บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สมการไม่เชิงเส้นนั้นนับเป็นสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการจำลอง และอธิบายความซับซ้อนของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น กลศาสตร์ของไหล จลศาสตร์เคมี และแบบจำลองประชากร เป็นต้น ดังนั้นการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง เพื่อทำให้เราบรรลุถึงเป้าหมายของการศึกษาในเรื่องดังกล่าว

สำหรับปรากฏการณ์ข้างต้นมักเป็นปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งไม่มีรูปแบบในการหาผลเฉลยที่แน่นอน แต่ได้มีผู้คิดค้นวิธีการหาคำตอบของปัญหาเหล่านั้นในช่วงไม่กี่ปีมานี้ไว้มากมายหลายวิธีแตกต่างกันไป เช่น วิธีการแปลงเชิงเส้นคู่ (bilinear transformation) (Hirota, 1980) วิธีไซน์-โคไซน์ (sine-cosine method) (Abdul-Majid , 2004) วิธีเอ็กซ์โพเนเชียลฟังก์ชัน (exponential function method) (He & Wu, 2006) วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (homotopy perturbation method) (Ganji & Rafei, 2006) เป็นต้น

อีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจและมีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ วิธีไฮเพอร์โบลิกแธนเจนต์ (tanh method) และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ (sech method) (Malfliet, 1992) ซึ่งถือว่าเป็นเทคนิคที่ถูกอ้างอิงและใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยต่าง ๆ ทั่วโลก ทั้งยังได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่อง รวบรวมให้เป็นระบบเพื่อง่ายต่อการนำไปใช้

จากการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ นั้น พบว่าได้มีผู้วิจัยหลายท่านได้ทำการศึกษาและหาผลเฉลยของสมการบูซิเน (Boussinesq) หรือสมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon)

ปี ค.ศ.1992 มอลเฟลต (Malfliet,1992) ได้นำเสนอวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ซึ่งเป็นวิธีหาผลเฉลยที่เต็มรูปแบบสำหรับการคำนวณของผลเฉลยของการเดินทางของคลื่นแม่นตรง และวิธีนี้ได้ขยายงานทั้งวิธีและการประยุกต์ที่หลากหลาย

ปี ค.ศ.2005 วาซวาซ (Wazwaz) ได้ศึกษาโดยการเปรียบเทียบวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีไซน์-โคไซน์ เพื่อหาผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon) ได้ว่าผลเฉลยที่หาโดยใช้วิธีไซน์-โคไซน์ สามารถได้ผลที่อยู่ในรูปคอมแพคตอน รูปแบบโซลิทารี่ ผลเฉลยที่อยู่ในรูปช่วงคาบหรือโซลิตอน ส่วนวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ไม่เหมาะที่ได้ผลเฉลยในรูปคอมแพคตอน รูปแบบโซลิทารี่ ผลเฉลยที่อยู่ในรูปช่วงคาบหรือโซลิตอน

ปี ค.ศ.2006 วาซวาซ (Wazwaz) ได้ทำการศึกษาและหาผลเฉลยของสมการคลื่นบูซิเน (wave Boussinesq) และรูปแบบทั่วไปของสมการคลื่นบูซิเน เพื่อหาผลเฉลยคลื่นโซลิทารี่และคอมแพคคอน

ปี ค.ศ.2008 วาซวาซ (Wazwaz) ได้ทำการหาผลเฉลยการคลื่นที่ของคลื่นของสมการบูซิเน (wave Boussinesq) และสมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon) โดยการศึกษาการหาผลเฉลยโดยวิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ วิธีไฮเพอร์โบลิกไซน์ และวิธีไฮเพอร์โลบิกโคไซน์

สินทรัพย์ แซ่แต้ (2552) ได้ศึกษาการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ในการหาผลเฉลยของสมการเคดีวีปรับปรุง และสมการเคดีวีประกอบ

ทั้งนี้ทางผู้วิจัยมีความสนใจที่จะใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ในการหาผลเฉลยของสมการบูซิเน และสมการไคลน์-กอร์ดอน เพื่อเปรียบเทียบกับวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ที่ผู้วิจัยต่าง ๆ ที่ได้กล่าวได้ทำการหาผลเฉลยมาแล้ว

สำหรับงานวิจัยนี้เราจะศึกษา นั่นคือ

1. สมการบูซิเน (Boussinesq) ที่มีรูปแบบเป็น

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} - b\left(u^2\right)_{xx} + u_{xxxx} = 0 \tag{1.1}$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ a,b เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการบูซิเนเป็นสมการที่อธิบายเกี่ยวกับการแพร่ขยายของคลื่นยาวในน้ำตื้น และสมการนี้อธิบายเกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางกายภาพ เช่น การแพร่ประสานกันของคลื่น คลื่นเสียงในก๊าซร้อนจัดและการสั่นสะเทือนของเส้นลวด และนอกจากนี้ยังได้นำไปใช้ในการอธิบายปัญหาเกี่ยวกับการไหลผ่านของน้ำใต้ผิวดิน

2. สมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon) ที่มีรูปแบบเป็น

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u - \beta u^2 = 0 \tag{1.2}$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ α,β เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการไคลน์-กอร์ดอนเป็นสมการที่อธิบายเกี่ยวกับปรากฏการณ์ที่สำคัญทางวิทยาศาสตร์ เช่น ลักษณะทางกายภาพในสถานะของแข็ง และทฤษฎีเกี่ยวกับสนามรังสี

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์
2. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลยของสมการบูซิเน
3. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ได้ผลเฉลยจากวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ที่เป็นองค์ความรู้ใหม่จากสมการต่อไปนี้

1. ผลเฉลยของสมการบูซิเน
2. ผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการบูซิเน และสมการไคลน์-กอร์ดอน โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ (The sech method)