ตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ฐาปนี กิตตินาทกำธร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
มกราคม 2559

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ของ ฐาปนี กิตตินาทกำธร ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อารีรักษ์ ชัยวร)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร. อำพล ธรรมเจริญ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อารีรักษ์ ชัยวร)

.... กรรมการ

(ดร. สารัตน์ ศิลปวงษา)

.... กรรมการ

(ดร.กัญจน์ชญา หงส์เลิศคงสกุล)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพา

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เอกรัฐ ศรีสุข)

วันที่ 14 เดือน มกราคม พ.ศ. 2559

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อารีรักษ์ ชัยวร อาจารย์ที่ปรึกษา ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำแนวทางที่ถูกต้องในการศึกษาค้นคว้า ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ที่กรุณาให้ความรู้ ให้คำปรึกษา ตรวจแก้ไขและวิจารณ์ผลงานทำให้งานวิจัยมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นและผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบรวมทั้งให้คำแนะนำแก้ไขการวิจัยให้มีคุณภาพทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่ออุดมโชค คุณแม่ทับทิม กิตตินาทกำธร และครอบครัว พี่ ๆ รวมถึงเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้กำลังใจและสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา

เนื่องจากงานวิจัยนี้ส่วนหนึ่งได้รับการสนับสนุนจากงบประมาณเงินรายได้ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา จึงขอขอบพระคุณ ณ ที่นี้ด้วย

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทิตาแด่บุพการี บูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

ฐาปนี กิตตินาทกำธร

55910088: สาขาวิชา: คณิตศาสตร์; วท.ม. (คณิตศาสตร์)
คำสำคัญ: ตัวดำเนินการประกอบ/ ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ฐาปนี กิตตินาทกำธร: ตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป (COMPOSITION OPERATOR ON THE GENERALIZED SEGAL-BARGMANN SPACE) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: อารีรักษ์ ชัยวร, วท.ด. 23 หน้า. ปี พ.ศ. 2558.

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาสมบัติบางประการของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป อีกทั้งได้พิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

55910088: MAJOR: MATHEMATICS; M.Sc. (MATHEMATICS)

KEYWORDS: COMPOSITION OPERATOR/ GENERALIZED SEGAL-BARGMANN SPACE

TAPANEE KITTINATGUMTORN: COMPOSITION OPERATOR ON THE GENERALIZED SEGAL-BARGMANN SPACE. ADVISORY COMMITTEE: AREERAK CHAIWORN, Ph.D. 23 P. 2015.

In this paper, we study some properties of the composition operator on the generalized Segal-Bargmann space. We also prove a necessary and sufficient condition for the bounded composition operator on the generalized Segal-Bargmann space.

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สำหรับแต่ละสับเซตเปิด U ของ $\mathbb{C}^d$ ปริภูมิ $HL^2(U,\alpha)$ คือปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิกที่ยกกำลังสองแล้วสามารถหาปริพันธ์เทียบกับเมเชอร์ α ได้ นั่นคือ

$$HL^2(U,\alpha)=\left\{ f\in H(U) \,\middle|\, \int_U |f(z)|^2 \alpha(z)dz<\infty \right\}$$

ซึ่ง $HL^2(U,\alpha)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) และจะมีฟังก์ชันเชิงซ้อน K บน $U\times U$ ที่สำหรับแต่ละ $F\in HL^2(U,\alpha)$

$$F(z)=\int_U K(z,w)F(w)\alpha(w)dw$$

และ

$$|F(z)|^2\le K(z,z)\|F\|^2$$

ซึ่ง $K(z,z)$ เป็นขอบเขตรายจุด (pointwise bounded) ที่ดีที่สุดสำหรับทุก $F\in HL^2(U,\alpha)$ และเรียกฟังก์ชัน K ว่ารีโปรดิวซิงเคอร์เนล(reproducing kernel) ของปริภูมิ $HL^2(U,\alpha)$ สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต $HL^2(U,\alpha)$ ที่ได้รับการศึกษากันอย่างกว้างขวางและแพร่หลาย คือ ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมน (Segal-Bargmann space) $HL^2(\mathbb{C}^d,\mu_t)$ ซึ่งก็คือ ปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิกบน $\mathbb{C}^d$ ที่ยกกำลังสองแล้วสามารถหาปริพันธ์เทียบกับเมเชอร์เกาส์ $\mu_t=(\pi t)^{-d}e^{-|z|^2/t}dz$ เมื่อ
$|z|^2=|z_1|^2+\cdots+|z_d|^2$
ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนได้รับการศึกษาสมบัติต่างๆมากมาย เนื่องจากปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเป็นปริภูมิที่มีบทประยุกต์ในทางฟิสิกส์และทฤษฎีควอนตัม (quantum field theory)

ใน ค.ศ. 2003 Carswell, MacCluer และ Schuster ได้ศึกษาฟังก์ชันประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมน สำหรับแต่ละฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก $\varphi:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$ ตัวดำเนินการประกอบ C_φ กำหนดโดย $C_\varphi(f)=f\circ\varphi$ ทุก $f\in HL^2\left(\mathbb{C}^d,\mu_t\right)$ โดย Carswell, MacCluer และ Schuster ศึกษาเงื่อนไขการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบ C_φ

ในการวิจัยนี้จะศึกษาปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป (generalized Segal-Bargmann space) $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)=\left\{ f\in H(\mathbb{C}) \,\middle|\, \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \mu_\alpha(z)dz<\infty \right\}$ เมื่อ $\alpha\ge 2,\ \mu_\alpha(z)=c_\alpha e^{-|z|^\alpha}$ และ $c_\alpha=\left(\int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^\alpha}dz\right)^{-1}$ ซึ่งพบว่าเมื่อ $\alpha=2$ ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปก็คือปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนนั่นเอง

โดยจะศึกษาหารีโปรดิวซิงเคอร์เนลของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป จากนั้นจะนำไปประยุกต์เพื่อหาเงื่อนไขสำหรับการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบ C_φ บนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาหารีโปรดิวซิงเคอร์เนลบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป
2. หาเงื่อนไขที่จำเป็นที่ทำให้ตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปมีขอบเขต
3. หาเงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้ตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปมีขอบเขต

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ผลสรุปที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ดังนี้

1. ทำให้ทราบรีโปรดิวซิงเคอร์เนลของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปได้
2. สามารถหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้ตัวดำเนินการประกอบมีขอบเขตบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปได้ ทำให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปมีขอบเขต

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐาน

งานวิจัยนี้จะศึกษาเงื่อนไขสำหรับการมีขอบเขตของฟังก์ชันประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป ซึ่งเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยใช้สมบัติบางประการของรีโปรดิวซิงเคอร์เนล ดังนั้นในบทนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิฮิลเบิร์ต การกระทำแบบมีขอบเขตบนปริภูมิฮิลเบิร์ต ปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิกที่เมื่อยกกำลังสองแล้วสามารถหาปริพันธ์ได้ $HL^2(U,\alpha)$ รีโปรดิวซิงเคอร์เนล และปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

บทนิยาม 2.1. (Wicharn, 2542, p.39) ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F (เมื่อ $F=\mathbb{R}$ หรือ $F=\mathbb{C}$) ผลคูณภายใน (inner product) บน X คือ การส่ง $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to F$ ที่สอดคล้องกับ

1. $\langle x,x\rangle \geq 0$ และ $\langle x,x\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0$
2. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ สำหรับทุก $x,y\in X$
3. $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ สำหรับทุก $x,y\in X$ และ $\alpha\in F$
4. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

ประพจน์ 2.2 (Wicharn, 2542, p.39) ให้ X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space) ดังนั้น

1. $\langle x,0\rangle = \langle 0,x\rangle = 0$ สำหรับทุก $x\in X$
2. $\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$ สำหรับทุก $x,y\in X$ และ $\alpha\in F$
3. $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ สำหรับทุก $x,y,z\in F$

นิยาม 2.3 (Wicharn, 2542, p.2) ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ฟังก์ชัน $\|\cdot\| : X\mapsto [0,\infty)$ เรียกว่านอร์ม (norm) บน X ถ้า

1. $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0$
2. $\|cx\| = |c|\|x\|$ สำหรับทุก $x\in X$ และ $c\in F$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ สำหรับทุก $x,y\in X$

ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) ที่ประกอบด้วยนอร์ม เรียกว่าปริภูมิเชิงเส้นนอร์ม (normed linear space) หรือปริภูมินอร์ม (normed space)

นิยาม 2.4 (Wicharn, 2542, p.24) ให้ X และ Y เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator) T จาก X ไปสู่ Y คือฟังก์ชัน $T : X \to Y$ ที่ซึ่ง

1. $T(x+y) = T(x) + T(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ
2. $T(cx) = cT(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in X$ และ $c \in F$

นิยาม 2.5 (Wicharn, 2542, p.24) ให้ X และ Y เป็นปริภูมิเชิงเส้นนอร์ม และ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะกล่าวว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตถ้ามี $M \geq 0$ ที่ทำให้ $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ สำหรับแต่ละ $x \in X$

ประพจน์ 2.6 (Wicharn, 2542, p.25) ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นนอร์ม และ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ดังนั้น

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{x} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

นิยาม 2.7 (Wicharn, 2542, p.40) ให้ X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน สำหรับทุก $x \in X$ กำหนดให้

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

จะได้ว่า $\left(X, \|\cdot\|\right)$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นนอร์ม (normed linear space)

นิยาม 2.8 (Promislow, 2008, p.76) ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert spaces) คือปริภูมิผลคูณภายในบริบูรณ์

นิยาม 2.9 (Wicharn, 2542, p.43) ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน

1. $u, v \in V$ ตั้งฉากกัน (orthogonal) ถ้า $\langle u, v \rangle = 0$ และเขียนได้ว่า $u \perp v$
2. ถ้า $x \in V$ ตั้งฉากกับทุกสมาชิกบนเซตย่อย W ของ V ดังนั้นจะกล่าวว่า x ตั้งฉากกับ W และเขียนได้ว่า $x \perp W$
3. ถ้า U, W เป็นเซตย่อยของ V และ $u \perp w$ สำหรับทุก $u \in U$ และทุก $w \in W$ จะกล่าวว่า U ตั้งฉากกับ W และเขียนได้ว่า $U \perp W$
4. เซตของทุก $x \in V$ ที่ตั้งฉากกับ W เขียนแทนด้วย $W^{\perp}$ เรียกว่าส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ W

$$W^{\perp} = \{x \in V | x \perp W\}$$

นิยาม 2.10 (Wicharn, 2542, p.59) กำหนดเซตไม่ว่าง $O = \{u_\alpha | \alpha \in A\}$ เป็นสับเซตของปริภูมิผลคูณภายใน จะเรียกว่าเซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set) ถ้า $u_\alpha \perp u_\beta$ สำหรับทุก $\alpha \neq \beta$ ใน A และ ถ้าแต่ละ u_α มีนอร์มเป็น 1 เราจะเรียกเซต O ว่าเซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set) นั่นคือ เซต O เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติก็ต่อเมื่อ $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in A$ เมื่อ $\delta_{\alpha\beta}$ เป็น Kronecker's delta function

นิยาม 2.11 (Wicharn, 2542, p.64) เซตเชิงตั้งฉากที่ใหญ่ที่สุด (maximal orthogonal set) ในปริภูมิผลคูณภายใน V เรียกว่า ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ของ V หรือ เซตเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์ (complete orthonormal set) ของ V

นิยาม 2.12 (Wicharn, 2542, p.56) ให้ M เป็นปริภูมิย่อยปิด (closed subspace) จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in H$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x = y + z \text{ เมื่อ } y \in M \text{ และ } z \in M^\perp$$

ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น จะเรียก y ว่าภาพฉาย (projection) ของ x บน M
และตัวดำเนินการ P_M นิยามโดย $P_M(x) = y$ เรียกว่า ภาพฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ x บน M เรียก M ว่าปริภูมิย่อยของภาพฉาย (subspace of the projection) P_M

ทฤษฎีบท 2.13 (Wicharn, 2542, p.57) ถ้า M เป็นปริภูมิย่อยปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H ดังนั้นภาพฉายเชิงตั้งฉาก $P_M : H \to H$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต (bounded linear operator) และ $\|P_M\| = 1$ ถ้า $M \neq \{0\}$ นอกจากนั้น $\operatorname{im} P_M = M$ และ $\ker P_M = M^\perp$

ประพจน์ 2.14 (Wicharn, 2542, p.64) ให้ E เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน V ดังนั้นแต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกัน

1. E เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ V
2. $E^\perp = \{0\}$
3. สำหรับทุก $v \in V$ ถ้า $\langle v, x \rangle = 0$ สำหรับแต่ละ $x \in E$ แล้ว $v = 0$
4. $\overline{spanE} = V$

ทฤษฎีบท 2.15 (Wicharn, 2542, p.50) ให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต (bounded linear operator) บนปริภูมิฮิลเบิร์ต H แล้วจะมีตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต A^* เพียงหนึ่งเดียวบน H ที่สอดคล้องกับ

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \text{ สำหรับทุก } x, y \in H$$

นิยาม 2.16 (Wicharn, 2542, p.51) ให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H ดังนั้นจะเรียกตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต A^* ที่นิยามในทฤษฎีบท 2.15 ว่าตัวผูกพัน (adjoint) ของ A

ทฤษฎีบท 2.17 (Wicharn, 2542, pp.51-52) ให้ A และ B เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H ดังนั้น

1. $A^{**} = A$
2. $\|A^*\| = \|A\|$
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ สำหรับทุก $\alpha, \beta \in F$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $\|A^* A\| = \|A\|^2$
6. ถ้า A หาตัวผกผันได้ แล้ว A^* หาตัวผกผันได้ด้วยและ $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

นิยาม 2.18 (Wicharn, 2542, p.90) ให้ X และ Y เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น และ $T : X \to Y$ เป็นฟังก์ชัน กราฟของ T นิยามโดย

$$\varsigma(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

บทตั้ง 2.19 (Wicharn, 2542, p.90) ให้ X และ Y เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น และ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะกล่าวว่า T มีกราฟปิด ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกลำดับ (x_n) ใน X ถ้า $x_n \to x$ และ $Tx_n \to y$ แล้ว $y = Tx$

ทฤษฎีบท 2.20 (Wicharn, 2542, p.90) ให้ X และ Y เป็นปริภูมิบานาคและ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะกล่าวว่า T มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ T มีกราฟปิด

นิยาม 2.21 (Royden, 1963, p.123) ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ บน X จะเรียกว่าลู่เข้าสู่ x ก็ต่อเมื่อ $x_n \to x$ บน X นั่นคือ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ ที่ทำให้ $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ทุก $n \geq N$

นิยาม 2.22 (Wicharn, 2542, p.106) ให้ X เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น ทอพอโลยีอ่อนบน X นิยามโดย $\sigma(X, X^*)$ คือทอพอโลยีอ่อนบน X ที่สร้างโดย X^* กล่าวคือเป็นทอพอโลยีที่เล็กที่สุดบน X ที่ทำให้ทุก $f \in X^*$ ต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.23 (Wicharn, 2542, p.107) ให้ X เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น จะกล่าวว่า $\{x_n\}$ ใน X ลู่เข้าแบบอ่อน (converges weakly) สู่ $x \in X$ ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x ในทอพอโลยีอ่อนบน X เรียก x ว่าขีดจำกัดอ่อน (weak limit) ของ $\{x_n\}$ และเขียนแทนด้วย $x_n \xrightarrow{w} x$

ทฤษฎีบท 2.24 (Wicharn, 2542, p.108) ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมินอร์มเชิงเส้น X ดังนั้น

1 ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบนอร์ม (norm convergence) สู่ x แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อน (weak convergence) สู่ x เหมือนกัน

2 ถ้า X มีมิติจำกัด แล้ว ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อน แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบนอร์ม

นิยาม 2.25 (Mark & Athanasios, 2003, p.37) ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน จะเรียก $f(z)$ ว่าฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ที่จุด z_0 ถ้า $f(z)$ หาอนุพันธ์ได้ในย่านใกล้เคียง z_0 และจะเรียกว่าฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดในบริเวณ

นิยาม 2.26 (Brian, 1998, p.1) ให้ U เป็นเซตเปิดไม่ว่างใน $\mathbb{C}$ นิยาม $H(U)$ คือปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก (holomorphic function) บน U

นิยาม 2.27 (Brian, 1998, p.2) ให้ $HL^2(U,\alpha)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก L^2 เทียบกับเมเชอร์ α นั่นคือ

$$HL^2(U,\alpha) = \left\{ F \in H(U) \middle| \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}$$

นิยาม 2.28 (Brian, 1998, p.9) ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมน (Segal-Bargmann Spaces) คือปริภูมิฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก

$$HL^2(\mathbb{C}^d, \mu),$$

เมื่อ

$$\mu(z) = (\pi)^{-d} e^{-|z|^2}$$

ในที่นี้ $|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2$

นิยาม 2.29 (Benchawan, 2000, p.4) ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป (Generalize Segal-Bargmann Spaces) คือปริภูมิฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก L^2

$$HL^2(\mathbb{C}^d, \mu_\alpha),$$

เมื่อ

$$\mu_\alpha(z) = c_\alpha e^{-|z|^\alpha}$$

และ $c_\alpha = \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^\alpha} dz \right)^{-1}$ เมื่อ $\alpha \geq 2$

ทฤษฎีบท 2.30 (Brian, 1998, p.3) ให้ $HL^2(U, \alpha)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก L^2 ที่พิจารณาเทียบกับเมเชอร์ α ดังนั้น จะมีฟังก์ชันรีโปรดิวซิงเคอร์เนล (reproducing kernel) $K(z,w), z, w \in U$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. $K(z,w)$ เป็นฮอลอมอร์ฟิกใน z และเป็นแอนติฮอลอมอร์ฟิก (anti-holomorphic) ใน w และสอดคล้องกับ

$$K(w,z) = \overline{K(z,w)}$$

2. สำหรับทุก $z \in U, K(z,w)$ หาปริพันธ์กำลังสองเทียบ $d\alpha(w)$ ได้ และสำหรับทุก $F \in HL^2(U, \alpha)$

$$F(z) = \int_U K(z,w) F(w) \alpha(w) dw$$

3. ถ้า $F \in L^2(U, \alpha)$ ให้ PF คือภาพฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ F บนปริภูมิย่อยปิด $HL^2(U, \alpha)$ ดังนั้น

$$PF(z) = \int_U K(z,w) F(w) \alpha(w) dw$$

4. สำหรับทุก $z, u \in U$,

$$\int_U K(z,w) K(w,u) \alpha(w) dw = K(z,u)$$

5. สำหรับทุก $z \in U$,

$$\left|F(z)\right|^2 \le K(z,z)\left\|F\right\|^2$$

เมื่อ $K(z,z)$ เป็นค่าคงที่ที่เหมาะที่สุดสำหรับทุก $z \in U$ และมี $F_z \in HL^2(U,\alpha)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ที่ทำให้เกิดภาวะเท่ากัน

6. กำหนด $z \in U$ ถ้า $\phi_z(\cdot) \in HL^2(U,\alpha)$ สอดคล้องกับ

$$F(z) = \int_U \overline{\phi_z(w)} F(w)\alpha(w)dw$$

สำหรับทุก $F \in HL^2(U,\alpha)$ ดังนั้น $\overline{\phi_z(w)} = K(z,w)$

ทฤษฎีบท 2.31 (Brian, 1998, p.5*)* ให้ $\{e_j\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $HL^2(U,\alpha)$ ดังนั้น สำหรับทุก $z,w \in U$

$$\sum_j \left|e_j(z)\overline{e_j(w)}\right| < \infty$$

และ

$$K(z,w) = \sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}$$

บทตั้ง 2.32 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551, หน้า 191-192)ปริพันธ์สองชั้นเมื่อเปลี่ยนจากระบบแกนพิกัด xy ไปสู่ระบบแกนพิกัด uv จะได้ปริพันธ์เป็น

$$\iint_R H(x,y)dxdy = \iint_{R'} H(f(u,v),g(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv$$

เมื่อ R เป็นบริเวณในระบบแกนพิกัด xy และ R' เป็นบริเวณในระบบแกนพิกัด uv

และจาโคเบียน $J(u,v) = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}$

นิยาม 2.33 (Royden, 1963, p.70) ให้ A เป็นเซตใดๆ นิยามฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (characteristic function) χ_A ของเซต A กำหนดโดย

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

นิยาม 2.34 (Royden, 1963, p.77) เรียกการรวมเชิงเส้น (linear combination) $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$ ว่า ฟังก์ชันเชิงเดียว (simple function) ถ้าเซต E_i หาเมเชอร์ได้

ทฤษฎีบท 3.35 (Wicharn, 2542, p.24) ถ้า $f : X \to [0,\infty]$ เป็นฟังก์ชันหาเมเชอร์ได้ ดังนั้นจะมีลำดับของฟังก์ชันเชิงเดียว (simple function) $\{s_n\}$ ที่ $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f$ และ s_n ลู่เข้าสู่ f แบบรายจุด ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า f มีขอบเขตแล้วจะสามารถเลือก s_n ที่ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปได้

ทฤษฎีบท 3.36 (Wicharn, 2542, p.31) ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันหาเมเชอร์ได้บน X และสอดคล้องกับ

1. $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le \infty$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in X$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

นิยาม 2.37 (Wicharn, 2542, p.35) ให้ $f : X \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันหาเมเชอร์ได้เชิงซ้อน จะกล่าวว่า f หาปริพันธ์ได้ (integrable) ถ้า $\int_X |f| d\mu < \infty$

นิยาม 2.38 (Carswell, MacCluer, & Schuster, 2003, p.2) สำหรับแต่ละฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก $\varphi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ ตัวดำเนินการประกอบ (Composition operator) บนปริภูมิ $HL^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ คือฟังก์ชัน $C_\varphi : HL^2(\mathbb{C}^d, \mu_t) \to HL^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ กำหนดโดย $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ สำหรับทุก $f \in HL^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$

แต่สำหรับงานวิจัยนี้จะศึกษาปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป โดยจะหาเงื่อนไขที่ทำให้ตัวดำเนินการประกอบมีขอบเขต

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการนิยามการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปนั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษารีโปรดิวซิงเคอร์เนลสำหรับปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป
3. ศึกษาสมบัติการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ซึ่งในแต่ละขั้นตอน ผู้วิจัยได้สร้างข้อคาดเดา (Conjecture) ที่คาดว่าจะเป็นจริง และหาแนวทางในการพิสูจน์เพื่อแสดงว่าข้อคาดเดาเป็นจริง

ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ซึ่งได้อ้างอิงให้เห็นบางส่วน

1. Holomorphic Methods in Analysis and Mathematical Physic(Brian, 1998, pp.1-10)
2. Complex variables and applications (Brown & Churchill, 2004, pp.33-35)
3. Weighted composition operator on the Fock space (Ueki, 2007, pp.1405-1410)
4. A first course in functional analysis (Promislow, 2008, pp.11-58)
5. Certain properties of the domains of multiplication and differentiation operations on a Generalized Segal-Bargmann space (Benchawan, 2000, pp.1-19)

งานวิจัยในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะใช้ในการศึกษาปริภูมิซีกัล-บาร์กแมน ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป การนิยามเคอร์แนลบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมน สมบัติต่าง ๆ ของเคอร์แนล ลักษณะของตัวดำเนินการประกอบและการนำไปใช้ สมบัติการมีขอบเขต ศึกษาความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับนิยามของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป เคอร์แนล ตัวดำเนินการประกอบ และการมีขอบเขต ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป เคอร์แนล ตัวดำเนินการประกอบ และการมีขอบเขต รวมทั้งศึกษาแนวทางการพิสูจน์ต่าง ๆ ทั้งนี้เพื่อผู้วิจัยจะใช้เป็นข้อคาดเดาในการศึกษาบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปต่อไป

ศึกษารีโปรดิวซิงเคอร์แนลสำหรับปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ศึกษางานวิจัยเบื้องต้นเกี่ยวกับรีโปรดิวซิงเคอร์แนลบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมน แล้วนำมาประยุกต์เพื่อหารีโปรดิวซิงเคอร์แนลบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป แล้วนำไปใช้ในการศึกษาหาเงื่อนไขของการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ศึกษาสมบัติการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบ

ในการศึกษาสมบัติการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปนั้น ผู้วิจัยจะแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน ดังนี้

1. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของสมาชิกในปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป
2. ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ตัวดำเนินการประกอบมีขอบเขตบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในบทนี้ผู้วิจัยจะศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

1. ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ในส่วนนี้ผู้วิจัยจะศึกษาปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปและแสดงการคำนวณหารีโปรดิวซิงเคอร์เนล (reproducing kernel) ของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

นิยาม 4.1 ปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป คือปริภูมิของฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิกบน $\mathbb{C}$ ที่ยกกำลังสองแล้วสามารถหาปริพันธ์เทียบกับเมเชอร์ μ_α ได้ เมื่อ $\mu_\alpha(z) = c_\alpha e^{-|z|^\alpha}$ เขียนแทนด้วย $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ ดังนั้น

$$HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \middle| \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \right|^2 \mu_\alpha(z)dz < \infty \right\}$$

เมื่อ $c_\alpha = \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^\alpha} dz \right)^{-1}$ และ $\alpha \geq 2$

ข้อสังเกต $c_\alpha = \dfrac{\alpha}{2\pi \Gamma\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)}$ เมื่อ $\alpha \geq 2$

พิสูจน์ จาก $c_\alpha = \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^\alpha} dz \right)^{-1}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} c_\alpha &= \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^\alpha} dz \right)^{-1} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^\alpha} r d\theta dr \right)^{-1} \\ &= \left(2\pi \int_0^\infty e^{-r^\alpha} r dr \right)^{-1} \\ &= \left(2\pi \int_0^\infty e^{-r^\alpha} r \frac{d\left(r^\alpha\right)}{\alpha r^{(\alpha-1)}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\infty r^{\alpha\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} e^{-r^\alpha} d(r^\alpha) \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\alpha} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right) \right)^{-1} = \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)}$$

ดังนั้น $c_\alpha = \dfrac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)}$ □

ทฤษฎีบท 4.2 เซต $\left\{ z^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis) ของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป และมีรีโปรดิวซิงเคอร์เนลของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป คือ

$$K(z,w) = \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^n}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1) \right)}$$

เมื่อ $z, w \in \mathbb{C}$

พิสูจน์ จาก $\left\langle z^j, z^k \right\rangle = \int_{\mathbb{C}} z^j \overline{z^k} \, d\mu_\alpha$

$$= \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)} \int_{\mathbb{C}} z^j \overline{z^k} e^{-|z|^\alpha} dz$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^j e^{ij\theta} r^k e^{-ik\theta} e^{-r^\alpha} r \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)} \int_0^\infty r^{j+k+1} e^{-r^\alpha} dr \int_0^{2\pi} e^{i(j+k)\theta} d\theta$$

ถ้า $j \neq k$ จะได้ว่า

$$\left\langle z^j, z^k \right\rangle = \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)} \int_0^\infty r^{j+k+1} e^{-r^\alpha} dr \left[\frac{e^{i(j+k)\theta}}{i(j+k)} \right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

$$= 0$$

ถ้า $j = k$ จะได้ว่า

$$\left\langle z^j, z^k \right\rangle = \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)} 2\pi \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^\alpha} dr$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} \right)} \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^\alpha} \frac{d\left(r^\alpha \right)}{\alpha r^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^\alpha} r^{1-\alpha} d\left(r^\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_0^\infty e^{-r^\alpha} r^{\alpha\left(\frac{2(k+1)}{\alpha}-1\right)} d\left(r^\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \Gamma\left(\frac{2(k+1)}{\alpha}\right) \neq 0$$

ดังนั้น $\left\{z^n\right\}_{n=0}^\infty$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

และจาก $f \in HL^2(\mathbb{C}, \mu_\alpha)$ เป็นฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก ดังนั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

ดังนั้น $\left\{z^n\right\}_{n=0}^\infty$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป สำหรับทุก $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จาก

$$\left\|z^n\right\|^2 = \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_{\mathbb{C}} \left|z^n\right|^2 e^{-|z|^\alpha} dz$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{z^n} e^{-|z|^\alpha} dz$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$$

ดังนั้น $\left\{ z^n \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}} \right\}_{n=0}^\infty$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal basis) ของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ต่อไปจะหารีโปรดิวซิงเคอร์เนลของปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^\infty z^n \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}} \, \overline{w^n} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}}$$

$$= \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\overline{w})^n}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)} \qquad \square$$

นิยาม 4.3 สำหรับทุก $w \in \mathbb{C}$ นิยามให้ k_w คือฟังก์ชันจาก $\mathbb{C}$ ไป $\mathbb{C}$ ที่กำหนดโดย

$$k_w(z) = K(z,w) = \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\overline{w})^n}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}$$

2. ตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

ในส่วนนี้ผู้วิจัยจะศึกษาถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้ตัวดำเนินการประกอบมีขอบเขตบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป พร้อมทั้งแสดงวิธีพิสูจน์ ซึ่งจะใช้บทตั้งต่อไปนี้ช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าว

บทตั้ง 4.4 ให้ φ เป็นฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิกบน $\mathbb{C}$ และ C_φ เป็นตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป จะได้ว่า $C_\varphi^*(k_w) = k_{\varphi(w)}$

พิสูจน์ ให้ $g \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left\langle g, C_\varphi^*(k_w)\right\rangle &= \left\langle C_\varphi g, k_w\right\rangle \\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} C_\varphi g(z)\overline{k_w(z)}\,d\mu \\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} (g\circ\varphi)(z)k_z(w)e^{-|z|^\alpha}\,dz \\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} g(\varphi(z))K(w,z)e^{-|z|^\alpha}\,dz \\
&= c_\alpha g(\varphi(w)) \\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} g(z)K(\varphi(w),z)e^{-|z|^\alpha}\,dz \\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} g(z)k_z(\varphi(w))\,d\mu \\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} g(z)\overline{k_{\varphi(w)}(z)}\,d\mu \\
&= \left\langle g, k_{\varphi(w)}\right\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้น $C_\varphi^*(k_w) = k_{\varphi(w)}$ $\square$

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก ถ้า C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ แล้ว $\varphi(z)=az+b$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{C}$ และ $|a|\le 1$

พิสูจน์ ให้ C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ จะได้ว่า

$$\left\|C_\varphi^*\right\|=\sup_{w\in\mathbb{C}}\frac{\left\|C_\varphi^*(k_w)\right\|}{\left\|k_w\right\|}=\sup_{w\in\mathbb{C}}\frac{\left\|k_{\varphi(w)}\right\|}{\left\|k_w\right\|}=\sup_{w\in\mathbb{C}}\sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\varphi(w)|^{2n}}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|w|^{2n}}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}}}<\infty \tag{1}$$

จากสมการที่ 1 จะได้ว่า $|\varphi(w)|\le|w|$ เมื่อ n มากพอ
ดังนั้น

$$\limsup_{|w|\to\infty}\frac{|\varphi(w)|}{|w|}\le 1 \tag{2}$$

จาก $\varphi(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$ จะได้ว่า $a_nw^n=0$ เมื่อ $n\ge 2$
ดังนั้น $\varphi(z)=az+b$
ต่อไปสมมติให้ $|a|>1$ เลือก $|\zeta|=1,\zeta\in\mathbb{C}$
ให้ $w=t\zeta,t>0$ ในสมการที่ (2) และให้ $t\to\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{|\varphi(t\zeta)|}{|t\zeta|}&=\limsup_{t\to\infty}\frac{|at\zeta+b|}{|t\zeta|}\\&\ge\lim_{t\to\infty}\left|\frac{at\zeta+b}{t\zeta}\right|\\&\ge\lim_{t\to\infty}\left(\left|\frac{at\zeta}{t\zeta}\right|-\left|\frac{b}{t\zeta}\right|\right)\\&=\lim_{t\to\infty}|a|-\lim_{t\to\infty}\left|\frac{b}{t\zeta}\right|\\&=|a|>1\end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $|a|\le 1$ □

ส่วนในทางกลับกัน เป็นเงื่อนไขที่จะทำให้ตัวดำเนินการประกอบมีขอบเขต ซึ่งจะใช้ทฤษฎีบทกราฟปิด (closed graph theorem) มาช่วยในการพิสูจน์

บทตั้ง 4.6 ให้ $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ จะได้ว่า

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\mu_\alpha = \int_{\mathbb{C}} |f(z+b)|^2 \, d\mu_\alpha$$

พิสูจน์ ให้ $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ จาก $\mu(A) = \mu(A+b)$ ทุก $b \in \mathbb{C}$ และ A เป็นเซตหาเมเชอร์ได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \chi_A(z) d\mu_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} \chi_{A+b}(z) d\mu_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} \chi_A(z+b) d\mu_\alpha\end{aligned}$$

ให้ $g(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว (simple function) ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} g(z) d\mu_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(z) d\mu_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(z+b) d\mu_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} g(z+b) d\mu_\alpha\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.35 ทุก $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ จะมีลำดับของฟังก์ชันเชิงเดียว g_n ที่ $|f(z)|^2 = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\mu_\alpha &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} g_n(z) d\mu_\alpha \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} g_n(z+b) d\mu_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} |f(z+b)|^2 \, d\mu_\alpha\end{aligned}$$
□

ทฤษฎีบท 4.7 ถ้า $\varphi(z) = az+b$ เมื่อ $a,b \in \mathbb{C}$ และ $|a| \le 1$ แล้ว C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $C_\varphi(f)$ เป็นสมาชิกในปริภูมิ $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ สำหรับทุก $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ โดยพิจารณาในกรณีที่ $|a| = 0$ และ $0 < |a| \le 1$

ถ้า $|a| = 0$ จะได้ว่า $\varphi(z) = b$ ดังนั้น สำหรับแต่ละ $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|^2 &= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} |f \circ \varphi(z)|^2 e^{-|z|^\alpha} dz \\ &= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} |f(b)|^2 e^{-|z|^\alpha} dz \\ &= c_\alpha |f(b)|^2 \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^\alpha} dz \\ &= |f(b)|^2 < \infty\end{aligned}$$

กรณีสุดท้ายพิจารณา $0 < |a| \le 1$ จะได้ว่า $\varphi(z) = az+b$

ดังนั้น สำหรับทุก $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$

$$\left\|C_\varphi f\right\|^2 = c_\alpha \int_{\mathbb{C}} \left| f(az+b)\right|^2 e^{-|z|^\alpha}\, dz$$

$$= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} \left| f(az+b)\right|^2 e^{-\left|\frac{(az+b)-b}{a}\right|^\alpha}\, dz$$

จากบทตั้ง 2.32 จะได้ว่า $u = az+b$ มีจาโคเบียนคือ $|a|^2$ ทำให้ได้ว่า

$$\left\|C_\varphi f\right\|^2 = \frac{c_\alpha}{|a|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z)\right|^2 e^{-\left|\frac{z-b}{a}\right|^\alpha}\, dz$$

$$\le \frac{c_\alpha}{|a|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z)\right|^2 e^{-|z-b|^\alpha}\, dz$$

$$= \frac{c_\alpha}{|a|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z+b)\right|^2 e^{-|z|^\alpha}\, dz$$

จากบทตั้ง 4.6 จะได้ว่า

$$\left\|C_\varphi f\right\|^2 \le \frac{c_\alpha}{|a|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z)\right|^2 e^{-|z|^\alpha}\, dz$$

$$= \frac{1}{|a|^2}\| f\|^2 < \infty$$

นั่นคือ $C_\varphi(f) \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ สำหรับทุก $f \in HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$

ต่อไปจะแสดงว่า C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ โดยใช้ทฤษฎีบทกราฟปิด สมมติให้ $f_n \to f$ และ $C_\varphi(f_n) \to g$ บน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$

ดังนั้น

$$C_\varphi(f)(z) = f(az+b)$$

$$= c_\alpha \int_{\mathbb{C}} K(az+b,w)\, f(w) e^{-|w|^\alpha}\, dw$$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ เป็นการลู่เข้าแบบอ่อน (converges weakly) ใน $L^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$C_\varphi(f)(z) = \lim_{n\to\infty} c_\alpha \int_{\mathbb{C}} K(az+b,w)\, f_n(w) e^{-|w|^\alpha}\, dw$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(az+b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} C_\varphi(f_n)(z)$$

$$= g(z)$$

นั่นคือ C_φ มีกราฟปิด ดังนั้น C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ □

บทแทรก 4.8 ให้ $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก จะได้ว่า C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(z) = az+b$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{C}$ และ $|a|\le 1$

3. นอร์มของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป

จากทฤษฎีบท 4.7 แสดงให้เห็นว่าตัวดำเนินการประกอบมีขอบเขตบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป เมื่อกำหนดเงื่อนไขดังกล่าว ในส่วนนี้ผู้วิจัยจะศึกษานอร์มของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป โดยให้ $\varphi(z)=az+b$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{C}$ และ $|a|\le 1$ โดยแบ่งพิจารณาเป็นกรณีดังนี้

กรณี 1 $|a|=0$ จะได้ว่า $\varphi(z)=b$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi\| &= \sup_{\|f\|=1}\|C_\varphi(f)\| \\
&= \sup_{\|f\|=1}\|f\circ\varphi\| \\
&= \sup_{\|f\|=1}\left(c_\alpha\int_{\mathbb{C}}|f\circ\varphi(z)|^2 e^{-|z|^\alpha}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|f\|=1}\left(c_\alpha\int_{\mathbb{C}}|f(b)|^2 e^{-|z|^\alpha}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|f\|=1}|f(b)| \\
&\le \sup_{\|f\|=1}\|f\||b| \\
&= |b|
\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $|a|=0$ แล้ว $\|C_\varphi\|\le|b|$

กรณี 2 $0<|a|\le 1$ จะได้ว่า $\varphi(z)=az+b$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi\| &= \sup_{\|f\|=1}\|f\circ\varphi\| \\
&= \sup_{\|f\|=1}\left(c_\alpha\int_{\mathbb{C}}|f(az+b)|^2 e^{-|z|^\alpha}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|f\|=1}\left(c_\alpha\int_{\mathbb{C}}|f(az+b)|^2 e^{-\left|\frac{(az+b)-b}{a}\right|^\alpha}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sup_{\|f\|=1}\left(\frac{c_\alpha}{|a|^2}\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^2 e^{-|z-b|^\alpha}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|f\|=1}\left(\frac{c_\alpha}{|a|^2}\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^2 e^{-|z|^\alpha}dz\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\|f\|=1}\left(\frac{1}{|a|^2}\|f\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{|a|}$$

ดังนั้น ถ้า $0<|a|<1$ แล้ว $\|C_\varphi\| \le \dfrac{1}{|a|}$ □

บทที่ 5
สรุปและอภิปรายผล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้องค์ความรู้เกี่ยวกับตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปดังนี้

1. ผู้วิจัยได้ศึกษาปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ พบว่ามี

$$\left\{ z^n \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ และได้รีโปรดิวซิงเคอร์เนลคือ

$$K(z,w) = \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^n}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(n+1)\right)}$$

2. ผู้วิจัยได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีขอบเขตของตัวดำเนินการประกอบบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไป คือ ให้ $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันฮอลอมอร์ฟิก จะได้ว่า C_φ มีขอบเขตบน $HL^2(\mathbb{C},\mu_\alpha)$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(z)=az+b$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{C}$ และ $|a|\le 1$ และพบว่าตัวดำเนินการประกอบที่มีขอบเขตบนปริภูมิซีกัล-บาร์กแมนเชิงทั่วไปมีนอร์มคือ $\|C_\varphi\|\le|b|$ เมื่อ $|a|=0$ และ $\|C_\varphi\|\le\frac{1}{|a|}$ เมื่อ $0<|a|\le 1$

บรรณานุกรม

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). *แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3* (พิมพ์ครั้งที่ 2) กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.

Ablowitz, M.J., & Fokas, A.S. (2003). *Complex Variables Introduction and Applications* (2nd ed.). Newyork: Cambridge University Press.

Askey, R.A., & Roy, R. (2014). *Gamma Function. from NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Retrieved from http://dlmf.nist.gov/5.11.

Benchawan, S. (2000). *Certain of the domains of multiplication and differentiation operators on a generalized Segal-Bargmann space*. Bangkok: Chulalongkorn University.

Brian, C. (1998). *Holomorphic Methods in Analysis and Mathematical Physics*. California: University of California.

Brown, J.W., & Churchill, R.V. (2003). *Complex variables and applications* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.

Carswell, B., & MacCluer, B.D., & Schuster, A. (2003). Composition Operators on the Fock Space. *Acta Sci.Math.(Szeged), 69*(3-4), 871-887.

Krishna, B.A., & Soumendra, N.L. (2006). *Measure Theory and Probability Theory*. New York: Springer.

Olver, F.W. (1974). *Asymptotics and special functions*. California: Academic Press.

Promislow, S.D. (2008). *A First Course in Functional Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Somasundara, D. (2006). *A First Course in Functional Analysis*. India: Alpha Science International.

Ueki, S. (2006). Weighted Composition Operator on the Fock Space. *Amer.Math.Soc., 135*(5), 1405-1410.

Wicharn, L. (2542). *Notes on Functional Analysis*. Bangkok: Chulalongkorn University.