บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การแก้ปัญหาด้านฟิสิกส์ที่มีสมการอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ สามารถหาผลเฉลยโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) หรือวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) แต่ละวิธีจะให้ผลเฉลยและมีวิธีการแก้ปัญหายากง่ายแตกต่างกัน วิธีการวิเคราะห์เป็นวิธีพื้นฐานในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยผลเฉลยที่ได้ไม่มีความคลาดเคลื่อนเรียกว่า ผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ซึ่งสามารถนำผลเฉลยแม่นตรงไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีอื่นได้ แต่วิธีการวิเคราะห์มีความยุ่งยาก ซับซ้อน และบางครั้งอาจหาผลเฉลยไม่ได้ ดังนั้นวิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นทางเลือกหนึ่งในการหาผลเฉลย โดยผลเฉลยที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนเรียกว่า ผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate Solution) ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนมีค่ามากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับรายละเอียดแต่ละวิธีในการประมาณค่า

วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีหลายวิธี เช่น วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) เป็นวิธีที่เข้าใจได้ง่ายและไม่ยุ่งยากในการแก้ปัญหา โดยจะประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ตามจุดต่อต่าง ๆ เพื่อหาผลเฉลย วิธีผลต่างอันตะสามารถใช้ในการแก้สมการพาราโบลิก (Parabolic Equation) สมการไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Equation) และสมการเชิงวงรี (Elliptic Equation) อีกทั้งยังสามารถแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่มีฟังก์ชันหลายตัวแปรและเรขาคณิตอย่างง่ายได้ แต่ก็ยังมีข้อจำกัดในการแก้ปัญหาระบบที่มีเงื่อนไขขอบเขตและรูปร่างของปัญหาที่ซับซ้อน จากข้อจำกัดดังกล่าววิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) จึงเป็นวิธีหนึ่งที่มีความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาเหล่านี้ได้ดีกว่า โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra Equation) ซึ่งวิธีเชิงตัวเลขนอกจากวิธีผลต่างอันตะและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ยังมีวิธีปริมาตรอันตะ (Finite Volume Method) เป็นต้น

วิธีผลต่างอันตะและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีขั้นตอนหลักในการแก้ปัญหาคล้ายกัน โดยเริ่มจากขั้นตอนการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย โดยวิธีผลต่างอันตะจะแบ่งชิ้นส่วนย่อยออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ส่วนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะแบ่งชิ้นส่วนย่อยออกเป็นชิ้นประกอบหรือเอลิเมนต์ (Element) ซึ่งชนิดของเอลิเมนต์จะมีหลายชนิด เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม ลูกบาศก์ เป็นต้น การสร้างเอลิเมนต์นั้นแต่ละเอลิเมนต์จะเชื่อมกันด้วยจุดโหนด (Node) โดยวิธี

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ผลต่างอันตะขนาดของแต่ละเอลิเมนต์จะต้องมีขนาดเท่ากัน แต่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขนาดของแต่ละเอลิเมนต์อาจมีขนาดแตกต่างกัน ขั้นตอนต่อไปเป็นการหาผลเฉลย ซึ่งวิธีผลต่างอันตะจะใช้หลักการประมาณค่าอนุพันธ์ แต่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิต ขั้นตอนสุดท้ายจะเป็นการประมวลข้อมูล เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ

จากขั้นตอนทั้งหมดดังกล่าว ขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์เป็นขั้นตอนที่มีข้อจำกัด เนื่องจากใช้เวลานานในการสร้างเอลิเมนต์ เช่น ในกรณีการหาผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการความคลาดเคลื่อนน้อย จะต้องสร้างขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็ก เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีความผิดพลาดน้อยกว่าการสร้างขนาดของเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ หรือแม้แต่ในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อนและเปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้นจึงมีการศึกษา วิจัย และพัฒนาวิธีเชิงตัวเลขให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น เพื่อลดเวลาในการสร้างเอลิเมนต์ วิธีการดังกล่าวเรียกว่า วิธีเมชเลส (Meshless Method)

วิธีเมชเลสมีหลายวิธี ความแตกต่างของแต่ละวิธีอยู่ที่ขั้นตอนการกำหนดฟังก์ชันฐาน การสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขขอบเขต วิธีเมชเลสจึงเป็นวิธีหนึ่งของวิธีเชิงตัวเลขที่น่าสนใจ เนื่องจากช่วยลดขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์ที่เป็นข้อจำกัดของวิธีผลต่างอันตะและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนในการคำนวณของวิธีเมชเลสจะมีลักษณะคล้ายวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนแรกเริ่มจากการทำให้สมการเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูปสมการอินทิกรัล ซึ่งรูปผลเฉลยโดยประมาณของวิธีเมชเลสจะอยู่ในรูปพจน์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันฐานและฟังก์ชันฐาน (Basis Function) ขั้นตอนต่อไปจะทำการเลือกฟังก์ชันฐานที่เหมาะสม แล้วนำผลเฉลยโดยประมาณแทนลงในสมการอินทิกรัล และทำการแปลงสมการอินทิกรัลให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิต เพื่อคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณต่อไป

จากขั้นตอนการคำนวณวิธีเมชเลสข้างต้น ทำให้วิธีเมชเลสเป็นวิธีที่น่าสนใจในการแก้ปัญหาที่มีความยุ่งยาก ซับซ้อน และต้องการลดขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์ เพื่อประหยัดเวลาในการแก้ปัญหา วิธีเมชเลสจึงเหมาะสำหรับการแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยเฉพาะสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Schrödinger's Equation) ซึ่งสามารถใช้อธิบายปัญหาทางฟิสิกส์ด้านต่าง ๆ เช่น ด้านจลนศาสตร์ของของไหล (Hydrodynamics) ด้านทัศนศาสตร์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Optics) ด้านสวนศาสตร์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Acoustics) และด้านควอนตัม (Quantum) เป็นต้น

จากการศึกษาและค้นคว้า พบว่าสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นไม่สามารถหาผลเฉลยด้วยวิธีการวิเคราะห์ได้ ต้องใช้วิธีประมาณเชิงตัวเลขดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ผู้วิจัยเลือกศึกษาและใช้วิธีเมชเลส เนื่องจากวิธีเมชเลสยังเป็นวิธีการแก้ปัญหาแบบใหม่และยังไม่เป็นที่

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

แพร่หลายในการปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยเฉพาะสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับงานวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนไขโดยการวางฟังก์ชันฐาน ส่วนการคำนวณใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณอีกทางหนึ่ง เพื่อความสะดวก รวดเร็ว และแม่นยำในการคำนวณ ผู้วิจัยคาดว่างานวิจัยชิ้นนี้จะเป็นประโยชน์พื้นฐานในการแก้ปัญหาด้านฟิสิกส์ ด้านวิศวกรรม และด้านอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งมีรูปสมการอยู่ในรูปสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นหรือใกล้เคียงต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. แก้สมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีเมชเลสที่มีเงื่อนไขจากการวางฟังก์ชันฐาน โดยการวิเคราะห์จำนวนฟังก์ชันฐานและค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันฐานได้

2. นำสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีเมชเลสที่มีเงื่อนไขจากการวางฟังก์ชันฐานเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยการวิเคราะห์จำนวนฟังก์ชันฐานและค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันฐานได้

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

สามารถหาผลเฉลยจากสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีเมชเลสที่มีเงื่อนไขจากการวางฟังก์ชันฐาน และได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ช่วยในการคำนวณ เพื่อความสะดวก รวดเร็ว และแม่นยำในการคำนวณ

ขอบเขตการวิจัย

งานวิจัยนี้เริ่มจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นและวิธีเมชเลส ทำการศึกษาและสร้างสมการชเรอดิงเงอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นที่เหมาะสม สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยด้วยวิธีเมชเลส และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ จากนั้นทำการคำนวณเพื่อเก็บข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และสรุปผลที่ได้ต่อไป

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University