บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ที่ประกอบไปด้วยบทนิยามและแนวคิดรวมทั้งงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญสำหรับงานวิจัยนี้อย่างมาก

ความรู้พื้นฐาน

สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ต่างๆของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function) หนึ่งฟังก์ชันหรือมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันปรากฏอยู่ คำว่า Differential equation (aequatio differentialis) เริ่มใช้โดย ไลบ์นิทซ์ (Leibnitz,1676) เป็นรูปแบบสมการหนึ่งในคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานที่สำคัญในสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ในทางวิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ เพราะว่ากฎเกณฑ์และปัญหาต่าง ๆ ในสาขาวิชาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์แทบทั้งสิ้น เช่นกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ปัญหาของการนำความร้อนในแท่งโลหะ การหาประจุหรือกระแสในวงจรไฟฟ้า เหล่านี้เป็นต้น โดยแบ่งสมการเชิงอนุพันธ์ เป็น 2 ประเภท คือ

1. **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation) หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว โดยสามารถหาคำตอบของสมการได้ง่ายตามวิธีการต่าง ๆ เช่น โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ ใช้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ โดยวีธีแปรตัวพารามิเตอร์ เป็นต้น

2. **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation) หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร ซึ่งเป็นสมการที่น่าสนใจ เพราะไม่มีรูปแบบวิธีการที่แน่นอนในการหาคำตอบของสมการ สามารถเลือกใช้วิธีการหาคำตอบได้หลายวิธี โดยหลักการเลือกใช้นั้น ขึ้นอยู่กับรูปแบบเฉพาะของแต่ละสมการ เช่น วิธีการกระจายผกผัน วิธีการแบบเชิงเส้นคู่ฮิโรตะ วิธีการกระจายแบบพองแลแบบตัด สำหรับวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์นั้นนับได้ว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการหาคำตอบคลื่นเคลื่อนที่แม่นตรง โดยเลือกนำมาศึกษาเพื่อเป็นวิธีในการแก้ไขปัญหาครั้งนี้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3 \frac{d^3}{d\xi^3} \tag{2.9}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ อีก ซึ่งในที่นี้ $\frac{d}{dt}$ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่ เมื่อแทนสมการ (2.7) แล้วจะทำให้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการ (2.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0 \tag{2.10}$$

3. ถ้าทุกพจน์ของผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีอนุพันธ์ของ ξ แล้วเราจะสามารถอินทิเกรตสมการนี้ได้ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ จะทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จัดรูปเรียบร้อยแล้ว

4. ในขั้นนี้เราจะกำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{2.11}$$

ซึ่งจะทำให้ได้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1 - Y^2\right)\frac{d}{dY} \quad ,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1 - Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY} + \left(1 - Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{2.12}$$

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

5. กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{2.13}$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้ แทนสมการ (2.10) และ (2.11) ในสมการ (2.8) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y

6. พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $a_k,(k=0,1,2,...,M)$, c, และ λ เมื่อหา M ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นจำนวนเต็มบวก และใช้ M นี้กับสมการ (2.11) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปแบบปิด

7. จากผลเฉลยที่ได้โดยวิธีไฮเพอโบลิกแทนเจนต์สามารถนำผลเฉลยนั้นมาเทียบหาผลเฉลยคลื่นกระแทกได้ โดยการเปลี่ยนค่าฟังก์ชัน tanh เป็นค่าฟังก์ชัน coth ในผลเฉลยที่ได้

วิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (The extended tanh method)

เป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ โดยมีการเปลี่ยนแปลงที่ขั้นตอนที่ 5 คือ อนุกรม S(Y) สรุปเป็นขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้น

$$P\left(u,u_t,u_x,u_{xx},...\right)=0 \tag{2.14}$$

2. หาคำตอบของสมการ (2.14) โดยกำหนดตัวแปรคลื่น $\xi=c(x-\lambda t)$ ดังนั้นจะได้

$$u(x,t)=U(\xi) \tag{2.15}$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ ด้วยข้อตกลงนี้เราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}=-c\lambda\frac{d}{d\xi} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=c\frac{d}{d\xi} \ ,$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \quad ,$$
$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3 \frac{d^3}{d\xi^3} \tag{2.16}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ อีก ซึ่งในที่นี้ $\frac{d}{dt}$ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่ เมื่อแทนสมการ (2.16) แล้วจะทำให้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการ (2.14) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0 \tag{2.17}$$

3. ถ้าทุกเทอมของผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีอนุพันธ์ของ ξ แล้วเราจะสามารถอินทิเกรตสมการนี้ได้ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ จะทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จัดรูปเรียบร้อยแล้ว

4.ในขั้นนี้เราจะกำหนดตัวแปรอิสระใหม่ คือ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{2.18}$$

ซึ่งจะทำให้ได้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1 - Y^2\right)\frac{d}{dY},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1 - Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY} + \left(1 - Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{2.19}$$

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

5. กำหนดให้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=o}^{M} a_k Y^K + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \tag{2.20}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้ แทนสมการ (2.19) และ (2.20) ในสมการ (2.17) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y

6. พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $b_k, a_k, (k = 0,1,2,...,M)$, c, และ λ เมื่อหา M ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นจำนวนเต็มบวก และใช้ M นี้กับสมการ (2.20) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปแบบปิด

7. จากผลเฉลยที่ได้โดยวิธีขยายของไฮเพอโบลิกแทนเจนต์สามารถนำผลเฉลยนั้นมาเทียบหาผลเฉลยคลื่นกระแทกได้ โดยการเปลี่ยนค่าฟังก์ชัน tanh เป็นค่าฟังก์ชัน coth ในผลเฉลยที่ได้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

วาซวาซ (Wazwaz, 2004) ได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลยของสมการฟิชเชอร์ไม่เชิงเส้น และสมการ KDV ทั่วไป ดังนี้

สมการฟิชเชอร์ไม่เชิงเส้น

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha) \tag{2.32}$$

ใช้สมการ (2.15) และ (2.16) เปลี่ยนสมการที่ (2.32) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi} + U(\xi)\big(1-U(\xi)\big) - \big(U(\xi)-\alpha\big) = 0 \tag{2.33}$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{2.34}$$

เมื่อ $Y = \tanh(\xi)$ และแทนสมการ (2.34) ใน (2.33) จะได้

$$c\lambda\left(1-Y^2\right)\frac{dS}{dY} + c^2\left(1-Y^2\right)\left[-2Y\frac{dS}{dY} + \left(1-Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right] + \left(1+\alpha\right)S^2 - \alpha S - S^3 = 0 \tag{2.35}$$

พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y ซึ่งจะได้

$$3M = 4 + M - 2 \tag{2.36}$$

จะได้ $M = 1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y \tag{2.37}$$

แทนค่า $S(Y), S'(Y), S''(Y)$ ลงในสมการ (2.35) พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0, a_1, c,$และ λ ดังนี้

$$Y^3 : 2a_1c^2 - a_1^3 = 0 \ ,$$

$$Y^2 : -a_1c\lambda + \left(1+\alpha\right)a_1^2 - 3a_0a_1^2 = 0 \ ,$$

$$Y^1 : -2a_1c^2 + 2\left(1+\alpha\right)a_0a_1 - 3a_0^2a_1 = 0 \ ,$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$Y^0 : a_1 c\lambda + (1+\alpha) a_0 - \alpha a_0 - a_0^3 = 0 \tag{2.38}$$

คำนวณหาค่า $a_0, a_1, c,$ และ λ ได้ดังนี้

$$\lambda = -\frac{(1-2\alpha)}{\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ ,$$

$$\lambda = -\frac{(\alpha-2)}{\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{1}{2}\alpha, \quad a_0 = \frac{1}{2}\alpha, \quad c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha \ ,$$

$$\lambda = -\frac{(1+\alpha)}{\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{1}{2}(1-\alpha), \quad a_0 = \frac{1}{2}(1+\alpha), \quad c = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\alpha) \tag{2.39}$$

จากค่าตัวแปรแต่ละชุดในสมการ (2.39) จะได้ผลเฉลยแต่ละชุด ดังนี้

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{(1-2\alpha)}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha\left(x + \frac{(\alpha-2)}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(1+\alpha) + \frac{1}{2}(1-\alpha)\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\alpha)\left(x + \frac{(1+\alpha)}{\sqrt{2}}t\right)\right] \tag{2.40}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{(1-2\alpha)}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha\left(x + \frac{(\alpha-2)}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(1+\alpha)+\frac{1}{2}(1-\alpha)\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\alpha)\left(x+\frac{(1+\alpha)}{\sqrt{2}}t\right)\right] \quad (2.41)$$

สมการฟิชเชอร์ไม่เชิงเส้น

$$u_t=u_{xx}+2u\left(1-u^2\right)+\mu\left(1-u^2\right),\quad |\mu|<1 \quad (2.42)$$

ใช้สมการ (2.16) และสมการ (2.17) เปลี่ยนสมการที่ (2.42) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$c\lambda\frac{dU(\xi)}{d\xi}+c^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi}+2U(\xi)\left(1-U^2(\xi)\right)+\mu\left(1-U^2(\xi)\right)=0 \quad (2.43)$$

กำหนด

$$U(\xi)=S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k \quad (2.44)$$

เมื่อ $Y=\tanh(\xi)$ และแทนสมการ (2.44) ใน (2.43) จะได้

$$c\lambda\left(1-Y^2\right)\frac{dS}{dY}+c^2\left(1-Y^2\right)\left[-2Y\frac{dS}{dY}+\left(1-Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right]+2S-2S^3+\mu-\mu S^2=0 \quad (2.45)$$

พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ซึ่งจะได้

$$3M=4+M-2 \quad (2.46)$$

จะได้ $M=1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y)=a_0+a_1Y \quad (2.47)$$

แทนค่า $S(Y), S'(Y), S''(Y)$ ลงในสมการ (2.45) พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0, a_1, c,$ และ λ ดังนี้

$$Y^3 : 2a_1c^2 - a_1^3 = 0\,,$$

$$Y^2 : -a_1c\lambda - 6a_0a_1^2 - \mu a_1^2 = 0\,,$$

$$Y^1 : -2a_1c^2 + 2a_1 - 6a_0^2a_1 - 2\mu a_0a_1 = 0\,,$$

$$Y^0 : a_1c\lambda + 2a_0 - 2a_0^3 + \mu - \mu a_0^2 = 0 \qquad (2.48)$$

คำนวณหาค่า $a_0, a_1, c,$ และ λ ได้ดังนี้

$$\lambda = -\mu, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 0, \quad c = 1 \qquad (2.49)$$

จากค่าตัวแปรในสมการ (2.27) จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \tanh\left[x + \mu t\right] \qquad (2.50)$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u(x,t) = \coth\left[x + \mu t\right] \qquad (2.51)$$

สมการ KDV ทั่วไป

$$u_t + 2uu_x + 3u^2u_x - u_{xxx} = 0 \qquad (2.52)$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$u_t + \left(u^2\right)_x + 3\left(u^3\right)_x - u_{xxx} = 0 \qquad (2.53)$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ใช้สมการ (2.16) และสมการ (2.17) เปลี่ยนสมการที่ (2.53) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$-c\lambda\frac{dU(\xi)}{d\xi}+c\frac{dU^2(\xi)}{d\xi}+c\frac{dU^3(\xi)}{d\xi}-c^3\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \tag{2.54}$$

หาปริพันธ์ของสมการ (2.54) จะได้

$$-\lambda U(\xi)+U^2(\xi)+U^3(\xi)-c^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \tag{2.55}$$

กำหนด

$$U(\xi)=S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k \tag{2.56}$$

เมื่อ $Y=\tanh(\xi)$ และแทนสมการ (2.56) ใน สมการ (2.55) จะได้

$$-\lambda S+S^2+S^3-c^2\left(1-Y^2\right)\left[-2Y\frac{dS}{dY}+\left(1-Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right]=0 \tag{2.57}$$

พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y ซึ่งจะได้

$$3M=4+M-2 \tag{2.58}$$

จะได้ $M=1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y)=a_0+a_1Y \tag{2.59}$$

แทนค่า $S(Y),S'(Y),S''(Y)$ ลงในสมการ (2.57) พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0,a_1,c,$และ λ ดังนี้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$Y^3 : 2a_1c^2 + a_1^3 = 0\,,$$

$$Y^2 : a_1^2 + 3a_0a_1^2 = 0\,,$$

$$Y^1 : -a_1\lambda + 2a_0a_1 + 3a_0^2a_1 + 2a_1c^2 = 0\,,$$

$$Y^0 : -a_0\lambda + a_0^2 + a_0^3 = 0 \qquad (2.60)$$

คำนวณหาค่า $a_0, a_1, c,$และ λ ได้ดังนี้

$$\lambda = 2c^2 - \frac{1}{3}, \quad a_1 = 1\sqrt{2}c, \quad a_0 = -\frac{1}{3} \qquad (2.61)$$

จากค่าตัวแปรในสมการ (2.50) จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = -\frac{1}{3} + \sqrt{2}c\tanh\left[c\left(x + \left(-2c^2 + \frac{1}{3}\right)t\right)\right] \qquad (2.62)$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u(x,t) = -\frac{1}{3} + \sqrt{2}c\tanh\left[c\left(x + \left(-2c^2 + \frac{1}{3}\right)t\right)\right] \qquad (2.63)$$

ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

Wazwaz (2007) ได้ใช้วิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลยของสมการฟิชเชอร์ และสมการเบอร์เกอ ฟิชเชอร์ไว้ดังนี้

สมการฟิชเชอร์

$$u_t - u_{xx} - u(1-u) = 0 \qquad (2.64)$$

กำหนด $\xi = x - ct$ เปลี่ยนสมการที่ (2.64) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$c\frac{dU(\xi)}{d\xi}+\frac{d^2U(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\left(1-U(\xi)\right)=0 \tag{2.65}$$

กำหนด

$$U(\xi)=S(Y)=\sum_{k=o}^{M}a_kY^K+\sum_{k=1}^{M}b_kY^{-k} \tag{2.66}$$

เมื่อ

$$Y=\tanh(\mu\xi) \tag{2.67}$$

พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ซึ่งจะได้

$$M+2=2M \tag{2.68}$$

จะได้ $M=2$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y)=a_0+a_1Y+a_2Y^2+\frac{b_1}{Y}+\frac{b_2}{Y^2} \tag{2.69}$$

แทนค่า $S(Y),S'(Y),S''(Y)$ ลงในสมการ (2.68) พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0,a_1,c,$และ λ หาค่าตัวแปรดังกล่าวได้ค่าดังนี้

$$a_0=\frac{1}{4},a_1=-\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{4},b_1=b_2=0,c=\frac{5}{\sqrt{6}},\mu=\frac{1}{2\sqrt{6}},$$

$$a_0=\frac{1}{4},a_1=a_2=0,b_1=-\frac{1}{2},b_2=\frac{1}{4},c=\frac{5}{\sqrt{6}},\mu=\frac{1}{2\sqrt{6}},$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$a_0 = \frac{3}{8}, a_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{16}, b_1 = -\frac{1}{4}, b_2 = \frac{1}{16}, c = \frac{5}{\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{4\sqrt{6}} \qquad (2.70)$$

จากค่าตัวแปรแต่ละชุดในสมการ (2.70) จะได้ผลเฉลยแต่ละชุด ดังนี้

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\left(1 - \tanh^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right)^2,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\left(1 - \coth^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right)^2,$$

$$u(x) = \frac{1}{16}\left(6 - 4\tanh\left[\frac{1}{4\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right] + \tanh^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right)$$
$$+ \frac{1}{16}\left(-4\coth\left[\frac{1}{4\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right] + \coth^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right) \qquad (2.71)$$

สมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u(1-u) = 0 \qquad (2.72)$$

กำหนด $\xi = x - ct$ เปลี่ยนสมการที่ (2.72) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$-c\frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi} + \frac{d^2U(\xi)}{d\xi} + U(\xi)\left(1 - U(\xi)\right) = 0 \qquad (2.73)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^K + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \qquad (2.74)$$

เมื่อ $\qquad Y = \tanh(\mu\xi) \qquad (2.75)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ซึ่งจะได้

$$M + 2 = 2M + 1 \tag{2.76}$$

จะได้ $M = 1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \frac{b_1}{Y} \tag{2.77}$$

แทนค่า $S(Y), S'(Y), S''(Y)$ ลงในสมการ (2.74) พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0, a_1, c,$ และ λ หาค่าตัวแปรดังกล่าวได้ค่าดังนี้

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 0, c = \frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{4} ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, b_1 = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{4} ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{1}{4}, c = \frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{8} \tag{2.78}$$

จากค่าตัวแปรแต่ละชุดในสมการ (2.78) จะได้ผลเฉลยแต่ละชุด ดังนี้

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right]\right) ,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \coth\left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right]\right) ,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\left(2 + \tanh\left[\frac{1}{8}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right] + \coth\left[\frac{1}{8}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right]\right) \tag{2.79}$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University