วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

พีรเชษฐ์ บุญพัชรเจริญ

ดุษฎีนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปรัชญาดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
สิงหาคม 2558

คณะกรรมการควบคุมดุษฎีนิพนธ์และคณะกรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์ได้พิจารณาดุษฎีนิพนธ์ของ พีรเชษฐ์ บุญพัชรเจริญ ฉบับนี้แล้วเห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมดุษฎีนิพนธ์

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารีรักษ์ ชัยวร)

คณะกรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.อำพล ธรรมเจริญ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารีรักษ์ ชัยวร)

.... กรรมการ

(ดร. อรรณพ แก้วขาว)

.... กรรมการ

(ดร. บุญยงค์ ศรีพลแผ้ว)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับดุษฎีนิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยบูรพา

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกรัฐ ศรีสุข)

วันที่..14...เดือน...สิงหาคม.......พ.ศ. 2558

กิตติกรรมประกาศ

ดุษฎีนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อารีรักษ์ ชัยวร อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ที่กรุณาให้คำแนะนำแนวทางที่ถูกต้อง ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณีที่กรุณาให้ลางานมาศึกษาต่อ รวมทั้งอาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่คอยช่วยเหลือสนับสนุนในทุก ๆ ด้าน

ขอกราบขอบพระคุณคุณแม่ผกา แซ่กี้และน้อง ๆ ทุกคนที่ให้กำลังใจและสนับสนุนผู้วิจัยด้วยดีเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์ของดุษฎีนิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทีตาแด่บุพการี บูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

พีรเชษฐ์ บุญพัชรเจริญ

52810018: สาขาวิชา: คณิตศาสตร์; ปร.ด. (คณิตศาสตร์)

คำสำคัญ: วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ/ วิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง

พีรเชษฐ์ บุญพัชรเจริญ: วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ (INTUITIONISTIC FUZZY N-SPACES) คณะกรรมการควบคุมดุษฎีนิพนธ์: อารีรักษ์ ชัยวร, Ph.D. 53 หน้า. ปี พ.ศ. 2558.

งานวิจัยนี้แบ่งเป็นสองส่วน ส่วนแรกนำเสนอนิยามของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและตัวอย่างต่าง ๆ ส่วนที่สองนำเสนอนิยามของทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและสมบัติเชิงทอพอโลยต่าง ๆ เช่น บอลเปิด เซตเปิด การลู่เข้าของลำดับ ลำดับโคชี ทฤษฎีบทของแบร์และคันเตอร์ เป็นต้น

52810018: MAJOR: MATHEMATICS; Ph.D. (MATHEMATICS)
KEYWORDS: INTUITIONISTIC FUZZY N-SPACES/ FUZZY METRIC SPACES

PHEERACHATE BUNPATCHARALARURN: INTUITIONISTIC FUZZY N-SPACES. ADVISORY COMMITTEE: AREERAK CHAIWORN, Ph.D. 52 P. 2015.

This research is divided into two parts. The first part presents the definition of intuitionistic fuzzy n-space and some examples. The second part of this research presents the definition of topology of intuitionistic fuzzy n-space and some properties such as open balls, open sets, convergent series, Cauchy sequences, Baire's theorem and Cantor's theorem, etc.

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันทฤษฎีบทของเซตวิภัชนัย (Fuzzy set) ซึ่งนำเสนอโดยซาเดห์ (Zadeh) ในปี ค.ศ. 1965 ได้มีการพัฒนาและประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับวิทยาศาสตร์ เช่น การเคลื่อนไหวของประชากร (Population dynamics) การควบคุมความอลวน (Chaos control) โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์และระบบไดนามิคแบบไม่เชิงเส้น (Non-linear dynamics system) เป็นต้น

ทอพอโลยีวิภัชนัย (Fuzzy topology) เป็นอีกหนึ่งส่วนสำคัญซึ่งนักคณิตศาสตร์หลายคนได้นำไปศึกษาต่อโดยเฉพาะอย่างยิ่งในทฤษฎีบท $e^{(\infty)}$ ในควอนตัมฟิสิกส์

ในปีค.ศ. 1984 อตานาสซอฟ (Atanassov) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนเซต (Intuitionistic fuzzy set) ซึ่งได้มีการพัฒนาต่อมาจนกลายเป็นแนวคิดใหม่ ๆ มากมาย เช่นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง (Intuitionistic fuzzy metric spaces) วิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิเชิงทอพอโลยี (Intuitionistic fuzzy topology spaces) วิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมินอร์ม (Intuitionistic fuzzy normed spaces) วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน 2-ปริภูมินอร์ม (Intuitionistic fuzzy 2-normed spaces) เป็นต้น จนกระทั่งในปีค.ศ. 2009 เมอร์ซาลีน (Mursaleen) โลฮานี แดนนิช (Lohani Danish) และ โมเฮียดดีน (Mohiuddine) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน 2-ปริภูมิอิงระยะทาง (Intuitionistic fuzzy 2-metric spaces)

ในงานวิจัยนี้จะกำหนดนิยามของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ (Intuitionistic fuzzy n-spaces) พร้อมทั้งศึกษาสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. สร้างนิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ
2. สร้างนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ
3. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้จากการวิจัย

ได้ผลสรุปที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ดังนี้

1. สามารถนิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

2. สามารถนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

3. ทราบสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้นิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ และทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ พร้อมทั้งศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ เช่น บอลเปิด เซตเปิด การลู่เข้าของลำดับ ลำดับโคชีเป็นต้น

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางซึ่งประกอบไปด้วยเซต X ที่ไม่เป็นเซตว่างและฟังก์ชัน $d: X \times X \to \mathbb{R}$ มีสมบัติดังนี้ สำหรับ $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

เรียก d ว่าฟังก์ชันระยะทาง (Distance function) หรือเมตริก (Metric) บน X

บทนิยาม 2.2 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เราจะนิยามบอลเปิด (Open ball) โดย $B(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ โดยที่ $x_0 \in X$ เป็นจุดศูนย์กลางและ $r \in \mathbb{R}^+$ เป็นรัศมี

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $G \subset X$ เรียกเซต G ว่าเป็นเซตเปิด (Open set) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $x \in G$ จะมี $\varepsilon_x > 0$ ที่ทำให้ $B_d(x;\varepsilon_x) \subseteq G$

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $F \subset X$ เรียกเซต F ว่าเป็นเซตปิด (Closed set) ก็ต่อเมื่อ $X - F$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.5 ให้ x เป็นจำนวนจริงและ δ เป็นจำนวนจริงบวก เราเรียกเซต $(x-\delta, x+\delta)$ ว่าเป็นย่านใกล้เคียงระยะ δ ของ x (δ -neighborhood of x)

ใช้สัญลักษณ์ $N_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta)$ และเรียกเซต U ว่าเป็นย่านใกล้เคียงของ x ถ้า U มีสมบัติว่า $N_\delta(x) \subseteq U$ สำหรับ δ บางจำนวน

บทนิยาม 2.6 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $A, B \subseteq X$ แล้ว B เป็นย่านใกล้เคียง (Neighborhood) ของ A ก็ต่อเมื่อมีเซตเปิด G ซึ่ง $A \subseteq G \subseteq B$

บทนิยาม 2.7 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $A \subseteq X$ เรียก $p \in A$ ว่าเป็นจุดภายใน (Interior point) ของ A ก็ต่อเมื่อมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $B(p;\varepsilon) \subseteq A$ เขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ A ด้วย $\operatorname{int} A$

นั่นคือ $\operatorname{int} A = \{x \in A \mid B(x,\varepsilon) \subseteq A, \text{for some } \varepsilon > 0\}$

บทนิยาม 2.8 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $x \in X$

ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ และมี $y \in E$ โดยที่ $d(x,y) < \varepsilon$ แล้วจะกล่าวว่า x เป็นจุดของส่วนปกคลุม (Closure) ของเซต E ใช้สัญลักษณ์ $\bar{E}$ แทนเซตของจุดส่วนปกคลุมของ E ซึ่งชัดเจนว่า $E \subseteq \bar{E}$

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะได้ว่า

เซตย่อย F ของ X เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ $F = \bar{F}$

บทนิยาม 2.10 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะกล่าวว่า X แยกกันได้ (Separable) ถ้ามีเซต $D \subseteq X$ โดยที่ D เป็นเซตนับได้และ D เป็นเซตหนาแน่น (Dense set) ใน X กล่าวคือ $\bar{D} = X$

ทฤษฎีบท 2.11 ปริภูมิอิงระยะทาง X จะแยกกันได้ก็ต่อเมื่อมีวงศ์ซึ่งนับได้ $\{O_i\}$ ของเซตเปิดโดยที่สำหรับทุก ๆ เซตเปิด $O \subset X$ จะได้ $O = \bigcup_{O_i \subset O} O_i$

บทนิยาม 2.12 กำหนดให้ (X,d) และ (Y,d') เป็นปริภูมิอิงระยะทางจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f : X \to Y$ ต่อเนื่อง (Continuous) ที่จุด $x_0 \in X$ ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับ $x \in X$ ถ้า $d(x,x_0) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ และจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องบน X ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน X

บทนิยาม 2.13 กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) และ $x \in X$

ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ โดยที่ $d(x,x_n) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ แล้วจะกล่าวว่าลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ (Converge to) x

บทนิยาม 2.14 กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) และ $x \in X$

x เป็นจุดเกาะกลุ่ม (Cluster Point) ของ (x_n) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ และทุก ๆ $N \in \mathbb{N}$ จะมี $n \geq N$ โดยที่ $d(x, x_n) < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.15 กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) และ $x \in X$

ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ x แล้ว x เป็นจุดเกาะกลุ่มของ (x_n)

บทนิยาม 2.16 กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะกล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ โดยที่ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq N$ จะเรียกปริภูมิอิงระยะทาง X ว่า ปริภูมิอิงระยะทางสมบูรณ์ (Complete metric space) ถ้าทุก ๆ ลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.17 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ F เป็นเซตย่อยของ X

F เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ (x_n) เป็นลำดับใน F และถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ x แล้ว $x \in F$

บทนิยาม 2.18 ปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X,τ) หมายถึงเซต $X \neq \varnothing$ และวงศ์ τ ของเซตย่อย (ซึ่งจะเรียกว่าเซตเปิด) โดยมีสมบัติดังนี้

1. $X \in \tau$ และ $\varnothing \in \tau$
2. ถ้า $O_1 \in \tau$ และ $O_2 \in \tau$ แล้ว $O_1 \cap O_2 \in \tau$
3. ถ้า $O_\alpha \in \tau$ แล้ว $\bigcup_{\alpha} O_\alpha \in \tau$

เราจะเรียกวงศ์ τ ว่าทอพอโลยีบนเซต X

บทนิยาม 2.19 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ $F \subseteq X$ จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิด ถ้า $X - F$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.20 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ (x_n) เป็นลำดับใน X เราจะกล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $x \in X$ ถ้าสำหรับทุก ๆ เซตเปิด O ซึ่ง $x \in O$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ โดยที่ $x_n \in O$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$

บทนิยาม 2.21 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ (x_n) เป็นลำดับใน X เราจะกล่าวว่า $x \in X$ เป็นจุดเกาะกลุ่ม (Cluster Point) ของ (x_n) ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ และทุก ๆ $N \in \mathbb{N}$ จะมี $n \geq N$ โดยที่ $x_n \in O$

ทฤษฎีบท 2.22 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ (x_n) เป็นลำดับใน X ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ x แล้ว x เป็นจุดเกาะกลุ่ม (Cluster point) ของ (x_n)

บทนิยาม 2.23 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะกล่าวว่า x เป็นจุดเกาะกลุ่ม (Cluster point) ของเซต E ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $O \in \tau$ ซึ่งถ้า $x \in O$ แล้ว $O \cap E \neq \varnothing$

ทฤษฎีบท 2.24 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี เซต $A \subset X$ เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $x \in A$ จะมีเซตเปิด O โดยที่ $x \in O \subset A$

บทนิยาม 2.25 ให้ (X,τ) และ (Y,τ') เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งส่งจาก (X,τ) ไปยัง (Y,τ') เราสามารถกล่าวได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous function) ก็ต่อเมื่อถ้า $O \in \tau'$ แล้ว $f^{-1}[O] \in \tau$

บทนิยาม 2.26 ให้ X,Y เป็นเซตใด ๆ และให้ $f : X \to Y$ ถ้า A เป็นเซตย่อยของเซต X และ $g : A \to Y$ ซึ่งนิยามโดย $g(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$ แล้วฟังก์ชัน g นี้จะเรียกว่า การกำกัด (Restriction) ของ f ไปยังเซต A

บทนิยาม 2.27 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ A เป็นเซตย่อยของ X และให้ $\tau_A = \{A \cap O | O \in \tau\}$

จะเรียก τ_A ว่าทอพอโลยีที่สืบทอดจาก τ และเรียก (A,τ_A) ว่าปริภูมิย่อย (Subspace) ของปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X,τ)

ทฤษฎีบท 2.28 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนปริภูมิ X แล้วการกำกัด (Restriction) f_1 ของ f ไปยังปริภูมิย่อย A ของ X เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A นั่นคือ $f_1^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[O]$

ทฤษฎีบท 2.29 ให้ (X,τ) และ (Y,τ') เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี f ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งส่งจาก (X,τ) ไปยัง (Y,τ') ก็ต่อเมื่อภาพผกผัน (Inverse image) ของทุก ๆ เซตปิดเป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 2.30 ผลรวมและผลคูณของฟังก์ชันต่อเนื่องค่าจริง 2 ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.31 กำหนดให้ F เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปิดของปริภูมิเชิงทอพอโลยี X และ (x_n) เป็นลำดับใน F ถ้า x เป็นจุดเกาะกลุ่มของ (x_n) แล้ว $x \in F$

บทนิยาม 2.32 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและให้ B เป็นวงศ์ของเซตเปิดของปริภูมิเชิงทอพอโลยี X จะกล่าวว่า B เป็นฐาน (Bases) สำหรับทอพอโลยี τ ของ X ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ เซตเปิด $O \in \tau$ และทุก ๆ $x \in O$ จะมีเซต $B' \in B$ โดยที่ $x \in B' \subset O$

บทนิยาม 2.33 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและให้ $x \in X$

เซตย่อย N_x จะเป็นย่านใกล้เคียง (Neighborhood) ของ x ก็ต่อเมื่อมี $O \in \tau$ โดยที่ $x \in O \subseteq N_x$

บทนิยาม 2.34 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและให้ B_x เป็นวงศ์ของเซตเปิดโดยที่ทุก ๆ เซตเปิดใน B_x จะต้องมี x เป็นสมาชิกอยู่ภายใน

วงศ์ B_x เป็นฐานที่ x ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละเซตเปิด O ที่ซึ่ง $x \in O$ จะมี $B^* \in B_x$ โดยที่ $x \in B^* \subset O$

บทนิยาม 2.35 ปริภูมิเชิงทอพอโลยีจะกล่าวว่าเป็นสัจพจน์ลำดับที่หนึ่งของการนับได้ (The first axiom of countability) ถ้ามีฐานซึ่งนับได้ (Countable bases) ที่ทุก ๆ จุด (กล่าวคือสำหรับทุก ๆ $x \in X$ จะมีลำดับ $\{N_i\}_{i\in\Lambda}$ ของย่านใกล้เคียงของ x โดยที่สำหรับทุก ๆ ย่านใกล้เคียง N จะมี $i \in \Lambda$ ที่ซึ่ง $x \in N_i \subset N$)

ทฤษฎีบท 2.36 กำหนดให้ปริภูมิทอพอโลยี X เป็นสัจพจน์ลำดับที่หนึ่งของการนับได้ ดังนั้น $x \in \bar{E}$ ก็ต่อเมื่อมีลำดับจาก E ซึ่งลู่เข้าสู่ x

ทฤษฎีบท 2.37 กำหนดให้ปริภูมิเชิงทอพอโลยี X เป็นสัจพจน์ลำดับที่หนึ่งของการนับได้ ดังนั้น x เป็นจุดเกาะกลุ่มของ (x_n) ใน X ก็ต่อเมื่อ (x_n) มีลำดับย่อยซึ่งลู่เข้าสู่ x

บทนิยาม 2.38 ปริภูมิเชิงทอพอโลยีจะกล่าวว่าเป็นสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้ (The second axiom of countability) ถ้ามีฐานซึ่งนับได้ (Countable bases) บนทอพอโลยี

บทนิยาม 2.39 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ $x,y\in X$ โดยที่ $x\neq y$

ถ้ามีเซตเปิด $O_1,O_2\in \mathrm{T}$ โดยที่ $x\in O_1$ $y\in O_2$ และ $O_1\cap O_2\neq\varnothing$ แล้วเราจะกล่าวว่า ปริภูมิ X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff space)

บทนิยาม 2.40 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

ผลคูณตรง (Product) ของเซต A กับเซต B (แทนโดย $A\times B$) คือเซต $A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$

บทนิยาม 2.41 ให้ (X,τ_X) และ (Y,τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี

ทอพอโลยีของผลคูณตรงนิยามโดย $\tau_{X\times Y}=\{A\times B|A\in\tau_X,B\in\tau_Y\}$ และเรียก $(X\times Y,\tau_X\times\tau_Y)$ ว่าปริภูมิของผลคูณตรง (Product space)

ทฤษฎีบท 2.42 ผลคูณตรงของปริภูมิเฮาส์ดรอฟเป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

บทนิยาม 2.43 กำหนดให้ X เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี เราจะกล่าวว่า X แยกกันได้ (Separable) ถ้ามีเซต $D\subseteq X$ ซึ่งเป็นเซตจำกัดและ D เป็นเซตหนาแน่น (Dense set) นั่นคือ $\bar{D}=X$

บทนิยาม 2.44 กำหนดให้ X เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ $E\subseteq X$ เราจะกล่าวว่าเซต E เป็นเซตทุก ๆ ที่ไม่หนาแน่น (Nowhere dense) ถ้า $X-\bar{E}$ เป็นเซตหนาแน่น

บทนิยาม 2.45 ให้ X เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและให้ $\{U_\alpha\}$ เป็นวงศ์ของเซตเปิดบนปริภูมิเชิงทอพอโลยี ถ้า $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$ แล้วจะกล่าวว่า $\{U_\alpha\}$ เป็นเซตปกเปิด (Open covering set) ของ X

บทนิยาม 2.46 ให้ X เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี เราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิกระชับ (Compact space) ถ้าทุก ๆ เซตปกเปิด (Open cover) U ของ X มีเซตปกเปิดย่อยเป็นจำนวนจำกัด กล่าวคือ จะมี $\{O_1, O_2, \ldots, O_N\} \subset U$ โดยที่ $X = \bigcup_{i=1}^{N} O_i$

ทฤษฎีบท 2.47 ทุก ๆ เซตปิดซึ่งเป็นเซตย่อยในปริภูมิกระชับจะเป็นเซตกระชับและทุก ๆ เซตกระชับซึ่งเป็นเซตย่อยของปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟจะเป็นเซตปิด

บทนิยาม 2.48 ให้ X เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและให้ A_n เป็นเซตปิดยย่อยของ X โดยที่ $\operatorname{int}(A_n) = \varnothing$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \varnothing$ แล้วจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิแบร์ (Baire space)

นิยามที่เกี่ยวข้องกับวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง

บทนิยาม 2.49 การดำเนินการทวิภาค $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ จะกล่าวว่ามีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม (Continuous t-norm) ถ้ามีสมบัติดังนี้

(1) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่

(2) $*$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) $a*1 = a$ สำหรับทุก ๆ $a \in [0,1]$

(4) ถ้า $a \le c$ และ $b \le d$ แล้ว $a*b \le c*d$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c,d \in [0,1]$

การดำเนินการทวิภาค $\lozenge:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ จะกล่าวว่ามีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์ม (Continuous t-conorm) ถ้ามีสมบัติ (1), (2), (4) และ

(3) $a \lozenge 0 = a$ สำหรับทุก ๆ $a \in [0,1]$

บทนิยาม 2.47 กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม $\lozenge$ มีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์มและ M, N เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $X \times X \times (0,\infty)$ เราจะเรียก $(X, M, N, *, \lozenge)$ ว่าเป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ถ้า M, N ซึ่งมีสมบัติดังนี้ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$ และ $s, t > 0$

(1) $M(x, y; t) + N(x, y; t) \le 1$

(2) สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ โดยที่ $x \ne y$ จะได้ $M(x, y; t) > 0$

(3) ถ้า $M(x, y; t) = 1$ แล้ว $x = y$

(4) $M(x,y;t)=M(y,x;t)$

(5) $M(x,y;t)*M(y,z;s)\le M(x,z;s+t)$

(6) $M(x,y;\bullet):(0,\infty)\to(0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(7) สำหรับทุก ๆ $x,y\in X$ โดยที่ $x\neq y$ จะได้ $N(x,y;t)<1$

(8) ถ้า $N(x,y;t)=0$ แล้ว $x=y$

(9) $N(x,y;t)=N(y,x;t)$

(10) $N(x,y;t)\Diamond N(y,z;s)\ge N(x,z;s+t)$

(11) $N(x,y;\bullet):(0,\infty)\to(0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เราจะเรียก (M,N) ว่าเป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณเมตริกบน X และเขียนแทนโดย (M,N)

บทนิยาม 2.48 กำหนดให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง และให้ $r\in(0,1)$ $t>0$ และ $x\in X$ เราจะเรียกเซต

$$B(x,r;t)=\{y\in X \mid M(x,y;t)>1-r \text{ และ } N(x,y;t)<r\}$$

ว่าเป็นบอลเปิด (Open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ x และรัศมี r ณ จุด t

บทนิยาม 2.49 กำหนดให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ดังนั้นเซต $U\subset X$ จะกล่าวว่าเป็นเซตเปิด (Open set) ถ้าสำหรับทุก ๆ $x\in U$ เป็นจุดศูนย์กลางของบอลเปิดสำหรับบางบอลเปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ U เซตเปิดในวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง $(X,M,N,*,\Diamond)$ เขียนแทนโดย $\mathbb{U}$

บทนิยาม 2.50 กำหนดให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง เซตย่อย A ของ X จะกล่าวว่ามีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ($IF-$bounded) ถ้ามี $t>0$ และ $r\in(0,1)$ โดยที่ $M(x,y;t)>1-r$ และ $N(x,y;t)<r$ สำหรับทุก ๆ $x,y\in A$

บทนิยาม 2.51 กำหนดให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ลำดับ (x_n) ใน X จะกล่าวว่าเป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon>0$ และทุก ๆ $t>0$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่ $M(x_n,x_m;t)>1-\varepsilon$ และ $N(x_n,x_m;t)<\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n,m\ge n_0$

บทนิยาม 2.52 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ลำดับ (x_n) ใน X จะกล่าวว่าลู่เข้าสู่ $L \in X$ บนวิภัชนัยแบบสหัชญาณเมตริก (M, N) ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $M(x_n, L; t) > 1 - \varepsilon$ และ $N(x_n, L; t) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ และเขียนแทนโดย $x_n \xrightarrow{(M,N)} L$ ขณะที่ $n \to \infty$

บทนิยาม 2.53 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตที่นิยามโดย

$\tau_{(M,N)} = \{A \subset X \mid$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$ จะมี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่ $\mathrm{B(x,r;t)} \subset A\}$

ว่าเป็นทอพอโลยีบน $(X, M, N, *, \Diamond)$

บทนิยาม 2.54 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง เราจะกล่าวว่า $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ (Complete space) ถ้าทุก ๆ ลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้าบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณเมตริก (M, N)

บทนิยาม 2.55 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง เราจะเรียก $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ของเซตซึ่งไม่เป็นเซตว่างว่าวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ (Intuitionistic fuzzy diameter zero) ถ้าสำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $M(x, y; t) > 1 - r$ และ $N(x, y; t) < r$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in F_n$

บทนิยาม 2.56 กำหนดให้ X เป็นเซตซึ่งไม่เป็นเซตว่างและ $(Y, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ดังนั้นลำดับ (f_n) ของฟังก์ชันจาก X ไปยัง Y จะกล่าวว่าลู่เข้าเอกรูปหา (Converge uniformly to) ฟังก์ชัน f จาก X ไปยัง Y ถ้าสำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $M(f_n(x), f(x); t) > 1 - r$ และ $N(f_n(x), f(x),; t) < r$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ และสำหรับทุก ๆ $x \in X$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการนิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิเพื่อใช้ในการศึกษานั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาการวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. นิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ
3. ศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ซึ่งในแต่ละขั้นตอน ผู้วิจัยได้สร้างข้อความคาดการณ์ (conjecture) ที่คาดว่าจะเป็นจริง และหาแนวทางในการพิสูจน์เพื่อแสดงว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ซึ่งได้อ้างอิงให้เห็นบางส่วน

1. Fuzzy sets ของ Zadeh (1965)
2. Intuitionistic fuzzy set ของ Atanassov (1986)
3. Intuitionistic fuzzy metric space ของ Park (2004)
4. Intuitionistic fuzzy 2- metric space and its completion ของ Mursaleen, Lohani, and Mohiuddine (2009)
5. Baire's and Cantor's theorems in intuitionistic fuzzy metric space ของ Mursaleen and Lohani (2009)

งานวิจัยในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะใช้ในการศึกษาเซตวิภัชนัย วิภัชนัยแบบสหัชญาณบนเซต วิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน 2-ปริภูมิอิงระยะทางและศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน 2-ปริภูมิอิงระยะทาง รวมทั้งศึกษาแนวทางในการพิสูจน์ ทั้งนี้เพื่อผู้วิจัยจะใช้เป็นข้อคาดการณ์ในการศึกษาบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิต่อไป

2. นิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

จากการศึกษางานวิจัยเบื้องต้นเกี่ยวกับวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง แล้วพบว่าผู้วิจัยสามารถนิยามวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิได้ นอกจากนั้นยังได้ตัวอย่างนิยามของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

3. ศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ในการศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ ผู้วิจัยจะเริ่มพิจารณาจากสมบัติต่าง ๆ เช่น เซตเปิด ลำดับลู่เข้า ลำดับโคชี การมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง ทฤษฎีบทของแบร์และคันเตอร์ เป็นต้น

บทที่ 4
ผลการวิจัย

1. บทนิยามของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

บทนิยาม 4.1 (Park, 2004) การดำเนินการทวิภาค $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ จะกล่าวว่ามีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม (Continuous t-norm) ถ้ามีสมบัติดังนี้

(1) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่

(2) $*$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) $a*1=a$ สำหรับทุก ๆ $a\in[0,1]$

(4) ถ้า $a\le c$ และ $b\le d$ แล้ว $a*b\le c*d$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c,d\in[0,1]$

บทนิยาม 4.2 (Park, 2004) การดำเนินการทวิภาค $\Diamond:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ จะกล่าวว่ามีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์ม (Continuous t-conorm) ถ้ามีสมบัติดังนี้

(1) $\Diamond$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่

(2) $\Diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) $a\Diamond 0=a$ สำหรับทุก ๆ $a\in[0,1]$

(4) ถ้า $a\le c$ และ $b\le d$ แล้ว $a\Diamond b\le c\Diamond d$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c,d\in[0,1]$

ข้อสังเกต 4.3 (Park, 2004)

(1) สำหรับทุก ๆ $r_1,r_2\in(0,1)$ โดยที่ $r_1>r_2$ จะมี $r_3,r_4\in(0,1)$ ที่ซึ่ง $r_1*r_3\ge r_2$ และ $r_1\ge r_4\Diamond r_2$

(2) สำหรับทุก ๆ $r_5\in(0,1)$ จะมี $r_6,r_7\in(0,1)$ ที่ซึ่ง $r_6*r_6\ge r_5$ และ $r_7\Diamond r_7\le r_5$

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง ฟังก์ชันค่าจริง d บน X^{n+1} จะกล่าวว่าเป็น n-เมตริก (n-metric) บนเซต X ถ้ามีสมบัติดังนี้

(1) สำหรับทุก ๆ สมาชิก $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ซึ่งแตกต่างกันใน X จะมี $w\in X$ โดยที่ $d(x_1,x_2,\ldots,x_n,w)\ne 0$

(2) สำหรับแต่ละ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ จะได้ว่า $d(x_1,\ldots,x_{n+1})=0$ ก็ต่อเมื่อ $x_i=x_j$ สำหรับบาง $i\ne j$

(3) $d\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=d\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1}\right)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ เมื่อ $i,j=1,2,\ldots,n+1$

(4) $d\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)\le d(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d(x_1,w,x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d(x_1,\ldots,x_n,w)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1},w\in X$

เราจะเรียก $\left(X,d\right)$ ว่าเป็นปริภูมิ n-เมตริก

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้ $X=\mathbb{R}^n$ และ $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=\min\left\{\left\|x_i-x_j\right\| \mid i\ne j\right\}$ เมื่อ

$$\left\|x_i-x_j\right\|=\sqrt{\left(x_{i1}-x_{j1}\right)^2+\ldots+\left(x_{in}-x_{jn}\right)^2}$$

โดยที่ $x_{i1}=\left(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in}\right)$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n+1$ จะได้ว่า $\left(\mathbb{R}^n,d_n\right)$ เป็นปริภูมิ n-เมตริก

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$ โดยที่ $x_i\ne x_j$ สำหรับทุก ๆ $i\ne j$ และให้ $w\in\mathbb{R}^n$ โดยที่ $w\ne x_i$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n+1$ ดังนั้น $\left\|x_i-x_j\right\|\ne 0$ และ $\left\|x_i-w\right\|\ne 0$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n+1$ ดังนั้น $\min\left\{\left\|x_i-x_j\right\| \mid i\ne j\right\}\ne 0$ นั่นคือสำหรับทุก ๆ สมาชิก $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ซึ่งแตกต่างกันใน X จะมี $w\in X$ โดยที่ $d_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,w)\ne 0$

(2) สมมติให้ $x_i=x_j$ โดยที่ $i\ne j$ เห็นได้ชัดว่า $\left\|x_i-x_j\right\|=\left\|x_i-x_i\right\|=0$ นั่นคือ $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=0$ ในทางกลับกันถ้าให้ $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=0$ สำหรับทุก ๆ $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$ ดังนั้น $\min\left\{\left\|x_i-x_j\right\| \mid i\ne j\right\}=0$ นั่นคือ $\left\|x_i-x_j\right\|=0$ สำหรับบาง $i\ne j$ จะได้ว่า $x_i=x_j$ สำหรับบาง $i\ne j$

(3) เห็นได้ชัดว่า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=d_n\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1}\right)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in\mathbb{R}^n$ และทุก ๆ $i,j=1,2,\ldots,n+1$

(4) จะแสดงว่า

$$d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)\le d_n(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,w,\ x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,w)$$

สำหรับทุก ๆ $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in\mathbb{R}^n$

ถ้า $w=x_i$ สำหรับบาง i แล้วจะได้

$$\begin{aligned}
&d_n(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,w,\ x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,w)\\
&=d_n(x_i,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,x_i,\ x_3,\ldots,x_{n+1})\\
&\quad+\ldots+d_n\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}\right)+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,x_i)\\
&=0+0+\ldots+0+d_n\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}\right)+0+\ldots+0\\
&=d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

ถ้า $w \neq x_i$ สำหรับทุก ๆ i แล้วจะได้

ถ้า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{i-1},w,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}\right)=\|x_\alpha - w\|$ สำหรับบาง $\alpha = 1,2,...,n+1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&d_n(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,w,\ x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,w)\\
&\quad=\|w-x_\alpha\|+...+\|w-x_\alpha\|+d_n\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},w,x_{\alpha+1},\ldots,x_{n+1}\right)\\
&\qquad+\|w-x_\alpha\|+...+\|w-x_\alpha\|\\
&\quad=d_n\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},w,x_{\alpha+1},\ldots,x_{n+1}\right)+n\|w-x_\alpha\|
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
&d_n\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},w,x_{\alpha+1},\ldots,x_{n+1}\right)\\
&\quad=\min\left\{\|x_i-x_j\|,\|w-x_k\| \mid i\neq j,\exists k=1,2,...,n+1\right\}
\end{aligned}$$

ถ้า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},w,x_{\alpha+1},\ldots,x_{n+1}\right)=\|x_i-x_j\|$ สำหรับบาง $i\neq j$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&d_n(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,w,\ x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,w)\\
&\quad=\|x_i-x_j\|+n\|w-x_\alpha\|\\
&\quad\geq\|x_i-x_j\|\\
&\quad=d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

ถ้า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},w,x_{\alpha+1},\ldots,x_{n+1}\right)=\|w-x_k\|$ สำหรับบาง k

สมมติให้ $\|x_m-x_n\|=\min\left\{\|x_i-x_j\| \mid i\neq j\right\}$ สำหรับบาง $m\neq n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&d_n(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,w,\ x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,w)\\
&\quad=\|w-x_k\|+n\|w-x_\alpha\|\\
&\quad=\|w-x_k\|+\|w-x_\alpha\|+(n-1)\|w-x_\alpha\|\\
&\quad\geq\|x_k-x_\alpha\|+(n-1)\|w-x_\alpha\|\\
&\quad\geq\|x_m-x_n\|+(n-1)\|w-x_\alpha\|\\
&\quad\geq\|x_m-x_n\|\\
&\quad=d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

ถ้า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{i-1},w,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}\right)\neq\|x_\alpha - w\|$ สำหรับทุก ๆ $\alpha = 1,2,...,n+1$

จะได้ว่า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{i-1},w,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}\right)=\|x_i-x_j\|$ สำหรับบาง $i\neq j$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&d_n(w,x_2,\ldots,x_{n+1})+d_n(x_1,w,\ x_3,\ldots,x_{n+1})+\ldots+d_n(x_1,\ldots,x_n,w)\\
&\quad=\|x_i-x_j\|+...+\|x_i-x_j\|+d_n\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},w,x_{\alpha+1},\ldots,x_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$+\left\|x_i - x_j\right\| + \ldots + \left\|x_i - x_j\right\|$$
$$= d_n\left(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, w, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{n+1}\right) + n\left\|x_i - x_j\right\|$$
$$\geq \left\|x_i - x_j\right\|$$
$$= d_n\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)$$

ดังนั้น $d_n\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) \leq d_n(w, x_2, \ldots, x_{n+1}) + d_n(x_1, w, x_3, \ldots, x_{n+1})$
$+ \ldots + d_n(x_1, \ldots, x_n, w)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$

จาก (1) - (4) สรุปได้ว่า $\left(\mathbb{R}^n, d_n\right)$ เป็นปริภูมิ n-เมตริก #

บทนิยาม 4.6 กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์มและ M, N เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัย (Fuzzy set) บน $X^{n+1} \times (0, \infty)$ โดยที่ M, N มีสมบัติดังนี้ สำหรับทุก ๆ $x_1, \ldots, x_{n+1}, w \in X$ และ $t_1, \ldots, t_{n+1}, t > 0$

(1) $M\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; t\right) + N\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; t\right) \leq 1$

(2) ถ้า $x_i \neq x_j$ สำหรับทุก ๆ $i \neq j$ แล้ว $M\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; t\right) > 0$

(3) $M\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; t\right) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_j$ สำหรับบาง ๆ $i \neq j$

(4) $M\left(x_1, ..., x_{n+1}; t\right) = M\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_{n+1}; t\right)$ สำหรับทุก ๆ $i, j = 1, 2, ..., n+1$

(5) $M(x_1, ..., x_{n+1}; t_1 + ... + t_{n+1})$
$\geq M(w, x_2, ..., x_{n+1}; t_1) * M(x_1, w, x_3, ..., x_{n+1}; t_2) * ... * M(x_1, ..., x_n, w; t_{n+1})$

(6) $M\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\ ; \bullet\right) : \left(0, \infty\right) \to (0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(7) ถ้า $x_i \neq x_j$ สำหรับทุก ๆ $i \neq j$ แล้ว $N\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; t\right) < 1$

(8) $N\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; t\right) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_j$ สำหรับบาง ๆ $i \neq j$

(9) $N\left(x_1, ..., x_{n+1}; t\right) = N\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_{n+1}; t\right)$ สำหรับทุก ๆ $i, j = 1, 2, ..., n+1$

(10) $N(x_1, ..., x_{n+1}; t_1 + ... + t_{n+1})$
$\leq N(w, x_2, ..., x_{n+1}; t_1) \Diamond N(x_1, w, x_3, ..., x_{n+1}; t_2) \Diamond ... \Diamond N(x_1, ..., x_n, w\ ; t_{n+1})$

(11) $N\left(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}\ ; \bullet\right) : \left(0, \infty\right) \to \left[0, 1\right)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จะเรียก $\left(M, N\right)_n$ ว่า วิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก (Intuitionistic fuzzy n-metric) บน X และเรียก $\left(X, M, N, *, \Diamond\right)$ ว่าวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ (Intuitionistic fuzzy n-spaces)

บทตั้ง 4.7 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ จะได้ว่าฟังก์ชัน $M(x_1,\ldots,x_{n+1}\ ;\cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด และ $N(x_1,\ldots,x_{n+1}\ ;\cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มสำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$

พิสูจน์ กำหนดให้ $s,t>0$ โดยที่ $s>t$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
M(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};s) &= M\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t+\frac{n(s-t)}{n}\right)\\
&\geq M(x_1,\ldots,x_{n+1};t)*M\left(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_{n+1};\frac{s-t}{n}\right)\\
&\quad *\ldots*M\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1;\frac{s-t}{n}\right)\\
&= M(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)*1*\ldots*1\\
&= M(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $M(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};s)\geq M(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ และได้ว่า $M(x_1,\ldots,x_{n+1}\ ;\bullet)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
N(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};s) &= N\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t+\frac{n(s-t)}{n}\right)\\
&\leq N(x_1,\ldots,x_{n+1};t)\Diamond N\left(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_{n+1};\frac{s-t}{n}\right)\\
&\quad \Diamond\ldots\Diamond N\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1;\frac{s-t}{n}\right)\\
&= N(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)\Diamond 0\Diamond\ldots\Diamond 0\\
&= N(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $N(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};s)\leq N(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ และได้ว่า $N(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\ ;\bullet)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม #

ตัวอย่าง 4.8 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิ n-เมตริกและให้ $a*b=ab$ และ $a\Diamond b=\min\{a+b,1\}$ สำหรับทุก ๆ $a,b\in[0,1]$ และให้ M_d และ N_d เป็นเซตวิภัชนัยบน $X^{n+1}\times(0,\infty)$ ซึ่งนิยามโดย

$$M_d(x_1,\ldots,x_{n+1};t)=\frac{t}{t+d(x_1,\ldots,x_{n+1})} \quad \text{และ} \quad N_d(x_1,\ldots,x_{n+1};t)=\frac{d(x_1,\ldots,x_{n+1})}{t+d(x_1,\ldots,x_{n+1})}$$

โดยที่ $t>0$ และ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ ดังนั้น $(X,M_d,N_d,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน

n-ปริภูมิ และเราจะเรียก $\left(X,M_d,N_d,*,\Diamond\right)$ ว่าวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิกำหนดโดยวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก d

พิสูจน์ ก่อนอื่นจะแสดงว่า $*$ มีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม

(1) ให้ $a,b,c\in[0,1]$ จะได้ว่า $a*b=ab=ba=b*a$ และ $(a*b)*c=(ab)c=a(bc)=a*(b*c)$

(2) ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และให้ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=x$ และ $g(y)=y$ เมื่อ $x,y\in\mathbb{R}$ ดังนั้น $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ซึ่งนิยามโดย $x*y=f(x)g(y)=xy$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจาก $[0,1]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) จาก $a*1=a1=a$ สำหรับทุก ๆ $a\in[0,1]$

(4) ให้ $a\le c$ และ $b\le d$ จะได้ $a*b=ab\le \mathrm{cd}=c*d$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c,d\in[0,1]$

จาก (1) – (4) สรุปได้ว่า $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ มีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม

ต่อไปจะแสดงว่า $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์ม

(1) ให้ $a,b,c\in[0,1]$ จะได้ว่า $a\Diamond b=\min\{a+b,1\}=\min\{b+a,1\}=b\Diamond a$

และ
$$\begin{aligned}(a\Diamond b)\Diamond c&=\min\{a+b,1\}\Diamond c\\&=\min\{\min\{a+b,1\}+c,1\}\\&=\min\{(a+b)+c,1\}\\&=\min\{a+(b+c),1\}\\&=\min\{a+\min\{b+c,1\},1\}\\&=a\Diamond\min\{b+c,1\}\\&=a\Diamond(b\Diamond c)\end{aligned}$$

(2) ให้ $a,b\in[0,1]$ ต่อจากนั้นพิจารณา $a+b$ จะพบว่า

ถ้า $a+b\ge 1$ จะได้ $a\Diamond b=1$ นั่นคือ $\Diamond$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่

ดังนั้น $\Diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ถ้า $a+b<1$ จะได้ $a\Diamond b=a+b$

ถ้าให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และให้ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=x$ และ $g(y)=y$ เมื่อ $x,y\in\mathbb{R}$

ดังนั้น $\Diamond:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ซึ่งนิยามโดย $x\Diamond y=f(x)+g(y)=x+y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และจาก $[0,1]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}$

ดังนั้น $\Diamond:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) $a\Diamond 0=\min\{a+0,1\}=\min\{a,1\}=a$ สำหรับทุก ๆ $a\in[0,1]$

(4) ให้ $a,b,c,d\in[0,1]$ โดยที่ $a\le c$ และ $b\le d$

จะได้ $a\Diamond b=\min\{a+b,1\}$ และ $c\Diamond d=\min\{c+d,1\}$

ถ้า $a\Diamond b=1$ จะได้ $1\le a+b\le c+d$ ดังนั้น $c\Diamond d=1$

ถ้า $a\Diamond b=a+b$ จะได้ $a+b\le 1$

ถ้า $c\Diamond d=1$ จะได้ $a+b\le 1=c\Diamond d$

ถ้า $c\Diamond d=c+d$ จาก $a+b\le c+d$ จะได้ $a\Diamond b\le c\Diamond d$

จาก (1) – (4) สรุปได้ว่า $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์ม

ต่อไปจะแสดงว่า $(X,M_d,N_d,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ให้ $t>0$ และ $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in X$

(1) เห็นได้ชัดว่า

$$M_d(x_1,\ldots,x_{n+1};t)+N_d(x_1,\ldots,x_{n+1};t)$$

$$=\frac{t}{t+d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}+\frac{d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}{t+d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}=1$$

(2) สมมติให้ x_i เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X ดังนั้น $d_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})>0$

เนื่องจาก $t>0$ จะได้

$$M_d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)=\frac{t}{t+d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}>0$$

(3) $(\Rightarrow)$ สมมติให้ $M_d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)=1$ จะได้ $\dfrac{t}{t+d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}=1$

เพราะฉะนั้น $d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=0$ นั่นคือ $x_i=x_j$ สำหรับบาง $i\ne j$

$(\Leftarrow)$ สมมติให้ $x_i=x_j$ สำหรับบาง $i\ne j$ จะได้ว่า $d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=0$ และ

ได้อีกว่า $M_d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)=\dfrac{t}{t+0}=1$

(4) จาก $M_d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t)$

$$=\frac{t}{t+d(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}$$

$$=\frac{t}{t+d(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1})}$$

$$=M_d(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1};t)$$

เมื่อ $i,j=1,2,\ldots,n+1$

(5) ให้ $d_0 = d_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ และ $d_i = d_n(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, w, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, w \in X$ และทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n+1$

ลำดับต่อไปต้องการจะแสดงว่า

$$\left(\frac{t_1}{t_1 + d_1}\right)\left(\frac{t_2}{t_2 + d_2}\right)\cdots\left(\frac{t_{n+1}}{t_{n+1} + d_{n+1}}\right) \le \left(\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_{n+1}}{t_1 + t_2 + \ldots + t_{n+1} + d_0}\right)$$

ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า

$$t_1 t_2 \ldots t_n \sum_{i=1}^{n}(t_i + d_i) \le (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\prod_{i=1}^{n}(t_i + d_i) \text{ สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

ถ้า $n = 1$ จะได้ $t_1(t_1 + d_1) = t_1(t_1 + d_1)$

สมมติให้ $(t_1 t_2 \ldots t_k)\sum_{i=1}^{k}(t_i + d_i) \le (t_1 + t_2 + \ldots + t_k)\prod_{i=1}^{k}(t_i + d_i)$

พิจารณา $(t_1 t_2 \ldots t_{k+1})\sum_{i=1}^{k+1}(t_i + d_i)$

$$\begin{aligned}
&= (t_1 t_2 \ldots t_{k+1})\sum_{i=1}^{k}(t_i + d_i) + (t_1 t_2 \ldots t_{k+1})(t_{k+1} + d_{k+1}) \\
&\le t_{k+1}(t_1 + t_2 + \ldots + t_k)\prod_{i=1}^{k}(t_i + d_i) + (t_1 t_2 \ldots t_{k+1})(t_{k+1} + d_{k+1}) \\
&\le (t_{k+1} + d_{k+1})(t_1 + t_2 + \ldots + t_k)\prod_{i=1}^{k}(t_i + d_i) \\
&\qquad + (t_1 + d_1)(t_2 + d_2)\ldots(t_k + d_k)t_{k+1}(t_{k+1} + d_{k+1}) \\
&= (t_1 + t_2 + \ldots + t_k)\prod_{i=1}^{k+1}(t_i + d_i) + t_{k+1}\prod_{i=1}^{k+1}(t_i + d_i) \\
&= (t_1 + t_2 + \ldots + t_{k+1})\prod_{i=1}^{k+1}(t_i + d_i)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(t_1 t_2 \ldots t_n)\sum_{i=1}^{n}(t_i + d_i) \le (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\prod_{i=1}^{n}(t_i + d_i)$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

พิจารณา $\prod_{j=1}^{n+1} t_j \left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0\right) \le \prod_{j=1}^{n+1} t_j \left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i + \sum_{i=1}^{n+1} d_i\right)$

$$= \prod_{j=1}^{n+1} t_j \sum_{i=1}^{n+1}(t_i + d_i) \le \sum_{i=1}^{n+1} t_i \prod_{j=1}^{n+1}(t_j + d_j)$$

ดังนั้น $\dfrac{\prod_{j=1}^{n+1} t_j}{\prod_{j=1}^{n+1}(t_j + d_j)} = \prod_{j=1}^{n+1}\left(\dfrac{t_j}{t_j + d_j}\right) = \prod_{i=1}^{n+1}\left(\dfrac{t_i}{t_i + d_i}\right) \le \dfrac{\sum_{i=1}^{n+1} t_i}{\sum_{i=1}^{n+1}(t_i + d_i)}$

สรุปได้ว่า

$$M_d\left(w,x_2,\ldots,x_{n+1};t_1\right)*M_d\left(x_1,w,x_3,\ldots,x_{n+1};t_2\right)*\ldots*M_d\left(x_1,\ldots,x_n,w;t_{n+1}\right)$$
$$\leq M_d\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t_1+t_2+\ldots+t_{n+1}\right)$$

(6) ให้ $B\in\tau_{(0,1]}$ จะได้ $B=\left(a,b\right)\cap\left(0,1\right]$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{R}$ และ $a<b$

ถ้า $a\leq 0$ และ $b\geq 1$ จะได้ $B=\left(0,1\right]$ นั่นคือ $M_d^{-1}\left[B\right]=\left(0,\infty\right)\in\tau_{(0,\infty)}$

ถ้า $0<a<1$ และ $b\geq 1$ จะได้ $B=\left(a,1\right]$

นั่นคือ $M_d^{-1}\left[B\right]=(\dfrac{ad_0}{1-a},\infty)\in\tau_{(0,\infty)}$

ถ้า $a\leq 0$ และ $0<b<1$ จะได้ $B=\left(0,b\right)$

นั่นคือ $M_d^{-1}\left[B\right]=(0,\dfrac{bd_0}{1-b})\in\tau_{(0,\infty)}$

ถ้า $0<a<b<1$ จะได้ $B=\left(a,b\right)$ นั่นคือ $M_d^{-1}\left[B\right]=(\dfrac{ad_0}{1-a},\dfrac{bd_0}{1-b})\in\tau_{(0,\infty)}$

ดังนั้น $M_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};\bullet\right)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(7) สมมติให้ x_i เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X ดังนั้น $d\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)>0$ จาก $t>0$ จะได้ $N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t\right)=\dfrac{d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}<1$

(8) $\left(\Rightarrow\right)$ สมมติให้ $N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t\right)=0$ จะได้ $\dfrac{d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}=0$ เพราะฉะนั้น $d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)=0$ นั่นคือ $x_i=x_j$ สำหรับบาง $i\neq j$

$\left(\Leftarrow\right)$ สมมติให้ $x_i=x_j$ สำหรับบาง $i\neq j$ จะได้ว่า $d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)=0$ ดังนั้น $N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t\right)=\dfrac{0}{t+0}=0$

(9) จาก

$$\begin{aligned}
N_d&\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t\right)\\
&=\frac{d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}\\
&=\frac{d\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1}\right)}\\
&=N_d\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1};t\right)
\end{aligned}$$

เมื่อ $i,j=1,2,\ldots,n+1$

(10) ให้ $d_0=d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)$ และ $d_i=d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},w,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}\right)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1},w\in X$ และทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n+1$

จะแสดงว่า $\frac{d_0}{\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{t_i + d_i}\right) \le \frac{d_{n+1}}{t_{n+1} + d_{n+1}}$

พิจารณา $\frac{d_0}{\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{t_i + d_i}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} t_i}{\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0} - \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{t_i}{t_i + d_i}\right) \\
&= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} t_i}{\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0} - n + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) \\
&\le (1-n) - \prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) \\
&= (1-n) + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \frac{t_1}{t_1 + d_1} - \left(\frac{t_1}{t_1 + d_1}\right)\prod_{i=2}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) \\
&= (1-n) + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \left(\frac{t_1}{t_1 + d_1}\right)\left(1 - \prod_{i=2}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right)\right) \\
&\le (1-n) + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \left(1 - \prod_{i=2}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right)\right) \\
&= (2-n) + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) - \prod_{i=2}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) \\
&= (2-n) + \sum_{i=3}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \frac{t_2}{t_2 + d_2} - \left(\frac{t_2}{t_2 + d_2}\right)\prod_{i=3}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) \\
&= (2-n) + \sum_{i=3}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \left(\frac{t_2}{t_2 + d_2}\right)\left(1 - \prod_{i=3}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right)\right) \\
&\le (2-n) + \sum_{i=3}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) + \left(1 - \prod_{i=3}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right)\right) \\
&= (3-n) + \sum_{i=3}^{n}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right) - \prod_{i=3}^{n+1}\left(\frac{t_i}{t_i + d_i}\right)
\end{aligned}
$$

ดำเนินการตามกระบวนการต่อไปจะได้

$$
\begin{aligned}
&\frac{d_0}{\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{t_i + d_i}\right) \\
&\qquad \le (n-n) + \frac{t_n}{t_n + d_n} - \frac{t_n}{t_n + d_n}\left(\frac{t_{n+1}}{t_{n+1} + d_{n+1}}\right) \\
&\qquad = \frac{t_n}{t_n + d_n}\left(1 - \frac{t_{n+1}}{t_{n+1} + d_{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$\le \frac{d_{\mathrm{n}+1}}{t_{\mathrm{n}+1}+d_{\mathrm{n}+1}}$$

นั่นคือ $\dfrac{d_0}{\sum_{i=1}^{n+1} t_i + d_0} \le \sum_{i=1}^{n+1}\left(\dfrac{d_i}{t_i+d_i}\right)$

ดังนั้น $N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t_1+t_2+\ldots+t_{n+1}\right)$

$$\le N_d\left(w,x_2,\ldots,x_{n+1};t_1\right)\Diamond N_d\left(x_1,w,\ldots,x_{n+1};t_2\right)$$

$$\Diamond\ldots\Diamond N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,w;t_{n+1}\right)$$

(11) ให้ $B\in\tau_{[0,1)}$ จะได้ $B=(a,b)\cap[0,1)$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{R}$ และ $a<b$

ถ้า $a\le 0$ และ $b\ge 1$ จะได้ $B=[0,1)$ นั่นคือ $N_d^{-1}[B]=(0,\infty)\in\tau_{(0,\infty)}$

ถ้า $0<a<1$ และ $b\ge 1$ จะได้ $B=(a,1)$

นั่นคือ $N_d^{-1}[B]=(0,\dfrac{(1-a)d_0}{a})\in\tau_{(0,\infty)}$

ถ้า $a\le 0$ และ $0<b<1$ จะได้ $B=[0,b)$

นั่นคือ $N_d^{-1}[B]=(\dfrac{(1-b)d_0}{b},\infty)\in\tau_{(0,\infty)}$

ถ้า $0<a<b<1$ จะได้ $B=(a,b)$

นั่นคือ $N_d^{-1}[B]=(\dfrac{(1-b)d_0}{b},\dfrac{(1-a)d_0}{a})\in\mathrm{T}_{(0,\infty)}$

ดังนั้น $N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};\bullet\right)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จาก (1) – (11) จะได้ว่า $\left(X,M_d,N_d,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ #

2. ทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

บทนิยาม 4.9 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิ n-เมตริกและให้ $r\in\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าเซต

$$B_d(x,r)=\left\{y\in X\,\middle|\,d\left(x,y,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right)<r,\forall z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\in X\right\}$$

เป็นบอลเปิด (Open ball) เทียบกับ n-เมตริก d โดยมีจุดศูนย์กลางที่ x และรัศมี r

ตัวอย่าง 4.10 จากตัวอย่าง 4.5 เราได้แล้วว่า $\left(\mathbb{R}^n,d_n\right)$ เป็นปริภูมิ n-เมตริก ถ้าให้ $r=1$ และ $0=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ จะได้

$$B_{d_n}(0,1)=\left\{y\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,d\left(0,y,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right)<r,\forall z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{R}^n\right\}$$

พิจารณา $d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)$ พบว่า

$$d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)=\min\left\{\|0-y\|,\|0-z_p\|,\|y-z_q\|,\|z_s-z_t\|\,\middle|\,p,q,s,t=1,\ldots,n-1\right\}$$

ถ้า $d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)=\|0-y\|=\|y\|$ จะได้ว่า $\|y\|<1$ และ $B_d\left(0,1\right)=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \|y\|<1\right\}$

สมมติให้ $d_n\left(0,y,z_1,...,z_{n-1}\right)\neq\|0-y\|$ จะได้ว่ามี $z_p,z_q,z_s,z_t\in\mathbb{R}^n$ โดยที่ $\|0-z_p\|\geq 1$, $\|y-z_q\|\geq 1$ และ $\|z_s-z_t\|\geq 1$ เมื่อ $p,q,s,t=1,...,n-1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $d_n\left(0,y,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right)<1$ สำหรับทุก ๆ $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{R}^n$

ดังนั้น $B_{d_n}\left(0,1\right)=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \|y\|<1\right\}$ #

บทนิยาม 4.11 กำหนดให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ และให้ $r\in\left(0,1\right)$ $t>0$ และ $x\in X$ เราจะเรียกเซต

$$B\left(x,r;t\right)=\left\{y\in X \,\middle|\, M\left(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t\right)>1-r,N\left(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t\right)<r,\forall z_1,\ldots,z_{n-1}\in X\right\}$$

ว่าเป็นบอลเปิด (open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ x และรัศมี r ณ จุด t

ตัวอย่าง 4.12 ให้ $\left(\mathbb{R}^n,M_d,N_d,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิซึ่งกำหนดโดยวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก d_n และให้ $r=\frac{1}{2}$ $t=1$ และ $0=\left(0,0,\ldots,0\right)\in\mathbb{R}^n$ ดังนั้น

$$B_{d_n}\left(0,\frac{1}{2};1\right)=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, M_{d_n}\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:1\right)>\frac{1}{2},N_{d_n}\left(0,y,z_1\ldots,z_{n-1}:1\right)<\frac{1}{2},\forall z_1,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{R}^n\right\}$$

เนื่องจาก $M_{d_n}\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:1\right)=\dfrac{1}{1+d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)}>\dfrac{1}{2}$ จะได้ว่า $d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)<1$

และจาก $N_{d_n}\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:1\right)=\dfrac{d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)}{1+d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)}<\dfrac{1}{2}$ จะได้ $d_{\mathrm{n}}\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)<1$

จากตัวอย่าง 4.10 จะได้ $d_n\left(0,y,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)=\|y\|<1$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{R}^n$

ดังนั้น $B_{d_n}\left(0,\frac{1}{2};1\right)=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \|y\|<1\right\}$ #

บทนิยาม 4.13 กำหนดให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ เราจะนิยาม $\tau_{(M,N)_n}$ คือ $\tau_{(M,N)_n}=\left\{A\subseteq X \,\middle|\, \forall x\in A,\exists t>0,\exists r\in\left(0,1\right),B\left(x,r;t\right)\subseteq A\right\}$

ตัวอย่าง 4.14 ให้ $\left(\mathbb{R}^n, M_{d_n}, N_{d_n}, *, \Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิซึ่งกำหนดโดย d_n บน $\mathbb{R}^n$ จะได้ $\tau_{\left(M_{d_n}, N_{d_n}\right)_n} = \left\{A \subseteq \mathbb{R}^n \middle| \forall x \in A, \exists t > 0, \exists r \in (0,1), B_{d_n}(x,r;t) \subseteq A\right\}$

ทฤษฎีบท 4.15 จากบทนิยาม 4.13 จะได้ $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน $(X, M, N, *, \Diamond)$

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า $X \in \tau_{(M,N)_n}$ จาก $X \subseteq X$ ถ้าให้ $x \in X$ $t > 0$ $r \in (0,1)$ และ $y \in B(x,r;t)$ จากนิยามของบอลเปิดจะได้ $y \in X$ นั่นคือ $B(x,r;t) \subset X$ ดังนั้น $X \in \tau_{(M,N)_n}$ และเห็นได้ชัดว่า $\varnothing \in \tau_{(M,N)_n}$

(2) สมมติให้ $O_1, O_2 \in \tau_{(M,N)_n}$ จะได้ว่า $O_1, O_2 \subset X$ ดังนั้น $O_1 \cap O_2 \subset X$

ให้ $x \in O_1 \cap O_2$ จะได้ว่ามี $t_1, t_2 > 0$ และมี $r_1, r_2 \in (0,1)$ โดยที่ $B(x,r_1;t_1) \subseteq O_1$ และ $B(x,r_2;t_2) \subseteq O_2$ ดังนั้น $B(x,r_1;t_1) \cap B(x,r_2;t_2) \subseteq O_1 \cap O_2$ ต่อไปจะแสดงว่า $B(x,r_1;t_1) \cap B(x,r_2;t_2)$ เป็นเซตเปิด

ให้ $r = \min\{r_1, r_2\}$ และ $t = \min\{t_1, t_2\}$

พิจารณาบอลเปิด $B(x,r;t)$ ให้ $y \in B(x,r;t)$ เนื่องจาก M เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และ N เป็นฟังก์ชันไม่ลดจะได้ว่า

$M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t_1) \geq M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t) > 1-r \geq 1-r_1$ และ $M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t_2) \geq M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t) > 1-r \geq 1-r_2$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1} \in X$ และยังได้อีกว่า

$N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t_1) \leq N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t) < r \leq r_1$ และ $N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t_2) \leq N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1}:t) < r \leq r_2$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1} \in X$

ดังนั้น $y \in B(x,r_1;t_1) \cap B(x,r_2;t_2)$ และ $B(x,r;t) \subseteq B(x,r_1;t_1) \cap B(x,r_2;t_2)$ นั่นคือ $B(x,r_1;t_1) \cap B(x,r_2;t_2)$ เป็นเซตเปิดจึงสรุปได้ว่า $O_1 \cap O_2 \in \tau_{(M,N)_n}$

(3) ให้ $x \in \bigcup_{i\in\Lambda} O_i$ เมื่อ $O_i \in \tau_{(M,N)_n}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \Lambda$

จากสมมติฐานจะได้ว่ามี $j \in \Lambda$ ที่ซึ่ง $x \in O_j$

ดังนั้นจะมี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่ $B(x,r;t) \subset O_j$

นั่นคือ $B(x,r;t) \subset O_j \subset \bigcup_{i\in\Lambda} O_i$ ดังนั้น $\bigcup_{i\in\Lambda} O_i \in \tau_{(M,N)_n}$

จาก (1) – (3) สรุปได้ว่า $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน $(X, M, N, *, \Diamond)$ #

บทตั้ง 4.16 ถ้าให้ $r \in (0,1)$ จะได้ว่ามี $s_1, s_2 \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{s_1 * s_1 * \ldots * s_1}_{n\ terms} \geq r$ และ $\underbrace{s_2 \Diamond s_2 \Diamond \ldots \Diamond s_2}_{n\ terms} \leq r$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ ถ้า $n = 2$ จะได้ว่ามี $s_1 \in (0,1)$ โดยที่ $s_1 * s_1 \geq r$ สมมติให้มี $t \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{t * t * \ldots * t}_{k\ terms} \geq r$ จากข้อสังเกต 4.3 (1) จะมี $t' \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{t * t * \ldots * t}_{k\ terms} * t' \geq r$ ถ้าให้ $s_1 = max\{t, t'\}$ จะได้ว่า $\underbrace{s_1 * s_1 * \ldots * s_1}_{k+1\ terms} \geq \underbrace{t * t * \ldots * t}_{k\ terms} * t' \geq r$ สรุปได้ว่า มี $s_1 \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{s_1 * s_1 * \ldots * s_1}_{n\ terms} \geq r$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

ในทำนองเดียวกันจะมี $s_2 \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{s_2 \Diamond \ldots \Diamond s_2}_{n\ terms} \leq r$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ #

ทฤษฎีบท 4.17 สำหรับทุก ๆ บอลเปิด $B(x,r,t)$ จะเป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ให้ $B(x,r;t)$ เป็นบอลเปิดเมื่อ $r \in (0,1)$ และ $t > 0$

เลือก $r' < r$ และ $t' = t$ ถ้าให้ $y \in B(x,r';t')$ จะได้

$$M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1} : t) = M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1} : t') > 1 - r' > 1 - r$$

และ $N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1} : t) = N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1} : t') < 1 - r' < 1 - r$

สำหรับทุก ๆ $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in X$

ดังนั้น $y \in B(x,r;t)$

นั่นคือ $B(x,r';t') \subset B(x,r;t)$ จากนิยามสรุปได้ว่า $B(x,r,t)$ เป็นเซตเปิด #

ข้อสังเกต 4.18

(1) จากบทตั้ง 4.16 และทฤษฎีบท 4.17 จะได้ว่าสำหรับทุก ๆ วิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก $(M,N)_n$ บน X เราสามารถสร้างทอพอโลยี $\tau_{(M,N)_n}$ บน X ได้โดยที่มีฐานเป็นวงศ์ของเซตเปิดทั้งหมด

(2) เนื่องจาก $\left\{ B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \middle| n = 1, 2, \ldots \right\}$ เป็นฐานเฉพาะที่ (Local base) ที่จุด x ดังนั้น ทอพอโลยี $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นสัจพจน์ลำดับที่หนึ่งของการนับได้ (The first axiom of countability)

ทฤษฎีบท 4.19 สำหรับทุก ๆ วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิเป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

พิสูจน์ ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ x,y เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X $t>0$ และ $z_1',...,z_{n-1}' \in X$ โดยที่ $M(x,y,z_1',...,z_{n-1}';t) \neq 0$

ถ้าให้ $r_1 = M(x,y,z_1',...,z_{n-1}';t)$ และ $r_2 = M\left(x,y,z_1',...,z_{n-1}';\dfrac{t}{n+1}\right)$

แล้ว $1-r_1 \geq N(x,y,z_1',...,z_{n-1}';t)$ และ $1-r_2 \geq N(x,y,z_1',...,z_{n-1}';\dfrac{t}{n+1})$ ลำดับต่อไปให้ $r=\max\{r_1,1-r_1,r_2,1-r_2\}$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $r_0 \in (r,1)$ จะมี $r_3,r_4 \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{r_3 * \ldots * r_3}_{n+1\, terms} \geq r_0$ และ $\underbrace{(1-r_4)\Diamond\ldots\Diamond(1-r_4)}_{n+1\, terms} \leq (1-r_0)$

ให้ $r_5 = \max\{r_3,r_4\}$ พิจารณา $B\left(x,1-r_5;\dfrac{t}{n+1}\right)$ และ $B\left(y,1-r_5;\dfrac{t}{n+1}\right)$

สมมติให้ $w \in B\left(x,1-r_5;\dfrac{t}{n+1}\right) \cap B\left(y,1-r_5;\dfrac{t}{n+1}\right)$

ถ้า $w \neq x \neq y \neq z_i$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n-1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
r_1 &= M\left(x,y,z_1',...,z_{n-1}';t\right)\\
&\geq M\left(w,y,z_1',...,z_{n-1}';\frac{t}{n+1}\right) * M\left(x,w,z_1',...,z_{n-1}';\frac{t}{n+1}\right)\\
&\quad *M\left(x,y,w,z_2',...,z_{n-1}';\frac{t}{n+1}\right) * ... * M\left(x,y,z_1',...,z_{n-2}',w;\frac{t}{n+1}\right)\\
&> \underbrace{r_5 * \ldots * r_5}_{n+1\, terms}\\
&\geq \underbrace{r_3 * ... * r_3}_{n+1\, terms}\\
&\geq r_0 > r_1
\end{aligned}
$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ $r_2 < r_2$ ดังนั้น $r_1 > r_1$ และ $r_2 < r_2$ ซึ่งขัดแย้ง

ถ้า $w = z_i'$ สำหรับบาง $i=1,2,\ldots,n-1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
r_1 &= M\left(x,y,z_1',...,z_{n-1}'\ ;t\right)\\
&\geq M\left(x,y,z_1',...,z_{i-1}',w,z_{i+1}'...,z_{n-1}';\frac{t}{n+1}\right) * \underbrace{1 * ... * 1}_{n\, terms}\\
&> r_5 * \underbrace{1 * ... * 1}_{n\, terms}\\
&\geq \underbrace{r_3 * ... * r_3}_{n+1\, terms} \geq r_0 > r_1
\end{aligned}
$$

และในทำนองเดียวกัน $r_2 < r_2$ ซึ่งขัดแย้ง

ถ้า $w = x$ ดังนั้น $r_1 = M\left(x, y, z_1', \ldots, z_{n-1}'; t\right) \geq M\left(w, y, z_1', \ldots, z_{n-1}'; \dfrac{t}{n+1}\right) * \underbrace{1 * \ldots * 1}_{n\ terms}$

$$> r_5 * \underbrace{1 * \ldots * 1}_{n\ terms} \geq \underbrace{r_3 * \ldots * r_3}_{n+1\ terms} \geq r_0 > r_1$$

และได้ว่า $r_2 < r_2$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ #

บทนิยาม 4.20 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิ n-และให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะกล่าวว่า A มีขอบเขต (bounded) ถ้ามี $M \in \mathbb{R}^+$ ที่ซึ่ง $d(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \leq M$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in A$

ตัวอย่าง 4.21 ให้ $(\mathbb{R}^n, d_n)$ เป็นปริภูมิ n-เมตริกและให้เซต A คือ

$$A = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1), (1,\ldots,1)\}$$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ จะได้ $d_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{cases} 0, x_i = x_j\ \exists i, j = 1, 2, \ldots, n+1 \\ 1, x_i \neq x_j\ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n+1 \end{cases}$

ถ้าให้ $M = 1 \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $d_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \leq 1 = M$ สำหรับทุก ๆ $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ ดังนั้น A มีขอบเขต

บทนิยาม 4.22 ให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะกล่าวว่า A มีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ (IF_n -bounded) ก็ต่อเมื่อมี $t > 0$ และมี $r \in (0,1)$ ที่ซึ่ง $M(x_1, \ldots, x_{n+1}; t) > 1 - r$ และ $N(x_1, \ldots, x_{n+1}; t) < r$ สำหรับทุก ๆ $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$

ตัวอย่าง 4.23 จากวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(\mathbb{R}^n, M_d, N_d, *, \Diamond)$ และกำหนดให้ $A = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots (0,0,\ldots,1), (1,1,\ldots,1)\}$ ถ้าเลือก $t = 1$ และ $r = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

พิสูจน์ พิจารณา $d_n(x_1, \ldots, x_{n+1})$ สำหรับทุก ๆ $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$

ถ้า $x_i \neq x_j$ สำหรับทุก ๆ $i \neq j$ จะได้ว่า

$$d_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \min\left\{\left\|x_i - x_j\right\| \,\middle|\, i \neq j\right\} \leq 1$$

ดังนั้น $M_{d_n}(x_1, \ldots, x_{n+1}; 1) = \dfrac{1}{1 + d_n(x_1, \ldots, x_{n+1})} > \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}$

และ $N_{d_n}(x_1, \ldots, x_{n+1}; 1) = 1 - M_{d_n}(x_1, \ldots, x_{n+1}; 1) < 1 - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$

นั่นคือ A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ถ้า $x_i = x_j$ สำหรับบาง i จะได้ว่า $d_n\left(x_1,...,x_{n+1}\right)=0$ และได้ว่า

$$M_{d_n}\left(x_1,\ldots,x_{n+1}:1\right)=\frac{1}{1+0}>1-\frac{1}{2} \text{ และ } N_{d_n}\left(x_1,\ldots,x_{n+1}:1\right)=\frac{0}{1+0}<\frac{1}{2}$$

นั่นคือ A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ #

บทตั้ง 4.24 ให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิที่กำหนดโดย n-เมตริก d_n บน X จะได้เซตย่อย A ของ X มีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตมีขอบเขตบนปริภูมิ n-เมตริก (X,d_n)

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ สมมติให้ $A\subset X$ และ A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิจะได้ว่ามี $t>0$ และมี $r\in\left(0,1\right)$ ที่ซึ่ง

$$N\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)<r \text{ สำหรับทุก ๆ } x_1,\ldots,x_{n+1}\in A$$

เนื่องจาก $N_d\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)=\dfrac{d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)}<r$ จะได้ว่า $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)<\dfrac{rt}{1-r}$ แต่จาก $t>0$ และ $r\in\left(0,1\right)$ จะได้ $1-r\in\left(0,1\right)$ ดังนั้น $\dfrac{rt}{1-r}>0$

ถ้าให้ $N_0=\dfrac{rt}{1-r}$ ดังนั้น $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)<N_0$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in A$

นั่นคือ A เป็นเซตมีขอบเขตบน (X,d_n)

$(\Leftarrow)$ สมมติให้ $A\subset X$ และ A เป็นเซตมีขอบเขตบน (X,d_n) จะได้ว่ามี $N_0\in\mathbb{R}^+$ ที่ซึ่ง $d_n\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)\le N_0$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1}\in A$

ให้ $t>0$ และ $r=\dfrac{N_0}{t-N_0}$ ดังนั้น $r\in\left(0,1\right)$

พิจารณา
$$M_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};t\right)=\frac{t}{t+d_n\left(x_1,x_2,\ldots,,x_{n+1}\right)}$$
$$=1-\frac{d_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}$$
$$>1-\frac{N_0}{t-N_0}=1-r$$

และ
$$N_d\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}:t\right)=\frac{d_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}{t+d_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\right)}<\frac{N_0}{t-N_0}=r$$

ดังนั้น A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ #

บทแทรก 4.25 กำหนดให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ จะได้ว่าสำหรับทุก ๆ เซตย่อยกระชับ (Compact) เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตย่อยกระชับของ X เนื่องจาก $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ จะได้ว่าทุก ๆ เซตย่อยกระชับของปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟเป็นเซตปิด ดังนั้น A เป็นเซตปิด #

ทฤษฎีบท 4.26 สำหรับทุก ๆ เซตย่อยกระชับ A ของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(X,M,N,*,\Diamond)$ จะเป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

พิสูจน์ ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ A เป็นเซตย่อยกระชับของ X สมมติให้ $t>0$ และ $r\in(0,1)$

พิจารณาเซตปกเปิด $\{B(x,r;t) \mid x\in A\}$ ของ A พบว่ามี $x^i\in A$ โดยที่ $A\subset\bigcup_{i=1}^{m}B(x^i,r;t)$ เมื่อ $i=1,2,...,m$ ถ้ากำหนดให้ $y_j\in A$ สำหรับทุก ๆ $j=1,\ldots,n+1$ จะได้ว่า $y_j\in B(x^{k_j},r;t)$ สำหรับบาง k_j ดังนั้น

$$M\left(x^{k_j},y_j,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r \text{ และ } N\left(x^{k_j},y_j,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)<r$$

สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ลำดับต่อไปกำหนดให้ $\alpha=M\left(x^{k_1},...,x^{k_{n+1}};t\right)$ และ $\beta=N\left(x^{k_1},\ldots,x^{k_{n+1}};t\right)$

ถ้า $x^{k_i}\neq x^{k_j}$ สำหรับทุก ๆ $i\neq j$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&M\left(y_1,...,y_{n+1};(n^2+n+1)t\right)\\
&\quad\geq M\left(x^{k_1},y_2,...,y_{n+1};(n^2+1)t\right)*M\left(y_1,x^{k_1},y_3,...,y_{n+1};t\right)\\
&\qquad *...*M\left(y_1,...,y_n,x^{k_1}:t\right)\\
&\quad> M\left(x^{k_1},y_2,...,y_{n+1};(n^2+1)t\right)*\underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{n\ terms}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
&M\left(x^{k_1},y_2,...,y_{n+1};(n^2+1)t\right)\\
&\quad\geq M\left(x^{k_2},y_2,...,y_{n+1};t\right)*M\left(x^{k_1},x^{k_2},y_3,...,y_{n+1};(n^2-n+1)t\right)\\
&\qquad *...*M\left(x^{k_1},y_2,...,y_n,x^{k_2};t\right)\\
&\quad> M\left(x^{k_1},x^{k_2},y_3,...,y_{n+1};(n^2-n+1)t\right)*\underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{n\ terms}
\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}
&M\left(x^{k_1},x^{k_2},y_3,...,y_{n+1};(n^2-n+1)t\right)\\
&\quad\geq M\left(x^{k_3},x^{k_2},y_2,...,y_{n+1};t\right)*M\left(x^{k_1},x^{k_3},y_3,...,y_{n+1};t\right)
\end{aligned}$$

$$*M\left(x^{k_1},x^{k_2},x^{k_3},y_4,...,y_{n+1};\left(n^2-2n+1\right)t\right)$$
$$*...*M\left(x^{k_1},x^{k_2},y_3,...,y_n,x^{k_3};t\right)$$
$$>M\left(x^{k_1},x^{k_2},x^{k_3},y_4,...,y_{n+1};\left(n^2-2n+1\right)t\right)*\underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{n\ terms}$$

ดำเนินการตามกระบวนการนี้ต่อไปจะได้

$$M\left(x^{k_1},x^{k_2},...,x^{k_n},y_{n+1};(n+1)t\right)>\underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{n\ terms}*\alpha$$

ดังนั้น $M\left(y_1,\ldots,y_{n+1};\left(n^2+n+1\right)t\right)>\underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{n(n+1)\ terms}*\alpha\geq 1-s_1$

สำหรับบาง $s_1\in(0,1)$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$N\left(y_1,\ldots,y_{n+1};\left(n^2+n+1\right)t\right)<\underbrace{r\Diamond\ldots\Diamond r}_{n(n+1)\ terms}\Diamond\beta\leq s_2$ สำหรับบาง $s_2\in(0,1)$

สมมติให้ $s=\max\{s_1,s_2\}$ และ $t'=\left(n^2+n+1\right)t$ จะได้

$M\left(y_1,...,y_{n+1};t'\right)>1-s$ และ $N\left(y_1,...,y_{n+1};t'\right)<s$ สำหรับทุก ๆ $y_1,...,y_{n+1}\in A$

นั่นคือ A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ถ้า $x^{k_i}=x^{k_j}$ สำหรับบาง $i\neq j$ จะได้ว่า $\alpha=1$ และ $\beta=0$

ดังนั้น $M\left(y_1,...,y_{n+1};t'\right)>\underbrace{(1-r)*...*(1-r)}_{n(n+1)\ terms}*1\geq 1-s_3$ และ

$N\left(y_1,...,y_{n+1};t'\right)<\underbrace{r\Diamond...\Diamond r}_{n(n+1)\ terms}\Diamond 0<s_4$ สำหรับบาง $s_3,s_4\in(0,1)$ ให้ $s^*=\max\{s_3,s_4\}$ และ $t'=\left(n^2+n+1\right)t$ จะได้ว่า $M\left(y_1,...,y_{n+1};t'\right)>1-s^*$ และ $N\left(y_1,\ldots,y_{n+1};t'\right)<s^*$ สำหรับทุก ๆ $y_1,...,y_{n+1}\in A$ ดังนั้น A เป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ #

บทนิยาม 4.27 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและ $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน X ซึ่งกำหนดโดยวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริกซ์ $(M,N)_n$ ให้ (x_n) เป็นลำดับใน X จะกล่าวว่าลำดับ (x_n) ลู่เข้าแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิสู่ $x\in X$ (เขียนแทนโดย $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $r\in(0,1)$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $n\geq n_0$ แล้ว $x_n\in B(x,r;t)$ กล่าวคือ

$M\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t\right)<r$

สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ทฤษฎีบท 4.28 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและ $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน X ซึ่งกำหนดโดยวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก $(M,N)_n$ ถ้า (x_n) เป็นลำดับใน X จะได้ว่า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ก็ต่อเมื่อ $M(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) \to 1$ และ $N(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in X$ และทุก ๆ $t > 0$

พิสูจน์ ให้ $t > 0$ และ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $r \in (0,1)$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$ จะได้ $x_n \in B(x,r;t)$ นั่นคือ

$$M(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) > 1-r \text{ และ } N(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) < r$$

นอกจากนี้ยังได้อีกว่า

$$|1-M(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t)| < r \text{ และ } |0-N(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t)| < r$$

สำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in X$

ดังนั้น $M(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) \to 1$ และ $N(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ และสำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in X$

ในทางกลับกันถ้า $t > 0$ และกำหนดให้

$$M(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) \to 1 \text{ และ } N(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t) \to 0 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in X$ และให้ $O \in \tau_{(M,N)_n}$ โดยที่ $x \in O$ จะได้ว่ามี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่ $B(x,r;t) \subset O$ จากสมมติฐานจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$|1-M(x_n,x,z_1,\dots,z_{n-1};t)| < r \text{ และ } |0-N(x_n,x,z_1,\dots,z_{n-1};t)| < r$$

สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$ ดังนั้น $x_n \in B(x,r;t) \subset O$ สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$ นั่นคือ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ #

ตัวอย่าง 4.29 ให้ $(\mathbb{R}^n,M_d,N_d,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ ดังนั้นลำดับ (x_n) ใน $\mathbb{R}^n$ ซึ่งนิยามโดย $(x_n) = \left\{\left(\frac{1}{n},0,...,0\right)\right\}$ จะลู่เข้าสู่ $0=(0,...,0)$

พิสูจน์ ให้ $0=(0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$d_n(x_m,0,z_1,...,z_{n-1}) = \min\left\{\|x_m-0\|,\|0-z_{k_1}\|,\|x_m-z_{k_2}\|,\|z_{k_3}-z_{k_4}\|\right\}$$

สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

ถ้า $m \to \infty$ แล้ว $d_n(x_m,0,z_1,...,z_{n-1}) = \|x_m-0\| = \|x_m\| = \frac{1}{m} \to \infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ ดังนั้น $M_d(x_m,0,z_1,...,z_{n-1};t) = \dfrac{t}{t+d_n(x_m,0,z_1,...,z_{n-1})} \to 1$

และ $N_d\left(x_m,0,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)=\dfrac{d_n\left(x_m,0,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)}{t+d_n\left(x_m,0,z_1,\ldots,z_{n-1}\right)}\to 0$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{R}^n$

จากทฤษฎีบท 4.28 สรุปได้ว่า $\left\{\left(\dfrac{1}{n},0,\ldots,0\right)\right\}\to\left(0,\ldots,0\right)$ #

ทฤษฎีบท 4.30 ให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับใน X จะได้ว่า $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$ ก็ต่อเมื่อ $x_n\to x$ บน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$ และ U เป็นย่านใกล้เคียง (Neighborhood) ของ x จะได้ว่ามี $O\in\tau_{(M,N)_n}$ โดยที่ $x\in O\subset U$ เนื่องจาก $O\in\tau_{(M,N)_n}$ ดังนั้นมี $t>0$ และ $r\in\left(0,1\right)$ โดยที่ $B\left(x,r;t\right)\subset O$ และจาก $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$ จะมี $k_0\in\mathbb{N}$ โดยที่

$M\left(x_k,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)>1-r$ และ $N\left(x_k,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)<r$ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$ และทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1}\in X$

พิจารณาบอลเปิด $B\left(x,r;t\right)$ จะได้ $x_k\in B\left(x,r;t\right)$ และได้อีกว่า $x_k\in B(x,r;t)\subset O\subset U$ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$ นั่นคือ $x_n\to x$ ใน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$

ในทางกลับกันสมมติให้ $x_n\to x$ ใน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$ และให้ $\varepsilon>0$ และ $t>0$ เนื่องจาก $B\left(x,\varepsilon;t\right)$ เป็นย่านใกล้เคียงของ x และ $x_n\to x$ จะได้ว่ามี $k_0\in\mathbb{N}$ โดยที่ $x_k\in B\left(x,\varepsilon;t\right)$ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$ ดังนั้น

$M\left(x_k,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)>1-\varepsilon$ และ $N(x_k,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t)<\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$ และทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1}\in X$ นั่นคือ $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$ #

ทฤษฎีบท 4.31 ให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ $A\subset X$

ถ้า $x\in\bar{A}$ แล้วจะมีลำดับ $(x_n)\in A$ โดยที่ $x_n\to x$ บน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x\in\bar{A}$ และ $t>0$ เนื่องจาก $n\in\mathbb{N}$ และ $B\left(x,\dfrac{1}{n};t\right)\in\tau_{(M,N)_n}$ จะได้ $B\left(x,\dfrac{1}{n};t\right)\cap A\neq\varnothing$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$ ถ้าให้ $x_n\in B(x,\dfrac{1}{n};t)\cap A$ สำหรับบาง $n\in\mathbb{N}$

ดังนั้น $M\left(x,x_n,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)>1-\dfrac{1}{n}$ และ $N\left(x,x_n,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)<\dfrac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1}\in X$

ถ้า $n\to\infty$ แล้วได้ว่า

$M(x,x_n,z_1,...,z_{n-1};t)\to 1$ และ $N(x,x_n,z_1,...,z_{n-1};t)\to 0$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ จากทฤษฎีบท 4.28 จะได้ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ และจากทฤษฎีบท 4.30 จะได้ $x_n \to x$ บน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$ #

บทนิยาม 4.32 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ ดังนั้น

(a) ลำดับ (x_n) ใน X จะกล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับโคชี (Cauchy) เมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ และ $t>0$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่

$M(x_n,x_m,z_1,...,z_{n-1};t)>1-\varepsilon$ และ $N(x_n,x_m,z_1,...,z_{n-1};t)<\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $m,n\geq n_0$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

(b) $(X,M,N,*,\Diamond)$ จะกล่าวว่าเป็นปริภูมิบริบูรณ์ (Complete space) เมื่อทุก ๆ ลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้าบนทอพอโลยี $\tau_{(M,N)_n}$

ทฤษฎีบท 4.33 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ และให้ (x_n) เป็นลำดับใน X ถ้า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ เมื่อ $x\in X$ แล้วลำดับ (x_n) จะเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ สมมติให้ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ และ $\varepsilon>0$ และ $t>0$ จากบทตั้ง 4.16 จะมี $r_1,r_2\in(0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-r_1)*...*(1-r_1)}_{n+1\,terms}\geq 1-\varepsilon$ และ $\underbrace{r_2\Diamond...\Diamond r_2}_{n+1\,terms}\leq\varepsilon$ ให้ $r=\min\{r_1,r_2\}$

เนื่องจาก $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ดังนั้นจะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่

$$M\left(x_k,x,z_1,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)>1-r \text{ และ } N(x_k,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1})<r$$

สำหรับทุก ๆ $k\geq n_0$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ ถ้าให้ $m\geq n_0$ จะได้

$$M\left(x_m,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)>1-r \text{ และ } N(x_m,x,z_1,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{n+1})<r$$

สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

พิจารณา $M(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-1};t)$ และ $N(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-1};t)$ พบว่า

$$\begin{aligned}
&M(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-1};t)\\
&\quad\geq M\left(x,x_k,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*M\left(x_m,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\\
&\qquad *M\left(x_m,x_k,x,z_2,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*...*M\left(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-2},x;\frac{t}{n+1}\right)\\
&\quad>\underbrace{(1-r_1)*...*(1-r_1)}_{n+1\,terms}\geq 1-\varepsilon
\end{aligned}$$

และ $N\left(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-1};t\right)$

$$\le N\left(x,x_k,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\Diamond N\left(x_m,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)$$

$$\Diamond N\left(x_m,x_k,x,z_2,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\Diamond...\Diamond N\left(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-2},x;\frac{t}{n+1}\right)$$

$$<\underbrace{r_2\Diamond...\Diamond r_2}_{n+1\,terms}\le\varepsilon$$

ดังนั้น $M\left(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-\varepsilon$ และ $N\left(x_m,x_k,z_1,...,z_{n-1};t\right)<\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ นั่นคือ $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชี #

ทฤษฎีบท 4.34 ให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิโดยที่ทุก ๆ ลำดับโคชีใน X มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิจะได้ว่า $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

พิสูจน์ ให้ $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชีใน X และ $\left(x_{i_n}\right)$ เป็นลำดับย่อยของ $\left(x_n\right)$ โดยที่ $\left(x_{i_n}\right)$ ลู่เข้าสู่ x จะแสดงว่า $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$ ให้ $O\in\tau_{(M,N)_n}$ จากนิยามการลู่เข้าจะมี $t>0$ และ $\varepsilon\in(0,1)$ โดยที่ $B(x,\varepsilon;t)\subset O$

เลือก $r\in(0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-r)*...*(1-r)}_{n+1\,terms}\ge 1-\varepsilon$ และ $\underbrace{r\Diamond...\Diamond r}_{n+1\,terms}\le\varepsilon$ เนื่องจาก $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชี ดังนั้นจะมี $n_0\in\mathbb{N}$ ที่ทำให้

$M\left(x_m,x_n,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t}{n+1}\right)>1-r$ และ $N\left(x_m,x_n,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t}{n+1}\right)<r$ สำหรับทุก ๆ $m,n\ge n_0$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ แต่จาก $x_{i_n}\xrightarrow{(M,N)_n}x$ เราได้ว่ามี $i_p\in\mathbb{N}$ โดยที่ $i_p\ge n_0$ ดังนั้น $M\left(x_{i_n},x,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t}{n+1}\right)>1-r$ และ $N\left(x_{i_n},x,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t}{n+1}\right)<r$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ถ้า $n\ge n_0$ จะได้

$M\left(x_n,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t\right)$

$$\ge M\left(x_{i_p},x,z_1,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*M\left(x_n,x_{i_p},z_1,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)$$

$$*M\left(x_n,x,x_{i_p},z_2,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*...*M\left(x_n,x,z_1,\ldots,z_{n-2},x_{i_p};\frac{t}{n+1}\right)$$

$$*...*M\left(x_n,x,z_1,\ldots,z_{n-2},x_{i_p};\frac{t}{n+1}\right)$$

$$> \underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{n+1\, terms} \geq 1-\varepsilon$$

และ $N(x_n, x, z_1, \ldots, z_{n-1}; t)$

$$\leq N\left(x_{i_p}, x, z_1, \ldots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) \Diamond N\left(x_n, x_{i_p}, z_1, \ldots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right)$$

$$\Diamond N\left(x_n, x, x_{i_p}, z_2, \ldots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) \Diamond \ldots \Diamond N\left(x_n, x, z_1, \ldots, z_{n-2}, x_{i_p}; \frac{t}{n+1}\right)$$

$$< \underbrace{r\Diamond\ldots\Diamond r}_{n+1\, terms} \leq \varepsilon$$

จะได้ว่า $N(x_n, x, z_1, \ldots, z_{n-1}; t) < \underbrace{r\Diamond\ldots\Diamond r}_{n+1\, terms} \leq \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ ดังนั้น $x_n \in B(x, \varepsilon; t)$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ นั่นคือ $x_n \to x$ และ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ #

บทนิยาม 4.35 ให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ A เป็นปริภูมิย่อยของ X จะเรียก $(M_A, N_A)_n$ ซึ่งนิยามโดย

$$(M_A, N_A)_n = \left(M\Big|_{A^{n+1}\times(0,\infty)}, N\Big|_{A^{n+1}\times(0,\infty)}\right)_n$$

ว่าวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริกซึ่งถูกกำกัดโดย A

ทฤษฎีบท 4.36 ให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ A เป็นปริภูมิย่อยของ X และให้ $(M_A, N_A)_n = \left(M\Big|_{A^{n+1}\times(0,\infty)}, N\Big|_{A^{n+1}\times(0,\infty)}\right)_n$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริกซึ่งถูกกำกัดโดย A ถ้า $(A, M_A, N_A, *, \Diamond)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์แล้ว A เป็นเซตปิด

พิสูจน์ สมมติให้ $(A, M_A, N_A, *, \Diamond)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์และให้ $x \in \bar{A}$

จาก $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นสัจพจน์ลำดับที่หนึ่งของการนับ ดังนั้นจะมีลำดับ (x_n) ใน A โดยที่ $x_n \to x$ บน $\left(X, \tau_{(M,N)_n}\right)$ และได้ว่าลำดับ (x_n) เป็นลำดับโคชีใน X

ให้ $t > 0$ และ $\varepsilon \in (0,1)$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ และทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ จะได้ $M(x_n, x_m, z_1, ..., z_{n-1}; t) > 1-\varepsilon$ และ $N(x_n, x_m, z_1, ..., z_{n-1}; t) < \varepsilon$ เนื่องจาก $A \subseteq X$ จะได้ว่า $M_A(x_n, x_m, z_1, ..., z_{n-1}; t) > 1-\varepsilon$ และ $N_A(x_n, x_m, z_1, ..., z_{n-1}; t) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ และทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in A$ ดังนั้นลำดับ (x_n) เป็นลำดับโคชีใน A

เนื่องจาก A เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ จะได้ $x_n \to y$ ใน A สำหรับบาง $y \in A$ แต่จาก A เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ จะได้ว่า $x = y \in A$

ดังนั้น $\bar{A} \subset A$ และเห็นได้ชัดว่า $A \subseteq \bar{A}$

นั่นคือ $A = \bar{A}$ #

บทตั้ง 4.37 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ ถ้าให้ $t>0$ และ $r,s\in(0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-s)*...*(1-s)}_{n+1\,terms}\geq 1-r$ และ $\underbrace{s\Diamond...\Diamond s}_{n+1\,terms}\leq r$ จะได้

$$\overline{B\left(x,s;\frac{t}{n+1}\right)}\subset B(x,r;t)$$

พิสูจน์ ให้ $y\in\overline{B\left(x,s;\frac{t}{n+1}\right)}$ และให้ $B\left(y,s;\frac{t}{n+1}\right)$ เป็นบอลเปิด

ดังนั้น $B\left(y,s;\frac{t}{n+1}\right)\cap B\left(x,s;\frac{t}{n+1}\right)\neq\varnothing$

และจะมี $w\in B\left(y,s;\frac{t}{n+1}\right)\cap B\left(x,s;\frac{t}{n+1}\right)$

ให้ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&M(x,y,z_1,...,z_{n-1};t)\\
&\quad\geq M\left(w,y,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*M\left(x,w,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\\
&\qquad *M\left(x,y,w,z_2,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*...*M\left(x,y,z_1,...,z_{n-2},w;\frac{t}{n+1}\right)\\
&\quad>\underbrace{(1-s)*...*(1-s)}_{n+1\ terms}\geq 1-r
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
&N(x,y,z_1,...,z_{n-1};t)\\
&\quad\leq N\left(w,y,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\Diamond N\left(x,w,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\\
&\qquad \Diamond N\left(x,y,w,z_2,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)\Diamond...\Diamond N\left(x,y,z_1,...,z_{n-2},w;\frac{t}{n+1}\right)\\
&\quad<\underbrace{s\Diamond...\Diamond s}_{n+1\ terms}\leq r
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y\in B(x,r;t)$ นั่นคือ $\overline{B\left(x,s;\frac{t}{n+1}\right)}\subset B(x,r;t)$ #

ทฤษฎีบท 4.38 ให้ A เป็นเซตย่อยของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(X,M,N,*,\Diamond)$ จะได้ว่า A เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่น (Nowhere dense) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ เซตเปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่างใน X จะได้ว่ามีบอลเปิดโดยที่ส่วนปิดคลุม (Closure) ของบอลเปิดนั้นไม่มีส่วนร่วมกับ A

พิสูจน์ สมมติให้ $A \subseteq X$ และ A เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่นและให้ U เป็นเซตเปิดโดยที่ $U \subset X$ และ $U \neq \varnothing$ จะได้ว่ามี $V \neq \varnothing$ เป็นเซตย่อยเปิดของ U โดยที่ $V \subset X - A$ ดังนั้น $V \cap A = \varnothing$

ให้ $x \in V$ จะได้ว่ามี $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ โดยที่ $B(x,r;t) \subset V$

เลือก $s \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-s)*\ldots*(1-s)}_{n+1\, terms} \geq 1-r$ และ $\underbrace{s\Diamond\ldots\Diamond s}_{n+1\, terms} \leq r$

จากบทแทรก 4.37 จะได้ว่า $\overline{B\left(x,s;\dfrac{t}{n+1}\right)} \subset B(x,r;t)$

เนื่องจาก $B\left(x,s;\dfrac{t}{n+1}\right) \subset \overline{B\left(x,s;\dfrac{t}{n+1}\right)} \subset B(x,r;t) \subset V \subset U$

ดังนั้น $B\left(x,s;\dfrac{t}{n+1}\right) \subset U$ และ $\overline{B\left(x,s;\dfrac{t}{n+1}\right)} \cap A = \varnothing$

ในทางกลับกันสมมติให้ A ไม่เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่น จะได้ว่า $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right) \neq \varnothing$ และมีเซต $U \neq \varnothing$ โดยที่ $U \subset \overline{A}$ ถ้าให้ $B(x,r;t)$ เป็นบอลเปิดโดยที่ $B(x,r;t) \subset U$ จะได้ $\overline{B(x,r;t)} \cap A \neq \varnothing$ ซึ่งขัดแย้ง #

ทฤษฎีบท 4.39 ทฤษฎีบทของแบร์ (Baire's theorem)

ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ ให้ J เป็นเซตนับได้โดยที่ $J \neq \varnothing$ และ $\{U_i \mid i \in J\}$ เป็นลำดับของเซตย่อยเปิดโดยที่ U_i เป็นเซตหนาแน่นของ $(X,M,N,*,\Diamond)$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$ แล้ว $\bigcap_{i \in J} U_i$ เป็นเซตหนาแน่นใน X

พิสูจน์ ให้ $V \neq \varnothing$ เป็นบอลเปิดของ X เนื่องจาก U_{j_1} เป็นเซตย่อยซึ่งหนาแน่นใน X จะได้ $V \cap U_{j_1} \neq \varnothing$ ให้ $x_1 \in V \cap U_{j_1}$ เราทราบว่า $V \cap U_{j_1}$ เป็นเซตเปิดจะมี $r_1 \in (0,1)$ และมี $t_1 > 0$ โดยที่ $B(x_1,r_1;t_1) \subset V \cap U_{j_1}$ ให้ $r_1' < r$ และ $t_1' = \min\{t_1,1\}$ โดยที่ $\overline{B(x_1,r_1',t_1')} \subset V \cap U_{j_1}$ เนื่องจาก U_{j_2} เป็นเซตย่อยซึ่งหนาแน่นใน X จะได้ $B(x_1,r_1',t_1') \cap U_{j_2} \neq \varnothing$ ให้ $x_2 \in B(x_1,r_1',t_1') \cap U_{j_2}$ เพราะว่า $B(x_1,r_1',t_1') \cap U_{j_2}$ เป็นเซตเปิดจึงได้ว่ามี $r_2 \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ และ $t_2 > 0$ โดยที่ $B(x_2,r_2;t_2) \subset B(x_1,r_1',t_1') \cap U_{j_2}$ ให้ $r_2' < r_2$ และ $t_2' = \min\left\{t_2,\dfrac{1}{2}\right\}$ โดยที่ $\overline{B(x_2,r_2',t_2')} \subset B(x_1,r_1',t_1') \cap U_{j_2}$

ดำเนินการตามกระบวนการนี้ต่อไปจะได้ลำดับ (x_n) ใน X และลำดับ (t_n') โดยที่ $0 < t_n' < \dfrac{1}{n}$ และ $\overline{B(x_n,r_n',t_n')} \subset B\left(x_{n-1},r_{n-1}',t_{n-1}'\right) \cap U_{j_n}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชีโดยให้ $t>0$ และ $\varepsilon>0$ เลือก $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{n_0}<t$ และ $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $m\ge n\ge n_0$ จะได้

$$M\left(x_n,x_m,z_1,...,z_{n-1};t\right)\ge M\left(x_n,x_m,z_1,...,z_{n-1};t_n'\right)\ge 1-r_n'>1-r_n>1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ $N(x_n,x_m,z_1,...,z_{n-1};t)<\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

เพราะฉะนั้น $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชี เนื่องจาก X เป็นเซตบริบูรณ์จะมี $x\in X$ โดยที่ $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$

ดังนั้น $M\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t_n'}{n+1}\right)\to 1$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t_n'}{n+1}\right)\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

นั่นคือ $1-M\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t_n'}{n+1}\right)<r_1^0$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};\dfrac{t_n'}{n+1}\right)<r_2^0$ เมื่อ $r_1^0,r_2^0\ge r_n'$

ให้ $k\ge n$ จะได้

$$1-M\left(x_k,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t_n'}{n+1}\right)<r_3^0 \text{ และ } N\left(x_k,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t_n'}{n+1}\right)<r_4^0$$

เมื่อ $r_3^0,r_4^0\in\left(0,1\right)$ โดยที่ $\left(1-r_1^0\right)*\underbrace{\left(1-r_3^0\right)*...*\left(1-r_3^0\right)}_{n\ terms}\ge 1-r_n'$ และ $r_2^0\Diamond\underbrace{r_4^0\Diamond...\Diamond r_4^0}_{n\ terms}\le r_n'$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
&M\left(x_k,x_n,z_1,...,z_{n-1};t_n'\right)\\
&\ge M\left(x,x_n,z_1,...,z_{n-1};\frac{t_n'}{n+1}\right)*M\left(x_k,x,z_1,...,z_{n-1};\frac{t_n'}{n+1}\right)\\
&\qquad *M\left(x_k,x_n,x,z_2,...,z_{n-1};\frac{t_n'}{n+1}\right)*...*M\left(x_k,x_n,z_1,...,z_{n-2},x;\frac{t_n'}{n+1}\right)\\
&>\left(1-r_1^0\right)*\underbrace{\left(1-r_3^0\right)*...*\left(1-r_3^0\right)}_{n\ terms}\\
&\ge 1-r_n'
\end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ $N\left(x_k,x_n,z_1,...,z_{n-1};t'\right)<r_n'$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ ดังนั้น $x_k\in B(x_n,r_n';t_n')$ สำหรับทุก ๆ $k\ge n$ แต่จาก $M\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t_n'\right)\to 1$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t_n'\right)\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ เพราะฉะนั้น

$1-M\left(x_k,x,z_1,...,z_{n-1};t_n'\right)<r_n'$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t_n'\right)<r_n'$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ดังนั้น $x \in B(x_n, r'_n; t'_n) \subset \overline{B(x_n, r'_n; t'_n)}$ และ $x \in \overline{B(x_n, r'_n; t'_n)} \subset B(x_{n-1}, r'_{n-1}; t'_{n-1})$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{j_n}) \neq \varnothing$ และได้ว่า $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{j_n}$ หนาแน่นใน X #

บทแทรก 4.40 ให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ ให้ J เป็นเซตนับได้โดยที่ $J \neq \varnothing$ และ F_i เป็นเซตปิดสำหรับทุก ๆ $i \in J$

ถ้า $X = \bigcup_{i\in J} F_i$ แล้วจะมี F_i อย่างน้อย 1 เซตที่เซตของจุดภายในไม่เป็นเซตว่าง

พิสูจน์ สมมติให้ $X = \bigcup_{i\in J} F_i$ โดยที่ F_i เป็นเซตปิดสำหรับทุก ๆ $i \in J$ และให้ $\operatorname{int}(F_m) \neq \varnothing$ สำหรับทุก ๆ $m \in J$ ดังนั้น F_i เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่นสำหรับทุก ๆ $i \in J$ นั่นคือ X^C หนาแน่นใน X แต่ $X^C = \varnothing$ จะได้ว่า $\varnothing$ หนาแน่นใน X ซึ่งขัดแย้ง #

บทนิยาม 4.41 ให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นวงศ์ของเซตซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ (Intuitionistic fuzzy diameter zero) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$M(x, y, z_1, ..., z_{n-1}; t) > 1 - r \text{ และ } N(x, y, z_1, ..., z_{n-1}; t) < r$$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in F_{n_0}$ และทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in X$

บทตั้ง 4.42 ให้ $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ $x, y \in X$ และ $t \in (0,1)$ ถ้า $M(x, y, z_1, ..., z_{n-1}; t) > 1 - \varepsilon$ และ $N(x, y, z_1, ..., z_{n-1}; t) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon \in (0,1)$ และทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ แล้ว $x = y$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \neq y$ และให้ $z'_1, \ldots, z'_{n-1}$ เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันของ X จะได้ว่า $N(x, y, z'_1, \ldots, z'_{n-1}; t) \neq 0$ แต่ $N(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}; t) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in X$

ดังนั้น $N(x, y, z'_1, \ldots, z'_{n-1}; t) > 0$ และได้ว่ามี $\frac{1}{k} \in (0, N(x, y, z'_1, \ldots, z'_{n-1}; t))$ และ $N(x, y, z'_1, \ldots, z'_{n-1}; t) \geq \frac{1}{k}$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{k}$ จะได้ว่า $N(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}; t) \geq \frac{1}{k} = \varepsilon$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(x, y, z_1, ..., z_{n-1}; t) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon \in (0,1)$ และทุก ๆ $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ #

บทตั้ง 4.43 ให้ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิจะได้ว่า F มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ F เป็นเซตโทน (Singleton set)

พิสูจน์ ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ $F \neq \varnothing$ เป็นเซตย่อยของ X สมมติให้ F มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $t > 0$ จะได้

$M(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1};t) > 1-r$ และ $N(x,y,z_1,\ldots,z_{n-1};t) < r$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in F$ และทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1} \in X$

จากบทตั้ง 4.42 จะได้ $x = y$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in F$ สรุปได้ว่า $F = \{x\}$

ในทางกลับกันสมมติให้ $F = \{x\}$ และให้ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $t > 0$ จะได้ว่า $M(x,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t) = 1 > 1-r$ และ $N(x,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t) = 0 < r$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1} \in X$ ดังนั้น F มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ #

ทฤษฎีบท 4.44 ทฤษฎีบทอินเตอร์เซกชันของคันเตอร์ (Cantor's Intersection Theorem)

ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ และให้ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนในของเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่างและ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ จะได้ว่า $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$

พิสูจน์ สมมติให้ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$ และ (x_n) เป็นลำดับโคชีใน X และให้ $B_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ และ $F_n = \overline{B_n}$ ก่อนอื่นจะแสดงว่า F_n มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์

ให้ $s \in (0,1)$ และ $t > 0$ เลือก $r \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-r)*\ldots*(1-r)}_{2n+1\,terms} > 1-s$ และ $\underbrace{r\Diamond\ldots\Diamond r}_{2n+1\,terms} < s$ เนื่องจาก (x_n) เป็นลำดับโคชีจะได้ว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$M\left(x_n,x_m,z_1,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{(n+1)^2}\right) > 1-r \text{ และ } N\left(x_n,x_m,z_1,\ldots,z_{n-1};\frac{t}{(n+1)^2}\right) < r$$

สำหรับทุก ๆ $m,n \geq n_0$ และทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1} \in X$ กำหนดให้ $x,y \in F_{n_0}$ เนื่องจาก F_{n_0} เป็นเซตปิดจึงได้ว่ามีลำดับ (x'_n) และ (y'_n) ใน F_{n_0} โดยที่ $x'_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ และ $y'_n \xrightarrow{(M,N)_n} y$ ดังนั้น $x'_n \in B\left(x,r;\frac{t}{(n+1)^2}\right)$ และ $y'_n \in B\left(x,r;\frac{t}{(n+1)^2}\right)$ สำหรับทุก ๆ n ที่มีค่ามากพอ

พิจารณา $M\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)$ พบว่า

$$M\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)$$
$$\geq M\left(x'_n,y,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*M\left(x,x'_n,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*$$
$$M\left(x,y,x'_n,z_2,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)*...*M\left(x,y,z_1,...,z_{n-2},x'_n;\frac{t}{n+1}\right)$$

และ

$$M\left(x'_n,y,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{n+1}\right)$$
$$\geq M\left(y'_n,y,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{(n+1)^2}\right)*M\left(x'_n,y'_n,z_1,...,z_{n-1};\frac{t}{(n+1)^2}\right)$$
$$*M\left(x'_n,y,y'_n,z_2,...,z_{n-1};\frac{t}{(n+1)^2}\right)$$
$$*...*M\left(x'_n,y,z_1,...,z_{n-2},y'_n;\frac{t}{(n+1)^2}\right)$$

ดังนั้น $M\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)\geq\underbrace{(1-r)*...*(1-r)}_{2n+1\,terms}>1-s$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $N\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)<\underbrace{r\Diamond...\Diamond r}_{2n+1\,terms}<s$ สำหรับทุก ๆ $x,y\in F_{n_0}$ และ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ ดังนั้น $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ ให้ $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ จะแสดงว่า $x_n\xrightarrow{(M,N)_n}x$

ให้ $r\in(0,1)$ และ $t>0$ จะมี $n_1\in\mathbb{N}$ โดยที่

$M\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t\right)<r$ สำหรับทุก ๆ $n\geq n_1$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $t>0$ จะได้ $M\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t\right)\to 1$ และ $N\left(x_n,x,z_1,...,z_{n-1};t\right)\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ นั่นคือ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

ในทางกลับกันสมมติให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ ให้ $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนในของเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่างและ $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ เลือก $x_n\in F_n$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$

ต้องการแสดงว่า $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชี

เนื่องจาก $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $r\in(0,1)$ และ $t>0$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่

$M\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r$ และ $N\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)<r$ เมื่อ $n\geq n_0$ และ $x,y\in F_{n_0}$ และ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ เนื่องจาก $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนใน จะได้ว่า

$M\left(x_m,x_n,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r$ และ $N\left(x_m,x_n,z_1,...,z_{n-1};t\right)<r$ สำหรับทุก ๆ $m,n\geq n_0$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ดังนั้น $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชี แต่จาก $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์จึงได้อีกว่า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ สำหรับบาง $x\in X$

เพราะฉะนั้น $x\in\overline{F_n}=F_n$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$ นั่นคือ $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ #

บทแทรก 4.45 สมาชิก $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ จะเป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ สมมติให้ $x,y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ เนื่องจาก $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $t>0$ จะได้

$$M\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r \text{ และ } N\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)<r$$

สำหรับทุก ๆ $r\in\left(0,1\right)$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ ดังนั้น $M\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)=1$ และ $N\left(x,y,z_1,...,z_{n-1};t\right)=0$ สำหรับทุก ๆ $r\in\left(0,1\right)$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ นั่นคือ $x=y$ #

ทฤษฎีบท 4.46 สำหรับทุก ๆ วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิที่แยกกันได้จะเป็นสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้ (The second axiom of countability)

พิสูจน์ ให้ $\left(X,M,N,*,\Diamond\right)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิที่แยกกันได้และให้ $A=\left\{x_p\,|\,p\in\mathbb{N}\right\}$ เป็นเซตหนาแน่นที่นับได้

เนื่องจาก $\beta=\left\{B\left(x_p,\frac{1}{k};\frac{1}{k}\right)\middle|\,p,k\in\mathbb{N}\right\}$ จะได้ β เป็นเซตนับได้

ต่อไปจะแสดงว่า β เป็นฐานสำหรับวงศ์ของเซตเปิดทั้งหมดใน X

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X และ $x\in U$ จะมี $t>0$ และ $r\in\left(0,1\right)$ โดยที่ $B\left(x,r;t\right)\subset U$

เนื่องจาก $r\in\left(0,1\right)$ จะได้ว่ามี $s\in\left(0,1\right)$ โดยที่ $\underbrace{\left(1-s\right)*...*\left(1-s\right)}_{n+1\,terms}>1-r$ และ $\underbrace{s\Diamond...\Diamond s}_{n+1\ terms}<r$

ให้ $m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{m} < \min\left\{s, \frac{t}{n+1}\right\}$ เนื่องจาก A หนาแน่นใน X จะได้ว่ามี $x_p \in A$ ที่ซึ่ง $x_p \in B\left(x, \frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)$ ถ้า $y \in B\left(x, \frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
& M\left(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}; t\right) \\
& \geq M\left(x_p, y, z_1, \ldots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * M\left(x, x_p, z_1, \ldots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * \\
& \quad M\left(x, y, x_p, z_2, \ldots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * \ldots * M\left(x, y, z_1, \ldots, z_{n-2}, x_p; \frac{t}{n+1}\right) \\
& \geq M\left(x_p, y, z_1, \ldots, z_{n-1}; \frac{1}{m}\right) * M\left(x, x_p, z_1, \ldots, z_{n-1}; \frac{1}{m}\right) * \\
& \quad M\left(x, y, x_p, z_2, \ldots, z_{n-1}; \frac{1}{m}\right) * \ldots * M\left(x, y, z_1, \ldots, z_{n-2}, x_p; \frac{1}{m}\right) \\
& > \underbrace{\left(1 - \frac{1}{m}\right) * \ldots * \left(1 - \frac{1}{m}\right)}_{n+1 \text{ terms}} \\
& \geq \underbrace{(1-s) * \ldots * (1-s)}_{n+1 \text{ terms}} \\
& > 1 - r
\end{aligned}
$$

สำหรับทุก ๆ $z_1, \ldots, z_{n-1} \in X$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $N\left(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}; t\right) < \underbrace{s\Diamond \ldots \Diamond s}_{n+1 \text{ terms}} < r$ สำหรับทุก ๆ $z_1, \ldots, z_{n-1} \in X$

ดังนั้น $y \in B(x, r; t) \subset U$

เนื่องจาก $B\left(x_p, \frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $p, k \in \mathbb{N}$ จะได้ β เป็นฐาน และจาก β เป็นฐานและเซตนับได้

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $(X, M, N, *, \Diamond)$ เป็นสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้ #

ข้อสังเกต 4.47 เนื่องจากสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้เป็นสมบัติที่สามารถถ่ายทอดได้และสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้จะบ่งบอกถึงสมบัติการแยกกันได้อีกด้วย ดังนั้นทุก ๆ ปริภูมิย่อยของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิที่ซึ่งแยกกันได้จะมีสมบัติการแยกกันได้เช่นกัน

บทนิยาม 4.48 ให้ X เป็นเซตซึ่งไม่เป็นเซตว่างใด ๆ และให้ $(Y,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ จะได้ลำดับ (f_n) ของฟังก์ชันจาก X ไปยัง Y จะกล่าวว่า (f_n) ลู่เข้าแบบเอกรูป (Uniformly converge) เข้าหาฟังก์ชัน f ที่ส่งจาก X ไป Y เมื่อสำหรับแต่ละ $t>0$ และ $r\in(0,1)$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่

$$M\left(f_n(x),f(x),z_1,...,z_{n-1};t\right)>1-r \text{ และ } N\left(f_n(x),f(x),z_1,...,z_{n-1};t\right)<r$$

สำหรับทุก ๆ $n\geq n_0$ และ $x\in X$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$

ทฤษฎีบท 4.49 ทฤษฎีบทลิมิตแบบเอกรูป (Uniform limit theorem) ให้ $f_n : X\to Y$ ลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องจากปริภูมิทอพอโลยี X ไปยังวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(Y,M,N,*,\Diamond)$ ถ้า (f_n) ลู่เข้าแบบเอกรูปเข้าหา $f:X\to Y$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

พิสูจน์ ให้ V เป็นเซตเปิดของ Y และ $x_0\in f^{-1}(V)$ เราจะหาย่านใกล้เคียง U ของ x_0 ซึ่ง $f(U)\subset V$ เนื่องจาก V เป็นเซตเปิดจะมี $t>0$ และ $r\in(0,1)$ โดยที่ $B\left(f(x_0),r;t\right)\subset V$ เนื่องจาก $r\in(0,1)$ เราให้ $s\in(0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-s)*...*(1-s)}_{2n+1\,terms}>1-r$ และ $\underbrace{s\Diamond...\Diamond s}_{2n+1\,terms}<r$

จาก (f_n) ลู่เข้าแบบเอกรูปสู่ f ถ้าให้ $t>0$ และ $s\in(0,1)$ ดังนั้นมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่

$$M\left(f_n(x),f(x),f(z_1),...,f(z_{n-1});\frac{t}{(n+1)^2}\right)>1-s$$

และ $$N\left(f_n(x),f(x),f(z_1),...,f(z_{n-1});\frac{t}{(n+1)^2}\right)<s$$ สำหรับทุก ๆ $n\geq n_0$ และ $x\in X$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ เนื่องจาก f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$ จะมีย่านใกล้เคียง U ของ x_0 ที่ซึ่ง $f(U)\subset B\left(f_n(x_0),s;\frac{t}{(n+1)^2}\right)$ ดังนั้น

$$M\left(f_n(x),f(x),f(z_1),...,f(z_{n-1});\frac{t}{(n+1)^2}\right)>1-s$$

และ $$N\left(f_n(x),f(x),f(z_1),...,f(z_{n-1});\frac{t}{(n+1)^2}\right)<s$$ สำหรับทุก ๆ $x\in U$ และทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1}\in X$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}M&\left(f(x),f(x_0),f(z_1),...,f(z_{n-1});t\right)\\&\geq M\left(f_n(x),f(x_0),f(z_1),...,f(z_{n-1});\frac{t}{n+1}\right)*\\&\qquad M\left(f(x),f_n(x),f(z_1),...,f(z_{n-1});\frac{t}{n+1}\right)*\end{aligned}$$

$$M\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right), f_n\left(x\right), f(z_2),..., f(z_{n-1}); \frac{t}{n+1}\right) * ... *$$

$$M\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-2}), f_n\left(x\right); \frac{t}{n+1}\right)$$

และ $$M\left(f_n\left(x\right), f\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-1}); \frac{t}{n+1}\right)$$

$$\geq M\left(f_n\left(x_0\right), f\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-1}); \frac{t}{\left(n+1\right)^2}\right) *$$

$$M\left(f_n\left(x\right), f_n\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-1}); \frac{t}{\left(n+1\right)^2}\right) *$$

$$M\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right), f_n\left(x_0\right), f(z_2),..., f(z_{n-1}); \frac{t}{\left(n+1\right)^2}\right) * ... *$$

$$M\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-2}), f_n\left(x_0\right); \frac{t}{\left(n+1\right)^2}\right)$$

สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in X$ ดังนั้น

$$M\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-1}); t\right) > \underbrace{\left(1-s\right) * ... * \left(1-s\right)}_{2n+1\, terms} > 1-r$$ สำหรับทุก ๆ

$z_1,...,z_{n-1} \in X$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$$N\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right), f(z_1),..., f(z_{n-1}); t\right) \leq \underbrace{s\Diamond...\Diamond s}_{2n+1\, terms} < r$$ สำหรับทุก ๆ $z_1,...,z_{n-1} \in X$

นั่นคือ $f(x) \in B\left(f\left(x_0\right), r; t\right) \subset V$ สำหรับทุก ๆ $x \in U$ เราจึงสรุปได้ว่า $f\left(U\right) \subset V$ และได้อีกว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง #

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดนิยามของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิพร้อมทั้งศึกษาสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ซึ่งได้ผลการวิจัยเป็นดังนี้

1. นิยามของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบ t-นอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบ t-โคนอร์มและ M,N เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัย (Fuzzy set) บน $X^{n+1}\times(0,\infty)$ โดยที่ M,N มีสมบัติดังนี้ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_{n+1},w\in X$ และ $t_1,\ldots,t_{n+1},t>0$

(1) $M\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)+N\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)\le 1$

(2) ถ้า $x_i\ne x_j$ สำหรับทุก ๆ $i\ne j$ จะได้ $M\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)>0$

(3) $M\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)=1$ ก็ต่อเมื่อ $x_i=x_j$ สำหรับบาง ๆ $i\ne j$

(4) $M\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)=M\left(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1};t\right)$ สำหรับทุก ๆ $i,j=1,2,\ldots,n+1$

(5) $M(x_1,\ldots,x_{n+1};t_1+\ldots+t_{n+1})$
$$\ge M(w,x_2,\ldots,x_{n+1};t_1)*M(x_1,w,x_3,\ldots,x_{n+1};t_2)*\ldots*M(x_1,\ldots,x_n,w;t_{n+1})$$

(6) $M\left(x_1,\ldots,x_{n+1};\bullet\right):(0,\infty)\to(0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(7) ถ้า $x_i\ne x_j$ สำหรับทุก ๆ $i\ne j$ จะได้ $N\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)<1$

(8) $N\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x_i=x_j$ สำหรับบาง ๆ $i\ne j$

(9) $N\left(x_1,\ldots,x_{n+1};t\right)=N\left(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_{n+1};t\right)$ สำหรับทุก ๆ $i,j=1,2,\ldots,n+1$

(10) $N(x_1,\ldots,x_{n+1};t_1+\ldots+t_{n+1})$
$$\le N(w,x_2,\ldots,x_{n+1};t_1)\Diamond N(x_1,w,x_3,\ldots,x_{n+1};t_2)\Diamond\ldots\Diamond N(x_1,\ldots,x_n,w;t_{n+1})$$

(11) $N\left(x_1,x_2\ldots,x_{n+1};\bullet\right):(0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เราจะเรียก $(M,N)_n$ ว่าเป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก (Intuitionistic fuzzy n-metric) บน X และจะเรียก $(X,M,N,*,\Diamond)$ ว่าเป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ (Intuitionistic fuzzy n-spaces)

2. นิยามของทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิสามารถกำหนดนิยามของทอพอโลยีได้คือเซต

$\tau_{(M,N)_n} = \{A \subset X \,|\, \text{สำหรับแต่ละ } x \in A \text{ จะมี } t \geq 0 \text{ และ } r \in (0,1) \text{ โดยที่ } B(x,r;t) \subset A\}$

3. สมบัติต่าง ๆ ของทอพอโลยีบนวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

3.1 ทฤษฎีบท 4.19 สำหรับทุก ๆ วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิเป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

3.2 ทฤษฎีบท 4.26 สำหรับทุก ๆ เซตย่อยกระชับ A ของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(X,M,N,*,\Diamond)$ จะเป็นเซตมีขอบเขตแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ

3.3 ทฤษฎีบท 4.28 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและ $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน X ซึ่งกำหนดโดยวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริก $(M,N)_n$ ถ้า (x_n) เป็นลำดับใน X จะได้ว่า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ก็ต่อเมื่อ $M(x_n,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t) \to 1$ และ $N(x_n,x,z_1,\ldots,z_{n-1};t) \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1,\ldots,z_{n-1} \in X$ และทุก ๆ $t > 0$

3.4 ทฤษฎีบท 4.30 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ (x_n) เป็นลำดับใน X จะได้ว่า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ก็ต่อเมื่อ $x_n \to x$ บน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$

3.5 ทฤษฎีบท 4.31 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและให้ $A \subset X$ ถ้า $x \in \bar{A}$ แล้วจะมีลำดับ $(x_n) \in A$ โดยที่ $x_n \to x$ บน $\left(X,\tau_{(M,N)_n}\right)$

3.6 ทฤษฎีบท 4.33 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ และให้ (x_n) เป็นลำดับใน X ถ้า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ เมื่อ $x \in X$ แล้วลำดับ (x_n) จะเป็นลำดับโคชี

3.7 ทฤษฎีบท 4.34 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิโดยที่ทุก ๆ ลำดับโคชีใน X มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิจะได้ว่า $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

3.8 ทฤษฎีบท 4.36 ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ A เป็นปริภูมิย่อยของ X และให้ $(M_A,N_A)_n = \left(M\big|_{A^{n+1}\times(0,\infty)}, N\big|_{A^{n+1}\times(0,\infty)}\right)_n$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณ n-เมตริกซึ่งถูกกำกัดโดย A ถ้า $(A,M_A,N_A,*,\Diamond)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์แล้ว A เป็นเซตปิด

3.9 ทฤษฎีบท 4.38 ให้ A เป็นเซตย่อยของวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(X,M,N,*,\Diamond)$ จะได้ว่า A เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่น (Nowhere dense) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ เซตเปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่างใน X จะได้ว่ามีบอลเปิดโดยที่ส่วนปิดคลุม (Closure) ของบอลเปิดนั้นไม่มีส่วนร่วมกับ A

3.10 ทฤษฎีบท 4.39 ทฤษฎีบทของแบร์ (Baire's theorem) ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิและ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ ให้ J เป็นเซตนับได้โดยที่ $J \neq \varnothing$ และ $\{U_i | i \in J\}$ เป็นลำดับของเซตย่อยเปิดโดยที่ U_i เป็นเซตหนาแน่นของ $(X,M,N,*,\Diamond)$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$ แล้ว $\bigcap_{i \in J} U_i$ เป็นเซตหนาแน่นใน X

3.11 ทฤษฎีบท 4.44 ทฤษฎีบทอินเตอร์เซกชันของคันเตอร์ (Cantor's Intersection Theorem) ให้ $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ และให้ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนในของเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่างและ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ มีวิภัชนัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์ จะได้ว่า $(X,M,N,*,\Diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$

3.12 ทฤษฎีบท 4.46 สำหรับทุก ๆ วิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิที่แยกกันได้จะเป็นสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้ (The second axiom of countability)

3.13 ทฤษฎีบท 4.49 ทฤษฎีบทลิมิตเบบเอกรูป (Uniform limit theorem) ให้ $f_n : X \to Y$ ลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องจากปริภูมิทอพอโลยี X ไปยังวิภัชนัยแบบสหัชญาณบน n-ปริภูมิ $(Y,M,N,*,\Diamond)$ ถ้า (f_n) ลู่เข้าแบบเอกรูปเข้าหา $f : X \to Y$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บรรณานุกรม

Abbas, S.E. (2005). On intuitionistic fuzzy compactness. *Inform Sci., 173*,75-91.

Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets Syst., 20*,87-96.

Atanassov, K. (1994). New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets Syst., 61*,137-142.

Barro, S., & Marin, F. (2002). *Fuzzy logic in medicine.* Heidelberg: Physica-Verlag.

Barros, L.C., Bassanezi, R.C., & Tonelli, P.A. (2000). Fuzzy modeling in population dynamics. *Ecol Model., 128*,27-33.

Coker, D. (1997). An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy sets Syst., 88*,81-89.

El Naschie, M.A. (1998). On uncertainty of Cantorian geometry and two-slit experiment. *Chaos Solitions & Fractals., 9*,517-529.

El Naschie, M.A. (2000). On the unification of heterotic strings theory and $e^{(\infty)}$ theory. *Chaos Solitions & Fractals., 11*(14),2397-2408.

El Naschie, M.A. (2004). A review of E-infinity theory and the mass spectrum of high energy particle physics. *Chaos Solitions & Fractals., 19*,209-236.

El Naschie, M.A. (2004). Quantum gravity, Clifford algebras, fuzzy set theory and the fundamental constants of nature. *Chaos Solitions & Fractals., 20*,437-450.

El Naschie, M.A. (2006). On two new fuzzy K ä hler manifolds, Klein modular space and Hooftholographic principles. *Chaos Solitions & Fractals., 29*,876-881.

El Naschie, M.A. (2006). Fuzzy dodecahedron topology and E-infinity space time as a model for quantum physics. *Chaos Solitions & Fractals., 30*,1025-1033.

El Naschie, M.A. (2007). A review of applications and results of E-infinity theory. *Int J Nonlinear Sci Numer Simulat., 8*,11-20.

Erceg, M.A. (1979). Metric spaces in fuzzy set theory. *J Math Anal Appl., 69*,205-230.

Fang, J.X. (2002). A note on the completions of fuzzy metric spaces and fuzzy normed spaces. *Fuzzy Set Syst., 131*,399-407.

Felbin, C. (1992). Finite dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets Syst., 48,*239-248.

Fradkov, A.L.,& Evans R.J. (2005). Control of chaos: methods and applications in engineering. *Chaos Solitions & Fractals., 29*,33-56.

Gä hler, S. (1963). 2-metrische Rä ume und ihre topologische Struktur. *Math Nachr.*, *26*, 115-148.

Gä hler, S. (1965). Lineare 2-normietre Rä ume. *Math Nachr., 28*,1-43.

George, A., & Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst., 64*,395-399.

Giles, R. (1980). A computer program for fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets Syst., 4*,221-234.

Hong, L., & Sun, J.Q. (2006). Bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems. *Common Nonlinear Sci Numer Simul., 1*,1-13.

Kaleva, O, & Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst., 12*,215- 229.

Munkres, J. (1975). *Topology a first course.* New Jersey: Prentice-Hall.

Mursaleen, M., & Lohani, Q.M.D. (2009). Intuitionistic fuzzy 2-normed space and some related concepts. *Chaos Solitions & Fractals., 42*,224-234.

Mursaleen, M., Lohani, Q.M.D., & Mohiuddine, S.A. (2009). Intuitionistic fuzzy 2-metric space and its completion. *Chaos Solitions & Fractals., 42*,1258-1265.

Park, J.H. (2004). Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos Solitions & Fractals.*, *22*,1039-1046.

Royden, H.L. (1988). *Real analysis* (2nd ed.). New York: Collier macmillam Canada.

Saadati, R., & Park, J.H. (2006). On the intuitionistic fuzzy topological spaces. *Chaos Solitions & Fractals.*, *27*,331-344.

Schweizer, B., & Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific J Math., 10*,313-334.

Xiao, J., & Zhu, X. (2002). On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space. *Fuzzy sets Syst., 125*,153-161.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Inform Control., 8*,338-353.