รายงานวิจัย ฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัย เรื่อง

วิธีที่มีประสิทธิภาพสำหรับแก้สมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์

An Efficient Method for Solving Differential-Algebraic Equations

ชื่อหัวหน้าโครงการผู้รับทุน

รองศาสตราจารย์ ดร. อำพล ธรรมเจริญ

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้
จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน)
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๖
มหาวิทยาลัย บูรพา

รหัสโครงการ ๘๕๑๔๙
สัญญาเลขที่ ๓๕/๒๕๕๖

รายงานวิจัย ฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัย เรื่อง

วิธีที่มีประสิทธิภาพสำหรับแก้สมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์

An Efficient Method for Solving Differential-Algebraic Equations

ชื่อหัวหน้าโครงการผู้รับทุนวิจัย

รองศาสตราจารย์ ดร. อำพล ธรรมเจริญ Ph.D.
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี ๒๐๑๓๑

เดือน สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๘

คำนำ

ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential-Algebraic Equation; DAE) เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มาจากปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ลักษณะของปัญหาเป็นสมการที่มีอนุพันธ์และความสัมพันธ์เชิงพีชคณิตที่ไม่ชัดแจ้ง(ในสมการเดียวกัน) และมีเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้น หรือที่จุดปลายเป็นปัญหาค่าขอบ โดยที่ตัวไม่ทราบค่าหรือผลเฉลยเป็นฟังก์ชัน เนื่องจากปัญหาในความเป็นจริงมักมีสมการที่ยุ่งยาก และไม่อาจแก้ได้โดยวิธีวิเคราะห์ เพื่อให้สามารถนำผลเฉลยจากของปัญหาดังกล่าวไปใช้ประโยชน์ได้การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการเชิงตัวเลขจึงเป็นสิ่งจำเป็น คณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะเสาะหาเทคนิคและวิธีการแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ ที่มีประสิทธิภาพ

ผลการวิจัย ผู้วิจัยได้สร้างวิธีแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ โดยนำวิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และปัญหาค่าขอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์มาปรับใช้ ทั้งนี้โดยมีพื้นฐานจากวิธีแก้ระบบสมการโดยวิธีนิวตัน-บรอยเดน ซึ่งเป็นที่ผู้วิจัยได้คิดค้นไว้ ผลการทดลองปรากฏว่าได้ผลดี กล่าวคือ ได้คำตอบประมาณที่มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยในระดับที่พอใจ โดยใช้แรงงานน้อย

ผู้วิจัยเขียนรายงานการวิจัยในรูปแบบที่พร้อมจะลงตีพิมพ์ในวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์ ขณะนี้กำลังอยู่ในระหว่างส่งไปพิจารณาลงพิมพ์ในวารสาร

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณคณะกรรมการการวิจัยที่อนุมัติงบประมาณวิจัยครั้งนี้ และขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ ที่ให้ใช้สถานที่ทำงาน และเปิดโอกาสให้ได้ทำงานจนสำเร็จ คณะผู้วิจัยคาดหวังว่าผลงานวิจัยจะเป็นประโยชน์ในทางวิชาการในด้านการคำนวณ เป็นประโยชน์ในสาขาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ต่อไป

อำพล ธรรมเจริญ หัวหน้าคณะวิจัย

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๖ มหาวิทยาลัยบูรพา ผ่านสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา ๓๕/๒๕๕๖

Acknowledgment

This work was financially supported by the Research Grant of Burapha University through National Research Council of Thailand (Grant no. 35/2556).

รายงานการวิจัย

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) วิธีที่มีประสิทธิภาพสำหรับแก้สมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์

(ภาษาอังกฤษ) An Efficient Method for Solving Differential-Algebraic Equations

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบเดิมโดยที่สมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิตยังคงรูปอยู่เดิม เทคนิคโดยวิธีนิวตัน และวิธีนิวตัน-บรอยเดนประกอบกับวิธีปกติที่ใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ คือวิธีรุงเง-คุตตา ได้ถูกนำมาใช้ควบกันเพื่อแก้ปัญหา การทดลองแสดงให้เห็นว่า วิธีที่สร้างขึ้นสามารถแก้ปัญหาได้จริง และมีประสิทธิภาพในแง่ที่ว่า สามารถประมาณค่าผลเฉลยได้อย่างรวดเร็วโดยมีค่าคลาดเคลื่อนน้อย ภายในเวลาที่เหมาะสม

Abstract:

This research aims to solve the DAE problems in its original form in which both the differential and algebraic equations remain. The Newton or Newton-Broyden technique together with some integrator such as the Runge-Kutta method are coupled to solve the problems. Some experiments show that the method developed here is efficient, in the sense that it can give the approximate solution within some desired accuracy and some reasonable time.

สารบัญเรื่อง

Table of Contents

บทสรุปสำหรับผู้บริหาร

(Executive Summary)

ข้าพเจ้า ร.ศ. ดร. อำพล ธรรมเจริญ ได้รับทุนสนับสนุนโครงการวิจัย จากมหาวิทยาลัยบูรพา ประเภทงบประมาณเงินรายได้ จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน) มหาวิทยาลัย บูรพา

โครงการวิจัย เรื่อง วิธีที่มีประสิทธิภาพสำหรับแก้สมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์

ภาษาอังกฤษ An Efficient Method for Solving Differential-Algebraic Equations

รหัสโครงการ ๘๕๑๔๙ สัญญาเลขที่ ๓๕/๒๕๕๖

ได้รับงบประมาณรวมทั้งสิ้น ๑๒๖,๔๐๐ บาท (หนึ่งแสนสองหมื่นหกพันสี่ร้อยบาทถ้วน) ระยะเวลาทำงาน ๑ ปี (ระหว่างวันที่ ๑๗ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๕๖ ถึงวันที่ ๓๐ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๖)

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบเดิมโดยที่สมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิตยังคงรูปอยู่เดิม เทคนิคโดยวิธีนิวตันและวิธีนิวตัน-บรอยเดนประกอบกับวิธีปกติที่ใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ คือวิธีรุงเง-คุตตา ได้ถูกนำมาใช้ควบกันเพื่อแก้ปัญหา การทดลองแสดงให้เห็นว่า วิธีที่สร้างขึ้นสามารถแก้ปัญหาได้จริง และมีประสิทธิภาพ ในแง่ที่ว่า สามารถประมาณค่าผลเฉลยได้อย่างรวดเร็วโดยมีค่าคลาดเคลื่อนน้อย ภายในเวลาที่เหมาะสม

Output/Outcome

ผลที่ได้จากการวิจัย ได้สร้างวิธีการเพื่อแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ที่มีประสิทธิภาพ คือแก้ปัญหาได้จริงโดยได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำ ค่าคลาดเคลื่อนน้อย

ผลงานที่ได้ ได้เขียนเป็นบทความวิจัย คือ

Some Numerical Methods for solving Differential Algebraic Equation ซึ่งจะได้นำไปเผยแพร่ในวารสารวิชาการ ต่อไป

ข้อเสนอแนะ

จากการสร้างขั้นตอนวิธีการคำนวณ และการทดลองใช้ พบว่าสมการที่ไม่มีพจน์ตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ในสมการ ทำให้การหาผลเฉลยกระทำได้ยากกว่ากรณีที่มีพจน์ของตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ในสมการ ดังนั้น ในการนำวิธีการคำนวณไปใช้ มีข้อเสนอแนะดังนี้

1. การปรับเปลี่ยนสมการเพื่อให้มีพจน์ตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ในสมการ จะทำให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น โดยใช้ขั้นตอนวิธี A ทั้งในแง่ของการจัดกระทำกับปัญหาให้เข้าแบบการคำนวณ (Formulation) และผลการคำนวณจะทำให้ได้ค่าที่ถูกต้องแม่นยำมากขึ้น

2. กรณีที่การปรับเปลี่ยนในข้อ 1. กระทำไม่ได้ หรือกระทำได้ยาก หรือปัญหามีดัชนีสูง หรือมีจำนวนตัวไม่ทราบค่าหลายตัว การปรับเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเฮซเซนเบอร์กดัชนี 2 และใช้ขั้นตอนวิธี B ก็สามารถแก้ปัญหาได้ดีพอสมควร

1. บทนำ

1.1 ความสำคัญ และที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential-Algebraic Equation; ADE) เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มาจากปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ลักษณะของปัญหาเป็นสมการที่มีอนุพันธ์และความสัมพันธ์เชิงพีชคณิตที่ไม่ชัดแจ้ง(ในสมการเดียวกัน) และมีเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้น หรือที่จุดปลายเป็นปัญหาค่าขอบ โดยที่ตัวไม่ทราบค่าหรือผลเฉลยเป็นฟังก์ชัน แบบทั่วไปของสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์เขียนในรูปเวกเตอร์ เป็น

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0} \qquad (1)$$

เมื่อ $\mathbf{x} : [a, b] \longrightarrow R^n$, เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรตาม $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ และระบบสมการมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร คือ $\mathbf{F} = \{F_1, F_1, \ldots, F_n)$ (Ascher 1998) สมการดังกล่าวโดยปกติจะแตกต่างจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์เพราะว่าไม่สามารถจะเขียน $\mathbf{x}'(t)$ ให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอื่น ๆ ที่ชัดเจนได้

วิธีแก้ปัญหา DAE ขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา ลักษณะปัญหาอย่างหนึ่งที่เกิดขึ้นบ่อย ๆ คือปัญหาที่เป็นแบบ กึ่งชัดแจ้ง เป็นปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ (ODE) ที่มีเงื่อนไขข้อจำกัดในแบบ

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t) \qquad (2a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t) \qquad (2b)$$

เมื่อ $\mathbf{x}(t) \in R^m$, $\mathbf{y}(t) \in R^n$, $\mathbf{f}:R^{m+n+1} \longrightarrow R^n$ และ $g: R^{m+n+1} \longrightarrow R^m$ ปัญหาดังกล่าวมักพบบ่อย ๆ ในการประยุกต์ ดังเช่นปัญหาลูกตุ้มนาฬิกาที่แกว่งไปมา ถ้าให้ (x, y) เป็นจุดแสดงตำแหน่งของลูกตุ้ม โดยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจะได้

$$x''(t) = -ax$$

$$y''(t) = -ay - g \quad (g \text{ แรงดึงดูดของโลก})$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับเป็นสมการไม่เชิงเส้น $x^2 + y^2 = 1$ (ความยาวรัศมีลูกตุ้ม = 1) เมื่อแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้

$$x'(t) = u(t) \qquad y'(t) = v(t)$$

$$u'(t) = -ax(t) \qquad v'(t) = -ay(t) - g$$

$$x(t) + y(t) = 1$$

ระบบสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์อาจดำเนินการหาอนุพันธ์สมการที่ไม่มีอนุพันธ์ ทำให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เพื่อที่จะใช้วิธีแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีแล้ว จำนวนครั้งของการ

หาอนุพันธ์จนกระทั่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เราเรียกว่า *ดัชนีของสมการ* โดยปกติ ถ้าดัชนีมีค่าสูง ระบบสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ จะเป็นปัญหาที่แก้ยากขึ้น (Campbell, 2008)

รูปแบบพิเศษของสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ คือ สมการไฮเซนเบอร์ก ดัชนี 1 (index-1 Hessenberg DAE) คือสมการ (2) และสมการไฮเซ่นเบอร์กดัชนี 2 (index-2 Hessenberg DAE) คือ

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t) \qquad (2b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t), t)$$

ทั้งสองแบบเป็นสมการแบบกึ่งชัดแจ้ง

เนื่องจากปัญหาในความเป็นจริงมักมีสมการที่ยุ่งยาก และไม่อาจแก้ได้โดยวิธีวิเคราะห์ เพื่อให้สามารถนำผลเฉลยจากของปัญหาดังกล่าวไปใช้ประโยชน์ได้การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการเชิงตัวเลขจึงเป็นสิ่งจำเป็น

ผู้เสนอวิจัยสนใจที่จะเสาะหาวิธีแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ ที่มีประสิทธิภาพ โดยจะทดลองนำวิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และปัญหาค่าขอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์มาปรับใช้ วิธีการที่ผู้วิจัยจะนำมาทดลองใช้อาจเป็นวิธีต่าง ๆ ดังนี้ คือ 1. วิธีผลต่างจำกัด 2. วิธียิงเป้า โดยควบกับวิธีของนิวตัน หรือวิธีเส้นตัดโค้ง (Secant method), วิธีฟังก์ชันประมาณค่า และวิธีกึ่งแบบเชิงเส้น โดยจะสร้างขั้นตอนวิธี พิสูจน์การลู่เข้า และทดลองใช้กับปัญหาดังกล่าว และปัญหาอื่นที่คล้ายกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ

เพื่อเสาะหาเทคนิค-วิธีการที่มีประสิทธิภาพ สำหรับแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์

1.3 ทฤษฎี สมมุติฐาน หรือกรอบแนวความคิด

วิธีเชิงตัวเลขส่วนใหญ่จะใช้วิธีทำให้เป็นแบบดิสครีตโดยการแบ่งช่วงของฟังก์ชันเป็นช่วงเล็กย่อย ๆ แล้วประมาณค่าอนุพันธ์โดยสูตรผลต่าง แต่ว่าวิธีดังกล่าวนี้ใช้ได้ผลดีเมื่อสมการมีดัชนีเป็น 1 ถ้าดัชนีสูงวิธีดังกล่าวกลายเป็นวิธีที่ไม่เสถียร ผู้เสนอโครงการวิจัยนี้เห็นว่า ถ้ามองปัญหาเป็นการแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าเป็นฟังก์ชัน ปัญหาจะเป็นการแก้สมการในปริภูมิบานาค (มิติไม่จำกัด) วิธีของนิวตันในปริภูมิบานาคมีชื่อว่า วิธีกึ่งแบบเชิงเส้น (Quasi-linearization Method) อาจใช้ได้ผลดี และวิธีดังกล่าวนี้เป็นวิธีทั่วไปคาดว่าน่าจะใช้แก้ปัญหาได้ทุก ๆ แบบ อีกวิธีหนึ่งคือวิธียิงเป้า ซึ่งปรกติใช้แก้ปัญหาค่าขอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ แต่อาจนำมาปรับใช้กับปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ได้ วิธีที่กล่าวถึงนี้ ผู้วิจัยได้พัฒนาวิธีแก้ระบบสมการชื่อว่า วิธีสองขั้น หรือ วิธีนิวตัน-บรอยเดน โดยใช้วิธีการปรับค่าเริ่มต้นโดยวิธีนิวตันควบกับวิธีของบรอยเดน ปรากฏว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูง คือใช้แก้ปัญหาได้ดี รวดเร็ว และใช้แรงงานน้อย ซึ่งอาจนำมาปรับใช้กับปัญหาใหม่นี้ได้

1.4 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (Literature review)

การแก้ปัญหา DAE โดยวิธีเชิงตัวเลขส่วนใหญ่แบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ 1. แก้ปัญหาโดยทำดิส ครีต คือแบ่งช่วงย่อย ๆ แล้วใช้ผลต่างประมาณค่าอนุพันธ์ 2. เปลี่ยนปัญหาให้เป็นแบบที่มีดัชนีต่ำ วิธีแรกกระทำได้ผลดีถ้าปัญหามีดัชนีต่ำ และได้ผลน้อยหรือทำไม่ได้ ถ้าปัญหาทีดัชนีสูง วิธีที่สองคือการลดดัชนี ซึ่งการกระทำต้องใช้การวิเคราะห์ การทำจึงใช้แรงงานสูง และเกี่ยวข้องกับผู้คำนวณมาก ดังนั้นจึงทำเมื่อจำเป็น

วิธีแก้สมการ DAE ที่ใช้อยู่ได้แก่วิธีวิธีของออยเลอร์กลับทาง (Backward Euler method) ซึ่งใช้ได้ดีสำหรับปัญหาดัชนี 1 รวมทั้งปัญหาชนิดแก้ยาก (Stiff index-1) แต่สำหรับปัญหาที่มีดัชนีสูงวิธีนี้ได้ผลน้อยหรือใช้ไม่ได้ วิธีอื่น ๆ เช่น วิธีหลายขั้น และวิธีรุงเง-คุตตา ก็มักใช้ไม่ได้กับปัญหา DAE ที่มีดัชนีสูง (Ascher et al. 1998) สำหรับปัญหากึ่งชัดแจ้งดัชนี 2 ก็ยังสามารถแก้ได้โดยวิธีของออยเลอร์กลับทาง (Brenan et al. 1996) (Hairer et al. 1998) สำหรับปัญหาที่มีดัชนีสูงต้องใช้วิธีอันดับสูงในการแก้ปัญหา คือ วิธีสูตรอนุพันธ์กลับทาง (Backward Differential Formula; BDF) โดยการประมาณค่าอนุพันธ์โดยสูตรผลต่างอันดับสูง นอกจากนี้มีวิธีวิธีฟังก์ชันประมาณค่าของราเดา และวิธีรุงเง-คุตตาแบบไม่ชัดแจ้ง (Radau collocation and implicit Runge-Kutta methods) วิธีที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดปกติใช้สำหรับแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (ODE) แต่เมื่อนำมาใช้กับปัญหา DAE จำเป็นต้องมีการปรับเพิ่มเงื่อนไข และถ้าปัญหา DAE มีเงื่อนไขที่จุดอื่นเป็นปัญหาค่าขอบ ก็จะต้องมีการแก้ระบบสมการโดยวิธีของนิวตันหรือวิธีอื่น ๆ เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

สำหรับสมการเฉพาะแบบ เช่น ปัญหา DAE กึ่งชัดแจ้งแบบไฮเซนเบอร์ก (Hessenberg) จะมีวิธีที่ใช้ได้ผลดี มีชื่อว่า วิธีเสถียร หรือวิธีภาพฉาย (Stabilized or projected method) ซึ่งมีแนวคิดหลักคือ ทำปัญหาให้เป็นแบบดิสครีตโดยวิธีทั่วไปของ ODE และใช้วิธีภาพฉายไปยังแกนพิกัด เพื่อทำให้ผลเฉลยใกล้กับสมการที่เป็นเงื่อนไขบังคับ (Eich-Soellner et. al. 1998)

ผู้เสนอวิจัยได้ค้นพบวิธีแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น ชื่อว่าวิธีของนิวตัน-บรอยเดน ซึ่งเป็นการควบรวมวิธีทั้งสองในขั้นตอนเดียว เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและใช้แรงงานน้อย โดยขนิษฐาได้นำวิธีนี้ไปใช้แก้ปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นสมการซับซ้อนแบบไม่ชัดแจ้ง ปรากฏว่าได้ผลดี สามารถลดแรงงานจากวิธีของนิวตันได้ถึง 10-50% (K. Chompuvised, A. Dhamacharoen 2011) ผู้วิจัยเชื่อว่า อาจนำวิธีนี้ไปใช้แก้ปัญหา DAE ได้ดีเช่นเดียวกัน

1.5 วิธีนิวตัน-บรอยเดน (Newton-Broyden Method)

Deleted: The

Deleted: 's

วิธีนิวตัน-บรอยเดน เป็นวิธีแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น นำเสนอครั้งแรกโดยอำพล 2554 [4, 5] ในชื่อ วิธีสองขั้น ระบบสมการอยู่ในแบบ

$$\mathbf{F(u(x), x) = 0} \qquad (3)$$

ถ้าแก้ระบบสมการโดยวิธีของนิวตัน จะได้สูตรการคำนวณเป็น

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F_u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i) + \mathbf{F_x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots \quad (4)$$

ถ้าแทน $\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i)$ ด้วย D_i จะได้

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F_u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)D_i + \mathbf{F_x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i),\quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad (5)$$

และมีสูตรการปรับค่าเมทริกซ์

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_i}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{b}_i)\mathbf{b}_i^T \quad (6)$$

เมื่อ $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$. สมการ (6) เรียกว่า สูตรปรับค่าลำดับขั้น 1 ของบรอยเดน (Broyden's rank-1 update) สมการ (5) และ (6) คือวิธีนิวตัน-บรอยเดน วิธีดังกล่าวนี้คงลักษณะที่ดีของวิธีนิวตันไว้ และแทนที่การคำนวณที่ยุ่งยากด้วยวิธีของบรอยเดน ถ้ามีจุดเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ และ D_0 ที่ดี วิธีการดังกล่าวจะทำให้ได้ลำดับของจุดที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยของระบบสมการ (3) โดยมีอันดับการลู่เข้า เป็นแบบ เหนือเชิงเส้นแบบ q

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ เป็นการสร้างองค์ความรู้ใหม่ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ มีประโยชน์ในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของประเทศ ผลการวิจัยนี้สามารถนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง คือ 1. ความรู้ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่สร้างขึ้นเพื่อยืนยันความถูกต้องของวิธีการจะเป็นความรู้พื้นฐานสำหรับเรื่องอื่น ๆ และเป็นเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ระดับสูง ที่จะเป็นองค์ความรู้ ใช้สอนในระดับปริญญาโท (เอก) ได้ 2. ระเบียบวิธีการคำนวณที่สร้างขึ้นจะสามารถนำมาใช้สร้างซอฟต์แวร์คำนวณสำหรับปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ผลกระทบที่เกิดขึ้น หากผลงานเป็นไปดังคาดหมาย จะเป็นองค์ความรู้ใหม่ที่มีประโยชน์ใน การพัฒนาเทคโนโลยี มีผลกระทบต่อสังคมไทย ในแง่ของการสร้างความเชื่อมั่นในภูมิปัญญาของคนไทย สร้างความมั่นคงด้านวิชาการ สร้างศักยภาพในการเรียนการสอนระดับสูง (ปริญญาโท เอก) สร้างชื่อเสียงให้มหาวิทยาลัย และของประเทศโดยรวม

2. การดำเนินการวิจัย และผลการวิจัย

2.1 การสร้างขั้นตอนวิธี

ผู้วิจัยได้สร้างวิธีแก้ปัญหาสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ โดยมีพื้นฐานจากวิธีแก้ระบบสมการโดยวิธีนิวตัน-บรอยเดน ซึ่งเป็นที่ผู้วิจัยได้คิดค้นไว้ โดยพิจารณาปัญหา 2 แบบ คือ ปัญหาสมการเฮซเซนเบอร์กดัชนี 1 และ สมการเฮซเซนเบอร์ก ดัชนี 2

1. ปัญหา สมการเฮซเซนเบอร์ก ดัชนี 1 ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t) \tag{7a}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t) = \mathbf{0} \tag{7b}$$

และกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{7c}$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่สอดคล้องพอดี จะทำให้สมการนี้มีผลเฉลย คือมีฟังก์ชัน $\mathbf{x}(t)$ และ $\mathbf{y}(t)$ ที่ทำให้สมการ (7a), (7b) และ (7c) เป็นจริง ในปัญหาดังกล่าว เราสมมุติว่า สมการ (7b) อยู่ในแบบไม่ชัดแจ้ง เพราะถ้าสามารถเขียน $\mathbf{x}(t)$ ในรูปของ $\mathbf{y}(t)$ ได้ชัดแจ้ง ปัญหาจะกลายมาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้จริง ไม่เป็นสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์อีกต่อไป

การแก้ปัญหา กระทำดังนี้ แบ่งช่วง [a, b] เป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงย่อยกว้าง $h = \dfrac{b-a}{n}$,

และ $t_0 = a, t_i = t_{i-1} + h,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

กำหนดให้ $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{y}(t_i), t),\ i = 1, 2, \ldots, n$

เมื่อ $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t_{i-1}))$ โดยผ่านสมการ (7a)

ดังนั้นสมการจะเป็น

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1})) = \mathbf{0}$$

ในช่วงแรกเราทราบค่าของ $\mathbf{y}(t_0)$ ซึ่งจะใช้ค่านี้เพื่อหาค่า $\mathbf{x}(t_0)$ โดยใช้สมการ (7b) ต่อไปในแต่ละช่วงย่อย $[t_{i-1}, t_i]$ เราจะแก้ปัญหา (7a) เพื่อหาค่า $\mathbf{y}(t_i)$ โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4 ซึ่งจะต้องหาค่า

$$\mathbf{F}_1 = h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1}),\ t_{i-1})$$

$$\mathbf{F}_2 = h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}(t_{i-1})+\mathbf{F}_1/2,\ t_{i-1}+h/2)$$

$$\mathbf{F}_3 = h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}(t_{i-1})+ \mathbf{F}_2/2,\ t_{i-1}+h/2)$$

$$\mathbf{F}_4 = h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}(t_{i-1})+\mathbf{F}_3,\ t_{i-1}+h)$$

และได้ $\mathbf{y}(t_i) = \dfrac{1}{6}(\mathbf{F}_1 + 2\,\mathbf{F}_2 + 2\,\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4)$

ค่าของ $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ และ $\mathbf{x}_3$ ซึ่งจะต้องใช้ในการหาค่า $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ และ $\mathbf{F}_4$ เราหาได้จากสมการ (4b) โดยใช้ค่า $\mathbf{y}(t_{i-1})+\mathbf{F}_1/2$ ใน $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{y}(t_{i-1})+\mathbf{F}_2/2$ ใน $\mathbf{F}_3$ และ $\mathbf{y}(t_{i-1})+\mathbf{F}_3$ ใน $\mathbf{F}_4$ เมื่อได้ค่า y(t) แล้วก็สามารถหาค่า x(t) ได้จากสมการ (7b) เช่นเดียวกัน จากนี้ก็ดำเนินการในช่วงต่อไป จนกระทั่งถึงช่วงสุดท้าย จะได้ผลเฉลยตามต้องการ (ดูขั้นตอนวิธี A)

2. ปัญหา สมการเฮซเซนเบอร์ก ดัชนี 2 ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t) \tag{8a}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), t) = \mathbf{0} \tag{8b}$$

และกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{8c}$$

สังเกตว่า สมการ (8b) ไม่มีพจน์ $\mathbf{x}(t)$ ดังนั้น จะใช้สมการ (8b) เพื่อหา $\mathbf{x}(t)$ ไม่ได้ ในกรณีนี้ เราพิจารณาตัวแปรดังกล่าวเป็นตัวไม่ทราบค่า ซึ่งเราจะหา เพื่อให้สอดคล้องกับสมการ (8b)

แบ่งช่วง [a, b] เป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงย่อยกว้าง $h = \dfrac{b-a}{n}$, และ

$$t_0 = a,\ t_i = t_{i-1} + h,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

กำหนดให้ $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t_i), t),\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

เมื่อ $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t_{i-1}))$ โดยผ่านสมการ (8a)

ดังนั้นสมการจะเป็น

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{u}(\mathbf{x}(t_{i-1}))) = \mathbf{0}$$

ในแต่ละช่วงย่อย $[t_{i-1}, t_i]$ เมื่อทราบค่า $\mathbf{y}(t_{i-1})$ เราคาดเดาค่าของ $\mathbf{x}(t_{i-1})$ แล้วแก้ปัญหา (7a) เพื่อหาค่า $\mathbf{y}(t_i)$ โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4 ซึ่งจะต้องหาค่า $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ และ $\mathbf{F}_4$ ดังข้างบน แต่ในที่นี้เราใช้ค่า $\mathbf{x}(t_{i-1})$ เป็นค่าคงตัวในทุก ๆ $\mathbf{F}_i$ แล้วตรวจสอบเงื่อนไข (8b) ในขั้นตอนนี้เราปรับเปลี่ยนค่าของ $\mathbf{x}(t_{i-1})$ เพื่อให้ผลลัพธ์สอดคล้องกับสมการ (8b) โดยใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน เมื่อได้ค่า $\mathbf{x}(t_{i-1})$ ตามต้องการแล้ว ก็จะเลื่อนไปทำในช่วงย่อยถัดไป โดยใช้ค่า $\mathbf{x}(t_{i-1})$ เป็นค่าคาดเดาของ $\mathbf{x}(t_i)$ ในช่วงถัดไป

จากที่ได้อธิบายไว้ เราดำเนินการดังนี้

ปัญหา (7a, b, c):

กำหนดฟังก์ชัน **F**: $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})),\ i = 1, 2, \ldots, n.$

ปัญหากลายมาเป็น (3)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1})) = \mathbf{0}$$

ซึ่งสามารถแก้ได้โดยวิธีของนิวตัน

P1: วิธีของนิวตัน (Newton Method)

กำหนดค่า ε เพื่อใช้ตรวจสอบ

กำหนดค่าคาดเดา **z**

A: คำนวณค่า **F**(**z**)

ตรวจสอบ $\|\mathbf{F}(\mathbf{z})\| < \varepsilon$, (เมื่อ ε เป็นจำนวนมีค่าน้อยที่กำหนดไว้)

ถ้าจริง ให้ไปที่ B (จบขั้นตอนนี้) ถ้าไม่จริง ทำขั้นต่อไป

คำนวณค่า **F'**(**z**)

แก้สมการ $\mathbf{F'}(\mathbf{z})\mathbf{b} = -\mathbf{F}(\mathbf{z})$เพื่อหาค่า **b**

ปรับค่า $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{b}$

แล้วไปทำขั้น A

B: จบการกระทำ

Algorithm A:

ขั้นเตรียมการ: (1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$

(2) หาค่า $\mathbf{x}(t_0)$โดยการแก้สมการโดยใช้ P1: กำหนดค่า $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z}$

ขั้นหลัก: เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$; ดำเนินการขั้นต่อไปนี้

ขั้นที่ 1. แก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (7a) 1 ครั้ง เพื่อหาค่า $\mathbf{y}(t_i)$ โดยดำเนินการต่อไปนี้

(1) คำนวณค่า: $F1 = h\,\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1}))$

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F1/2$, แก้สมการ $\mathbf{g}(t_{i-1}+h/2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = \mathbf{0}$ หาค่า $\mathbf{x}_1$ (โดยใช้ P1)

(2) คำนวณค่า: $F2 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F2/2$, Solve $\mathbf{g}(t+h/2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \mathbf{0}$ หาค่า $\mathbf{x}_2$ (โดยใช้ P1).

(3) คำนวณค่า: $F3 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F3/2$, Solve $\mathbf{g}(t+h, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) = \mathbf{0}$ หาค่า $\mathbf{x}_3$ (โดยใช้ P1).

(4) คำนวณค่า: $F4 = h\,\mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3)$

(5) $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}(t_{i-1}) + (F1 + 2(F2 + F3) + F4)/6$

ขั้นที่ 2. แก้ปัญหา (7b) เพื่อหาค่า $\mathbf{x}(t_i)$ โดยใช้ P1: กำหนดค่า $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{z}$

แล้วดำเนินการในช่วงต่อไป (Next i)

ปัญหา (8a, b, c):

กำหนดฟังก์ชัน **F**: $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i)), i = 1, 2, \ldots, n.$

ปัญหากลายมาเป็น (3)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{0}$$

ซึ่งสามารถแก้ได้โดยวิธีของนิวตัน-บรอยเดน

P2: วิธีรุงเง-คุตตา 1 ขั้น

กำหนดค่า t_{i-1}, $\mathbf{x}(t_{i-1})$, $\mathbf{y}(t_{i-1})$ และ $\mathbf{b}$.

คำนวณค่า: $F1 = h\,\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1}))$

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F1/2$ และ $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}/2$,

คำนวณค่า: $F2 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F2/2$ และ $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}/2$,

คำนวณค่า: $F3 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F3/2$ และ $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}$,

คำนวณค่า: $F4 = h\,\mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3)$

แล้ว $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}(t_{i-1}) + (F1 + 2(F2 + F3) + F4)/6$

Algorithm B:

ขั้นเตรียมการ:

(1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$

(2) คาดเดาค่า $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z}$

(3) คาดเดาเมทริกซ์ D_0 (อาจเป็น I)

(4) คาดเดาค่า **b**

(5) แก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (8a) 1 ขั้น เพื่อหาค่า $y(t_i)$ โดยใช้ P2

(6) คำนวณค่า $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))$

ขั้นหลัก: เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$; ดำเนินการขั้นต่อไปนี้

ขั้นที่ 1. ตรวจสอบ $\|\mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))\| < \varepsilon$, (เมื่อ ε เป็นจำนวนมีค่าน้อยที่กำหนดไว้)

ถ้าจริง ให้ไปที่ช่วงต่อไป (next i) (จบขั้นตอนนี้) ถ้าไม่จริง ทำขั้นที่ 2

ขั้นที่ 2. (1) กำหนดค่า $\mathbf{u} = \mathbf{y}(t_i)$

(2) คำนวณค่าเมทริกซ์ $A = \mathbf{F_x}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_i)) + \mathbf{F_y}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_i))D$

(3) แก้สมการ $A\mathbf{b} = -\mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))$ เพื่อหาค่า $\mathbf{b}$

(4) กำหนดค่า $\mathbf{x}(t_{i-1}) = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}$

(5) แก้ปัญหา (8a) 1 ขั้น (โดยใช้ P2) เพื่อหาค่า $\mathbf{y}(t_i)$

(6) คำนวณค่า $\mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))$

(7) ปรับค่า $D = D + \frac{1}{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}(\mathbf{y}(t_i) - \mathbf{u} - D\mathbf{b})\mathbf{b}^T$

(8) ไปทำขั้นที่ 1.

จบขั้นตอนวิธี

2.2 การทดลอง

ทดลองการใช้ขั้นตอนวิธีโดยตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง ตัวอย่างแรกเป็นปัญหาเฮซเซนเบอร์ก ดัชนี 1 โดยมีระบบสมการเชิงอนุพันธ์ และสมการพีชคณิตเป็นแบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$x''(t) = -(3t + 1)y(t) - x(t)(4z(t) + 1) \quad , 0 \le t \le 1$$
$$y''(t) = 4\cos(z(t)) - y(t)(4z(t) + 1)$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0, y(0) = 0,$

$x'(0) = 1, y'(0) = 2$

สมการพีชคณิต

$$4\,x(t)\cos(z(t)) + t\,y^2(t) = 4(z(t) - t^2)$$

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงคือ

$$z(t) = t(t + 1)$$
$$x(t) = t\cos(z(t)),$$
$$y(t) = \sin(z(t)).$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธี A ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ดี มีค่าคลาดเคลื่อนน้อย ดังแสดงในตาราง 1. (เมื่อ xs, ys และ zs เป็นค่าคำนวณจากผลเฉลยแม่นตรง)

ตาราง 1. ผลการคำนวณค่า x(t), y(t) และ z(t) จากขั้นตอนวิธี A และค่าคลาดเคลื่อน

i	t	x	y	z	x – xs	y – ys	z – zs
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0000000
5	0.083333	0.082994	0.180310	0.090278	0.000000	0.000000	0.0000000
10	0.1666667	0.1635259	0.3864430	0.1944444	-0.000000	0.0000000	-0.0000000
15	0.2500000	0.2378920	0.6148770	0.3125000	-0.000000	0.0000000	-0.0000000
20	0.3333333	0.3009499	0.8599127	0.4444444	-0.000000	0.0000000	-0.0000000
25	0.4166667	0.3461609	1.1131836	0.5902778	-0.000000	0.0000000	-0.0000000

30	0.5000000	0.3658444	1.3632775	0.7500000	-0.000000	0.0000000	-0.0000000
35	0.5833333	0.3517169	1.5955682	0.9236111	-0.000000	0.0000000	-0.0000000
40	0.6666667	0.2957773	1.7923844	1.1111111	-0.000000	0.0000000	-0.0000000
45	0.7500000	0.1915753	1.9336531	1.3125000	-0.000000	0.0000000	0.0000000
50	0.8333333	0.0358377	1.9981497	1.5277778	0.0000000	0.0000000	0.0000000
55	0.9166667	-0.169652	1.9654489	1.7569445	0.0000001	0.0000001	0.0000001
60	1.0000000	-0.416147	1.8185950	2.0000002	0.0000002	0.0000003	0.0000002

ปัญหาข้อที่สองเป็นปัญหาที่พบเห็นบ่อยครั้ง คือปัญหาเพนดูลัม (The pendulum problem) ที่แสดงในระบบพิกัดฉาก xy ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} x''(t) &= -\lambda(t)x(t) \quad , t \ge 0 \\ y''(t) &= -\lambda(t)y(t) - g \\ x(t)^2 + y(t)^2 &= L^2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

เมื่อ $g = 9.8$ ปัญหานี้เป็นปัญหา DAE กึ่งชัดแจ้ง ดัชนี 2 ในการแก้ปัญหา เราระบุค่า $L = 1$ และกำหนดค่าเริ่มต้น $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ และ $y'(0) = 0$ โดยการแปลงตัวแปร $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = y$ and $y_4 = y'$ จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\lambda y_1 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -\lambda y_3 - g \\ \text{เงื่อนไขเริ่มต้น:} \quad y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_3(0) &= 0 \\ y_4(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10a)$$

สมการพีชคณิต: $$y_1^2 + y_3^2 - 1 = 0. \qquad (10b)$$

ถ้าเรากำหนดให้ $x = \sin\theta$ และ $y = -\cos\theta$ แทนลงในสมการ (9) จัดรูปใหม่ จะเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นมีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\left.\begin{aligned} \theta''(t) &= -\,g\sin(\theta(t)),\ t \ge 0 \\ \theta(0) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

จาก (10b) ถ้าเราหาอนุพันธ์สองครั้ง จะได้สมการ

$$\lambda(t) = y_2^2(t) + y_4^2(t) - g\, y_2(t). \qquad (12)$$

ระบบสมการ (10a) และ (12) จะเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ปกติ เพราะว่าฟังก์ชัน $\lambda(t)$ เขียนได้ในรูปของ $y_2(t)$ และ $y_4(t)$ แบบชัดแจ้ง

ในการทดลองนี้ เราแก้ปัญหา (9a) และ (9b) โดยใช้ขั้นตอนวิธี B ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขดังแสดงใน ตาราง 2 เราทดลองแก้ปัญหา (11) และ ปัญหา(10a) และ (12) ปรากฏว่าได้ผลเหมือนกัน และเราใช้เป็นค่าเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากขั้นตอนวิธี B ในตาราง 2 ค่า xs, ys และ λs มาจากปัญหา (11) ค่า λ(t) เป็นค่าที่จุดกึ่งกลางช่วง t + h/2

ตาราง 2. ผลการคำนวณค่า x(t), y(t) และ λ(t) จากขั้นตอนวิธี B และค่าคลาดเคลื่อน

i	t	x	y	λ(t)	x – xs	y – ys	λ – λs
0	0.000000	1.000000	0.000000	0.0066694	0.000000	0.000000	-0.01334
5	0.083333	0.999421	-0.034020	1.2067764	0.000000	0.000000	-0.01327
10	0.166667	0.990763	-0.135608	4.3889120	0.000000	0.000000	-0.01245
15	0.250000	0.953758	-0.300577	9.4089741	-0.000000	-0.000000	-0.00924
20	0.333333	0.858149	-0.513401	15.762372	-0.000000	-0.000000	-0.001840
25	0.416667	0.674223	-0.738528	22.336944	0.000000	0.000000	0.009746
30	0.500000	0.392046	-0.919946	27.443990	0.000000	0.000000	0.021502
35	0.583333	0.039516	-0.999219	29.406564	0.000001	0.000000	0.026667
40	0.666667	-0.320679	-0.947188	27.497515	0.000001	-0.000000	0.021650
45	0.750000	-0.621722	-0.783238	22.424766	-0.000001	0.000001	0.009949
50	0.833333	-0.826959	-0.562262	15.858262	0.000001	-0.000000	-0.001681
55	0.916667	-0.939329	-0.343017	9.4922857	0.000000	-0.000000	-0.009152
60	1.0000000	-0.986140	-0.165918	4.4483962	0.000000	-0.000000	-0.012414

ปัญหาข้อที่สามเป็นปัญหาเฮซเซนเบอร์กดัชนี 2 โดยมีระบบสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิตเป็นแบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$x''(t) = x(t)(4z(t) - 1) + 2(1 - 3t)y(t) \quad , 0 \le t \le 1$$
$$y''(t) = 2\sin(z(t)) + y(t)(4z(t) - 1)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น:

$$x(0) = 0,\ y(0) = 1,$$
$$x'(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

สมการพีชคณิต:

$$x^2(t) + t^2y^2(t) = t^2$$

สังเกตว่าในปัญหาไม่มีตัวแปร z(t) ในสมการพีชคณิต ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงคือ

$$z(t) = t(1 - t)$$
$$x(t) = t\sin(z(t)),$$
$$y(t) = \cos(z(t)).$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธี B แก้ปัญหานี้ ได้ผลดี คือค่าคลาดเคลื่อนน้อย ดังแสดงไว้ในตาราง 3 ค่าของ z(t) เป็นค่าที่จุดกึ่งกลางช่วง t + h/2

ตาราง 3. ผลการคำนวณค่า x(t), y(t) และ z(t) จากขั้นตอนวิธี B และค่าคลาดเคลื่อน

i	t	x	y	z	x – xs	y – ys	z – zs
0	0.0000000	0.0000000	1.0000000	.0055058	0.0000000	0.0000000	-0.0027581
5	0.0833333	0.0063659	0.9970838	0.0860924	0.0000000	-0.0000000	0.0028285
10	0.1666667	0.0230738	0.9903704	0.1416003	0.0000000	-0.0000000	-0.0027746
15	0.2500000	0.0466008	0.9824733	0.1944127	0.0000000	-0.0000000	0.0028155
20	0.3333333	0.0734659	0.9754101	0.2221708	0.0000000	-0.0000000	-0.0027597
25	0.4166667	0.1002790	0.9706071	0.2471710	0.0000000	-0.0000000	0.0027960
30	0.5000000	0.1237020	0.9689124	0.2471938	0.0000000	-0.0000000	-0.0027367
35	0.5833333	0.1403905	0.9706071	0.2443677	0.0000000	-0.0000000	0.0027705
40	0.6666667	0.1469318	0.9754101	0.2166649	0.0000000	-0.0000000	-0.0027101
45	0.7500000	0.1398025	0.9824733	0.1860087	0.0000000	-0.0000000	0.0027448
50	0.8333333	0.1153690	0.9903704	0.1305767	0.0000000	-0.0000000	-0.0026872
55	0.9166667	0.0699551	0.9970838	0.0721021	0.0000000	-0.0000000	0.0027271
60	1.0000000	0.0000001	1.0000000	-0.0110809	0.0000000	0.0000000	-0.0026781

3. สรุป และอภิปรายผล

ในการวิจัยนี้ ได้สร้างขั้นตอนวิธีเพื่อแก้ปัญหาระบบสมการ DAE ในแบบกึ่งชัดแจ้ง เป็นปัญหาเฮซเซนเบอร์ก ดัชนี 1 และดัชนี 2 โดย ขั้นตอนวิธี A ใช้สำหรับปัญหาดัชนี 1 และขั้นตอนวิธี B ใช้สำหรับปัญหาดัชนี 2 ในขั้นตอนวิธี B มีความจำเป็นต้องใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดนแก้สมการ

ในการสร้างขั้นตอนวิธี ได้ใช้วิธีรุงเง-คุตตาในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ จะต้องหาค่า $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ และ $\mathbf{F}_4$ ซึ่งจะต้องมีข้อมูลค่าที่จุดกึ่งกลางช่วงและที่จุดปลายช่วง เนื่องจากไม่มีข้อมูลของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จึงจะต้องมีเทคนิกประมาณค่าดังกล่าว ในขั้นตอนวิธี A สามารถหาค่าได้โดยวิธีของนิวตัน แต่ในขั้นตอนวิธี B ต้องสมมุติว่าตัวไม่ทราบค่านั้นเป็นค่าคงตัวในช่วงย่อยแต่ละช่วง เนื่องจากไม่มีพจน์ของตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ จึงจำเป็นต้งใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดนประมาณค่าดังกล่าว (วิธีนิวตัน-บรอยเดน เป็นผลงานวิจัยเดิมของผู้วิจัย)

เนื่องจากการสร้างขั้นตอนวิธี ได้นำวิธีที่รู้จักแพร่หลายมาประยุกต์ใช้ จึงไม่มีทฤษฎีใหม่ที่ต้องพิสูจน์ การคำนวณในขั้นตอนต่าง ๆ เป็นไปเหตุผลและเงื่อนไขของตัวแปรที่มีอยู่ในสูตรการคำนวณ จึงทำให้ได้ผลสำเร็จตามเป้าหมายที่คาดไว้

ผลการทดลองปรากฏว่า ใช้ได้ผลดีทั้งสองวิธีที่ทำ กล่าวคือ ค่าคลาดเคลื่อนน้อย โดยขั้นตอนวิธี A ค่าคลาดเคลื่อนทุกรายการ น้อยกว่า 10^{-7} และสำหรับขั้นตอนวิธี B ค่าคลาดเคลื่อนของตัวแปรหลักในสมการเชิงอนุพันธ์ น้อยกว่า 10^{-7} ขณะที่ค่าคลาดเคลื่อนของตัวแปรเสริม ส่วนใหญ่ น้อยกว่า 10^{-2} มี

บางส่วนที่มีค่าคลาดเคลื่อนสูงกว่า 10^{-2} แต่ก็น้อยกว่า 10^{-1} ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากค่าของตัวแปรมีค่ามาก ซึ่งถ้าคิดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะพบว่า มีค่าน้อยกว่า 10^{-2}

ขั้นตอนวิธี B มีความยากเพราะว่าไม่มีตัวแปรปรากฏอยู่ในสมการ ผลการคำนวณจึงมีค่าคลาดเคลื่อนสูง แต่ก็ไม่สูงมาก คือ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ไม่เกิน 1% ความคลาดเคลื่อนนี้เกิดจากการที่ประมาณค่าของฟังก์ชันไม่ทราบค่าที่จุดต่าง ๆ ในช่วงย่อยโดยใช้ค่าคงตัว

4. ข้อเสนอแนะ

จากการสร้างขั้นตอนวิธีการคำนวณ และการทดลองใช้ พบว่าสมการที่ไม่มีพจน์ตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ในสมการ ทำให้การหาผลเฉลยกระทำได้ยากกว่ากรณีที่มีพจน์ของตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ในสมการ ดังนั้น ในการนำวิธีการคำนวณไปใช้ มีข้อเสนอแนะดังนี้

1. การปรับเปลี่ยนสมการเพื่อให้มีพจน์ตัวไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ในสมการ จะทำให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น โดยใช้ขั้นตอนวิธี A ทั้งในแง่ของการจัดกระทำกับปัญหาให้เข้าแบบการคำนวณ (Formulation) และผลการคำนวณจะทำให้ได้ค่าที่ถูกต้องแม่นยำมากขึ้น

2. กรณีที่การปรับเปลี่ยนในข้อ 1. กระทำไม่ได้ หรือกระทำได้ยาก หรือปัญหามีดัชนีสูง หรือมีจำนวนตัวไม่ทราบค่าหลายตัว การปรับเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเฮซเซนเบอร์กดัชนี 2 และใช้ขั้นตอนวิธี B ก็สามารถแก้ปัญหาได้ดีพอสมควร

บรรณานุกรม

[1] Ascher U. M.; Petzold L. R. (1998) *Computer Method for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, Society for Industrial and Applied mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.

[2] Brenan K. E.; Campbell S. L.; Petzold L. R., (1996) *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Revised and Corrected reprint of 1989 original, with an additional chapter and additional references. Classic in Applied mathematics, 14. SIAM, Philadelphia PA.

[3] Campbell, S. L., et. al. (2008) Differential-Algebraic Equations, Scholarpedia, 3(8):2849.

[4] Chompuvised, K., and A. Dhamacharoen, *Solving boundary value problems of ordinary differential equations with non-separated boundary conditions,* Applied Mathematics and Computation, Volume 217, Issue 24, 15 August 2011, Pages 10355-10360

[5] Dhamacharoen, A., *An efficient hybrid method for solving systems of nonlinear equations*, (2014), Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 263, Pages 59-68.

[6] Eich-Soellner, E. and C. Fuhrer (1998) "Numerical Method in Multibody Systems", Teubner Verlag, Stuttgart, Germany.

[7] Hairer E.; Wanner G, (1998) *Solving Ordinary Differential Equation. II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Second Edition, Springer Series in Computational Mathematics, 14. Springer-Verlag, Berlin.

[8] Ilie, S., R. M. Reid and G. Reid, (2006) "Numerical Solution of Differential Algebraic Equations of index-1 Can Be Computed in Polynomial Time", *Numerical Algorithm* 41 (2): 161 – 171.

[9] Kunkel, P. and V. L. Mehrmann, (2006) Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution (http:// book.google.co.uk/boks?id=iRZPqCwkI IC) Zurich, Switzerland: European Mathematical Society. ISBN 3037190175, 9783037190173.

[10] Rabier P., J.; Rheinboldt W. C. (2002) *Theoretical and Numerical Analysis of Differential-Algebraic Equations*. Hand Book of Numerical Analysis, Vol. VIII, 183-540, Habdb. Numer. Anal., VIII, North Holland, Amsterdam.

[11] Riaza R. (2008), *Differential-Algebraic System: Analytical Espects and Circuit Applications*, World Scientific, Singapore.

[12] Differential-Algebraic Equation, Wikipedia, the free encyclopedia.

ภาคผนวก

ก. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ตามขั้นตอนวิธี A และขั้นตอนวิธี B ที่ใช้แก้ปัญหาในการทดลอง

ข. แบบร่างบทความงานวิจัยที่พร้อมจะนำไปลงในวารสารวิชาการ

ค. ประวัตินักวิจัยและคณะ

ภาคผนวก ก.

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ (MATHLAB) สำหรับตัวอย่างในงานวิจัย

Example1

dae1:

```
n=60;
h=1/n;
x=0;
y=0;
u=1;
v=2;
t=0;
z=0;
xs=x;ys=y;zs=z;ts=t;
solve
z=zs;
i=0;
fprintf('%2i %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n',0,t,x,y,s0,x-xs,y-ys,s0-
z)
for i=1:n
daerung
t=t+h;
xs=x;ys=y;zs=z;ts=t;
solve
z=zs;
xs=t*cos(z);ys=2*sin(z);zs=t*(t+1);
fprintf('%2i %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n',i,t,x,y,s0,x-xs,y-ys,s0-z)
end
```

solve:

```
s=cos(zs);
f=4*s*xs+ts*ys*ys-4*(zs-ts*ts);
while abs(f) > .0000000001
  s1=-sin(zs);
  fu=[4*s ts*2*ys];
  dd=4*s1*xs-4;
  b=-f/dd;
  zs=zs+b;
  s=cos(zs);
  f=4*s*xs+ts*ys*ys-4*(zs-ts*ts);
end
```

daerung:

```
x0=x;y0=y;u0=u;v0=v;z0=z;
x1=h*u0;y1=h*v0;u1=h*((-1-4*z0)*x0-(3*t+1)*y0);v1=h*(4*cos(z0)-y0*(4*z0+1));
ts=t+h/2;xs=x0+x1/2;ys=y0+y1/2;zs=z0;
```

```
solve
z1=zs;
x2=h*(u0+u1/2);y2=h*(v0+v1/2);u2=h*((-1-4*z1)*xs-(3*ts+1)*ys);v2=h*(4*cos(z1)-
ys*(4*z1+1));
ts=t+h/2;xs=x0+x2/2;ys=y0+y2/2;zs=z1;
solve
z2=zs;
x3=h*(u0+u2/2);y3=h*(v0+v2/2);u3=h*((-1-4*z2)*xs-(3*ts+1)*ys);v3=h*(4*cos(z2)-
ys*(4*z2+1));
ts=t+h;xs=x0+x3;ys=y0+y3;zs=z2;
solve
z3=zs;
x4=h*(u0+u3);y4=h*(v0+v3);u4=h*((-1-4*z3)*xs-(3*ts+1)*ys);v4=h*(4*cos(z3)-
ys*(4*z3+1));
x=x0+(x1+2*(x2+x3)+x4)/6;
y=y0+(y1+2*(y2+y3)+y4)/6;
u=u0+(u1+2*(u2+u3)+u4)/6;
v=v0+(v1+2*(v2+v3)+v4)/6;
```

Problem2
dae2

```
n=60;
h=1/n;
g=9.8;
x=1;
y=0;
u=0;
v=0;
t=0;
d=[1;1];
f=0;
w1=pi/2;w2=0;
xs=x;ys=y;
s0=.2;
z=u*u+v*v-g*y;
fprintf('%2i %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n',0,t,x,y,s0,x-xs,y-ys, s0-
z)
fori=1:n+1
x0=x;y0=y;u0=u;v0=v;
z1=z;
daerunge2
f=x*x+y*y-1;
while abs(f) > .0000000001
dd=2*[x y]*d;
   b=-f/dd;
   s0=s0+b;
```

```
yy=y;xx=x;
   daerunge2
   f=x*x+y*y-1;
   d1=([x-xx;y-yy]-d*b)/b;
   d=d+d1;
end
  w11=h*w2;w21=-g*h*sin(w1);
  w12=h*(w2+w21/2);w22=-h*g*sin(w1+w11/2);
  w13=h*(w2+w22/2);w23=-h*g*sin(w1+w12/2);
  w14=h*(w2+w23);w24=-h*g*sin(w1+w13);
  w1=w1+(w11+2*(w12+w13)+w14)/6;
  w2=w2+(w21+2*(w22+w23)+w24)/6;
  t=t+h;
xs=sin(w1);ys=-cos(w1);
  z=w2*w2-g*ys;
zz=(z+z1)/2;
fprintf('%2i %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n',i,t,x,y,s0,x-xs,y-ys, s0-
zz)
end
```

daerunge2

```
x1=h*u0;y1=h*v0;u1=-h*s0*x0;v1=-h*(s0*y0+g);
x2=h*(u0+u1/2);y2=h*(v0+v1/2);u2=-h*(s0*(x0+x1/2));v2=-h*(s0*(y0+y1/2)+g);
x3=h*(u0+u2/2);y3=h*(v0+v2/2);u3=-h*(s0*(x0+x2/2));v3=-h*(s0*(y0+y2/2)+g);
x4=h*(u0+u3);y4=h*(v0+v3);u4=-h*(s0*(x0+x3));v4=-h*(s0*(y0+y3)+g);
x=x0+(x1+2*(x2+x3)+x4)/6;
y=y0+(y1+2*(y2+y3)+y4)/6;
u=u0+(u1+2*(u2+u3)+u4)/6;
v=v0+(v1+2*(v2+v3)+v4)/6;
```

Problem3
dae3:

```
n=60;
h=1/n;
x=0;
y=1;
u=0;
v=0;
t=0;
d=[1;1];
f=0;
xs=x;ys=y;
zs=0;
s0=1;
fprintf('%2i %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n',0,t,x,y,s0,x-xs,y-ys, s0-
zs)
```

```
fori=1:n+1
x0=x;y0=y;u0=u;v0=v;
th=t+h;
  daerunge3
  f=x*x+(y*y-1)*th*th;
while abs(f) > .0000000001
dd=2*[x th*th*y]*d;
    b=-f/dd;
    s0=s0+b;
yy=y;xx=x;
    daerunge3
    f=x*x+(y*y-1)*th*th;
    d1=([x-xx;y-yy]-d*b)/b;
    d=d+d1;
end
  t=t+h;
  z=t*(1-t);
xs=t*sin(z);
ys=cos(z);
ts=t-h/2;
zs=ts*(1-ts);
fprintf('%2i %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n',i,t,x,y,s0,x-xs,y-ys,s0-
zs)
end
```

daerunge3

```
x1=h*u0;y1=h*v0;u1=h*((4*s0-1)*x0+2*y0*(1-3*t));v1=h*((4*s0-1)*y0+2*sin(s0));
x2=h*(u0+u1/2);y2=h*(v0+v1/2);
u2=h*((4*s0-1)*(x0+x1/2)+2*(y0+y1/2)*(1-3*(t+h/2)));v2=h*((4*s0-
1)*(y0+y1/2)+2*sin(s0));
x3=h*(u0+u2/2);y3=h*(v0+v2/2);
u3=h*((4*s0-1)*(x0+x2/2)+2*(y0+y2/2)*(1-3*(t+h/2)));v3=h*((4*s0-
1)*(y0+y2/2)+2*sin(s0));
x4=h*(u0+u3);y4=h*(v0+v3);
u4=h*((4*s0-1)*(x0+x3)+2*(y0+y3)*(1-3*(t+h)));v4=h*((4*s0-1)*(y0+y3)+2*sin(s0));
x=x0+(x1+2*(x2+x3)+x4)/6;
y=y0+(y1+2*(y2+y3)+y4)/6;
u=u0+(u1+2*(u2+u3)+u4)/6;
v=v0+(v1+2*(v2+v3)+v4)/6;
```

ภาคผนวก ข.

ผลผลิต (Output)

แบบร่างบทความงานวิจัยที่พร้อมจะนำไปลงในวารสารวิชาการ

วิธีเชิงตัวเลขบางวิธีสำหรับแก้สมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์

Some Numerical Methods for solving Differential Algebraic Equations

โดย

ร.ศ. ดร. อำพล ธรรมเจริญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

Some Numerical Methods for solving Differential Algebraic Equations

Ampon Dhamacharoen
Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University
Bangsaen, Chonburi 20131, Thailand
e-mail: ampon@buu.ac.th

Abstract: This research aims to solve the DAE problems in its original form in which both the differential and algebraic equations remain. The Newton or Newton-Broyden technique together with some integrator such as the Runge-Kutta method are coupled to solve the problems. Some experiments show that the method developed here is efficient, in the sense that it can give the approximate solution within some desired accuracy and some reasonable time.

Keywords: Differential-Algebraic Equations, Newton-Broyden Method, index-2 Hessenberg DAE.

----

1. Introduction:

A differential algebraic equation (DAE) is an equation involving an unknown function and its derivatives. A DAE in its most general form is given by

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) = \mathbf{0}, \; t \in [a, b] \tag{1}$$

where $\mathbf{F}$: $R \times R^m \times R^n \times R^n \rightarrow R^{m+n}$, $\mathbf{x}(t) \in R^m$, $\mathbf{y}(t) \in R^n$ and $\mathbf{y}'(t) \in R^n$. In this form the relation between the variables and derivatives may be implicit. In some systems the equations may be written in the explicit form of derivatives, as:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \tag{2a}$$

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{0}. \tag{2b}$$

where $\mathbf{f}$: $R \times R^m \times R^n \rightarrow R^n$. This set of equations is called a semi-explicit DAE system.

Differential algebraic equations arise in the mathematical modeling of a wide variety of problems from engineering and science, such as in multi-body and flexible body mechanics, electrical circuit design, optimal control, incompressible fluids, molecular dynamics, chemical kinetics, and chemical process control [1, 2, 3, 7, 8].

DAE can be transformed into the ODE problem via differentiation. The number of differentiations needed in transforming is called the differentiation index. This number can describe some characteristic of the problem. In general, the higher the index of a DAE, the more difficulties one can expect for its numerical solution [1, 2, 3, 6].

Although DAE can be transformed into an explicit ODE so that it can be solved using the methods of ODE, but still there are many numerical methods for solving DAE. In the DAE solvers software the numerical approaches for the solution of DAEs can be divided roughly into two classes: (i) direct discretizations of the given system and (ii) methods which involve a reformulation (e.g. index reduction), combined with a discretization. Direct discretizations are easier to used but limited in their utility essentially to index-1, index-2

Hessenberg, and index -3 Hessenberg DAE systems, while a reformulation may be costly, it may require more input from the user, and it may involve more user intervention [3, 6].

In this research we will emphasis on constructing an algorithm for solving a semi-explicit DAE. The approach is first solve the system of algebraic equations and then solve the differential equations using information just derived. The Newton-Broyden method is the key roll for solving algebraic equation since it performs almost as well as the Newton method with the less energy, and out perform the other methods of the same order of convergence [4, 5].

2. The Newton-Broyden Method:

The method, which was first proposed by Dhamacharoen in 2011 [4, 5], aims to solve the equation of the form:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

The Newton scheme of this problem is:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F}_\mathbf{u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i) + \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i), \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Replacing $\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i)$ by D_i, gives

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F}_\mathbf{u}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)D_i + \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

with updating:

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_i}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - D_i\mathbf{b}_i)\mathbf{b}_i^T \tag{5}$$

where $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$. This method retains the good part of Newton method, and replaces the difficult part of Newton's with Broyden's. With good initial guesses for $\mathbf{z}_0$ and D_0, the Newton-Broyden scheme (4) will produce a sequence that converges to a solution of (3), with q-super linear order of convergence.

Although the order of convergence of the Newton-Broyden method is equal to that of the Broyden method and less than that of the Newton method, but in practice the Newton-Broyden perform well in the sense that the good initial guess is easily found and it reaches the solution in a reasonable number of iterations. As shown in [3] and [4], for the same problem and using the same initial guess the sequence from the Newton-Broyden method reachs the solution while that from the Broyden does not, and also the Newton-Broyden method consumes less amount of work than does by the Newton method.

Note that if the function $\mathbf{F}$ is linear, then Broyden's update and Newton-Broyden's update are coincided.

Constructing the Method:

The initial value problems:

Assume that the DAE is expressed in the form (2a), (2b) (renumbering)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \tag{6a}$$

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{0} \tag{6b}$$

in which the system of equations is to be solved for $\mathbf{x}(t)$ and $\mathbf{y}(t)$ where $t \in [a, b]$. In solving the system numerically, the conditions on the initial values of $\mathbf{y}$ must be imposed sufficiently for the system to have a unique solution. If (6b) can expresses $\mathbf{x}(t)$ in term of t and $\mathbf{y}(t)$

explicitly then the system become the pure ODE. Therefore we consider the case when (6b) expresses $\mathbf{x}(t)$ implicitly.

Let the interval [a, b] be divided into n subintervals $\{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$. In each interval $[t_{i-1},t_i]$ we will solve (6a) numerically for $\mathbf{y}(t_i)$. In an initial value problem the value $\mathbf{y}(t_0)$ is specified, then the value $\mathbf{x}(t_0)$ can be solved from (6b). In order to use the Runge-Kutta method, in each interval $[t_{i-1}, t_i]$ the value $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ and $\mathbf{x}_4$ which are needed for computing F_2, F_3 and F_4 respectively, each can be solved from (6b) using the values of $\mathbf{y}(t_{i-1})+F_1/2$ in F_2, $\mathbf{y}(t_{i-1})+F_2/2$ in F_3 and $\mathbf{y}(t_{i-1})+F_3$ in F_4. Once the value $\mathbf{y}(t_i)$ is computed then $\mathbf{x}(t_i)$ can be solved from (6b). Then advance to the next interval, and repeat this procedure until we reach the last subinterval.

Suppose that the term $\mathbf{x}(t)$ is missing from the equation (6b), the system becomes:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \tag{7a}$$

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)) = \mathbf{0} \tag{7b}$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

in which the system is called index-2 Hessenberg. In solving the differential equation (7a) the variable $\mathbf{x}(t)$ are treated to be unknown. In each interval $[t_{i-1}, t_i]$ the value of $\mathbf{x}(t_{i-1})$ is given as a guess, then solve (7a) numerically for $\mathbf{y}(t_i)$. Check the condition (7b) $g(t_i, \mathbf{y}(t_i)) = \mathbf{0}$. Update the value of $\mathbf{x}(t_{i-1})$ and iterate the process until the condition (7b) is met. Then advance to the next interval using the last value of $\mathbf{x}(t_{i-1})$ as the guessing value for $\mathbf{x}(t_i)$. Repeat this procedure until we reach the last subinterval.

In solving the differential equations we may use the 4^{th} order Runge-Kutta method or the 4^{th} order Taylor method, since their local error is $O(h^5)$ and the total error is $O(h^4)$, which is acceptable, and it is easy to implement. In solving the algebraic equations associated in the problem, the Newton method is used in (6b) and the Newton-Broyden method is used in (7b).

As the procedure described above the formulation will be the followings:

Partition the interval [a, b] into n subinterval. $h = \dfrac{b-a}{n}$, and

$$t_0 = a,\ t_i = t_{i-1} + h,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Algorithm A: Problem (6a), (6b):

Define the function $\mathbf{F}$: $\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})),\ i = 1, 2, \ldots, n.$

then the problem become as (3)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1})) = \mathbf{0}$$

which can be solve using the Newton method.

P1: Newton Method

Prescribe a small positive real number ε.
Guess the value $\mathbf{z}$.
A: Compute $\mathbf{F}(\mathbf{z})$.
Check if $||\mathbf{F}(\mathbf{z})|| < \varepsilon$, (ε a prescribed small number).
If yes, then go to B. If no, do the next step.
Compute $\mathbf{F}'(\mathbf{z})$.
Solve the system $\mathbf{F}'(\mathbf{z})\mathbf{b} = -\mathbf{F}(\mathbf{z})$, for $\mathbf{b}$.
Set $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{b}$.
Go to A.

B End.

The process for solving this equation will be as follow:

Initial step: (1) Partition the interval [a, b] into n subinterval. $h = \dfrac{b-a}{n}$, and

$t_0 = a,\ t_i = t_{i-1} + h,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

(2) Set the given initial condition $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

(3) Solve for $\mathbf{x}(t_0)$, using P1: Set $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z}$.

For i = 1, 2, . . . , n; process the following steps:

Step 1. Solve the initial value problem (6a) 1 step to obtained $\mathbf{y}(t_i)$, by the following steps:

(1) Compute: $F1 = h\,\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1}))$

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F1/2$, Solve $\mathbf{g}(t+h/2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = 0$ for $\mathbf{x}_1$. (Using P1).

(2) Compute: $F2 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F2/2$, Solve $\mathbf{g}(t+h/2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = 0$ for $\mathbf{x}_2$. (Using P1).

(3) Compute: $F3 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F3/2$, Solve $\mathbf{g}(t+h, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) = 0$ for $\mathbf{x}_3$. (Using P1).

(4) Compute: $F4 = h\,\mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3)$

(5) $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}(t_{i-1}) + (F1 + 2(F2 + F3) + F4)/6$

Step 2. Solve (6b) for $\mathbf{x}(t_i)$, using P1: Set $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{z}$.

Then go to the next interval.

Algorithm B: Problem (7a), (7b):

Define the function $\mathbf{F}$: $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i)),\ i = 1, 2, \ldots, n.$

then the problem become as (3)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{0}$$

which can be solve using the Newton-Broyden method.

P2: One Step Runge-Kutta Method

Given the value t_{i-1}, $\mathbf{x}(t_{i-1})$, $\mathbf{y}(t_{i-1})$ and $\mathbf{b}$.

Compute: $F1 = h\,\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1}))$

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F1/2,\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}/2,$

Compute: $F2 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F2/2,\ \ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}/2,$

Compute: $F3 = h\,\mathbf{f}(t+h/2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}(t_{i-1}) + F3/2,\ \ \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b},$

Compute: $F4 = h\,\mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3)$

Then $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}(t_{i-1}) + (F1 + 2(F2 + F3) + F4)/6$

The process for solving this equation will be as follow:

Initial step: (1) Partition the interval [a, b] into n subinterval. $h = \dfrac{b-a}{n}$, and

$t_0 = a,\ t_i = t_{i-1} + h,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

(3) Set the given initial condition $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

(4) Guess the initial condition $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z}$.
(5) Guess the initial matrix D (may be = I), Guess the value $\mathbf{b}$.
(6) Solve the initial value problem (7a) 1 step to obtained $\mathbf{y}(t_1)$, using P2.
(7) Compute the value $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_{i-1})) = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))$

For i = 1, 2, . . . , n; process the following steps:
Step 1. Check the condition $\|\mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))\| < \varepsilon$ where ε is a prescribe small number.
If pass, then process to the next interval (next i).
If fail, do step 2.
Step 2. (1) Set $\mathbf{u} = \mathbf{y}(t_i)$.
(2) Compute the matrix $A = \mathbf{F_x}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_i)) + \mathbf{F_y}(\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{y}(t_i))D$
(3) Solve $A\mathbf{b} = -\mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))$ for $\mathbf{b}$,
(4) Set $\mathbf{x}(t_{i-1}) = \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{b}$
(5) Solve the initial value problem (7a) 1 step (using P2) to obtained $\mathbf{y}(t_i)$
(6) Compute the value $\mathbf{g}(t_i, \mathbf{y}(t_i))$
(6) Set $D = D + \frac{1}{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}(\mathbf{y}(t_i) - \mathbf{u} - D\mathbf{b})\mathbf{b}^T$
(7) Go to step 1.

End.

3. Experiments:

Three examples are used to illustrate the method. The first problem is an index-1 Hessenberg DAE systems with nonlinear differential equations and a nonlinear algebraic equation, as follows:

$$x''(t) = -(3t + 1)y(t) - x(t)(4z(t) + 1) \quad , 0 \le t \le 1$$
$$y''(t) = 4\cos(z(t)) - y(t)(4z(t) + 1)$$

initial conditions,

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,$$
$$x'(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

algebraic equation

$$4\,x(t)\cos(z(t)) + t\,y^2(t) = 4(z(t) - t^2)$$

Using Algorithm A this problem is solved and has a nicely result with small error compare to the exact solution

$$z(t) = t(t + 1)$$
$$x(t) = t\cos(z(t)),$$
$$y(t) = \sin(z(t)).$$

Some results are illustrated in Table 1. (xs, ys and zs are values from the exact solution)

Table 1: Resulted values for x(t), y(t) and z(t) from Algorithm A, and errors.

i	t	x	y	z	x – xs	y – ys	z – zs
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	0.083333	0.082994	0.180310	0.090278	0.000000	0.000000	0.000000
10	0.1666667	0.1635259	0.3864430	0.1944444	-0.000000	0.0000000	-0.000000
15	0.2500000	0.2378920	0.6148770	0.3125000	-0.000000	0.0000000	-0.000000
20	0.3333333	0.3009499	0.8599127	0.4444444	-0.000000	0.0000000	-0.000000
25	0.4166667	0.3461609	1.1131836	0.5902778	-0.000000	0.0000000	-0.000000
30	0.5000000	0.3658444	1.3632775	0.7500000	-0.000000	0.0000000	-0.000000
35	0.5833333	0.3517169	1.5955682	0.9236111	-0.000000	0.0000000	-0.000000

40	0.6666667	0.2957773	1.7923844	1.1111111	-0.000000	0.0000000	-0.000000
45	0.7500000	0.1915753	1.9336531	1.3125000	-0.000000	0.0000000	0.0000000
50	0.8333333	0.0358377	1.9981497	1.5277778	0.0000000	0.0000000	0.0000000
55	0.9166667	-0.169652	1.9654489	1.7569445	0.0000001	0.0000001	0.0000001
60	1.0000000	-0.416147	1.8185950	2.0000002	0.0000002	0.0000003	0.0000002

The second problem is the classical example of DAE problem "The pendulum problem", expressed in the xy co-ordinate plane, as follows:

$$\left.\begin{aligned} x''(t) &= -\lambda(t)x(t) \quad , t \geq 0 \\ y''(t) &= -\lambda(t)y(t) - g \\ x(t)^2 + y(t)^2 &= L^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

where g = 9.8. This problem is an index 2 semi-explicit DAE problem. [3, 9]. Processing to solve the problem numerically, we let L = 1, and impose the initial conditions x(0) = 1, y(0) = 0. Using the new variables, $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = y$ and $y_4 = y'$, then we have the system of differential algebraic equations:

$$\left.\begin{aligned} & & y_1' &= y_2 \\ & & y_2' &= -\lambda y_1 \\ & & y_3' &= y_4 \\ & & y_4' &= -\lambda y_3 - g \\ &\text{initial conditions:} & y_1(0) &= 1 \\ & & y_2(0) &= 0 \\ & & y_1(0) &= 1 \\ & & y_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

algebraic equation:

$$y_1^2 + y_3^2 - 1 = 0. \tag{9b}$$

If we let x = sin θ, y = -cos θ, substitute in the problem (8) and manipulate some derivatives and algebra, we will have the equivalent initial value problem of ordinary differential equation:

$$\left.\begin{aligned} \theta''(t) &= - g \sin(\theta(t)),\ t \geq 0 \\ \theta(0) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

From (9b) if we differentiate the equation $y_1^2(t) + y_3^2(t) = 1$ twice, we will come up with the equation:

$$\lambda(t) = y_2^2(t) + y_4^2(t) - g\, y_2(t). \tag{11}$$

The system (9a) with (11) become a pure ODE since the function λ(t) is expressed in term of $y_2(t)$ and $y_4(t)$ explicitly.

In this experiment we solve (9a), (9b) using Algorithm B and give some of the results in table 2. The system (10) and (9a) with (11) are also solved, and they give the same results which their values are used to compare to the results from Algorithm B, as shown in Table 2. The value xs, ys and λs are from the problem (10). Note that the value of λ(t)'s are at the mid-points t + h/2.

Table 2: Resulted values for x(t), y(t) and λ(t) from Algorithm B, and errors.

i	t	x	y	λ(t)	x – xs	y – ys	λ – λs
0	0.000000	1.000000	0.000000	0.0066694	0.000000	0.000000	-0.01334

5	0.083333	0.999421	-0.034020	1.2067764	0.000000	0.000000	-0.01327
10	0.166667	0.990763	-0.135608	4.3889120	0.000000	0.000000	-0.01245
15	0.250000	0.953758	-0.300577	9.4089741	-0.000000	-0.000000	-0.00924
20	0.333333	0.858149	-0.513401	15.762372	-0.000000	-0.000000	-0.001840
25	0.416667	0.674223	-0.738528	22.336944	0.000000	0.000000	0.009746
30	0.500000	0.392046	-0.919946	27.443990	0.000000	0.000000	0.021502
35	0.583333	0.039516	-0.999219	29.406564	0.000001	0.000000	0.026667
40	0.666667	-0.320679	-0.947188	27.497515	0.000001	-0.000000	0.021650
45	0.750000	-0.621722	-0.783238	22.424766	-0.000001	0.000001	0.009949
50	0.833333	-0.826959	-0.562262	15.858262	0.000001	-0.000000	-0.001681
55	0.916667	-0.939329	-0.343017	9.4922857	0.000000	-0.000000	-0.009152
60	1.0000000	-0.986140	-0.165918	4.4483962	0.000000	-0.000000	-0.012414

The third problem is an index-2 Hessenberg DAE systems with nonlinear differential equations and a nonlinear algebraic equation, as follows:

$$x''(t) = x(t)(4z(t) - 1) + 2(1 - 3t)y(t) \quad , 0 \le t \le 1$$
$$y''(t) = 2 \sin(z(t)) + y(t)(4z(t) - 1)$$

initial conditions,

$$x(0) = 0,\ y(0) = 1,$$
$$x'(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

algebraic equation

$$x^2(t) + t^2 y^2(t) = t^2$$

Note that this problem is similar to the first problem but there is no variable z(t) in the algebraic equation.

Using Algorithm B this problem is solved and has a nice result given in Table 3. The exact solution is:

$$z(t) = t(1 - t)$$
$$x(t) = t \sin(z(t)),$$
$$y(t) = \cos(z(t)).$$

Algorithm B gives the results for x(t) and y(t) with small error, but solution for z(t) has some error less than 0.005. Some results are illustrated in Table 3. Note that the value of z(t)'s are at the mid-points $t + h/2$.

Table 3: Resulted values for x(t), y(t) and z(t) from Algorithm A, and errors.

i	t	x	y	z	x – xs	y – ys	z – zs
0	0.0000000	0.0000000	1.0000000	.0055058	0.0000000	0.0000000	-0.0027581
5	0.0833333	0.0063659	0.9970838	0.0860924	0.0000000	-0.0000000	0.0028285
10	0.1666667	0.0230738	0.9903704	0.1416003	0.0000000	-0.0000000	-0.0027746
15	0.2500000	0.0466008	0.9824733	0.1944127	0.0000000	-0.0000000	0.0028155
20	0.3333333	0.0734659	0.9754101	0.2221708	0.0000000	-0.0000000	-0.0027597
25	0.4166667	0.1002790	0.9706071	0.2471710	0.0000000	-0.0000000	0.0027960
30	0.5000000	0.1237020	0.9689124	0.2471938	0.0000000	-0.0000000	-0.0027367
35	0.5833333	0.1403905	0.9706071	0.2443677	0.0000000	-0.0000000	0.0027705
40	0.6666667	0.1469318	0.9754101	0.2166649	0.0000000	-0.0000000	-0.0027101
45	0.7500000	0.1398025	0.9824733	0.1860087	0.0000000	-0.0000000	0.0027448
50	0.8333333	0.1153690	0.9903704	0.1305767	0.0000000	-0.0000000	-0.0026872
55	0.9166667	0.0699551	0.9970838	0.0721021	0.0000000	-0.0000000	0.0027271
60	1.0000000	0.0000001	1.0000000	-0.0110809	0.0000000	0.0000000	-0.0026781

4. Conclusions:

The methods are constructed with the aim to solve DAE systems in their original forms. Both algorithms use the Runge-Kutta method as the integrator, and couple with a method to solve the algebraic systems associated in the problem. The Newton method is used in Algorithm A for the index-1 DAE, while in Algorithm B the Newton-Broyden method is needed for an index-2 DAE system. The methods can give the approximate solution for the problem very well with small errors. The experiment also has shown that the DAE of high index is harder to solve than the DAE of lower index.

Acknowledgments

The author would like to thank the referees for their comments. This research was supported by the Research Fund from the National Research Council of Thailand

Refference

[1] Ascher U. M.; Petzold L. R. (1998) *Computer Method for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, Society for Industrial and Applied mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.

[2] Brenan K. E.; Campbell S. L.; Petzold L. R., (1996) *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Revised and Corrected reprint of 1989 original, with an additional chapter and additional references. Classic in Applied mathematics, 14. SIAM, Philadelphia PA.

[3] Campbell, S. L., et. al. (2008) Differential-Algebraic Equations, Scholarpedia, 3(8):2849.

[4] Chompuvised, K., and A. Dhamacharoen, *Solving boundary value problems of ordinary differential equations with non-separated boundary conditions,* Applied Mathematics and Computation, Volume 217, Issue 24, 15 August 2011, Pages 10355-10360

[5] Dhamacharoen, A., *An efficient hybrid method for solving systems of nonlinear equations*, (2014), Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 263, Pages 59-68.

[6] Hairer E.; Wanner G, (1998) *Solving Ordinary Differential Equation. II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Second Edition, Springer Series in Computational Mathematics, 14. Springer-Verlag, Berlin.

[7] Rabier P., J.; Rheinboldt W. C. (2002) *Theoretical and Numerical Analysis of Differential-Algebraic Equations*. Hand Book of Numerical Analysis, Vol. VIII, 183-540, Habdb. Numer. Anal., VIII, North Holland, Amsterdam.

[8] Riaza R. (2008), *Differential-Algebraic System: Analytical Espects and Circuit Applications*, World Scientific, Singapore.

[9] Differential-Algebraic Equation, Wikipedia, the free encyclopedia.

ภาคผนวก ค.

ประวัตินักวิจัยและคณะ

ส่วน ค : ประวัติคณะผู้วิจัย

1. ชื่อ – นายอำพล ธรรมเจริญ (ภาษาอังกฤษ) Mr. Ampon Dhamacharoen
2. เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3 2001 00615 23 9
3. ตำแหน่งปัจจุบัน รองศาสตราจารย์
4. หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail)

   ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา บางแสน ชลบุรี 20131

   โทรศัพท์ 038 10 3048 E-mail ampon@buu.ac.th
5. ประวัติการศึกษา

ระดับปริญญา	อักษรย่อปริญญาและชื่อเต็ม	ปีที่จบการศึกษา	ชื่อสถาบันการศึกษา	ประเทศ
ปริญญาตรี	กศ.บ. (คณิตศาสตร์)	2514	วศ. ประสานมิตร	ไทย
ปริญญาโท	กศ.ม. (คณิตศาสตร์)	2516	มศว. ประสานมิตร	ไทย
	M.S. (Mathematics)	1983	North Carolina State U.	USA
ปริญญาเอก	Ph.D. (Applied Math.)	1986	North Carolina State U.	USA

6. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยทั้งหมด

6.1 งานที่ทำเสร็จแล้ว

1. “การแก้ปัญหาการเปลี่ยนวงโคจร โดยใช้แรงเริ่มต้นครั้งเดียวโดยวิธีของนิวตัน” เสนอในการประชุมทางวิชาการคณิตศาสตร์ ปี 2530 ที่มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ หาดใหญ่ จ.สงขลา
2. “Controllability of Positive Discrete Linear Control Systems with Bounded Inputs”, Srinakharinwirot University Science Journal, Volume 3 No. 2 December l987, Bangkok, Thailand.
3. “Solving Positive Discrete Linear Control Systems Using a Method of Nonlinear Programming”, Proceedings, The Sixth Southeast Asian Statistics Seminar, 18-20 September 1987, Bangkok Thailand.
4. “ความยุติธรรมและความเหมาะสมของข้อสอบแบบเลือกตอบที่ใช้ในการสอบแข่งขัน” รายงานการวิจัย มหาวิทยาลัยบูรพา 2534

5. "The Distributions of Real-Score Obtained by Multiple-Choice Test when Guessing is Permissible", Proceedings, The International Conference on Applied Mathematics, Institut Teknologi Bandung, Indonesia, 1992.
6. "Using Quadratic Programming to Solve the Real-Score Problem", Proceedings, The International Conference on Applied Mathematics, Institute Teknologi Bandung, Indonesia, 1992.
7. "Commutation of the Inverse-Pairs Matrices". Presented at the Thailand Annual Mathematical Conference, 1994, Suranaree University of Technology, Nakhon-Rachasima, Thailand.
8. Dhamacharoen, A., "An Exact Line Search Algorithm for Linear Minimax Problems" Proceedings, การประชุมวิชาการด้านการวิจัยดำเนินงาน ประจำปี พ.ศ. 2549, คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ 2549.
9. Dhamacharoen, A., "Steepest Descent Method for the Linear Minimax Problems", Thai Journal of Mathematics, Special issue (Annual meeting in Mathematics, 2007) page 175-190.
10. Dhamacharoen, A., "Round Robin Tournament Scheduling and Test Case Generating", Proceedings, The 5^{th} International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2008), Silpakorn University, Thailand, 2008, Page 414 - 418.
11. Dhamacharoen, A., "Two-Stage Iteration Method in Solving Systems of Nonlinear Equations", Proceedings, The 15^{th} Annual Meeting in Mathematics, Bangkok, Annu. (2010) 6-8.

12. Dhamacharoen, A., and P. Kasempin "The Negative Inner Product Sets", East-West Journal of Mathematics Volume 12, Number 2, December 2010, Page 197 – 205.
13. Chompuvised, K., and A. Dhamacharoen "Solving Boundary Value Problems of Ordinary Differential Equations with Non-Separated Boundary Conditions", Applied Mathematics and Computation, Volume 217, Issue 24, 15 August 2011, Pages 10355-10360. (Impact factor 1.534)
14. Dhamacharoen, A., and K. Chompuvised, " An efficient method for solving multipoint equation boundary value problems", World Academy of Science, Engineering and Technology 75 2013
15. Dhamacharoen, A., "An Efficient Hybrid Method for Solving Systems of Nonlinear Equations" Journal of Computational and Applied Mathematics, 263 (2014) 59 – 68 (Impact factor 0.95)

16. Dhamacharoen, A., and P. Kasempin, "On Derivation of Rational Solutions of Babbage's Functional Equation" International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 94, No. 1 2014, 9 – 21.

6.2 งานวิจัยที่กำลังทำ (ทำเสร็จแล้ว กำลังเสนอบทความเพื่อลงพิมพ์ในวารสารวิชาการ)

1. Dhamacharoen, A., “An Efficient Method for Solving Integro-Differential Equations Boundary Value Problems”
2. Dhamacharoen, A., " Minimum Cost Sequencing of All Combinations"
3. Dhamacharoen, A., " Exact Calculation of Some Induced Matrix Norms"
4. Dhamacharoen, A., "Some Numerical Methods for solving Differential Algebraic Equation."

รายงานสรุปการเงิน

เลขที่โครงการระบบบริหารงานวิจัย (NRMS 0000) สัญญาเลขที่ ๓๔/๒๕๕๖

โครงการวิจัยโครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้

จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน)

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๖

มหาวิทยาลัยบูรพา

ชื่อโครงการวิจัย เรื่อง ลำดับของสตริงที่มีความยาวแปรเปลี่ยน และการประยุกต์

ภาษาอังกฤษ Variable-length String Sequences and Applications

ชื่อหัวหน้าโครงการวิจัยผู้รับทุน ร.ศ. ดร. อำพล ธรรมเจริญ

รายงานในช่วงตั้งแต่วันที่ ๑๗ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๕๕ ถึงวันที่ ๒๕ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๘

ระยะเวลาดำเนินการ ๑ ปี (ขยายเวลา ๒ ครั้ง) ตั้งแต่วันที่ ๑๗ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๕๕ ถึงวันที่ ๒๕ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๘

รหัสโครงการ ๓๔/๒๕๕๖ สัญญาเลขที่ ๓๔/๒๕๕๖

ได้รับงบประมาณรวมทั้งสิ้น ๑๒๖,๔๐๐ บาท (หนึ่งแสนสองหมื่นหกพันสี่ร้อยบาทถ้วน) ระยะเวลาทำงาน ๓ ปี (ระหว่างวันที่ ๑ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๕๖ ถึงวันที่ ๒๐ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๖)

<u>รายรับ</u>

จำนวนเงินที่ได้รับ

งวดที่ ๑ (๕๐%)	๖๓,๒๐๐ บาท	เมื่อวันที่ ๒๑ พฤศจิกายน พ.ศ. ๒๕๕๕
งวดที่ ๒ (๔๐%)	๕๐,๕๖๐ บาท	เมื่อวันที่ ๒๓ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๖
งวดที่ ๓ (๑๐%)	--- บาท	เมื่อวันที่ ...
รวม	๑๑๓,๗๖๐ บาท	

รายจ่าย

รายการ	งบประมาณที่ตั้งไว้	งบประมาณที่ใช้จริง	จำนวนเงินคงเหลือ /เกิน
1. ค่าตอบแทน	25,000	25,000	-
2. ค่าจ้าง	40,000	40,000	-
3. ค่าวัสดุ	29,200	26,560	2,640
4. ค่าใช้สอย	32,200	22,200	10,000
5. ค่าครุภัณฑ์			
6. ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ			
รวม	126,400	113,760	12,640

(..)

ลงนามหัวหน้าโครงการวิจัยผู้รับทุน

วันที่ 25 เดือนสิงหาคม พ.ศ. 2558