคาดเดาคำตอบได้

เราจะกล่าวถึงการแก้สมการเชิงฟังก์ชันง่าย ๆ ที่กำหนด ซึ่งอาจใช้แก้สมการเชิงฟังก์ชันได้เลย หรือไม่ก็ใช้ประกอบกัน ทั้งนี้เนื่องจากโดยทั่วไปแล้วการแก้โจทย์สมการเชิงฟังก์ชันนั้นมักผสมผสานใช้วิธีต่าง ๆ จนกว่าจะได้คำตอบ

การแทนค่า

วิธีแทนค่า คือ การแทนค่า ณ จุดต่าง ๆ ในโดเมนของฟังก์ชันคำตอบ เพื่อหารูปแบบหรือข้อมูลที่มีประโยชน์ในการคาดเดาฟังก์ชันคำตอบ

ตัวอย่าง จงหา $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x+y)=f(y)+x \text{ สำหรับทุก } x,\ y\in\mathbb{R}$$

โดยแทนค่า $y=0$ ในสมการ จะได้ว่า

$$f(x)=f(0)+x=c+x \quad \text{สำหรับทุก } x\in\mathbb{R} \text{ และ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

สรุปได้ว่า ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการ $f(x+y)=f(y)+x$ สำหรับทุก $x,\ y\in\mathbb{R}$ แล้ว $f(x)=x+c$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตรวจคำตอบ

$$f(x+y)=(x+y)+c=x+(y+c)=x+f(y)$$

ดังนั้น ฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขจะอยู่ในรูป $f(x)=x+c$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

การแก้ระบบสมการ

ระบบสมการที่เราจะหาผลเฉลยมีรูปแบบเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$$

เมื่อ $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$, $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{bmatrix}$ และ $\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

จุด $\mathbf{z}$ ที่มีสมบัติว่า $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ เราเรียกว่าเป็น จุดตรึง (Fixed Point) ของฟังก์ชัน $\mathbf{g}$ ดังนั้นวิธีการที่จะหาผลเฉลยของสมการ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ โดยการแปลงสมการเป็น $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ แล้วหาจุดตรึงของ $\mathbf{g}$ เรียกว่าวิธีซ้ำเดิมโดยจุดตรึง (Fixed Point Iteration)

ทฤษฎีบท (Dennis and Schnabel, 1996) ถ้าฟังก์ชัน $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ส่งจุดในเซตปิด S ไปยัง S กล่าวคือ ถ้า $\mathbf{x}$ เป็นสมาชิกของ S แล้ว $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ จะเป็นสมาชิกของ S ด้วยและ $\mathbf{g}$ มีสมบัติหดตัว (Contractive) บน S กล่าวคือ $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \le K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ สำหรับทุก ๆ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ และ $K < 1$ แล้ว (1) ถ้าจุดเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ อยู่ใน S แล้ว ลำดับ $\{\mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{i-1})\ ,\ i = 1, 2, 3, ...\}$ จะลู่เข้าจุด z ใน S และ (2) จุด $\mathbf{z}$ จะเป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน $\mathbf{g}$ และมีเพียงจุดเดียว คือ มีจุด $\mathbf{z}$ จุดเดียวใน S ซึ่ง $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ (Scalar Function) ของหลายตัวแปร $x_i, i = 1, 2, ..., n$ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับ x_i โดยคิดตัวแปรอื่นเป็นค่าตรึง เรียกว่า อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ของ f ใช้สัญลักษณ์ f_{xi} เวกเตอร์ $\left[f_{x1}\, f_{x2} \ldots f_{xn}\right]^T$ เรียกว่า เกรเดียนต์ (Gradient) ของ f ใช้สัญลักษณ์ ∇f

ทฤษฎีบท (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ของสองตัวแปร x และ y ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและสองเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สำหรับจุด (x, y) และ (a, b) ในบริเวณดังกล่าวจะได้

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \mathbf{R} \qquad (2.5)$$

เมื่อ $\mathbf{R} = \frac{1}{2!}(f_{xx}(\xi, n)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\xi, n)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\xi, n)(y-b)^2)$

โดยที่ (ξ, n) เป็นจุดบนเส้นตรงระหว่าง (a, b) และ (x, y) คือ

$$(\xi, n) = (a, b) + t(x-a,\ y-b),\ 0 < t < 1$$

กรณี $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปรเราเขียน (2.5) ในรูปเวกเตอร์ ให้ $\mathbf{x} = \left[x_1\, x_2 \ldots x_n\right]^T$ และ $\mathbf{y} = \left[y_1\, y_2 \ldots y_n\right]^T$ ได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{R}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) \qquad (2.6)$$

เมื่อ $\mathbf{R}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$ เป็นพจน์ที่มีกำลังสูงกว่าหรือเท่ากับกำลังสอง ซึ่งมีสมบัติว่า $\mathbf{R}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) < K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ เมื่อ K เป็นค่าคงตัว

สำหรับฟังก์ชันเวกเตอร์เราไม่สามรถเขียนสูตรในแบบ (2.5) ได้ ถ้า $\mathbf{g}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของ $\mathbf{x}$ เราได้สูตรในแบบ (2.6) คือ

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{g}'(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{R}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) \qquad (2.7)$$

เมื่อ $\mathbf{g}'(\mathbf{y})$ เป็นเมทริกซ์จาโคเบียน และ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ เป็นเวกเตอร์

วิธีของนิวตัน

สำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการ $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ที่มี n สมการและมี n ตัวแปรเมื่อฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ ไม่เป็นแบบเชิงเส้น สูตรของระเบียบวิธีหาได้ดังนี้ เราให้

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{h}$$

โดยสูตร (2.7) เราได้

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)\mathbf{h} + \mathbf{R}(\|\mathbf{h}\|^2)$$

ตัดพจน์กำลังสองออก และให้ $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) = \mathbf{0}$ ดังนั้น

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

ถ้า $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)$ มีตัวผกผัน จะได้

$$\mathbf{h} = -\left[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)\right]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

การกระทำซ้ำในแบบของนิวตัน คือ

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \left[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)\right]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

วิธีของนิวตันจะต้องมีจุดเริ่มต้น x_0 ถ้าจุดเริ่มต้นไม่ไกลจากรากมากเกินไป วิธีของนิวตัน จะลู่เข้าหาจุดที่เป็นรากของระบบสมการ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ มีอัตราการลู่เข้าเป็นอันดับสอง (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) แต่วิธีของนิวตันต้องใช้แรงงานมากในการหารากของระบบสมการเชิงเส้นในทุก ๆ ครั้งของการกระทำซ้ำ

วิธีของบรอยเดน

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการ $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ที่มี n สมการและตัวไม่ทราบค่า n ตัว และเมื่อฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ เป็นแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีของนิวตันเรากำหนดจุดเริ่มต้น x_i แล้วหา x_{i+1} จากสูตรการกระทำซ้ำ $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \left[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)\right]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots$ เนื่องจากการหา $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)$ เป็นเมทริกซ์ที่หาค่าได้ยาก จึงมีแนวคิดที่จะหาเมทริกซ์เพื่อประมาณค่าของ $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)$ เมทริกซ์ที่ประมาณค่าต้องหาได้ง่ายและประมาณค่า $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)$ ได้ดี

พิจารณาวิธีเส้นตัดโค้ง (Secant Method) สำหรับสมการที่มีตัวไม่ทราบเพียงตัวเดียว ซึ่งมีสูตรเป็น

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)\ ,\ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

กำหนด $\quad d_i = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ จะได้

$$d_i(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

เงื่อนไขนี้เรียกว่า เงื่อนไขเส้นตัดโค้ง (Secant Condition)

ในกรณีที่เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปร เราหาเมทริกซ์ D_i ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$D_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i-1})$$

ถ้าเราเขียนอีกขั้นหนึ่ง จะได้

$$D_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \tag{2.10}$$

จาก (2.8) เมื่อให้เมทริกซ์ D_i แทน $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)$ จะได้

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \tag{2.11}$$

คูณด้วยเมทริกซ์ D_i จะได้

$$D_i(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \tag{2.12}$$

สมการ (2.9) - (2.11) จะได้

$$(D_{i+1} - D_i)(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) \tag{2.13}$$

กำหนดให้ $D_{i+1} - D_i = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^T$

เมื่อ $\mathbf{a}_i$ และ $\mathbf{b}_i$ เป็นเวกเตอร์ และจาก (2.13) จะได้

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^T(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

ถ้าเลือกให้ $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})}{\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_i}$$

จะได้
$$D_{i+1} = D_i + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})}{\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_i}\cdot\mathbf{b}_i^T \quad , i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

ถ้าเลือกให้ $\mathbf{b}_i = D_i^T\mathbf{y}_i$ เมื่อ $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ และ $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ จะได้

$$\mathbf{a}_i(D_i^T\mathbf{y}_i)^T\mathbf{s}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{y}_i^T D_i\mathbf{s}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{f(\mathbf{x}_{i+1})}{\mathbf{y}_i^T D_i\mathbf{s}_i}$$

ดังนั้น
$$D_{i+1} = D_i + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})}{\mathbf{y}_i^T D_i\mathbf{s}_i}\cdot\mathbf{y}_i^T D_i \quad , i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

ในการหาค่า $\mathbf{x}_{i+1}$ ตามสูตร

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

เราไม่ต้องคำนวณตัวผกผัน D_i^{-1} เพราะยุ่งยาก แต่เราปรับสมการเป็น

$$D_i(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

ให้ $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ แล้วแก้สมการ

$$D_i \mathbf{b}_i = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

ได้ $\mathbf{b}_i$ แล้วจึงปรับค่า $\mathbf{x}_{i+1}$ โดย

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i$$

วิธีของบรอยเดนตัวผกผัน

วิธีของบรอยเดนระบบสมการ (2.12) เราสามารถที่จะใช้สูตรผกผันในการแก้ระบบสมการได้เป็น

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ผกผันโดยสูตรของ Sherman-Morrison-Woobury (Dennis & Schnabel, 1996)

$$\mathbf{k} = 1 + \mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} B^{-1}\mathbf{a}_i \tag{2.16}$$

$$(B + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}})^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{\mathbf{k}} \mathrm{B}^{-1}\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} B^{-1} \tag{2.17}$$

เมื่อ B เป็นเมทริกซ์ที่มีตัวผกผัน และ $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$

กำหนดให้ $\mathbf{a}_i = \dfrac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_i}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$, $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ และ $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$

จาก (2.13) เป็น

$$D_{i+1} = D_i + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}$$

ได้
$$D_{i+1}^{-1} = (D_i + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{2.18}$$

โดย (2.16) และ (2.17) จะได้

$$\begin{aligned}
(D_i + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}})^{-1} &= D_i^{-1} - \frac{1}{1 + \mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}\mathbf{a}_i} D_i^{-1}\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1} \\
&= D_i^{-1} - \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}_i + D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}))} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1} \\
&= D_i^{-1} - \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}(-D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}))} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1} \\
&= D_i^{-1} - \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i))} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}
\end{aligned}$$

นั่นคือ
$$= D_i^{-1} - \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}\mathbf{y}_i} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}\ , \ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

จาก (2.18) และ (2.19) จะได้ สูตรการปรับเปลี่ยนแบบผกผันเป็น

$$D_{i+1}^{-1} = D_i^{-1} - \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}\mathbf{y}_i} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} D_i^{-1}\ , \ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

และสูตรแบบตัวผกผันอีกสูตร โดยพิจารณาจากสูตร (2.11) เขียนในแบบตัวผกผันเป็น

$$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = D_{i+1}^{-1}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\right] \tag{2.21}$$

และ $$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

กำหนดให้ $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ สมการข้างต้นเป็น

$$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = D_{i+1}^{-1}\mathbf{y}_i \tag{2.22}$$

และ $$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = D_i^{-1}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\right]$$

$$= D_i^{-1}\left[\mathbf{y}_i - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\right]$$

นั่นคือ $$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = D_i^{-1}\mathbf{y}_i - D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) \tag{2.23}$$

สมการ (2.22) – (2.23) จะได้

$$\mathbf{0} = D_{i+1}^{-1}\mathbf{y}_i - D_i^{-1}\mathbf{y}_i + D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

$$(D_{i+1}^{-1} - D_i^{-1})\mathbf{y}_i = D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) \tag{2.24}$$

กำหนดให้ $(D_{i+1}^{-1} - D_i^{-1}) = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ (2.25)

เมื่อ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ (column vector)

จาก (2.24) และ (2.25) จะได้ $\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{y}_i = D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$ โดยเลือกให้ $\mathbf{v} = \mathbf{y}_i$ จะได้

$$\mathbf{u}\mathbf{y}_i^T\mathbf{y}_i = D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{y}_i^T\mathbf{y}_i} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})$$

จาก (2.25) ได้สูตรการปรับเปลี่ยนตัวผกผันอีกแบบหนึ่งเป็น

$$D_{i+1}^{-1} = D_i^{-1} - \frac{1}{\mathbf{y}_i^T\mathbf{y}_i} D_i^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{y}_i^T \quad , i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.26}$$

ในการหาสูตรปรับเปลี่ยนตัวผกผันในการหา $\mathbf{x}_{i+1}$ หาได้โดยตรงจากสูตร (2.11) โดยไม่ต้องแก้สมการ

ระเบียบวิธีของบรอยแดนมีอันดับการลู่เข้าเหนือเชิงเส้น และในการคำนวณใช้แรงงานน้อยกว่าวิธีของนิวตัน เนื่องจากไม่ต้องคำนวณหาค่าเมทริกซ์อนุพันธ์ย่อย (Jacobian Matrix) ในสูตร (2.14) และ (2.20) เรียกว่า สูตรการปรับเปลี่ยนที่ดีของบรอยเดน (Broyden's Good Update) และเรียกสูตร (2.15) และ (2.26) เรียกว่า สูตรการปรับเปลี่ยนที่ไม่ดีของบรอยเดน (Broyden's Bad Update)

วิธีของนิวตัน -บรอยเดน

พิจารณาระบบของสมการในรูปแบบ

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.27}$$

เมื่อ $\mathbf{F}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ และ $\mathbf{0}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์

โดยใช้สูตรของนิวตัน (2.8) จะได้ว่า

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F}'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i) \tag{2.28}$$

โดย

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i) = \mathbf{F}_\mathbf{u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i) + \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i) \tag{2.29}$$

เป็นเมทริกซ์จาโคเบียนที่ได้มาจากของฟังก์ชัน $\mathbf{F}$

ให้ $$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$$

และ $J(x) = \mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_\mathbf{u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})\mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ ถ้า $\mathbf{G}$ มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $\mathbf{G}'$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบลิปชิตซ์ (Lipschitz continuous) ใน C ถ้า $\mathbf{z}$ เป็นศูนย์และ $\mathbf{G}'(\mathbf{z})$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{N}(\mathbf{z}, \delta)$ แล้วลำดับ $\{\mathbf{x}_i\}$ ได้มาจากวิธีของนิวตัน (2.8) จะลู่เข้าสู่ $\mathbf{z}$ ด้วยอัตราการลู่เข้าเป็นอันดับสอง

ในปัญหาส่วนใหญ่เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเบื้องต้น เมทริกซ์จาโคเบียนไม่ยากในการคำนวณ และการคำนวณโดยสูตร (2.28) ได้ผลดี แต่ในบางปัญหาเช่นปัญหาค่าขอบโดยตัวแปร $\mathbf{x}$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ และฟังก์ชัน $\mathbf{u}$ เป็นค่าของจุดปลายที่ได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ อนุพันธ์ $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ ยากต่อการคำนวณ

ดังนั้นการแทนที่อนุพันธ์ด้วยเมทริกซ์บางเมทริกซ์ที่ง่ายต่อการคำนวณ จะเป็นแนวคิดที่ดี โดยมีเงื่อนไขว่ากระบวนการต้องสามารถทำงานสำเร็จได้ จึงมีแนวคิดที่จะใช้เทคนิคของบรอยเดน เพื่อหาเมทริกซ์ที่จะประมาณค่าหาอนุพันธ์ $\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i)$ โดยสังเกตว่า ปัญหาไม่ใช่การแก้สมการ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ แต่จะใช้สูตร (2.14) ในการปรับค่าที่เหมาะสม (อำพล ธรรมเจริญ, 2557)

การปรับค่าของบรอยเดน

ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของหนึ่งตัวแปร อนุพันธ์ประมาณค่าในรูปแบบเส้นตัดโค้ง

$$\mathrm{u}'(x_i) \approx D_i = \frac{\mathrm{u}(x_i) - \mathrm{u}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \tag{2.30}$$

สำหรับฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ อนุพันธ์ $\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i)$ สามารถประมาณในลักษณะเดียวกันในเมทริกซ์ D_i สอดคล้องกับเงื่อนไขเส้นตัดโค้ง

$$D_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i-1}) \tag{2.31}$$

แต่เมทริกซ์ D_i ไม่สามารถได้มาจากสมการข้างต้น เนื่องจากมีตัวแปรมากกว่าจำนวนของเงื่อนไข ดังนั้นเมทริกซ์ต้องถูกกำหนดโดยจากปรับจากการกระทำซ้ำ เมทริกซ์การปรับเปลี่ยนเป็น

$$D_{i+1} = D_i + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} \tag{2.32}$$

เมื่อ $\mathbf{a}_i$ และ $\mathbf{b}_i$ เป็นเวกเตอร์ (ขนาดที่เหมาะสม) เขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ ให้ $\mathbf{h}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ ดังนั้นเงื่อนไขเส้นตัดโค้ง (2.30) สามารถเขียนที่อันดับ $(i+1)$ ของการกระทำซ้ำ

$$D_{i+1}\mathbf{h}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$$

ลบด้วย $D_i\mathbf{h}_i$ ทั้งสองข้างของสมการ

$$(D_{i+1} - D_i)\mathbf{h}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{h}_i$$

จาก $D_{i+1} - D_i = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}$ จะได้

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{h}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{h}_i$$

กำหนดให้ $\mathbf{b}_i = \mathbf{h}_i$

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_i}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{b}_i)$$

ดังนั้น

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_i}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{b}_i)\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} \tag{2.33}$$

วิธีของนิวตัน-บรอยเดน การประมาณเมทริกซ์ D_i แทนที่เมทริกซ์จาโคเบียน $\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i)$ ในแต่ละการกระทำซ้ำ รูปแบบมีดังนี้

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)D_i + \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.34}$$

ด้วยใช้เมทริกซ์ปรับเปลี่ยน (2.33) สมมติเมทริกซ์จาโคเบียน $\mathbf{F}_{\mathbf{u}}$ และ $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$ ขั้นตอนวิธีในการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นของรูปแบบ $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนแรก : ให้เดาค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ และ D_0

คำนวณ $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ และ $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)$

ขั้นตอนหลัก : สำหรับ $i = 0$ ถึง K ทำดังต่อไปนี้

M1 คำนวณ $\mathbf{F_u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)$ และ $\mathbf{F_x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)$

และ $A_i = \mathbf{F}'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i) = \mathbf{F_u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)D_i + \mathbf{F_x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)$

M2 แก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$A_i \mathbf{b}_i = -\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)$$

M3 ปรับเปลี่ยนจุด

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i$$

คำนวณ $\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1})$ และ $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}), \mathbf{x}_{i+1})$ (สำหรับการกระทำครั้งต่อไป)

M4 คำนวณ $\mathbf{b}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{b}_i$ และ $D_i \mathbf{b}_i$ และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ D_i

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{\mathbf{b}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{b}_i}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{b}_i)\mathbf{b}_i^{\mathbf{T}}$$

หยุดกระบวนการ ถ้า $\mathbf{b}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{b}_i < \varepsilon$ และ $\|\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}), \mathbf{x}_{i+1})\| < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อยๆ

ข้อสังเกตค่า K คือจำนวนสูงสุดของการกระทำในกระบวนการ วิธีการนี้เรียกว่าวิธีสองขั้นตอนหรือวิธีของนิวตัน-บรอยเดน (Newton-Broyden method) การเลือกค่าเริ่มต้นที่ดีจะนำไปสู่การลู่เข้าสู่คำตอบ ด้วยอัตราการลู่เข้าที่อยู่ระหว่างวิธีของบรอยเดนและวิธีของนิวตัน

เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

อังคณา บุญดิเรก และอำพล ธรรมเจริญ (2542) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาการเปลี่ยนวงโคจรของยานอวกาศ ซึ่งมีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเป็น

$$\begin{aligned} x_1'' &= -kx_1/r^3 \\ x_2'' &= -kx_2/r^3 \end{aligned} \quad , t \in [t_0, t_f] \tag{2.35}$$

เมื่อ $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ และเงื่อนไขเป็น

$$x_1(t_0) = a_1,\ x_1(t_f) = b_1,\ x_2(t_0) = a_2,\ x_2(t_f) = b_2$$

ปัญหาค่าขอบดังกล่าว มีสมการเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นและเงื่อนไขค่าขอบอยู่ในรูปแบบปัญหาค่าปรกติ ผู้วิจัยแก้ปัญหาโดยใช้วิธียิงเป้าใช้รูงเง-คุตตาในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์และใช้ระเบียบวิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นของปัญหาค่าขอบปรกติ

ขนิษฐา ชมภูวิเศษ (2554) ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ โดยใช้วิธียิงเป้าในการแก้ปัญหาค่าขอบและวิธีของเทย์เลอร์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และใช้วิธีของนิวตัน-บรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้

สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบ ซึ่งพบว่าสามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้ดีกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น และเงื่อนไขค่าขอบเป็นระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีลักษณะแยกไม่ได้

อรรฆพร ประชานุรักษ์ (2550) ศึกษาการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงสามัญด้วยวิธียิงเป้าโดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบ ผลปรากฏว่าวิธีของบรอยเดนใช้ได้ดีกับปัญหาค่าขอบที่มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นวิธีของบรอยเดนใช้ได้ดีกับปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขแบบแยกได้