ศึกษาผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

อภิวัฒน์ คำภีระ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
มิถุนายน 2558

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ของ อภิวัฒน์ คำภีระ ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(ดร.รักพร ดอกจันทร์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ ภคพงศ์พันธุ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.อำพล ธรรมเจริญ)

.... กรรมการ
(ดร.รักพร ดอกจันทร์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ ภคพงศ์พันธุ์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารีรักษ์ ชัยวร)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพา

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกรัฐ ศรีสุข)

วันที่ ๓๐ เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2558

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณาจาก ดร.รักพร ดอกจันทร์ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ผศ.ดร.อภิสิทธิ์ ภคพงศ์พันธุ์ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำแนวทางที่ถูกต้อง ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารีรักษ์ ชัยวร อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัยณรงค์ ขันผนึก ที่กรุณาให้ความรู้ ให้คำปรึกษา ตรวจแก้ไข และวิจารณ์ผลงาน ทำให้งานวิจัยมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบ รวมทั้งให้คำแนะนำแก้ไขงานวิจัยให้มีคุณภาพ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และพี่ ๆ ทุกคนที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทิตาแด่บุพการี บูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

อภิวัฒน์ คำภีระ

55990015: สาขาวิชา: คณิตศาสตร์ศึกษา; วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา)

คำสำคัญ: ลำดับเพลล์/ ลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง/ เมทริกซ์เพลล์/ เมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

อภิวัฒน์ คำภีระ : ศึกษาผลบวกเพลล์และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง (PELL AND ASSOCIATED PELL SUMS BY USING PELL MATRIX AND ASSOCIATED MATRIX) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: รักพร ดอกจันทร์, Ph.D., อภิสิทธิ์ ภคพงศ์พันธุ์, Ph.D. 44 หน้า. ปี พ.ศ. 2558.

การวิจัยนี้จะกล่าวถึงการหาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่องโดยใช้เมทริกซ์เพลล์ $Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์ $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$ ซึ่งในบทความนี้ได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ คือ $\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}=\dfrac{P_k-P_{mn+m+k}+(-1)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ และผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง คือ $\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}=\dfrac{q_k-q_{mn+m+k}+(-1)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ และ $m,\ k\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $m\neq 0$

55990015: MAJOR: MATHEMATICS EDUCATION; M.Sc. (MATHEMATICS EDUCATION)
KEYWORDS: PELL SEQUENCE/ ASSOCIATED PELL SEQUENCE/ PELL MATRIX/ ASSOCIATED PELL MATRIX

ABHIWAT KAMBHEERA: PELL AND ASSOCIATED PELL SUMS BY USING PELL MATRIX AND ASSOCIATED MATRIX. ADVISORY COMMITTEE: RAKPORN DOKCHAN, Ph.D., APISIT PAKAPONGPUN, Ph.D. 44 P. 2015.

These research discusses Pell and Associated Pell sums via the Pell matrix $Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ and the associated Pell matrix $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. These matrices are the solutions of $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$. In the conclusion the finite sum of Pell sequence and associated Pell sequence are $\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}=\dfrac{P_k-P_{mn+m+k}+\left(-1\right)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ and $\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}=\dfrac{q_k-q_{mn+m+k}+\left(-1\right)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ respectively, when $n\in\mathbb{N}, m,k\in\mathbb{Z}$ and $m\neq 0$.

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของการวิจัย

การศึกษาผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง (Pell and Associated Pell Sums by using Pell Matrix and Associated Matrix) ได้รับแรงบัลดาลใจจากบทความทางคณิตศาสตร์ เรื่อง Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods (Bahar, 2010, pp. 99-107) ซึ่งการศึกษาผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่องนี้ ผู้วิจัยมีแนวคิดที่จะใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการสร้างเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S ขึ้นมาเพื่อเป็นพื้นฐานแสดงความสัมพันธ์ของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องในรูปเมทริกซ์ อีกทั้งยังใช้สำหรับการพิสูจน์ผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยการใช้เมทริกซ์ เพื่ออธิบายผลบวกจำกัดเพลล์ และเพลล์เกี่ยวเนื่อง และเพื่อพัฒนาการเรียนการสอนทฤษฎีจำนวนพีชคณิตเชิงเส้น รวมถึงการศึกษาต่อยอดการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นของนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป ดังนั้น การวิจัยนี้ จึงมีความสำคัญเป็นอย่างสูงในเชิงการวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ในระดับสากล

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีผลบวกจำกัดลำดับเพลล์ และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่องได้

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1) ศึกษาค่ารากที่น้อยที่สุดของสมการเพลล์ และสมการเมทริกซ์เพลล์

2) ศึกษาการหาผลบวกจำกัดเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยการใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

1.5 นิยามศัพท์เฉพาะ

1) เมทริกซ์เพลล์ หมายถึง เมทริกซ์ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ที่เป็นค่ารากของสมการเมทริกซ์เพลล์ $X^2 - 2X - I_n = \underline{0}$

2) เมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง หมายถึง เมทริกซ์ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ที่เป็นค่ารากของสมการเมทริกซ์เพลล์ $X^2 - 2X - I_n = \underline{0}$

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาวิจัย เรื่อง ศึกษาผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง (Pell and Associated Pell Sums by using Pell Matrix and Associated Matrix) มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องทราบคุณสมบัติของลำดับเพลล์ ลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง และคุณสมบัติของเมทริกซ์ ซึ่งผู้วิจัยได้รวบรวมคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องสำหรับการอธิบายความสัมพันธ์เชิงเหตุผล และการพิสูจน์ทฤษฎีบทในบทที่ 3 และผลการศึกษาค้นคว้าในบทที่ 4 ให้มีความสมบูรณ์ จึงจำเป็นที่ต้องนำความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องสำหรับอ้างอิงมากล่าวไว้เพื่อใช้ประกอบเหตุผลการพิสูจน์ ดังต่อไปนี้

2.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.1.1 ลำดับของจำนวนจริง คือ ฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันมีโดเมนเป็น $\{1,2,3,\ldots,n\}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ ใด ๆ จะเรียกลำดับนี้ว่า “ลำดับจำกัด” แต่ถ้า f มีโดเมนเป็น $\{1,2,3,\ldots\}$ จะเรียกลำดับนี้ว่า “ลำดับอนันต์”

2.2 ลำดับเพลล์และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง

จำนวนเพลล์ (Pell numbers) หรือ ลำดับเพลล์ (Pell sequence) คือ จำนวนต่าง ๆ ที่อยู่ในลำดับจำนวนเต็ม ซึ่งนิยามได้ ดังนี้

บทนิยาม 2.2.1 ให้ $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ เป็นลำดับโดย $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ และ $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ เรียก P_n ว่าพจน์ที่ n ของจำนวนเพลล์ ซึ่งแสดงได้ ดังนี้

ตาราง 2.2.1 แสดงลำดับเพลล์

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	…

บทนิยาม 2.2.2 กำหนดให้ P_{-n} คือ พจน์ที่ –n ของจำนวนเพลล์ นิยามโดย $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$

ตาราง 2.2.2 แสดงลำดับเพลล์พจน์ที่ –n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
P_{-n}	0	1	-2	5	-12	29	-70	169	-408	…

สำหรับจำนวนเพลล์เกี่ยวเนื่อง **(**Associated Pell numbers**)** หรือ ลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง (Associated Pell sequence) คือ จำนวนต่าง ๆ ที่อยู่ในลำดับจำนวนเต็ม ซึ่งนิยามได้ ดังนี้

บทนิยาม 2.2.3 ให้ $q_0, q_1, q_2, q_3, ..., q_n, ...$ เป็นลำดับโดยที่ $q_0 = 1$, $q_1 = 1$ และ $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ เรียก q_n ว่าเป็นพจน์ที่ n ของจำนวนเพลล์เกี่ยวเนื่องซึ่งแสดงได้ ดังนี้

ตาราง 2.2.3 แสดงลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
q_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	…

บทนิยาม 2.2.4 กำหนดให้ q_{-n} คือ พจน์ที่ –n ของจำนวนเพลล์เกี่ยวเนื่อง นิยามโดย $q_{-n} = (-1)^n q_n$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$

ตาราง 2.2.4 แสดงลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องพจน์ที่ –n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
q_{-n}	1	-1	3	-7	17	-41	99	-239	577	…

จากบทนิยาม 2.2.1 จะได้ว่าจำนวนเพลล์ในรูปเมทริกซ์ให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×1 และ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 จะเรียกระบบสมการเชิงเส้น $\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{bmatrix}$ ว่าระบบสมการจำนวนเพลล์ในรูปเมทริกซ์ จากการเท่ากันของเมทริกซ์จะได้ว่า $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ และ $P_{n-1} = P_{n-1} + 0$ หรือได้ว่าสมการเชิงเส้น $\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับรูปทั่วไปของสมการ $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ นั่นเอง

2.3 ตัวกำหนด

ตัวกำหนด หรือ ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของเมทริกซ์ใด ๆ นั้น เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัส และมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง สัญลักษณ์ที่ใช้แทนตัวกำหนดของเมทริกซ์ A จะเขียนแทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$

ถ้ากำหนดโดย A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดยที่ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ตัวกำหนดของเมทริกซ์ A คือ $\det(A) = ad - bc$

บทนิยาม 2.3.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n\times n$ จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$

บทนิยาม 2.3.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n\times n$ จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-singular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

บทนิยาม 2.3.3 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ถ้ามีเมทริกซ์ B ซึ่งทำให้ผลคูณ $AB = BA = I$ เราเรียก B ว่าเป็นตัวผกผัน (Inverse) (หรือเมทริกซ์ผกผัน) ของ A และถ้า A มีตัวผกผันเราใช้สัญลักษณ์ A^{-1} แทนตัวผกผันของ A (A^{-1} อ่านว่า A อินเวอร์ส) (อำพล ธรรมเจริญ, 2556, หน้า 18)

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับเท่ากัน ถ้า $AB = I$ แล้ว $BA = I$ (อำพล ธรรมเจริญ, 2556, หน้า 18)

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีตัวผกผัน n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า A^n มีตัวผกผัน และ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ (อำพล ธรรมเจริญ, 2556, หน้า 20)

2.4 เมทริกซ์คล้าย

บทนิยาม 2.4.1 กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ จะเรียกเป็นเมทริกซ์ A คล้าย (Similar Matrix) กับ เมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์ C ขนาด $n \times n$ และเป็นเมทริกซ์ไม่ใช่เอกฐานที่ทำให้ $B = C^{-1}AC$ หรือ $B = CAC^{-1}$ (ชัยณรงค์ ขันผนึก, 2546, หน้า 186)

จากบทนิยาม 2.4.1 ให้ $B = C^{-1}AC$ นำเมทริกซ์ C คูณทางด้านขวาจะได้

$$CB = CC^{-1}AC$$
$$CB = (CC^{-1})AC$$
$$CB = (I_n)AC$$
$$CB = AC$$

ดังนั้น จึงอาจกล่าวได้ว่าเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์กล้าย ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์ C เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-singular Matrix) ที่ทำให้ $CB = AC$

2.5 ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.5.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน V ถ้ามีสเกลาร์ $c \in F$ และเวกเตอร์ $\alpha \in V$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ที่ทำให้ $T(\alpha) = c\alpha$ เราเรียก c ว่า ค่าลักษณะเฉพาะของ T (characteristic value) และเรียก α ที่สอดคล้องกับสมการ $T(\alpha) = c\alpha$ ว่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T (characteristic vector) ที่สมนัยกับ c (อำพล ธรรมเจริญ, 2556, หน้า 271)

บทนิยาม 2.5.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ δ เป็นสเกลาร์ ที่ทำให้ $|A - \delta I_n| = 0$ แล้วจะเรียก $|A - \delta I_n| = 0$ ว่าสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของเมทริกซ์ A และเรียก $|A - \delta I_n|$ ว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomials) ของเมทริกซ์ A (ชัยณรงค์ ขันผนึก, 2546, หน้า 249)

ทฤษฎีบท 2.5.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ δ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า ถ้า δ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A คำตอบที่เป็นผลเฉลยไม่ชัดของระบบสมการ $(A - \delta I_n) = \underline{0}$ จะเป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับ δ (ชัยณรงค์ ขันผนึก, 2546, หน้า 250)

ทฤษฎีบท 2.5.2 ทฤษฎีบทของเคย์เลย์-แฮมิลตัน (Cayley-Hamilton Theorem) ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติ n และ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน V และ $A = [T]$ เป็นเมทริกซ์ของ T เทียบกับฐานลำดับมาตรฐาน และ $\chi(x) = \det(xI - A)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของ A จะได้ $\chi(T) = 0$ (อำพล ธรรมเจริญ, 2556, หน้า 284)

บทที่ 3
วิธีดำเนินการ

การศึกษาวิจัย เรื่อง ผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่องโดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง (Pell and Associated Pell Sums by using Pell Matrix and Associated Matrix) ผู้วิจัยจะศึกษาค้นคว้าการใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่าเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S โดยทั้งสองเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ค่ารากของสมการเพลล์ และได้สร้างบทตั้ง และบทแทรกที่สำคัญสำหรับงานวิจัย ดังต่อไปนี้

3.1 เมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S

บทตั้ง 3.1.1 กำหนดให้เมทริกซ์ $Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ แล้วค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q คือ $\delta_1=1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2=1-\sqrt{2}$

พิสูจน์ จากกำหนดให้ Q เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ $\delta\in\mathbb{R}$ แล้ว $|Q-\delta I|=0$ เป็นสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q

พิจารณา
$$\begin{aligned}|Q-\delta I| &= \begin{vmatrix}2-\delta & 1\\ 1 & -\delta\end{vmatrix}\\ &=(2-\delta)(-\delta)-1\\ &=\delta^2-2\delta-1\end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 2.5.2 จะได้ $|Q-\delta I|=0$

ดังนั้น $\delta^2-2\delta-1=0$

จะได้
$$\begin{aligned}\delta &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}\\ &=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2(1)}\\ \delta &=1\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

นั่นคือ ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q คือ $\delta_1=1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2=1-\sqrt{2}$ ■

จากบทนิยาม 2.5.1 ถ้า Q เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ X เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times 1$ ที่ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ และให้ $\delta \in \mathbb{R}$ แล้ว จะเรียกเมทริกซ์ X ว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q ก็ต่อเมื่อ มี δ ที่ทำให้ $QX = \delta X$

พิจารณา $(Q-D)X_0 = (Q-\delta I)X_0 = \theta$ เมื่อ กำหนดให้ $X_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $QX_0 = (\delta I_n)X_0 = \delta(I_n X_0) = \delta X_0$

นั่นคือ X_0 เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q และ δ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q ต่อไปจะเป็นการแสดงการหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะสองค่าข้างต้นในรูปเมทริกซ์ขนาด 2×1 ซึ่งจะเรียกเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่เป็นเมทริกซ์ดังกล่าวว่า เมทริกซ์เฉพาะ ดังทฤษฎีบท ต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1.2 กำหนดให้เมทริกซ์ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับกับ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ คือ $X_1 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับกับ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$ คือ $X_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

พิสูจน์ จาก $(Q-\delta I)X_i = \theta$

นั่นคือ $QX_i = (\delta I_2)X_i = \delta(I_2 X_i) = \delta X_i$

และจากกำหนดให้ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X_i = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ โดยนิยาม 2.5.1 จะได้ว่า

$$(Q-\delta I_2)X_i = \theta$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$

จะได้
$$\begin{bmatrix} 2-(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ และดำเนินการตามแถวมูลฐานเพื่อหาผลเฉลย ได้

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -\left(1+\sqrt{2}\right) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{1-\sqrt{2}}R_1} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

เขียนระบบสมการเมทริกซ์แต่งเติม $\begin{bmatrix} (1-\sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $(1-\sqrt{2})x+y=0$

ให้ $y\in\mathbb{R}$ จะได้ $x=\dfrac{-y}{\left(1-\sqrt{2}\right)}=\left(1+\sqrt{2}\right)y$

นั่นคือ ผลเฉลยคือ $\left(y\left(1+\sqrt{2}\right),y\right)=y\left(\left(1+\sqrt{2}\right),1\right)$ จึงได้ว่า เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $1+\sqrt{2}$ คือ $X=y\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ เมื่อ $y\in\mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่ศูนย์

หรือ $X=yX_1$ เมื่อ $X_1=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

แทนค่า $\delta_2=1-\sqrt{2}$

จะได้
$$\begin{bmatrix}2-(1-\sqrt{2}) & 1\\ 1 & -(1-\sqrt{2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ และดำเนินการตามแถวมูลฐานเพื่อหาผลเฉลย ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c}1+\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & -\left(1-\sqrt{2}\right) & 0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-\frac{1}{1+\sqrt{2}}R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1+\sqrt{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

เขียนระบบสมการเมทริกซ์แต่งเติม $\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

จะได้
$$(1+\sqrt{2})x+y=0$$

ให้ $y\in\mathbb{R}$ จะได้ $x=\left(1-\sqrt{2}\right)y$

นั่นคือ ผลเฉลยคือ $\left(y\left(1-\sqrt{2}\right),y\right)=y\left(\left(1-\sqrt{2}\right),1\right)$ จึงได้ว่า เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $1-\sqrt{2}$ คือ $X=y\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ เมื่อ $y\in\mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่ศูนย์

หรือ $X=yX_2$ เมื่อ $X_2=\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_1=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_1=1+\sqrt{2}$

และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_2=\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_2=1-\sqrt{2}$ ■

จากบทตั้ง 3.1.2 แสดงให้เห็นว่ามีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_1 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$ ซึ่งโดยบทนิยาม 2.4.1 ทำให้ได้ว่า $Q = PDP^{-1}$ เมื่อ เมทริกซ์ $P = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ดังนั้น $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

บทตั้ง 3.1.3 ให้เมทริกซ์ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

(1) ค่าลักษณะเฉพาะของ S คือ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$

(2) $X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และ

$X_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$

พิสูจน์ (1) ให้ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $|D-S|$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะ

พิจารณา
$$\begin{aligned} |D-S| &= \det\left(\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \delta-1 & -2 \\ -1 & \delta-1 \end{pmatrix} \\ &= (\delta-1)^2 - 2 \\ &= \delta^2 - 2\delta - 1 \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 3.1.1 จะได้ค่าลักษณะเฉพาะของ S คือ $\delta = 1 \pm \sqrt{2}$

นั่นคือ ค่าลักษณะเฉพาะของ S คือ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$

(2) กำหนดให้ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X_i = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; i = 1, 2$ โดยนิยาม 2.5.1 จะได้ว่า δ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ S และ X_i เป็นเมทริกซ์เฉพาะของเมทริกซ์ S ที่สมนัยกับ δ

พิจารณา $(S-\delta I_2)X_i = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \delta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

แทนค่า $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$

จะได้ $$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ และดำเนินการตามแถวมูลฐานเพื่อหาผลเฉลย ได้

$$\left[\begin{array}{cc:c} -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+\frac{1}{\sqrt{2}}R_1} \left[\begin{array}{cc:c} -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

เขียนระบบสมการเมทริกซ์แต่งเติมได้ $-\sqrt{2}x + 2y = 0$

ให้ $y \in \mathbb{R}$ จะได้ $x = \sqrt{2}y$

นั่นคือ ผลเฉลยของ $\left(y\left(\sqrt{2}\right), y\right) = y\left(\sqrt{2}, 1\right)$ จึงได้ว่า เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $1+\sqrt{2}$

คือ $X = y\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $y \in \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่ศูนย์

หรือ $X = yX_1$ เมื่อ $X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

แทนค่า $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$

จะได้ $$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ และดำเนินการตามแถวมูลฐานเพื่อหาผลเฉลย ได้

$$\left[\begin{array}{cc:c} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-\frac{1}{\sqrt{2}}R_1} \left[\begin{array}{cc:c} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

เขียนระบบสมการเมทริกซ์แต่งเติมได้ $\sqrt{2}x + 2y = 0$ ให้ $y \in \mathbb{R}$

จะได้ $x = -\sqrt{2}y$

นั่นคือ ผลเฉลยของ $\left(y\left(-\sqrt{2}\right), y\right) = y\left(-\sqrt{2}, 1\right)$ จึงได้ว่า เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ

$1-\sqrt{2}$ คือ $X = y\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $y \in \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่ศูนย์

หรือ $X = yX_2$ เมื่อ $X_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และ

เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$ ■

จากบทตั้ง 3.1.3 แสดงให้เห็นว่ามีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ จะสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$ ซึ่งโดยบทนิยาม 2.4.1 ทำให้ได้ว่า $S = PDP^{-1}$ เมื่อ $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ดังนั้น $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.2 สมการเมทริกซ์เพลล์

บทนิยาม 3.2.1 ให้ X เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ เรียกเมทริกซ์ X ว่าค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ ก็ต่อเมื่อ $X^2 = 2X + I_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$

บทตั้ง 3.2.1 ถ้า X เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ P_n คือ พจน์ที่ n ของจำนวนเพลล์ แล้ว $X^n = P_n X + P_{n-1} I_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ (Bahar, 2010, p. 99)

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยการใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทนประพจน์ $X^n = P_n X + P_{n-1} I_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

(i) เมื่อ $n = 0$ จะแสดงว่า $X^0 = P_0 X + P_{0-1} I_n$

จาก $I_n = I_n$

$I_n = P_{-1} I_n$

$I_n = \underline{0} + P_{-1} I_n$

จะได้ว่า $X^0 = P_0 X + P_{0-1} I_n$

ดังนั้น $P(0)$ เป็นจริง

เมื่อ $n = 1$ เพราะว่า $X^1 = X$

พิจารณา $P_1 X + P_{1-1} I_n = X + P_0 I_n = X$

นั่นคือ $X^1 = P_1 X + P_{1-1} I_n$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(ii) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง จะได้ $X^k = P_k X + P_{k-1} I_n$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ $X^{(k+1)} = P_{(k+1)} X + P_k I_n$ เป็นจริง

พิจารณา $X^{(k+1)} = X^k \cdot X$

ฉะนั้น $X^k \cdot X = (P_k X + P_{k-1} I_n) X$

$$= P_k X^2 + P_{k-1} I_n X$$
$$= P_k (2X + I_n) + P_{k-1} X$$
$$= P_k 2X + P_k I_n + P_{k-1} X$$
$$= (2P_k + P_{k-1}) X + P_k I_n$$
$$= P_{k+1} X + P_k I_n$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

จากข้อ (i) และ (ii) จะได้ว่า $X^n = P_n X + P_{n-1} I_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(-n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนี้

(i) เมื่อ $n = 1$

จาก $X^2 = 2X + I_n$ ดังนั้น $X^2 - 2X = I_n$ หรือ $X(X - 2I_n) = I_n$

โดย ทฤษฎีบท 2.3.1 จึงได้ว่า $X^{-1} = X - 2I_n$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ X

พิจารณา $X^{-1} = X - 2I_n$
$$= (1)X - (2)I_n$$
$$= P_{-1} X - P_{-2} I_n$$
$$= P_{-1} X - P_{-1-1} I_n$$

นั่นคือ $X^{-1} = P_{-1} X - P_{-1-1} I_n$

ดังนั้น $P(-1)$ เป็นจริง

(ii) สมมติให้ $P(-k)$ เป็นจริง จะได้ $X^{-k} = P_{-k} X + P_{-k-1} I_n$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

จะแสดงว่า $X^{-(k+1)} = P_{-(k+1)} X + P_{-k} I_n$ เป็นจริง

พิจารณา $X^{-(k+1)} = X^{-k} \cdot X^{-1}$
$$= (P_{-k} X + P_{-k-1} I_n)(X - 2I_n)$$
$$= P_{-k} X^2 - P_{-k} 2XI_n + P_{-k-1} I_n X - P_{-k-1} 2I_n^2$$
$$= P_{-k} (2X + I_n) - P_{-k} 2XI_n + P_{-k-1} XI_n - P_{-k-1} 2I_n^2$$
$$= P_{-k} 2X + P_{-k} I_n - P_{-k} 2X + P_{-k-1} XI_n - P_{-k-1} 2I_n$$
$$= P_{-k-1} X + (P_{-k} - 2P_{-k-1}) I_n$$
$$= P_{-(k+2)+1} X + P_{-(k+2)} I_n$$

ดังนั้น $P(-(k+1))$ เป็นจริง

จากข้อ (i) และ (ii) จะได้ว่า $X^{-n} = P_{-n} X + P_{-n-1} I_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

นั่นคือ $X^n = P_n X + P_{n-1} I_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ ■

3.3 ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์

สมการจำนวนเพลล์ในรูปเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} P_{k+2} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{k+1} \\ P_k \end{bmatrix}$ เท่ากับ $P_{k+2} = 2P_{k+1} + P_k$ และ $P_{k+1} = P_{k+1} + 0$ หรือได้ว่า สมการเชิงเส้น $\begin{bmatrix} P_{k+2} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{k+1} \\ P_k \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับรูปทั่วไปของสมการจำนวนเพลล์ $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ เมื่อ $n \geq 2$ ซึ่งสมการดังกล่าวนี้เรียกว่า "สมการเวียนเกิดของลำดับเพลล์" (Recursive equation of Pell sequence) และจากบทนิยาม 2.2.1 และบทนิยาม 2.2.3 ถ้าจำนวนจริง δ_1 และ δ_2 ซึ่ง $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$, $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$ โดยที่ P_n เป็นพจน์ทั่วไปของจำนวนเพลล์ และ q_n เป็นพจน์ทั่วไปของจำนวนเพลล์เกี่ยวเนื่อง จะเห็นได้ชัดเจนว่า $\delta_1 = 1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2 = 1-\sqrt{2}$ เป็นค่ารากสมการ $x^2 = 2x+1$ และเป็นค่ารากสมการ $x^{n+1} = 2x^n + x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น จึงเรียกค่าคงที่ δ_1 และ δ_2 ว่าเป็นค่ารากของสมการเพลล์นั่นเอง

ทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาบทตั้ง 3.1.1 ได้ว่าเมทริกซ์จัตุรัส X ใด ๆ ซึ่ง $X^2 = 2X + I$ และ $X^n = P_nX + P_{n-1}I$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ จะเรียก เมทริกซ์จัตุรัส X ว่าเป็นค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์เช่นเดียวกัน

บทแทรก 3.3.1 ถ้า $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ (Bahar, 2010, p. 100)

พิสูจน์ เป็นจริงโดยบทตั้ง 3.2.1 ■

บทแทรก 3.3.2 ถ้า $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $S^n = \begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ (Bahar, 2010, p. 100)

พิสูจน์ เป็นจริงโดยบทตั้ง 3.2.1 ■

จากบทแทรก 3.3.1 และบทแทรก 3.3.2 จะเห็นได้ชัดว่า $Q^2 = 2Q + I$, $Q^n = P_nQ + P_{n-1}I$ และ $S^2 = 2S + I$, $S^n = P_nS + P_{n-1}I$ จึงเรียกเมทริกซ์ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ว่าเป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ ซึ่งต่อไปจะเรียกเมทริกซ์ Q ว่าเมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์ S ว่าเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง และโดยอาศัยเมทริกซ์ค่ารากดังกล่าวนี้จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนเพลล์ และเพลล์เกี่ยวเนื่อง ดังทฤษฎีบทที่จะกล่าว ต่อไปนี้

บทตั้ง 3.3.1 ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และ $S=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ ซึ่ง $K = S+S^{-1}$ แล้ว $KA=\begin{bmatrix} 4c & 4d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$ (Bahar, 2010, p. 100)

พิสูจน์ ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ

จาก S เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์

ซึ่ง $S=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จึงได้ $S^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} K &= S+S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} KA &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4c & 4d \\ 2a & 2b \end{bmatrix} \end{aligned}$$
■

บทตั้ง 3.3.2 ให้ $S=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $S^n=\begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ และ P_n, q_n เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง ตามลำดับ แล้ว $q_n^2-2P_n^2=(-1)^n$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{Z}$ (Bahar, 2010, p. 100)

พิสูจน์ เนื่องจาก $S=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(S)=-1$

และ
$$\begin{aligned} \det(S^n) &= (\det S)^n \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

ดังนั้น $\det(S^n) = (-1)^n$ (1)

โดย**บทแทรก 3.3.2** ได้ว่า $S^n = \begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$

พิจารณา $\det(S^n) = q_n^2-2P_n^2$

ดังนั้น $\det(S^n) = q_n^2-2P_n^2$ (2)

จากสมการ $(1)=(2)$ จึงได้ว่า $q_n^2-2P_n^2=(-1)^n$ ■

บทตั้ง 3.3.3 ให้ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ และ P_n, q_n เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง ตามลำดับ แล้ว

1) $q_{n+m}=q_nq_m+2P_nP_m$ สำหรับทุก $n,m\in\mathbb{Z}$

2) $P_{n+m}=P_nq_m+q_nP_m$ สำหรับทุก $n,m\in\mathbb{Z}$

(Bahar, 2010, p. 100)

พิสูจน์ โดย**บทตั้ง 3.1.3** จะได้ว่า $S^{n+m}=\begin{bmatrix}q_{n+m} & 2P_{n+m}\\ P_{n+m} & q_{n+m}\end{bmatrix}$

จาก $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ และ $S^m=\begin{bmatrix}q_m & 2P_m\\ P_m & q_m\end{bmatrix}$

พิจารณา $S^nS^m=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_m & 2P_m\\ P_m & q_m\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}q_n\,q_m+2P_nP_m & 2(q_n\,P_m+P_nq_m)\\ P_n\,q_m+q_nP_m & 2P_nP_m+q_nq_m\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $S^nS^m=S^{n+m}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}q_{n+m} & 2P_{n+m}\\ P_{n+m} & q_{n+m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_n\,q_m+2P_nP_m & 2(q_n\,P_m+P_nq_m)\\ P_n\,q_m+q_nP_m & 2P_nP_m+q_nq_m\end{bmatrix}$

จากการเท่ากันของเมทริกซ์ จึงได้ว่า

$$q_{n+m}=q_n\,q_m+2P_nP_m \quad (1)$$

$$2P_{n+m}=2(q_n\,P_m+P_nq_m) \quad (2)$$

$$P_{n+m}=P_n\,q_m+q_nP_m \quad (3)$$

$$q_{n+m}=2P_nP_m+q_nq_m \quad (4)$$

จากสมการทั้ง 4 ทำให้ ได้ว่า $(1)=(4)$ จึงสรุปว่า $q_{n+m}=q_nq_m+2P_nP_m$ สำหรับทุก $n,m\in\mathbb{Z}$ และได้ว่า $(2)=(3)$ จึงสรุปว่า $P_{n+m}=P_nq_m+q_nP_m$ สำหรับทุก $n,m\in\mathbb{Z}$ ■

บทตั้ง 3.3.4 ให้ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ และ P_n, q_n เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง ตามลำดับ แล้ว

1) $(-1)^m q_{n-m}=q_n\,q_m-2P_nP_m$ สำหรับทุก $n,m\in\mathbb{Z}$

2) $(-1)^m P_{n-m}=P_n\,q_m-q_nP_m$ สำหรับทุก $n,m\in\mathbb{Z}$

(Bahar, 2010, p. 101)

พิสูจน์ จาก $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ และ $S^m=\begin{bmatrix}q_m & 2P_m\\ P_m & q_m\end{bmatrix}$

เนื่องจาก $S^{n-m} = S^{n}(S^{m})^{-1}$

จาก $(S^{m})^{-1} = (-1)^{m}\begin{bmatrix} q_m & -2P_m \\ -P_m & q_m \end{bmatrix}$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} S^{n}(S^{m})^{-1} &= S^{n}(-1)^{m}\begin{bmatrix} q_m & -2P_m \\ -P_m & q_m \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{m}\begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_m & -2P_m \\ -P_m & q_m \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{m}\begin{bmatrix} q_m q_n - 2P_m P_n & -2q_n P_m + 2P_n q_m \\ P_n q_m - q_n P_m & -2P_m P_n + q_m q_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เพราะว่า $S^{(n-m)} = S^{n}(S^{m})^{-1}$

ดังนั้น $S^{n-m} = (-1)^{m}\begin{bmatrix} q_m q_n - 2P_m P_n & 2(P_n q_m - q_n P_m) \\ P_n q_m - q_n P_m & q_m q_n - 2P_m P_n \end{bmatrix}$

และโดย**บทแทรก 3.3.2** จะได้ว่า $S^{(n-m)} = \begin{bmatrix} q_{n-m} & 2P_{n-m} \\ P_{n-m} & q_{n-m} \end{bmatrix}$

จึงได้ว่า $\begin{bmatrix} q_{n-m} & 2P_{n-m} \\ P_{n-m} & q_{n-m} \end{bmatrix} = (-1)^{m}\begin{bmatrix} q_m q_n - 2P_m P_n & 2(P_n q_m - q_n P_m) \\ P_n q_m - q_n P_m & q_m q_n - 2P_m P_n \end{bmatrix}$

จากการเท่ากันของเมทริกซ์ จึงได้ว่า

$$q_{n-m} = (-1)^{m}(q_m q_n - 2P_m P_n) \qquad (1)$$

$$2P_{n-m} = (-1)^{m}2(P_n q_m - q_n P_m) \qquad (2)$$

$$P_{n-m} = (-1)^{m}(P_n q_m - q_n P_m) \qquad (3)$$

$$q_{n-m} = (-1)^{m}(q_m q_n - 2P_m P_n) \qquad (4)$$

จากสมการทั้ง 4 ทำให้ได้ว่า $(1) = (4)$ และ $(2) = (4)$ โดยนำ $(-1)^{m}$ คูณตลอดสมการ จึงสรุปว่า

1) $(-1)^{m} q_{n-m} = q_m q_n - 2P_m P_n$ สำหรับทุก $n, m \in \mathbb{Z}$

2) $(-1)^{m} P_{n-m} = P_n q_m - q_n P_m$ สำหรับทุก $n, m \in \mathbb{Z}$ ■

บทที่ 4
ผลการวิจัย

การศึกษาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง ผู้วิจัยได้ใช้คุณสมบัติของเมทริกซ์ที่เป็นค่ารากของสมการเมทริกซ์เพลล์ โดยสร้างนิยาม และเอกลักษณ์ที่สำคัญไว้ในบทที่ 3 สำหรับเป็นพื้นฐานแล้วนั้น ในบทนี้ผู้วิจัยจะแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จะอธิบายความสัมพันธ์ของผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง ดังต่อไปนี้

4.1 ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง

ทฤษฎีบท 4.1.1 ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $m, k \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $m \neq 0$ แล้ว

$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{q_k - q_{mn+m+k} + (-1)^m (q_{mn+k} - q_{k-m})}{1+(-1)^m - 2q_m}$$

และ $$\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} = \frac{P_k - P_{mn+m+k} + (-1)^m (P_{mn+k} - P_{k-m})}{1+(-1)^m - 2q_m}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะแสดงว่า
$$\begin{aligned}
\det(I_2 - S^m) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_m & 2P_m \\ P_m & q_m \end{bmatrix}\right) \\
&= (1-q_m)^2 - (2P_m^2) \\
&= 1 - 2q_m - q_m^2 - 2P_m^2
\end{aligned}$$

โดย**บทตั้ง 3.3.2** จะได้ว่า $= 1 + (-1)^m - 2q_m$

กรณีที่ m เป็นจำนวนคู่

พิจารณา $m = 2r$ เมื่อ $r \in \mathbb{Z}$ จะได้ $1+(-1)^m - 2q_m = 1+(-1)^{2r} - 2q_{2r}$

โดย**บทนิยาม 2.2.3** และ**บทนิยาม 2.2.4** จะได้ว่า $1+(-1)^{2r} - 2q_{2r} \neq 0$ เพราะ $q_{2r} \neq 1$ สำหรับทุกค่า $r \in \mathbb{Z}$

กรณีที่ m เป็นจำนวนคี่

พิจารณา $m = 2r-1$ เมื่อ $r \in \mathbb{Z}$ จะได้ $1+(-1)^m - 2q_m = 1+(-1)^{2r-1} - 2q_{2r-1}$

โดย**บทนิยาม 2.2.3** และ**บทนิยาม 2.2.4** จะได้ว่า $1-1-2q_{2r-1} = -2q_{2r-1} \neq 0$ เพราะ $q_{2r-1} \neq 0$ สำหรับทุกค่า $r \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น สำหรับ $m\neq 0$ จะได้ $\det(I_2-S^m)\neq 0$

เพราะว่า $I_2-\left(S^m\right)^{n+1}=\left(I_2-S^m\right)\sum_{j=0}^{n}(S^m)^j$

ดังนั้น $(I_2-S^m)^{-1}(I_2-(S^m)^{n+1})S^k=\sum_{j=0}^{n}S^{mj+k}=\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k} & 2\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}\\ \sum_{j=0}^{n}P_{mj+k} & \sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}\end{bmatrix}$

กำหนดให้ $d=1+\left(-1\right)^m-2q_m$ และโดย**บทตั้ง 3.3.1** เรารู้ว่าเมทริกซ์ $K=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(I_2-S^m)^{-1} &= \frac{1}{d}\left(\begin{bmatrix}1-q_m & 2P_m\\ P_m & 1-q_m\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{d}\left((1-q_m)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{P_m}{2}\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{d}\left(\left(1-q_m\right)I_2+\frac{P_m}{2}K\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\left(I_2-S^m\right)^{-1}(S^k-S^{mn+m+k}) &= \frac{1}{d}\left(\left(1-q_m\right)I_2+\frac{P_m}{2}K\right)(S^k-S^{mn+m+k})\\
&= \frac{1}{d}\left((1-q_m)(S^k-S^{(mn+m+k)})+\frac{P_m}{2}K(S^k-S^{(mn+m+k)})\right)
\end{aligned}
$$

โดย**บทแทรก 3.3.1** และ**บทตั้ง 3.3.1** จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
K(S^k-S^{(mn+m+k)}) &= \begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}q_k & 2P_k\\ P_k & q_k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}q_{mn+m+k} & 2P_{mn+m+k}\\ P_{mn+m+k} & q_{mn+m+k}\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_k-q_{mn+m+k} & 2(P_k-P_{mn+m+k})\\ P_k-P_{mn+m+k} & q_k-q_{mn+m+k}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}4(P_k-P_{mn+m+k}) & 4(q_k-q_{mn+m+k})\\ 2(q_k-q_{mn+m+k}) & 4(P_k-P_{mn+m+k})\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
&(I-S^m)^{-1}(S^k-S^{mn+m+k})\\
&\qquad = \frac{1}{d}\left(\left(1-q_m\right)(S^k-S^{mn+m+k})+\frac{P_m}{2}K(S^k-S^{mn+m+k})\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{d}\left((1-q_m)\begin{bmatrix}(q_k - q_{mn+m+k}) & 2(P_k - P_{mn+m+k}) \\ (P_k - P_{mn+m+k}) & (q_k - q_{mn+m+k})\end{bmatrix} + \frac{P_m}{2}\begin{bmatrix}4(P_k - P_{mn+m+k}) & 4(q_k - q_{mn+m+k}) \\ 2(q_k - q_{mn+m+k}) & 4(P_k - P_{mn+m+k})\end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น
$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{1}{d}\left((1-q_m)(q_k - q_{mn+m+k}) + \frac{4P_m}{2}(P_k - P_{mn+m+k})\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left((1-q_m)(q_k - q_{mn+m+k}) + 2P_m(P_k - P_{mn+m+k})\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(q_k - q_{mn+m+k} - (q_m q_k - 2P_m P_k) + (q_m q_{mn+m+k} - 2P_m P_{mn+m+k})\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(q_k - q_{mn+m+k} - (-1)^m (q_{k-m}) + (-1)^m (q_{mn+m+k-m})\right)$$

โดย**บทตั้ง 3.3.4** จึงได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง เป็นดังสมการ

$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{q_k - q_{mn+m+k} + (-1)^m (q_{mn+k} - q_{k-m})}{1 + (-1)^m - 2q_m}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} = \frac{1}{d}\left((1-q_m)(P_k - P_{mn+m+k}) + \frac{2P_m}{2}(q_k - q_{mn+m+k})\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(P_k - P_{mn+m+k} - (q_m P_k - P_m q_k) + (q_m P_{mn+m+k} - P_m q_{mn+m+k})\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(P_k - P_{mn+m+k} - (-1)^m P_{k-m} + (-1)^m P_{mn+m+k-m}\right)$$

โดย**บทตั้ง 3.3.4** จึงได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ เป็นดังสมการ

$$\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} = \frac{P_k - P_{mn+m+k} + (-1)^m (P_{mn+k} - P_{k-m})}{1 + (-1)^m - 2q_m} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $n = 4,\ m = 2$ และ $k = 1$ จงแสดงว่า

$$\sum_{j=0}^{4} P_{(2)j+1} = \frac{P_1 - P_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (P_{(2)(4)+1} - P_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}}$$

แนวคิด จาก $\sum_{j=0}^{4} P_{(2)j+1} = P_{(2)(0)+1} + P_{(2)(1)+1} + P_{(2)(2)+1} + P_{(2)(3)+1} + P_{(2)(4)+1}$

$$= 1 + 5 + 29 + 169 + 1,085$$

นั่นคือ $$\sum_{j=0}^{4} P_{(2)j+1} = 1,289 \qquad (4.1)$$

และ $$\frac{P_1 - P_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (P_{(2)(4)+1} - P_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}} = \frac{P_1 - P_{11} + (P_9 - P_{-1})}{1 + 1 - 2(3)}$$

$$= \frac{-5,156}{-4}$$

นั่นคือ $$\frac{P_1 - P_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (P_{(2)(4)+1} - P_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}} = 1,289 \qquad (4.2)$$

พบว่า $(4.1) = (4.2)$

ดังนั้น $$\sum_{j=0}^{4} P_{(2)j+1} = \frac{P_1 - P_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (P_{(2)(4)+1} - P_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}} = 1,289$$ ■

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ $n = 4$, $m = 2$ และ $k = 1$ จงแสดงว่า

$$\sum_{j=0}^{4} q_{(2)j+1} = \frac{q_1 - q_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (q_{(2)(4)+1} - q_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}}$$

แนวคิด จาก $$\sum_{j=0}^{4} q_{(2)j+1} = q_{(2)(0)+1} + q_{(2)(1)+1} + q_{(2)(2)+1} + q_{(2)(3)+1} + q_{(2)(4)+1}$$

$$= 1 + 7 + 41 + 239 + 1,393$$

นั่นคือ $$\sum_{j=0}^{4} q_{(2)j+1} = 1,681 \qquad (4.3)$$

และ $$\frac{q_1 - q_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (q_{(2)(4)+1} - q_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}} = \frac{q_1 - q_{11} + (-1)^2 (q_9 - q_{-1})}{1 + (-1)^2 - 2(3)}$$

$$= \frac{-6,724}{-4}$$

นั่นคือ $$\frac{q_1 - q_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (q_{(2)(4)+1} - q_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}} = 1,681 \qquad (4.4)$$

พบว่า $(4.3) = (4.4)$

ดังนั้น $$\sum_{j=0}^{4} q_{(2)j+1} = \frac{q_1 - q_{(2)(4)+(2)+1} + (-1)^{(2)} (q_{(2)(4)+1} - q_{1-(2)})}{1 + (-1)^{(2)} - 2q_{(2)}} = 1,681$$ ■

บทที่ 5
สรุปและอภิปรายผล

การศึกษาค้นคว้า เรื่อง ผลบวกเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่องโดยการใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลเกี่ยวเนื่อง (Pell and Associated Pell Sums by using Pell Matrix and Associated Matrix) ซึ่งผู้วิจัยได้ผลการศึกษาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่องโดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่องจะสรุป และอภิปรายผลการศึกษาที่ค้นพบในงานวิจัย ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปการหาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่องโดยการใช้เมทริกซ์

กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $m, k \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $m \neq 0$ จะพบว่าผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง เป็นดังนี้

1) ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ คือ

$$\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} = \frac{P_k - P_{mn+m+k} + (-1)^m (P_{mn+k} - P_{k-m})}{1+(-1)^m - 2q_m}$$

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้ $n = 3$, $m = -3$ และ $k = 1$ จงแสดงว่า

$$\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} = \frac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}}$$

แนวคิด จาก

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} &= P_{(-3)(0)+1} + P_{(-3)(1)+1} + P_{(-3)(2)+1} + P_{(-3)(3)+1} \\ &= P_1 + P_{-2} + P_{-5} + P_{-8} \\ &= 1 + (-2) + 29 + (-408)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} = -380 \qquad (5.1)$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} &= \frac{P_1 - P_{-11} + (-1)(P_{-8} - P_4)}{1+(-1)-2(-7)} \\ &= \frac{1-5741-[(-408)-12]}{14} \\ &= \frac{-5320}{14}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\dfrac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)}(P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = -380 \qquad (5.2)$

พบว่า $(5.1) = (5.2)$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} = \dfrac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)}(P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = -380$ ■

2) ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง คือ

$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{q_k - q_{mn+m+k} + (-1)^{m}(q_{mn+k} - q_{k-m})}{1+(-1)^{m} - 2q_m}$$

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนดให้ $n=3$, $m=-3$ และ $k=1$ จงแสดงว่า

$$\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = \frac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)}(q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}}$$

แนวคิด จาก

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} &= q_{(-3)(0)+1} + q_{(-3)(1)+1} + q_{(-3)(2)+1} + q_{(-3)(3)+1}\\ &= q_1 + q_{-2} + q_{-5} + q_{-8}\\ &= 1 + 3 + (-41) + 577\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = 540 \qquad (5.3)$

และ

$$\begin{aligned}\frac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)}(q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} &= \frac{q_1 - q_{-11} + (-1)(q_{-8} - q_4)}{1+(-1) - 2(-7)}\\ &= \frac{1-(-8119)-(577-17)}{14}\\ &= \frac{7560}{14}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\dfrac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)}(q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = 540 \qquad (5.4)$

พบว่า $(5.3) = (5.4)$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = \dfrac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)}(q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = 540$ ■

5.2 อภิปรายผลการหาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยการใช้เมทริกซ์

จากการศึกษาค้นคว้าพบว่า สมการเพลล์ $x^2-2x-1=0$ มีจำนวนจริง $\delta_1=1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2=1-\sqrt{2}$ เป็นค่าราก และจากการขยายแนวคิดโดยใช้เมทริกซ์เพลล์ คือ เมทริกซ์ $Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง คือ เมทริกซ์ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ทำให้ได้ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S คือ $\delta_1=1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2=1-\sqrt{2}$ ด้วยเหตุนี้เองทำให้ผู้วิจัยพบว่ามีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะดังกล่าว จากนั้นผู้วิจัยได้ใช้คุณสมบัติของเมทริกซ์คล้ายจึงทำให้ได้เมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S ซึ่งเป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$ โดยอาศัยทฤษฎีบทเคย์เลย์ - แฮมิลตัน จะได้ว่าเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนสมการเมทริกซ์เพลล์ $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$ ซึ่ง ถ้า $\det(I_2-S^m)\neq 0$ ทำให้ได้ $(I_2-S^m)^{-1}(I_2-(S^m)^{n+1})S^k=\sum_{j=0}^{n}S^{mj+k}$ และโดยอาศัยเอกลักษณ์ของสมการเมทริกซ์เพลล์ทำให้ได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ $\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}=\dfrac{P_k-P_{mn+m+k}+(-1)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ และผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง $\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}=\dfrac{q_k-q_{mn+m+k}+(-1)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ ในที่สุด

5.3 ข้อเสนอแนะ

ควรมีการศึกษาความสัมพันธ์ในประเด็นอื่น ๆ ดังนี้

1) ศึกษาผลบวกจำกัดของลับดับเพลล์ และเพลล์ลูกัสโดยการใช้เมทริกซ์
2) ศึกษาเอกลักษณ์ของลำดับเพลล์ และเพลล์ลูกัส
3) ศึกษาผลบวกของจำนวนอื่น ๆ ที่มีลักษณะการเวียนเกิดเช่นเดียวกับลำดับเพลล์

บรรณานุกรม

ชัยณรงค์ ขันผนึก. (2546). *พีชคณิตเชิงเส้น*. เพชรบูรณ์ : เพชรบูรณ์ก๊อบปี้เซ็นเตอร์.

ชัยณรงค์ ขันผนึก. (2557). *ทฤษฎีจำนวน*. เพชรบูรณ์ : เพชรบูรณ์ก๊อบปี้เซ็นเตอร์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2556). *พีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์*. กรุงเทพฯ : พิทักษ์การพิมพ์.

Bahar Demirtürk. (2010). Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods. *International Mathematical Forum*, *5*, (3), 99 – 107.

Joseph Ercolano. (1979). Matrix Generators of Pell Sequences. *Fibonacci Quart*, *17*, (1), 71-77.

Philip Nowell. (2005). *nth-term-of-fibonacci-sequence*. Retrieved from http://mathproofs.blogspot.com.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

บทตั้ง 1 ถ้า X เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ $X^2 = 2X + I_n$ แล้ว $X^n = P_n X + P_{n-1} I_n$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

บทตั้ง 2 ถ้า $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

พิสูจน์ ให้ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะแสดงว่า $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

จาก $Q^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

และ $2Q + I = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $Q^2 = 2Q + I$

โดย**บทตั้ง 1** จะได้
$$\begin{aligned} Q^n &= P_n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + P_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2P_n & P_n \\ P_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{n-1} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$ ■

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $n = 3$ และ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $Q^3 = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}$ และ $Q^{-3} = \begin{bmatrix} P_{-2} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-4} \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากตาราง 2.2.1 แสดงลำดับเพลล์

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	…

1. จะแสดงว่า $Q^3 = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}$

   โดย**บทตั้ง 2** ได้ว่า $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

   จะได้ $Q^3 = \begin{bmatrix} P_{3+1} & P_3 \\ P_3 & P_{3-1} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=Q^3$$

จากตาราง 2.2.2 แสดงลำดับเพลล์พจน์ที่ $-n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
P_{-n}	0	1	-2	5	-12	29	-70	169	-408	…

2. จะแสดงว่า $Q^{-3}=\begin{bmatrix} P_{-2} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-4} \end{bmatrix}$

โดย**บทตั้ง 2** ได้ว่า $Q^n=\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n\in\mathbb{Z}$

จะได้ $Q^{-3}=\begin{bmatrix} P_{-3+1} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-3-1} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} P_{-2} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-4} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $Q^{-3}=\left(Q^3\right)^{-1}$

$$=\frac{1}{\left|Q^3\right|}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$=(-1)\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$$

$$=Q^{-3}$$ ■

บทตั้ง 3 ถ้า $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ แล้ว $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n\in\mathbb{Z}$

พิสูจน์ พิจารณา จะได้ว่า $S^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots(1)$$

และ $2S+I=2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots(2)$$

จาก $(1)=(2)$ นั่นคือ $S^2=2S+I$

โดย **บทตั้ง 1** ได้ว่าสมการ $S^n=P_nS+P_{(n-1)}I$

จะได้ $S^n=P_n\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}+P_{n-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}P_n & 2P_n\\ P_n & P_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{n-1} & 0\\ 0 & P_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P_n+P_{n-1} & 2P_n\\ P_n & P_n+P_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ สำหรับค่า $n\in\mathbb{Z}$ ■

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $n=5$ และ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $S^5=\begin{bmatrix}q_5 & 2P_5\\ P_5 & q_5\end{bmatrix}$ และ $S^{-5}=\begin{bmatrix}q_{-5} & 2P_{-5}\\ P_{-5} & q_{-5}\end{bmatrix}$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $S^5=\begin{bmatrix}q_5 & 2P_5\\ P_5 & q_5\end{bmatrix}$

จากตาราง 2.2.1 แสดงลำดับเพลล์

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	…

และตาราง 2.2.3 แสดงลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
q_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	…

โดย**บทตั้ง 3** จะได้ว่า $S^n = \begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

พิจารณา $S^5 = \begin{bmatrix} q_5 & 2P_5 \\ P_5 & q_5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 41 & 58 \\ 29 & 41 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^5$$

$$= S^5$$

2. จะแสดงว่า $S^{-5} = \begin{bmatrix} q_{-5} & 2P_{-5} \\ P_{-5} & q_{-5} \end{bmatrix}$

จากตาราง 2.2.2 แสดงลำดับเพลล์พจน์ที่ –n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
P_{-n}	0	1	-2	5	-12	29	-70	169	-408	…

และตาราง 2.2.4 แสดงลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องพจน์ที่ –n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
q_{-n}	1	-1	3	-7	17	-41	99	-239	577	…

โดย**บทตั้ง 3** จะได้ว่า $S^{-n} = \begin{bmatrix} q_{-n} & 2P_{-n} \\ P_{-n} & q_{-n} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

พิจารณา $S^{-5} = \begin{bmatrix} q_{-5} & 2P_{-5} \\ P_{-5} & q_{-5} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -41 & 58 \\ 29 & -41 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $S^{-5} = \left(S^5\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{\left|S^5\right|}\begin{bmatrix} 41 & -58 \\ -29 & 41 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)\begin{bmatrix} 41 & -58 \\ -29 & 41 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -41 & 58 \\ 29 & -41 \end{bmatrix}$$
$$= S^{-5}$$ ■

บทตั้ง 4 ให้ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $S^n = \begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$ แล้ว $q_n^2 - 2P_n^2 = (-1)^n$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $S^5 = \begin{bmatrix} q_5 & 2P_5 \\ P_5 & q_5 \end{bmatrix}$ และ $S^{-5} = \begin{bmatrix} q_{-5} & 2P_{-5} \\ P_{-5} & q_{-5} \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $q_5^2 - 2P_5^2 = (-1)^5$ และ $q_{-5}^2 - 2P_{-5}^2 = (-1)^{-5}$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $q_5^2 - 2P_5^2 = (-1)^5$

พิจารณา $q_5^2 - 2P_5^2 = (41)^2 - 2(29)^2$
$$= 1681 - 2(841)$$
$$= 1681 - 1682$$
$$= -1$$
$$= (-1)^5$$

2. จะแสดงว่า $q_{-5}^2 - 2P_{-5}^2 = (-1)^{-5}$

พิจารณา $q_{-5}^2 - 2P_{-5}^2 = (-41)^2 - 2(29)^2$
$$= 1681 - 2(841)$$
$$= 1681 - 1682$$
$$= \frac{1}{(-1)^5}$$
$$= (-1)^{-5}$$ ■

บทตั้ง 5 ให้ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $S^n = \begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$ แล้ว

1) $q_{n+m} = q_n q_m + 2P_n P_m$ สำหรับทุกค่า $n,m \in \mathbb{Z}$

2) $P_{n+m} = P_n q_m + q_n P_m$ สำหรับทุกค่า $n,m \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ P_n, q_n เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องจงแสดงว่า

1) $q_{3+5} = q_3 q_5 + 2P_3 P_5$

2) $P_{3+5} = P_3 q_5 + q_3 P_5$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $q_{3+5} = q_3 q_5 + 2P_3 P_5$

เพราะว่า $q_{3+5} = q_8$
$$= 577$$

พิจารณา $q_3q_5+2P_3P_5=(7)(41)+2(5)(29)$

$=287+290$

$=577$

นั่นคือ $q_{3+5}=q_3q_5+2P_3P_5$

2. จะแสดงว่า $P_{3+5}=P_3q_5+q_3P_5$

เพราะว่า $P_{3+5}=P_8$

$=408$

พิจารณา $P_3q_5+q_3P_5=(5)(41)+(7)(29)$

$=205+203$

$=408$

นั่นคือ $P_{3+5}=P_3q_5+q_3P_5$ ■

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ P_n, q_n เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องจงแสดงว่า

1) $q_{(-3)+(-5)}=q_{-3}q_{-5}+2P_{-3}P_{-5}$

2) $P_{(-3)+(-5)}=P_{-3}q_{-5}+q_{-3}P_{-5}$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $q_{(-3)+(-5)}=q_{-3}q_{-5}+2P_{-3}P_{-5}$

เพราะว่า $q_{(-3)+(-5)}=q_{-8}$

$=577$

พิจารณา $q_{-3}q_{-5}+2P_{-3}P_{-5}=(-7)(-41)+2(5)(29)$

$=287+290$

$=577$

นั่นคือ $q_{(-3)+(-5)}=q_{-3}q_{-5}+2P_{-3}P_{-5}$

2. จะแสดงว่า $P_{(-3)+(-5)}=P_{-3}q_{-5}+q_{-3}P_{-5}$

เพราะว่า $P_{(-3)+(-5)}=P_{-8}$

$=-408$

พิจารณา $P_{-3}q_{-5}+q_{-3}P_{-5}=(5)(-41)+(-7)(29)$

$=-205-203$

$=-408$

นั่นคือ $P_{(-3)+(-5)}=P_{-3}q_{-5}+q_{-3}P_{-5}$ ■

บทตั้ง 5 ให้ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ แล้ว

1) $(-1)^m q_{n-m}=q_n\,q_m-2P_nP_m$ สำหรับทุกค่า $n,m\in\mathbb{Z}$

2) $(-1)^m P_{n-m}=P_n\,q_m-q_nP_m$ สำหรับทุกค่า $n,m\in\mathbb{Z}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $P_n\,,q_n$ เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องจงแสดงว่า

1) $(-1)^5 q_{3-5}=q_3\,q_5-2P_3P_5$

2) $(-1)^5 P_{3-5}=P_3\,q_5-q_3P_5$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $(-1)^5 q_{3-5}=q_3\,q_5-2P_3P_5$

เพราะว่า $(-1)^5 q_{3-5}=-q_{-2}$

$=-3$

พิจารณา $q_3\,q_5-2P_3P_5=(7)(41)-2(5)(29)$

$=287-2(5)(29)$

$=-3$

นั่นคือ $(-1)^5 q_{3-5}=q_3\,q_5-2P_3P_5$

2. จะแสดงว่า $(-1)^5 P_{3-5}=P_3\,q_5-q_3P_5$

เพราะว่า $(-1)^5 P_{3-5}=-P_{-2}$

$=2$

พิจารณา $P_3\,q_5-q_3P_5=(5)(41)-(7)(29)$

$=205-203$

$=2$

นั่นคือ $(-1)^5 P_{3-5}=P_3\,q_5-q_3P_5$ ■

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $P_n\,,q_n$ เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเพลล์ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องจงแสดงว่า

1) $(-1)^{-5} q_{(-3)-(-5)}=q_{-3}\,q_{-5}-2P_{-3}P_{-5}$

2) $(-1)^{-5} P_{(-3)-(-5)}=P_{-3}\,q_{-5}-q_{-3}P_{-5}$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $(-1)^{-5} q_{(-3)-(-5)}=q_{-3}\,q_{-5}-2P_{-3}P_{-5}$

เพราะว่า $(-1)^{-5} q_{(-3)-(-5)}=-q_2$

$=-3$

พิจารณา $q_{-3}\,q_{-5}-2P_{-3}P_{-5}=(7)(41)-2(5)(29)$

$=287-2(5)(29)$

$=-3$

นั่นคือ $(-1)^{-5}q_{(-3)-(-5)}=q_{-3}\,q_{-5}-2P_{-3}P_{-5}$

2. จะแสดงว่า $(-1)^{-5}P_{(-3)-(-5)}=P_{-3}\,q_{-5}-q_{-3}P_{-5}$

เพราะว่า $(-1)^{-5}P_{(-3)-(-5)}=-P_2$

$=-2$

พิจารณา $P_{-3}\,q_{-5}-q_{-3}P_{-5}=(5)(-41)-(-7)(29)$

$=(-205)+203$

$=-2$

นั่นคือ $(-1)^{-5}P_{(-3)-(-5)}=P_{-3}\,q_{-5}-q_{-3}P_{-5}$ ■

ภาคผนวก ข

บทความ เรื่อง ผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์
และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

ผลบวกเพลล์ และผลบวกเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

Pell and Associated Pell Sums by using Pell Matrix and Associated Matrix

บทคัดย่อ

บทความนี้จะกล่าวถึงการหาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ และเพลล์เกี่ยวเนื่องโดยใช้เมทริกซ์เพลล์ $Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์ $X^2-2X-I_2=\underline{0}$ ซึ่งในบทความนี้ได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ คือ $\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}=\dfrac{P_k-P_{mn+m+k}+(-1)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ และผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง คือ $\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}=\dfrac{q_k-q_{mn+m+k}+(-1)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ และ $m,\ k\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $m\neq 0$

คำสำคัญ : ลำดับเพลล์, ลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง, เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

Abstract

These research discusses Pell and Associated Pell sums via the Pell matrix $Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ and the associated Pell matrix $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. These matrices are the solutions of $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$. In the conclusion the finite sum of Pell sequence and associated Pell sequence are $\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}=\dfrac{P_k-P_{mn+m+k}+(-1)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ and $\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}=\dfrac{q_k-q_{mn+m+k}+(-1)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$ respectively, when $n\in\mathbb{N}, m, k\in\mathbb{Z}$ and $m\neq 0$.

Key Word (s): Pell sequence, Associated Pell sequence, Pell Matrix and Associated Pell Matrix

บทนำ

ลำดับเพลล์ $\{P_n\}$ นิยามโดย $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$;$n \geq 2$ โดย $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง $\{q_n\}$ นิยามโดย $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$;$n \geq 2$ โดยที่ $q_0 = 1$, $q_1 = 1$ สำหรับลำดับเพลล์พจน์ที่ $-n$ นั้นจะอยู่ในรูป $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ และลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องพจน์ที่ $-n$ นั้นจะอยู่ในรูป $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่งในบทความนี้จะสร้างเมทริกซ์เพลล์ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์ $X^2 - 2X - I_2 = \underline{0}$ และทำให้ได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ และผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง

วิธีการวิจัย

จากจำนวนเพลล์ในรูปเมทริกซ์โดยกำหนดให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะเรียกระบบสมการเชิงเส้น $\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{bmatrix}$ ว่าระบบสมการจำนวนเพลล์ในรูปเมทริกซ์สอดคล้องกับรูปทั่วไปของสมการ $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$ จึงศึกษาทฤษฎีบทที่สำคัญ ดังนี้

บทตั้ง 1 ถ้า X เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ $X^2 = 2X + I$ แล้ว $X^n = P_n X + P_{n-1} I$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

บทแทรก 2 ให้ $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}$

บทแทรก 3 ถ้า $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $S^n = \begin{bmatrix} q_n & 2P_n \\ P_n & q_n \end{bmatrix}$ สำหรับ $\forall n \in \mathbb{Z}$

บทตั้ง 4 ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ ซึ่ง $K = S + S^{-1}$ แล้ว $KA = \begin{bmatrix} 4c & 4d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$

บทตั้ง 5 ให้ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $S^n=\begin{bmatrix}q_n & 2P_n\\ P_n & q_n\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ แล้ว สมการต่อไปนี้เป็นจริง

1) $q_n^2-2P_n^2=(-1)^n$ (5.1)

2) $q_{n+m}=2P_nP_m+q_nq_m$ (5.2)

3) $P_{n+m}=P_nq_m+q_nP_m$ (5.3)

4) $(-1)^m q_{n-m}=q_n\,q_m-2P_nP_m$ (5.4)

5) $(-1)^m P_{n-m}=P_n\,q_m-q_nP_m$ (5.5)

สำหรับทุกค่า $n,m\in\mathbb{Z}$

ผลการวิจัย

จากวิธีการดำเนินการวิจัยทำให้ได้คุณสมบัติของเมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง นำไปสู่การพิสูจน์ทฤษฎีบทผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์และเพลล์เกี่ยวเนื่อง โดยใช้เมทริกซ์เพลล์ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง ดังนี้

ทฤษฎีบท 6 ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $m,\ k\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $m\neq 0$ แล้ว

$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k}=\frac{q_k-q_{mn+m+k}+\left(-1\right)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$$

และ
$$\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k}=\frac{P_k-P_{mn+m+k}+\left(-1\right)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

เพราะว่า $I_2-\left(S^m\right)^{n+1}=\left(I_2-S^m\right)\sum_{j=0}^{n}(S^m)^j$ และ ถ้า $\det(I_2-S^m)\neq 0$

แล้ว $(I_2-S^m)^{-1}(I_2-(S^m)^{n+1})S^k=\sum_{j=0}^{n}S^{mj+k}=\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k} & 2\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}\\ \sum_{j=0}^{n}P_{mj+k} & \sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}\end{bmatrix}$

โดย**บทตั้ง 5 (5.1)** จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\det(I_2-S^m)&=(1-q_m)^2-(2P_m^2)\\&=1+\left(-1\right)^m-2q_m\end{aligned}$$

สำหรับ $m \neq 0$ กำหนดให้ $d = 1 + (-1)^m - 2q_m$ และโดย**บทตั้ง 4** เรารู้ว่าเมทริกซ์

$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $(I_2 - S^m)^{-1} = \frac{1}{d}\left(\begin{bmatrix} 1-q_m & 2P_m \\ P_m & 1-q_m \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{d}\left((1-q_m)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{P_m}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left[(1-q_m)I_2 + \frac{P_m}{2}K\right]$$

ดังนั้น $\left(I_2 - S^m\right)^{-1}(S^k - S^{mn+m+k}) = \frac{1}{d}\left[(1-q_m)I_2 + \frac{P_m}{2}K\right](S^k - S^{mn+m+k})$

$$= \frac{1}{d}\left[(1-q_m)(S^k - S^{(mn+m+k)}) + \frac{P_m}{2}K(S^k - S^{(mn+m+k)})\right]$$

โดย**บทแทรก 3** และ**บทตั้ง 4** จะได้ว่า

$$K(S^k - S^{(mn+m+k)}) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} P_k & q_k \\ q_k & P_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{mn+m+k} & q_{mn+m+k} \\ q_{mn+m+k} & P_{mn+m+k} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_k - q_{mn+m+k} & 2(P_k - P_{mn+m+k}) \\ P_k - P_{mn+m+k} & q_k - q_{mn+m+k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(P_k - P_{mn+m+k}) & 4(q_k - q_{mn+m+k}) \\ 2(q_k - q_{mn+m+k}) & 4(P_k - P_{mn+m+k}) \end{bmatrix}$$

พิจารณา

$$(I_2 - S^m)^{-1}(S^k - S^{mn+m+k}) = \frac{1}{d}\left[(1-q_m)(S^k - S^{mn+m+k}) + \frac{P_m}{2}K(S^k - S^{mn+m+k})\right]$$

$$= \frac{1}{d}\left((1-q_m)\begin{bmatrix} (q_k - q_{mn+m+k}) & 2(P_k - P_{mn+m+k}) \\ (P_k - P_{mn+m+k}) & (q_k - q_{mn+m+k}) \end{bmatrix} + \frac{P_m}{2}\begin{bmatrix} 4(P_k - P_{mn+m+k}) & 4(q_k - q_{mn+m+k}) \\ 2(q_k - q_{mn+m+k}) & 4(P_k - P_{mn+m+k}) \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{1}{d}\left[(1-q_m)(q_k - q_{mn+m+k}) + \frac{4P_m}{2}(P_k - P_{mn+m+k})\right]$

$$= \frac{1}{d}\left[(1-q_m)(q_k - q_{mn+m+k}) + 2P_m(P_k - P_{mn+m+k})\right]$$

$$= \frac{1}{d}\left[q_k - q_{mn+m+k} - (q_m q_k - 2P_m P_k) + (q_m q_{mn+m+k} - 2P_m P_{mn+m+k})\right]$$

$$= \frac{1}{d}\left[q_k - q_{mn+m+k} - (-1)^m(q_{k-m}) + (-1)^m(q_{mn+m+k-m})\right]$$

โดย**บทตั้ง 5 (5.4)** จึงได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่องดังสมการ

$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{q_k - q_{mn+m+k} + (-1)^m (q_{mn+k} - q_{k-m})}{1 + (-1)^m - 2q_m}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} &= \frac{1}{d}\left[(1-q_m)(P_k - P_{mn+m+k}) + \frac{2P_m}{2}(q_k - q_{mn+m+k})\right] \\ &= \frac{1}{d}\left[P_k - P_{mn+m+k} - q_m P_k - P_m q_k + q_m P_{mn+m+k} - P_m q_{mn+m+k}\right] \\ &= \frac{1}{d}\left[P_k - P_{mn+m+k} - (q_m P_k - P_m q_k) + (q_m P_{mn+m+k} - P_m q_{mn+m+k})\right] \\ &= \frac{1}{d}\left[P_k - P_{mn+m+k} - (-1)^m P_{k-m} + (-1)^m P_{mn+m+k-m}\right]\end{aligned}$$

โดย**บทตั้ง 5 (5.5)** จึงได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์ดังสมการ

$$\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} = \frac{P_k - P_{mn+m+k} + (-1)^m (P_{mn+k} - P_{k-m})}{1 + (-1)^m - 2q_m} \qquad \blacksquare$$

สรุปผลการวิจัย

กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $m, k \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $m \neq 0$ จะพบว่าผลบวกของจำนวนเพลล์และจำนวนเพลล์เกี่ยวเนื่อง เป็นดังนี้

1) ผลบวกจำนวนเพลล์ คือ $\sum_{j=0}^{n} P_{mj+k} = \frac{P_k - P_{mn+m+k} + (-1)^m (P_{mn+k} - P_{k-m})}{1 + (-1)^m - 2q_m}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $n = 3$, $m = -3$ และ $k = 1$ จะแสดงว่า

$$\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} = \frac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1 + (-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}}$$

แนวคิด จาก

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} &= P_{(-3)(0)+1} + P_{(-3)(1)+1} + P_{(-3)(2)+1} + P_{(-3)(3)+1} \\ &= P_1 + P_{-2} + P_{-5} + P_{-8} \\ &= 1 + (-2) + 29 + (-408)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} = -380 \qquad (5.1)$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1 + (-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} &= \frac{P_1 - P_{-11} + (-1)(P_{-8} - P_4)}{1 + (-1) - 2(-7)} \\ &= \frac{1 - 5741 - [(-408) - 12]}{14}\end{aligned}$$

$$= \frac{-5320}{14}$$

นั่นคือ $\dfrac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = -380 \qquad (5.2)$

พบว่า $(5.1) = (5.2)$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} P_{(-3)j+1} = \frac{P_1 - P_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (P_{(-3)(3)+1} - P_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = -380$ ■

2) ผลบวกจำนวนเพลล์เกี่ยวเนื่อง คือ

$$\sum_{j=0}^{n} q_{mj+k} = \frac{q_k - q_{mn+m+k} + (-1)^m (q_{mn+k} - q_{k-m})}{1+(-1)^m - 2q_m}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $n = 3$, $m = -3$ และ $k = 1$ จะแสดงว่า

$$\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = \frac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}}$$

แนวคิด จาก $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = q_{(-3)(0)+1} + q_{(-3)(1)+1} + q_{(-3)(2)+1} + q_{(-3)(3)+1}$

$$= q_1 + q_{-2} + q_{-5} + q_{-8}$$

$$= 1 + 3 + (-41) + 577$$

นั่นคือ $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = 540 \qquad (5.3)$

และ $\dfrac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = \dfrac{q_1 - q_{-11} + (-1)(q_{-8} - q_4)}{1+(-1) - 2(-7)}$

$$= \frac{1-(-8119)-(577-17)}{14}$$

$$= \frac{7560}{14}$$

นั่นคือ $\dfrac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = 540 \qquad (5.4)$

พบว่า $(5.3) = (5.4)$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} q_{(-3)j+1} = \frac{q_1 - q_{(-3)(3)+(-3)+1} + (-1)^{(-3)} (q_{(-3)(3)+1} - q_{1-(-3)})}{1+(-1)^{(-3)} - 2q_{(-3)}} = 540$ ■

อภิปรายผล

จากการศึกษาค้นคว้าพบว่า สมการเพลล์ $x^2-2x-1=0$ มีจำนวนจริง $\delta_1=1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2=1-\sqrt{2}$ เป็นค่าราก และจากการขยายแนวคิดโดยใช้เมทริกซ์เพลล์ คือ เมทริกซ์ $Q=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เพลล์เกี่ยวเนื่อง คือ เมทริกซ์ $S=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ ทำให้ได้ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S คือ $\delta_1=1+\sqrt{2}$ และ $\delta_2=1-\sqrt{2}$ ด้วยเหตุนี้เองทำให้ผู้วิจัยพบว่ามีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะดังกล่าว จากนั้นผู้วิจัยได้ใช้คุณสมบัติของ เมทริกซ์คล้ายจึงทำให้ได้เมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S ซึ่งเป็นเมทริกซ์ค่ารากสมการเมทริกซ์เพลล์ $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$ โดยอาศัยทฤษฎีบทเคย์เลย์ - แฮมิลตัน จะได้ว่าเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ S เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนสมการเมทริกซ์เพลล์ $X^2-2X-I_2=\underline{\mathbf{0}}$ ซึ่ง ถ้า $\det(I_2-S^m)\neq 0$ ทำให้ได้

$$(I_2-S^m)^{-1}(I_2-(S^m)^{n+1})S^k=\sum_{j=0}^{n}S^{mj+k}$$

และโดยอาศัยเอกลักษณ์ของสมการเมทริกซ์เพลล์ทำให้ได้ผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์

$$\sum_{j=0}^{n}P_{mj+k}=\frac{P_k-P_{mn+m+k}+\left(-1\right)^m(P_{mn+k}-P_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$$ และผลบวกจำกัดของลำดับเพลล์เกี่ยวเนื่อง

$$\sum_{j=0}^{n}q_{mj+k}=\frac{q_k-q_{mn+m+k}+\left(-1\right)^m(q_{mn+k}-q_{k-m})}{1+(-1)^m-2q_m}$$ ในที่สุด

ข้อเสนอแนะ

ควรมีการศึกษาความสัมพันธ์ในประเด็นอื่น ๆ ดังนี้

1) ศึกษาผลบวกจำกัดของลับดับเพลล์ และเพลล์ลูกัส โดยการใช้เมทริกซ์

2) ศึกษาเอกลักษณ์ของลำดับเพลล์ และเพลล์ลูกัส

ศึกษาผลบวกของจำนวนอื่น ๆ ที่มีลักษณะการเวียนเกิดเช่นเดียวกับลำดับเพลล์