

สำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยบูรพา

ด.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี 20131

แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1

ผศ.วาทีตย์ ชุมณีโชติ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

บางแสน อ.เมือง จ.ชลบุรี

โทร. (038) 390354 โทรสาร 390354

8984

23 ส.ย. 2543

136122

515

24620

12.8

16 ส.ก. 2543

คำนำ

หนังสือแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เล่มนี้เขียนขึ้นตามแนวหลักสูตร แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 ของมหาวิทยาลัยบูรพา

หนังสือนี้มี 13 บท กับ 1 ภาคผนวก แต่ละบทประกอบด้วยตัวอย่าง ทฤษฎีบท และแบบฝึกหัดไว้มากพออย่างเหมาะสม ต่อจากภาคผนวกมีบรรณานุกรมหลังจากบรรณานุกรมได้เฉลยแบบฝึกหัดไว้ และเพื่อความสะดวกต่อการอ่านจึงมีครรชนีไว้ในตอนท้ายเล่ม สำหรับศัพท์คณิตศาสตร์ในหนังสือเล่มนี้ใช้ตามพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2525

ผมคิดว่าหนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับนิสิตปีที่เรียนแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 และอาจารย์ผู้สอน นอกจากนี้ยังเหมาะสำหรับอาจารย์คณิตศาสตร์ที่สอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมปลาย

วาทีภัย ชุมณีโชติ

เมษายน 2538

สารบัญ

บทที่ 1: ความรู้เบื้องต้น	หน้า
1.1 เซต	1
1.2 ระบบจำนวนจริง	8
1.3 อสมการ	14
1.4 เซตที่มีขอบเขต	21
1.5 เส้นจำนวนและช่วง	24
1.6 ค่าสัมบูรณ์	28
1.7 การอุปนัยทางคณิตศาสตร์	35
บทที่ 2: ระบายคาร์ทีเซียน	
2.1 พิกัดคาร์ทีเซียน	40
2.2 ระยะทางระหว่าง 2 จุด	45
2.3 ความชันและจุดกึ่งกลางของส่วนเส้น	48
2.4 กราฟของสมการ	52
2.5 เส้นตรง	55
2.6 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก ระยะทางระหว่างจุดและเส้น	61
2.7 มุมจากเส้นถึงเส้น	70
2.8 วงกลม	74
2.9 พาราโบลา	78
2.10 การเขียนกราฟของสมการ	86
2.11 การเลื่อนทางขนานของแกนพิกัด	96

2.1.2	กราฟของอสมการ	106
-------	---------------	-----

บทที่ 3 : ฟังก์ชัน

3.1	ฟังก์ชัน	115
3.2	การดำเนินการบนฟังก์ชัน	121
3.3	ฟังก์ชันพิเศษ	125

บทที่ 4 : ลิมิตและความต่อเนื่อง

4.1	บทนำสู่ลิมิต	131
4.2	ความคิดรวบยอดของลิมิต	134
4.3	บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน	143
4.4	ทฤษฎีบทของลิมิต	151
4.5	ลิมิตข้างเดียว	158
4.6	ความต่อเนื่อง	161
4.7	ค่าที่เปลี่ยนไป	170

บทที่ 5 : อนุพันธ์

5.1	อนุพันธ์	174
5.2	อัตราการเปลี่ยน	178
5.3	อนุพันธ์และความต่อเนื่อง	185

บทที่ 6 : สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

6.1	อนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม	191
6.2	อนุพันธ์ของผลคูณหรือผลหารของฟังก์ชัน	196
6.3	กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันประกอบ	202

6.4	อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	205
6.5	อนุพันธ์อันดับสูง	210
6.6	อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	213

บทที่ 7: การประยุกต์ของอนุพันธ์

7.1	เส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉาก	219
7.2	อัตราสัมพัทธ์	225

บทที่ 8: ทฤษฎีบทค่ากลางและการประยุกต์

8.1	ทฤษฎีบทของโรล	232
8.2	ทฤษฎีบทค่ากลาง	240
8.3	ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	243
8.4	ความเร็วและความเร่ง	247
8.5	ผลต่างเชิงอนุพันธ์	252
8.6	การขยายของทฤษฎีบทค่ากลาง	260
8.7	ค่าสุดขีดสัมพัทธ์	261
8.8	ทดสอบอนุพันธ์อันดับสองสำหรับค่าสุดขีด	268
8.9	โจทย์ประยุกต์ค่าสูงสุด-ค่าต่ำสุด	270
8.10	การเด้งและจุดเปลี่ยนเด้ง	279
8.11	ลิมิต $x \rightarrow \infty$ และ $x \rightarrow -\infty$ และ เส้นกำกับ	286
8.12	การเขียนกราฟ	293
8.13	การหารากของสมการโดยวิธีของนิวตัน	302

บทที่ 9: ฟังก์ชันอภิปหุคูณ

9.1	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	309
-----	--------------------	-----

9.2	ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	316
9.3	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	321
9.4	ฟังก์ชันผกผัน	325
9.5	ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	333
9.6	ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม	342
9.7	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	350
9.8	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	358

บทที่ 10: ภาคตัดกรวย

10.1	บทนำ	360
10.2	นิยามของภาคตัดกรวย	362
10.3	ภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง	364
10.4	วงรี	371
10.5	ไฮเพอร์โบล่า	376
10.6	คุณสมบัติการสะท้อน	383
10.7	การหมุนแกนพิกัด	388
10.8	กราฟของสมการระดับชั้น 2	396
10.9	คัสคริมีแนต	372

บทที่ 11: ระบบพิกัดเชิงขั้ว

11.1	พิกัดเชิงขั้วของจุด	406
11.2	กราฟของสมการเชิงขั้ว	414
11.3	เส้นตรง วงกลม และภาคตัดกรวย	428
11.4	มุมจากรัศมีเวกเตอร์ถึงเส้นสัมผัส	439
11.5	ผลัตติของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว	444

บทที่ 12: สมการเชิงตัวแปรเสริม

12.1	เส้นโค้งระนาบ	448
12.2	ไซคลอยด์	456
12.3	ฟังก์ชันนิยามโดยสมการเชิงตัวแปรเสริม	459

บทที่ 13: เมตริกซ์

13.1	บทนำ	462
13.2	พีชคณิตของเมตริกซ์	474
13.3	ตัวกำหนด	484
13.4	คุณสมบัติตัวกำหนด	492
13.5	ค่าลำดับชั้น	503
	ระบบเชิงเส้นทั่วไป	

ภาคผนวก

ภ.1		517
ภ.2		523
ภ.3		527
บรรณานุกรม		538
เฉลยแบบฝึกหัดบางข้อ		535
ครุฑ		564

302111 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1

302111 Calculus and Analytic Geometry 1

ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน ลิมิตและความต่อเนื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
พีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเชิงกำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม
และ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก การประยุกต์ของอนุพันธ์ในเรื่องต่างๆ เช่น สมการของเส้น
สัมผัส คิฟเฟอเรนเชียล อัตราสัมพัทธ์ การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด และการทดสอบ การเขียน
กราฟโดยพิจารณาอนุพันธ์ กราฟของสมการดีกรีสอง การย้ายแกนและการหมุนแกนพิกัด
ระบบสมการเชิงเส้น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีแบบแถว

จุดมุ่งหมาย

1. เพื่อให้บัณฑิตมีความรู้ความเข้าใจคณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. เพื่อให้บัณฑิตสามารถนำคณิตศาสตร์พื้นฐานไปใช้ในสาขาวิชาอื่น .

โครงการสอน

สัปดาห์	เนื้อหาวิชา	เวลา
I	บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้น 1.1 เซต 1.2 ระบบจำนวนจริง 1.3 อสมการ 1.4 เซตมีขอบเขต 1.5 เส้นจำนวนและช่วง 1.6 ค่าสัมบูรณ์	
	บทที่ 2 ระบายคาร์ทีเซียน 2.1 พิกัดคาร์ทีเซียน 2.2 ระยะทางระหว่าง 2 จุด 2.3 ความชันและจุดกึ่งกลางของส่วนเส้น 2.4 กราฟของสมการ 2.5 เส้นตรง 2.6 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก - ระยะทางระหว่างจุดและเส้น 2.7 มุมจากเส้นถึงเส้น 2.8 วงกลม 2.9 พาราโบลา 2.10 การเขียนกราฟของสมการ 2.11 การเลื่อนทางขนานของแกนพิกัด 2.12 กราฟของอสมการ	
	บทที่ 3 พังก์ชัน 3.1 พังก์ชัน	

สัปดาห์	เนื้อหาวิชา	เวลา
2	3.2 การดำเนินการบนฟังก์ชัน	1 คาบ
	3.3 ฟังก์ชันพิเศษ	
	บทที่ 4 ลิมิตและความต่อเนื่อง	
	4.1 บทนำสู่ลิมิต	
	4.2 ความคิดรวบยอดของลิมิต	2 คาบ
	4.3 ทฤษฎีบทของลิมิต	
	4.4 ลิมิตข้างเดียว	
	4.5 ลิมิตข้างเดียว	
	4.6 ความต่อเนื่อง	2 คาบ
	4.7 ค่าที่เปลี่ยนไป	
3	บทที่ 5 อนุพันธ์	1 คาบ
	5.1 อนุพันธ์	
	5.2 อัตราการเปลี่ยน	2 คาบ
	5.3 อนุพันธ์และความต่อเนื่อง	
	บทที่ 6 สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	
	6.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม	
	6.2 อนุพันธ์ของผลคูณหรือผลหารของฟังก์ชัน	1 คาบ
	6.3 กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันประกอบ	
	6.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งมีเลขชี้กำลัง	
	เป็นจำนวนตรรกยะ	
4	6.5 อนุพันธ์อันดับสูง	2 คาบ
	6.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	
	บทที่ 7 การประยุกต์ของอนุพันธ์	1 คาบ
	7.1 เส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉาก	

สัปดาห์	เนื้อหาวิชา	เวลา
5	7.2 อัตราสัมพัทธ์	2 คาบ
6	บทที่ 8 ทฤษฎีบทค่ากลางและการประยุกต์	
	8.1 ทฤษฎีบทของโรล	
	8.2 ทฤษฎีบทค่ากลาง	
	8.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	
	8.4 ความเร็วและความเร่ง	1 คาบ
7	8.5 ผลต่างเชิงอนุพันธ์	1 คาบ
	8.6 การขยายของทฤษฎีบทค่ากลาง	
	8.7 ค่าสุดขีดสัมพัทธ์	
	8.8 ทดสอบอนุพันธ์อันดับสองสำหรับค่าสุดขีด	2 คาบ
8	8.9 โจทย์ประยุกต์ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด	2 คาบ
	8.10 การเว้า และจุดเปลี่ยนเว้า	1 คาบ
9	8.11 ลิมิต $x \rightarrow \infty$ และเส้นกำกับ	1 คาบ
	8.12 การเขียนกราฟ	2 คาบ
10	บทที่ 9 ฟังก์ชันอดิศัย	
	9.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
	9.2 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
	9.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	2 คาบ
	9.4 ฟังก์ชันผกผัน	1 คาบ
11	9.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	1 คาบ
	9.6 ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม	2 คาบ
12	9.7 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	
	9.8 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	2 คาบ
	บทที่ 10 ภาคตัดกรวย	

สัปดาห์	เนื้อหาวิชา	เวลา
	10.1 บทนำ	
	10.2 นิยามภาคตัดกรวย	1 คาบ
12	10.3 ภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง	
	10.4 วงรี	
	10.5 ไฮเพอร์โบลา	2 คาบ
	10.6 คุณสมบัติการสะท้อน	
	10.7 การหมุนแกนพิกัด	1 คาบ
13	10.8 กราฟของสมการระดับชั้น 2	
	10.9 คีส์คริมิแนนต์	2 คาบ
	บทที่ 11 ระบบพิกัดเชิงขั้ว	
	11.1 พิกัดเชิงขั้วของจุด	1 คาบ
14	11.2 กราฟของสมการเชิงขั้ว	3 คาบ
15	11.3 เส้นตรง วงกลม และภาคตัดกรวย	3 คาบ
16	บทที่ 13 เมตริกซ์	
	13.1 บทนำ	
	13.2 พีชคณิตของเมตริกซ์	3 คาบ

- เรื่อง บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้น
บทที่ 2 ระบายคาร์ทีเซียน
บทที่ 3 ฟังก์ชัน

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. อธิบายความหมายเซตมีขอบเขตได้
2. อธิบายความหมาย เส้นจำนวนและช่วงได้
3. อธิบายความหมายค่าสัมบูรณ์ได้
4. อธิบายความหมายกราฟของสมการได้
5. อธิบายความหมาย เส้นตรง วงกลม พาราโบลาได้
6. อธิบายความหมาย ฟังก์ชัน การดำเนินการบนฟังก์ชันได้
7. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 1 บทที่ 2 และ บทที่ 3 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาเฉพาะหลักสำคัญๆ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ
การวัดผล

1. จากการตอบคำถามของนิสิต
2. จากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย

- เรื่อง บทที่ 4 ลิ้มิตและความต่อเนื่อง

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. อธิบายความหมายลิ้มิตได้
2. อธิบายความหมายลิ้มิตข้างเดียวได้
3. อธิบายความหมายฟังก์ชันต่อเนื่องได้
4. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 4 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ
การวัดผล

1. ดูจากการตอบคำถามของนิสิต

2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 90 %

เรื่อง บทที่ 5 อนุพันธ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. อธิบายความหมายอนุพันธ์ได้

2. อธิบายความหมายอัตราการเปลี่ยนแปลงได้

3. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 5 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ

การวัดผล

1. ดูจากการตอบคำถามของนิสิต

2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 90 %

เรื่อง บทที่ 6 สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 6 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ

การวัดผล

1. ดูจากการตอบคำถามของนิสิต

2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย

เรื่อง บทที่ 7 การประยุกต์ของอนุพันธ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และเส้นสัมผัสได้
2. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 7 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ

การวัดผล

1. ดูจากการตอบคำถามของนิสิต
2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 85 %

เรื่อง บทที่ 8 ทฤษฎีบทค่ากลางและการประยุกต์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. ให้ความหมายฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดได้
2. ให้ความหมายผลต่างเชิงอนุพันธ์ได้
3. ให้ความหมายค่าสุดขีดได้
4. ให้ความหมายการเว้า และจุดเปลี่ยนเว้าได้
5. ให้ความหมายเส้นกำกับได้
6. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 8

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ

การวัดผล

1. ดูจากการตอบคำถามของนิสิต
2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 75 %

เรื่อง บทที่ 9 ฟังก์ชันอดิศัย

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. ให้ความหมายฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
2. อธิบายความหมายฟังก์ชันผกผันได้
3. อธิบายความหมายฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันได้
4. อธิบายความหมายฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึมได้
5. อธิบายความหมายฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกได้
6. อธิบายความหมายฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผันได้
7. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 9 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาวิชาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ
การวัดผล

1. ดูจากการตอบคำถามของนิสิต
2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 85 %

เรื่อง บทที่ 10 ภาคตัดกรวย

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. อธิบายความหมายภาคตัดกรวยได้
2. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 10 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ
การวัดผล

1. ดูจากการตอบของนิสิต
2. ดูจากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 80 %

เรื่อง บทที่ 11 ระบบพิกัดเชิงขั้ว

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. อธิบายความหมายพิกัดเชิงขั้วได้
2. อธิบายการเขียนกราฟของสมการเชิงขั้วได้
3. ทำแบบฝึกหัดบทที่ 7 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ
การวัดผล

1. จากการตอบของนิสิต
2. จากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย 95 %

เรื่อง บทที่ 13 เมตริกซ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. แก้อสมการเชิงเส้นโดยวิธีการดำเนินการแบบแถวได้
2. ทำแบบฝึกหัด 13.1 และ แบบฝึกหัด 13.2 ได้

วิธีสอน อธิบายเนื้อหาวิชาตามหนังสือ และตั้งคำถามให้นิสิตตอบ
การวัดผล

1. จากการตอบคำถามของนิสิต
2. จากการทดสอบ

การประเมินผล

นิสิตบรรลุผลตามจุดมุ่งหมาย

การวัดผลและประเมินผล

ทดสอบครั้งที่ 1 50 %

ทดสอบครั้งที่ 2 50 %

โดยการสอบแต่ละครั้งจะออกข้อสอบ 10 ข้อ

คะแนน	90	ขึ้นไป		A
คะแนน	85 %	ถึง	89 %	B ⁺
คะแนน	80 %	ถึง	84 %	B
คะแนน	70 %	ถึง	79 %	C ⁺
คะแนน	60 %	ถึง	69 %	C
คะแนน	40 %	ถึง	60 %	D ⁺
คะแนน	30 %	ถึง	39 %	D
คะแนน	29 %	ลงมา		F

บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้น

1.1 เซต(Sets)

เซต คือกลุ่ม หมู่ หรือพวกของสิ่งต่างๆ เช่น เซตของคน เซตของนก เซตของจำนวนเลข สิ่งต่างๆที่อยู่ในเซตเรียกว่า **สมาชิก(element)** ของเซต

เราจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเซต และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนสมาชิกของเซต ใช้สัญลักษณ์ $\in$ แทนความหมายเป็นสมาชิกของเซต

ตัวอย่าง เช่น ประโยค a เป็นสมาชิกของเซต S เราเขียนแทนด้วย

$$a \in S$$

ใช้สัญลักษณ์ $\notin$ แทนความหมายไม่เป็นสมาชิกของเซต

ตัวอย่าง เช่น ประโยค a ไม่เป็นสมาชิกของเซต S เราเขียนแทนด้วย

$$a \notin S$$

เรามีวิธีเขียนอธิบายเซตได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1. เขียนแบบแจกแจงสมาชิก

ใช้วงเล็บปีกกาล้อมรอบสมาชิกทั้งหมดของเซต

ตัวอย่าง เช่น S มีสมาชิก $\{a, b, c, d\}$ เราเขียนแทนด้วย

$$S = \{a, b, c, d\}$$

เซตอาจจะมีสมาชิกจำนวนอนันต์ ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนเต็มบวก หรือเซตของจำนวนธรรมชาติ เราใช้สัญลักษณ์ N แทนเซตนี้ และเขียน

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

วิธีที่ 2. เขียนโดยบอกเงื่อนไขของเซต

โดยทั่วไปเราใช้สัญลักษณ์

$$\{x / P(x)\}$$

อ่านว่า เซตของ x ซึ่ง $P(x)$ จริง $P(x)$ คือ เงื่อนไขซึ่ง x จริง
ตัวอย่าง เช่น

$$A = \{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มน้อยกว่า } 5\}$$

แทนเซต

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

และ

$$B = \{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } x^2 - 1 = 0\}$$

แทนเซต

$$B = \{-1, 1\}$$

1.1.1 บทนิยาม เซต 2 เซตเท่ากันก็ต่อเมื่อมีสมาชิกเหมือนกัน

ถ้าเซต A เท่ากับเซต B เราเขียนแทนด้วย

$$A=B \quad (\text{หรือ } B=A)$$

ถ้า A ไม่เท่ากับ B เราเขียนแทนด้วย

$$A \neq B$$

ถ้าทุกสมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อย (subset) ของ B และเขียนแทนด้วย

$$A \subseteq B$$

ตัวอย่าง เช่น

$$A = \{ a, b \}$$

และ

$$B = \{ a, b, c \}$$

เพราะฉะนั้น $A \subseteq B$

ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \neq B$ นั่นคือ A เป็นเซตย่อยของ B และมีสมาชิกของ B อย่างน้อย 1 สมาชิกซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ A เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยแท้ของ B และเขียนแทนด้วย

$$A \subset B$$

ตัวอย่าง เช่น

$$A = \{ a, b, c \}$$

และ

$$B = \{a, b, c, d\}$$

เพราะว่า $A \subset B$ และ $d \in B$ แต่ $d \notin A$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

เซตที่ไม่มีสมาชิกเราเรียกว่า **เซตว่าง(empty set)** เขียนแทนด้วย

$\emptyset$

ถ้าเซตทั้งหมดภายใต้การพิจารณาเป็นเซตย่อยของเซต U เรากล่าวว่า U เป็น **เซตเอกภพ(universal set)**

ถ้า $U = \mathbf{N}$ เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ และ A เป็นเซตของจำนวนเต็มที่น้อยกว่า 50 เราเขียนแทนด้วย

$$A = \{x/x \in \mathbf{N} \text{ และ } x < 50\}$$

ถ้าหากเป็นที่เข้าใจแล้วว่า x คือจำนวนธรรมชาติ นั่นคือรู้ว่า $\mathbf{N}$ คือเซตเอกภพ เราอาจจะเขียนแทนด้วย

$$A = \{x/x < 50\}$$

เราสามารถสร้างเซตใหม่จากเซตเดิมโดยนิยามการกระทำบนเซตดังนี้

1.1.2 บทนิยาม ผลบวก(union)ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ อ่านว่า A บวก B หมายถึงเซตของสมาชิก A หรือ B

นั่นคือ

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

ตัวอย่าง 1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ และ $C = \{e, f, g\}$ แล้ว

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup C = \{a, b, c, e, f, g\}$$

#

1.1.3 บทนิยาม ผลตัด (intersection) ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$
อ่านว่า A ตัด B หมายถึงเซตของสมาชิกที่เป็นสมาชิกของ A และ B

นั่นคือ

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

ถ้า $A \cap B = \emptyset$ เราจะกล่าวว่า A และ B เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint set)

นั่นคือ 2 เซตเป็นเซตต่างสมาชิก ก็ต่อเมื่อ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

ตัวอย่าง 2. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, e, f\}$ และ $C = \{e, f, g, h\}$ แล้ว

$$A \cap B = \{a, b\}$$

$$B \cap C = \{e, f\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

#

1.1.4 บทนิยาม คอมพลีเมนต์ (complement) ของเซต A เขียนแทนด้วย A'
หมายถึงเซตของสมาชิกที่ไม่อยู่ใน A

นั่นคือ

$$A' = \{x / x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต B แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เรียกว่า คอมพลีเมนต์ของ A เทียบกับ B เขียนแทนด้วย

$$B-A$$

นั่นคือ

$$B-A = \{x/x \in B \text{ และ } x \notin A\}$$

ตัวอย่าง 3 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{3, 4, 5, 6\}$
แล้ว

$$A' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B-A = \{4, 5, 6\}$$

#

แบบฝึกหัด 1.1

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ และ $C = \{1, 2, 6\}$

ข้อ 1-ข้อ 12 ข้อใดเป็นจริง

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| 1. $1 \in A$ | 7. $B \subset A$ |
| 2. $5 \notin B$ | 8. $B \subseteq A$ |
| 3. $2 \notin A \cap B$ | 9. $B \cap A = \emptyset$ |
| 4. $6 \in B \cup C$ | 10. $A \cup B \subset A$ |
| 5. $4 \in A \cap C$ | 11. $A \cup B \subseteq A$ |
| 6. $A \subset B$ | 12. $B \cap A \subset A$ |

ข้อ 13-ข้อ 16 เขียนเซตโดยวิธีแจกแจงสมาชิก

13. $\{x/x \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } x^2 - 2x - 8 = 0\}$
14. $\{x/x \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ}\}$
15. $\{x/x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 100}\}$

16. $\{x/x=2n+1, n=1,2,3\}$

กำหนด $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ข้อ 17-ข้อ 19 เขียนเซตโดยวิธีแจกแจงสมาชิก

17. $\{x/x \in A \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนคี่}\}$

18. $\{x/x \in A \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$

19. $\{x/x \in A \text{ และ } x \text{ มากกว่า } 5\}$

ข้อ 20-ข้อ 23 เขียนเซตโดยวิธีบอกเงื่อนไข

20. เซตของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่า 200

21. เซตของจำนวนเต็มบวกคี่

22. เซตของจำนวนเต็มบวกและศูนย์

23. $\{3,9,27,81,243,---\}$

กำหนด $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,6,7\}$ และ $C=\{1,2,6,9\}$

จงหา

24. $A \cup B$

25. $B \cup C$

26. $A \cap B$

27. $A \cap C$

กำหนด $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,c,d,e\}$ และ $C=\{a,b,f,g\}$ จงหา

28. $A \cap (B \cup C)$

29. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

30. $A \cup (B \cap C)$

31. $(A \cup B) \cap C$

- 32 ถ้า A มีสมาชิก 8 สมาชิก B มีสมาชิก 5 สมาชิก และ $A \cap B$ มีสมาชิก 1 สมาชิก จงหาจำนวนสมาชิก $A \cup B$.

1.2 ระบบจำนวนจริง

เราจะเริ่มโดยการสมมติว่ามีเซต R สมาชิกในเซตเรียกว่าจำนวนจริง และมีการดำเนินการบนเซต เรียกว่า การบวก และการคูณ จำนวน 2 จำนวน x และ y บวกกันเขียนแทนด้วย $x+y$ คูณกันเขียนแทนด้วย $x.y$ (หรือ xy)

เซตของจำนวนจริงกับการดำเนินการบวกและคูณสอดคล้องสัจพจน์(axiom)ต่อไปนี้

สัจพจน์ 1. กฎการปิด(closure laws)

สำหรับจำนวนจริง $x, y \in R$ จะมี $s \in R$ เพียงตัวเดียวซึ่ง

$$x+y=s$$

และมี $p \in R$ เพียงตัวเดียวซึ่ง

$$xy=p$$

นั่นคือ เซตจำนวนจริงปิดภายใต้การบวกและการคูณ

สัจพจน์ 2. กฎการสลับที่(commutative laws)

สำหรับจำนวนจริง $x, y \in R$

$$x+y=y+x$$

และ

$$xy=yx$$

สัจพจน์ 3. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม(associative laws)

สำหรับจำนวนจริง $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

และ

$$x(yz) = (xy)z$$

สัจพจน์ 4. มี $0 \in \mathbb{R}$ มีคุณสมบัติ

$$0 + x = x \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

สัจพจน์ 5. มี $1 \in \mathbb{R}$ และ $1 \neq 0$ มีคุณสมบัติ

$$x \cdot 1 = x \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

สัจพจน์ 6. สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $-x \in \mathbb{R}$ มีคุณสมบัติ

$$x + (-x) = 0$$

สัจพจน์ 7. สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $x \neq 0$ จะมี x^{-1} มีคุณสมบัติ

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

สัจพจน์ 8. กฎการแจกแจง (distributive law)

สำหรับ $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x(y + z) = xy + xz$$

การดำเนินการ การลบ เรานิยามโดย

$$x - y = x + (-y)$$

$x-y$ อ่านว่า x ลบ y

การดำเนินการ การหาร เรานิยามโดย

$$\frac{x}{y} = xy^{-1}$$

$\frac{x}{y}$ อ่านว่า x หารโดย y หรือ ผลหารของ x โดย y บางทีเขียน $x \div y$ แทน $\frac{x}{y}$

โดยสัจพจน์ 5 มีจำนวนจริง 1 และ $1 \neq 0$ ดังนั้นโดยสัจพจน์ 1, 1+1 เป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนจำนวนเดียว เขียนแทนด้วย 2 โดยทำนองเดียวกัน $2+1$ เขียนแทนด้วย 3 จำนวนจริง $3+1$ เขียนแทนด้วย 4 โดยวิธีการนี้อย่างต่อเนื่องจะมีเซต

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ซึ่งเรียกว่า เซตของจำนวนธรรมชาติ

โดยสัจพจน์ 6 จะมีเซต

$$N_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

ให้ Z เป็นเซตที่ประกอบด้วยจำนวนธรรมชาติศูนย์ และเซตของลบของจำนวนธรรมชาติ

นั่นคือ

$$Z = N \cup \{0\} \cup N_-$$

เรียกว่า เซตของจำนวนเต็ม

ให้ $p, q \in Z$ เพราะว่า $Z \subseteq R$ เพราะฉะนั้น $p, q \in R$ ดังนั้น ถ้า $q \neq 0$, $\frac{p}{q} = pq^{-1}$

เป็นจำนวนจริง และเซต

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} / p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

เรียกว่า เซตของจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง เช่น $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ และ $\frac{0}{2}=0$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เนื่องจากสำหรับจำนวนเต็ม p ใดๆ เราสามารถเขียนแทนในรูปเศษส่วนได้คือ $\frac{p}{1}$ ดังนั้น

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

เซตที่สอดคล้องสัจพจน์ 1-8 เรียกว่า **ฟิลด์ (field)** เพราะฉะนั้น $\mathbb{R}$ เป็นฟิลด์

จากสัจพจน์ 1-8 มีคุณสมบัติของจำนวนจริงเพิ่มขึ้นมากมาย จะพิสูจน์ให้คุณเป็นตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. กฎการตัดออกสำหรับการคูณ

สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดที่ $c \neq 0, ac=bc$ ก็ต่อเมื่อ $a=b$

พิสูจน์ (i) ให้ $ac=bc$ โดยสัจพจน์ 7 จะมี c^{-1} นำ c^{-1} คูณทั้งสองข้าง

$$(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$$

โดยสัจพจน์ 3

$$a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$$

โดยสัจพจน์ 7

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

โดยสัจพจน์ 5

$$a = b$$

(ii) ให้ $a=b$ นำ c คูณทั้งสองข้าง จะได้ $ac=bc$ $\#$

ตัวอย่าง 2. สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ $ab=1$ ก็ต่อเมื่อ $a=b^{-1}$

พิสูจน์ (i) ให้ $ab=1$ เพราะว่า $b \neq 0$ ดังนั้นโดยสัจพจน์ 7 มี b^{-1} เพราะฉะนั้น

$$ab = b^{-1}b$$

โดยกฎการตัดออก

$$a = b^{-1}$$

(ii) ให้ $a=b^{-1}$ นำ b คูณทั้งสองข้าง จะได้ $ab = b^{-1}b = 1$ #

ตัวอย่าง 3. สำหรับจำนวนจริง a ใดๆที่ไม่เท่ากับศูนย์ $(a^{-1})^{-1} = a$

พิสูจน์ โดยสัจพจน์ 7 $aa^{-1} = 1$ ดังนั้นโดยตัวอย่าง 2 $a = (a^{-1})^{-1}$ #

ตัวอย่าง 4. สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ $ab=0$ ก็ต่อเมื่อ $a=0$ หรือ $b=0$

พิสูจน์ (i) ให้ $ab=0$ ถ้า $b \neq 0$ จะมี b^{-1} เพราะฉะนั้น

$$(ab)b^{-1} = ab^{-1}$$

$$a(bb^{-1}) = 0$$

$$a \cdot 1 = 0$$

$$a = 0$$

โดยทำนองเดียวกัน ถ้า $ab=0$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b=0$ เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า

ถ้า $ab=0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$

(ii) ให้ $b=0$ เพราะฉะนั้น

$$a+ab = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a(1+0) = a \cdot 1 = a = a+0$$

นั่นคือ $a+ab=a+0$

นำ $-a$ บวกทั้งสองข้าง

$$-a+(a+ab)=-a+a$$

โดยสัจพจน์₃ และสัจพจน์₆

$$(-a+a)+ab=0$$

โดยสัจพจน์₆

$$0+ab=0$$

โดยสัจพจน์₄

$$ab=0$$

#

ตัวอย่าง 5. สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ

$$(-a)b=-(ab)$$

พิสูจน์ โดยสัจพจน์₈และสัจพจน์₆

$$ab+(-a)b=[a+(-a)]b=0 \cdot b=0$$

ดังนั้น

$$ab+(-a)b=0$$

นำ $-(ab)$ บวกทั้งสองข้าง

$$-(ab)+[ab+(-a)b]=-(ab)+0$$

โดยสัจพจน์₃

$$[-(ab)+(ab)]+(-a)b=-(ab)+0$$

โดยสัจพจน์₆และสัจพจน์₄

$$0+(-a)b=-(ab)$$

โดยสัจพจน์₄

$$(-a)b=-(ab)$$

#

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิสูจน์ กฎการตัดออกสำหรับการบวก

นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดๆ $b=c$ ก็ต่อเมื่อ $a+b=a+c$

2. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ $a+b=0$ ก็ต่อเมื่อ $a=-b$

3. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ $-(-a)=a$

4. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ $(-a)(-b)=ab$

5. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ $a(-b)=-(ab)$

6. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดๆ $a(b-c)=ab-ac$

7. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดๆ $(b-c)a=ba-ca$

8. จงพิสูจน์ ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วสมการ $x+a=b$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ $b-a$

9. จงพิสูจน์ ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ $b \neq 0$ แล้วสมการ $bx=a$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ $\frac{a}{b}$

1.3 อสมการ(Inequality)

1.3.1 บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ เราจะกล่าวว่า a น้อยกว่า b และเขียนแทนด้วย $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b-a$ เป็นจำนวนจริงบวก

จะกล่าวว่า a มากกว่า b และเขียนแทนด้วย $a > b$ ก็ต่อเมื่อ $b-a$ เป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่าง เช่น $3 < 4$ เพราะว่า $4-3=1$ เป็นจำนวนจริงบวก

$-5 < -3$ เพราะว่า $-3-(-5)=2$ เป็นจำนวนจริงบวก

$5 > -2$ เพราะว่า $-2-5=-7$ เป็นจำนวนจริงลบ

$\frac{7}{9} > \frac{1}{3}$ เพราะว่า $\frac{1}{3}-\frac{7}{9}=-\frac{4}{9}$ เป็นจำนวนจริงลบ

โดย 1.3.1 บทนิยาม $a < b$ หมายความว่า $b-a$ เป็นจำนวนเต็มบวกเพราะฉะนั้น

$-(b-a)=a-b$ เป็นจำนวนเต็มลบ ดังนั้น $b > a$
 นั่นคือ โดย 1.3.1 สรุปรูปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

1.3.2 ทฤษฎีบท $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b > a$

สัจพจน์ 9. กฎไตรวิภาค (law of trichotomy)

สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ ข้อความใดข้อความหนึ่งต่อไปนี้จริงเพียงข้อความเดียว

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

1.3.3 ทฤษฎีบท $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนบวก และ $a < 0$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนลบ

พิสูจน์ โดย 1.3.2 ทฤษฎีบท $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $0 < a$ แต่โดย 1.3.1 บทนิยาม $0 < a$ ก็ต่อเมื่อ $a - 0 = a$ เป็นจำนวนบวก เพราะฉะนั้น $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนบวก

สำหรับการพิสูจน์ส่วนที่ 2 ก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน $\#$

ข้อความที่มีรูปแบบ $a < b$ หรือ $a > b$ เราเรียกว่าอสมการ

ตัวอย่าง เช่น $3x - 4 < 20$ เป็นอสมการและอสมการนี้จริงสำหรับบาง x

เมื่อแทน $x = 5$ ในอสมการจะได้

$$15 - 4 < 20 \quad \text{อสมการจริง}$$

เมื่อแทน $x = 100$ ในอสมการจะได้ $300 - 4 < 20$ อสมการไม่จริง

สำหรับ x ที่แทนลงในอสมการแล้วอสมการจริง เรากล่าวว่า x เป็นผลเฉลยของ

อสมการ

ดังนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการในตัวแปร x เป็นเซตของ x ซึ่งสอดคล้องอสมการ

ตัวอย่าง เช่น $x - 1 > 0$

เซตของผลเฉลยของอสมการคือจำนวนจริง x ทั้งหมดซึ่ง $x > 1$

การแก้อสมการคือ การหาเซตผลเฉลยของอสมการ

เราจะสรุปกฎเกณฑ์และทฤษฎีบทต่างๆที่ช่วยในการแก้อสมการดังต่อไปนี้

1.3.4 ทฤษฎีบท กฎการถ่ายทอดของอสมการ

สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดๆ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$

พิสูจน์ เพราะว่า $a < b$ และ $b < c$ เพราะฉะนั้น $b-a$ และ $c-b$ เป็นจำนวนบวก
เนื่องจาก 2 จำนวนบวกกันเป็นจำนวนบวก เพราะฉะนั้น

$$(b-a) + (c-b) > 0$$

หรือ $c-a > 0$

ดังนั้น $a < c$

จึงสรุปได้ว่า ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$ #

1.3.5 ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดๆ $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a+c < b+c$

พิสูจน์ (i) ให้ $a < b$ เพราะฉะนั้น $b-a$ เป็นจำนวนบวก

$$\text{แต่ } b-a = (b+c) - (a+c)$$

เพราะฉะนั้น $(b+c) - (a+c)$ เป็นจำนวนบวก

ดังนั้นโดย 1.3.1 บทนิยาม $a+c < b+c$

(ii) ให้ $a+c < b+c$ เพราะฉะนั้นโดย 1.3.1 บทนิยาม

$(b+c) - (a+c)$ เป็นจำนวนบวก

แต่ $(b+c) - (a+c) = b-a$ ดังนั้น $b-a$ เป็นจำนวนบวก เพราะฉะนั้นโดย 1.3.1

บทนิยาม $a < b$ #

1.3.6 ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใดๆ
ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$

พิสูจน์ ให้ $a < b$ และ $c < d$ เพราะฉะนั้น $b - a > 0$ และ $d - c > 0$ ดังนั้น

$$(b - a) + (d - c) > 0$$

หรือ

$$(b + d) - (a + c) > 0$$

โดย 1.3.๗ ทฤษฎีบท

$$a + c < b + d \quad \#$$

1.3.7 ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใดๆ ที่ $c \neq 0$

(i) ถ้า $c > 0, a < b$ ก็ต่อเมื่อ $ac < bc$

(ii) ถ้า $c < 0, a < b$ ก็ต่อเมื่อ $ac > bc$

พิสูจน์ ให้ $c > 0$

(i) ให้ $a < b$ เพราะฉะนั้น c และ $b - a$ เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น

$$c(b - a) > 0$$

แต่

$$c(b - a) = bc - ac$$

เพราะฉะนั้น

$$bc - ac > 0$$

หรือ

$$ac < bc$$

จึงสรุปได้ว่า ถ้า $c > 0$ และ $a < b$ แล้ว $ac < bc$

บทกลับ ให้ $ac < bc$

ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ ขัดแย้งสมมุติฐาน และ ถ้า $a > b$ แล้ว $ac > bc$ ก็ขัดแย้งสมมุติฐาน

เพราะฉะนั้นเหลือกรณีเดียวที่เป็นไปได้คือ $a < b$ จึงสรุปได้ว่า

ถ้า $c > 0$ และ $ac < bc$ แล้ว $a < b$

ดังนั้นมีข้อ (i)

สำหรับ (ii) ก็พิสูจน์แบบเดียวกับข้อ (i) จึงเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด #

โดย 5 ทฤษฎีบทข้างต้นเราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นจริง จึงเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

1.3.8 ทฤษฎีบท ถ้า a และ b มีเครื่องหมายเหมือนกัน และ $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

1.3.9 ทฤษฎีบท สำหรับ $a < b$

(i) ถ้า a และ b เป็นบวกทั้งคู่ แล้ว $a^2 < b^2$

(ii) ถ้า a และ b เป็นลบทั้งคู่แล้ว $a^2 > b^2$

สัญลักษณ์ เพื่อความสะดวกในการเขียนอธิบายเพื่อแก้สมการ เราจะนำสัญลักษณ์ ---> และ <---> มาใช้ ถ้า A และ B เป็นข้อความ สัญลักษณ์

$A \text{ ---> } B$ หมายความว่า ถ้า A จริงแล้ว B จริง

$A < \text{---> } B$ หมายความว่า A จริงก็ต่อเมื่อ B จริง

ถ้า $A < \text{---> } B$ เราจะกล่าวว่า A สมมูล (equivalent) กับ B

$a \leq b$ หมายความว่า $a < b$ หรือ $a = b$

$a < b < c$ หมายความว่า $a < b$ และ $b < c$

$a \leq b < c$ หมายความว่า $a \leq b$ และ $b < c$

ตัวอย่าง 1. จงแก้สมการ $5x - 4 < x + 5$

เฉลย เราจะหาเซตของผลเฉลย $\{ x/x \in \mathbb{R} \text{ และ } 5x - 4 < x + 5 \}$

จาก

$$5x-4 < x+5$$

บวก 4 ทั้งสองข้าง

$$5x < x+9$$

บวก $-x$ ทั้งสองข้าง

$$4x < 9$$

นำ $\frac{1}{4}$ คูณทั้งสองข้าง

$$x < \frac{9}{4}$$

ดังนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการคือ $\{x/x < \frac{9}{4}\}$ #ตัวอย่าง 2. จงแก้สมการ $-6 < 2x+3 < -1$ พิสูจน์ $-6 < 2x+3 < -1 \iff -6 < 2x+3$ และ $2x+3 < -1$

เพราะว่า

$$-6 < 2x+3 \iff -9 < 2x \iff -\frac{9}{2} < x$$

$$2x+3 < -1 \iff 2x < -4 \iff x < -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$-6 < 2x+3 < -1 \iff x > -\frac{9}{2} \text{ และ } x < -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการคือ $\{x/-\frac{9}{2} < x < -\frac{1}{2}\}$ #ตัวอย่าง 3. จงแก้สมการ $3x^2-11x-4 < 0$ ผลเฉลย $3x^2-11x-4 < 0 \iff (3x+1)(x-4) < 0$ ดังนั้น $(3x+1)$ และ $(x-4)$ จะมีเครื่องหมายต่างกัน

(i) ถ้า $x-4>0$ และ $3x+1<0$

$$x-4>0 \text{ และ } 3x+1<0 \text{ ----> } x>4 \text{ และ } x<-\frac{1}{3}$$

(ii) ถ้า $x-4<0$ และ $3x+1>0$

$$x-4<0 \text{ และ } 3x+1>0 \text{ ----> } x<4 \text{ และ } x>-\frac{1}{3}$$

ดังนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการคือ $\{x / -\frac{1}{3} < x < 4\}$ #

แบบฝึกหัด 1.3

ข้อ 1-ข้อ 20 จงแก้สมการ

1. $3x+4<x+4$

2. $3x-4<5x+1$

3. $6x-10>5x-16$

4. $2-8x>x+1$

5. $8\leq 6x-4<14$

6. $-1\leq 2x+3<2$

7. $4<5-3x<7$

8. $-2\leq x+3<3x+1$

9. $-\frac{1}{2} < \frac{1}{1-2x} < 3$

10. $-4 < \frac{1}{2x+5} \leq -1$

11. $4 < \frac{3}{7x-1} < 8$

12. $-2 \leq \frac{2}{2x+1} \leq 3$

13. $x^2 - x - 2 > 0$

14. $2x^2 + 7x - 15 > 0$

$$15. \quad x^3 - 7x + 6 < 0$$

$$16. \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3x+1} < 2$$

$$17. \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} > 3$$

$$18. \quad \frac{1}{2x} + \frac{2}{x-3} \leq 0$$

$$19. \quad \sqrt{3x-3} > x-7$$

$$20. \quad \sqrt{2-3x} \leq \sqrt{2x+1}$$

$$21. \quad \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x}-1} < 2$$

22. จงพิสูจน์ 1.3.7 ทฤษฎีบทข้อ(ii)

23. จงพิสูจน์ 1.3.8 และ 1.3.9 ทฤษฎีบท

24. สำหรับ $y < x < 0$ จงพิสูจน์ว่า $x^2 < y^2$

25. สำหรับ $x > 0$ และ $y > 0$ จงพิสูจน์

$$(a) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$$

$$(b) \quad \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}.$$

1.4 เซตมีขอบเขต

1.4.1 บทนิยาม ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า S มีขอบเขต ถ้ามีจำนวนจริง u ซึ่ง

$$x \leq u \quad \text{สำหรับทุก } x \in S$$

และ u เรียกว่า **ขอบเขตบน**(upper bound) ของ S

ตัวอย่างเช่น $5, 6, 7$ เป็นขอบเขตบนของเซต $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$1, 2, 3, \frac{1}{2}$ เป็นขอบเขตบนของเซตของจำนวนจริงลบทั้งหมด

1.4.2 นิยาม ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า u เป็น**ขอบเขตบน**
ค่าน้อยสุด(least upper bound เขียนย่อ l.u.b.) ของ S
ถ้า

(i) u เป็นขอบเขตบนของ S

(ii) $u \leq u'$ สำหรับทุกขอบเขตบน u' ของ S

ตัวอย่างเช่น -1 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซต $\{-3, -2, -1\}$

0 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตของจำนวนจริงลบ

4 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซต $\{x/x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 16\}$

ขอบเขตบนมีได้จำนวนอนันต์ แต่ขอบเขตบนค่าน้อยสุดจะมีเพียงตัวเดียว

1.4.3 นิยาม ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า S มี**ขอบเขตล่าง**
ถ้ามีจำนวนจริง v ซึ่ง $x \geq v$ สำหรับทุก $x \in S$ และ v เรียกว่า **ขอบเขตล่าง**
(lower bound) ของ S

ตัวอย่างเช่น $S = \{1, 2, 3, 4\}$ มี $-1, -2, 0$ เป็นขอบเขตล่าง

เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมดมี $0, -1, -2$ เป็นขอบเขตล่าง

1.4.4 นิยาม ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า v เป็น**ขอบเขตล่าง**
ค่ามากที่สุด(greatest lower bound เขียนย่อ g.l.b. ของ S) ถ้า

(i) v เป็นขอบเขตล่างของ S

(ii) $v \geq v'$ สำหรับทุก v' ที่เป็นขอบเขตล่างของ S

ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ มี 1 เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุด

เซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมดมี 1 เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุด
 ขอบเขตล่างจะมีได้จำนวนอนันต์ แต่ขอบเขตล่างค่ามากที่สุดมีได้เพียงตัวเดียว
 ข้อสังเกต ขอบเขตล่างค่าน้อยสุดและขอบเขตบนค่ามากที่สุดของ S ไม่จำเป็นต้องอยู่ใน S

สัจพจน์ 10. สัจพจน์ของความบริบูรณ์ (axiom of completeness)

เซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริงที่มีขอบเขตบนจะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเป็นจำนวนจริง
 และเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริงที่มีขอบเขตล่างจะมีขอบเขตล่างค่ามากที่สุดเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนตรรกยะน้อยกว่า 100 มี 100 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด
 เซตของจำนวนตรรกยะมากกว่า 100 มี 100 เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุด

4.1.5 บทนิยาม ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เรียกว่าจำนวนอตรรกยะ (irrational numbers)

ตัวอย่างเช่น $S = \{ x/x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2 \}$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะซึ่งกำลังสองน้อยกว่า 2 จำนวน 1.2, 1.3 และ 1.4 เป็นสมาชิกของ S เพราะว่า

$$(1.2)^2 = 1.44$$

$$(1.3)^2 = 1.69$$

และ $(1.4)^2 = 1.96$ น้อยกว่า 2

1.5 ไม่อยู่ใน S เพราะว่า

$$1.5^2 = 2.25$$

$$(1.5)^2 = 2.25 > 2$$

เนื่องจาก ถ้า $x > 1.5$ แล้ว $x^2 > 2.25 > 2$ ดังนั้น $x < 1.5$ สำหรับทุก $x \in S$ และพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า S ไม่มีขอบเขตบนเป็นจำนวนตรรกยะ (แบบฝึกหัด 4.1 ข้อ 6) เนื่องจาก $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ เพราะฉะนั้น $S \subseteq \mathbb{R}$ ดังนั้นโดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ S จะมีขอบเขตบนค่าน้อย

สุดและเขียนแทนด้วย $\sqrt{2}$

ทุกจำนวนจริงเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตของจำนวนตรรกยะบางเซต

ดังนั้นเซตของจำนวนจริงจึงประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

ระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวนจะมีจำนวนตรรกยะเสมอ ดังนั้นจำนวนตรรกยะจึงมีได้จำนวนอนันต์

แบบฝึกหัด 1.4

ข้อ 1- ข้อ 5 จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตที่กำหนดให้ และตรวจดูว่าขอบเขตบนค่าน้อยสุดอยู่ในเซตที่กำหนดให้หรือไม่

1. $\{ x/x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 16 \}$

2. $\{ x/x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 7 \}$

3. $\{ x/x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 3 \}$

4. $\{ x/x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 9 \}$

5. $\{ x/x = \frac{2^n - 1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \}$

6. ให้ $S = \{ x/x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2 \}$ จงพิสูจน์ S ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเป็นจำนวนตรรกยะ.

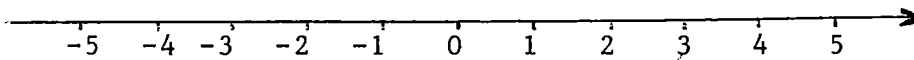
1.5 เส้นจำนวนและช่วง

เราสามารถเขียนแทนเซตของจำนวนจริงได้ด้วยเส้นตรงที่มีความยาวไม่จำกัด เรียกว่าเส้นจำนวน(number line) หรือ เส้นจริง(real line) ได้ดังนี้

ลากเส้นตรงที่มีความยาวไม่จำกัด เลือก 2 จุดใดๆบนเส้นนี้แทนด้วย 0 และ 1 ให้ 1 อยู่ทางขวา 0 ทิศทางจาก 0 ไป 1 เรียกว่า ทิศทางบวก ทิศทางตรงกันข้าม เรียกว่า ทิศทางลบ ให้ความยาวจาก 0 ถึง 1 เป็นความยาว 1 หน่วย ให้จำนวนจริงบวกเป็นจุดทางขวามือ 0 จำนวนจริงลบเป็นจุดทางซ้ายมือ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวก จะ

เป็นจุดอยู่ทางขวามือ 0 วัดไป x หน่วย ถ้า x เป็นจำนวนจริงลบจะเป็นจุดอยู่ซ้ายมือ 0 วัดไป $-x$ หน่วย

รูป 1.4.1 แสดงเส้นจำนวนและจุดบางจุดบนเส้นจำนวน



รูป 1.5.1 เส้นจำนวน

จะเห็นว่าจำนวนจริงทุกจำนวนสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวนและจุดบนเส้นจำนวนสามารถแทนได้ด้วยจำนวนจริง คุณสมบัติแบบนี้เราจะกล่าวว่าการ **สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence)** ระหว่างจำนวนจริงและจุดบนเส้นจำนวน

จำนวนที่สมนัยกับจุด p เราเรียกว่าพิกัดของจุด p

โดยทั่วไปเมื่อกล่าวถึงจุด x เราจะหมายถึงจุดที่มีพิกัดเป็นจำนวนจริง x

เมื่อกล่าวถึงเซตของจำนวนจริงก็จะหมายถึงเซตของจุดบนเส้นจำนวน

1.5.1 บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a < b$

ช่วงเปิด (open interval) (a, b) นิยามโดย

$$(a, b) = \{ x / a < x < b \}$$

ช่วงปิด (closed interval) $[a, b]$ นิยามโดย

$$[a, b] = \{ x / a \leq x \leq b \}$$

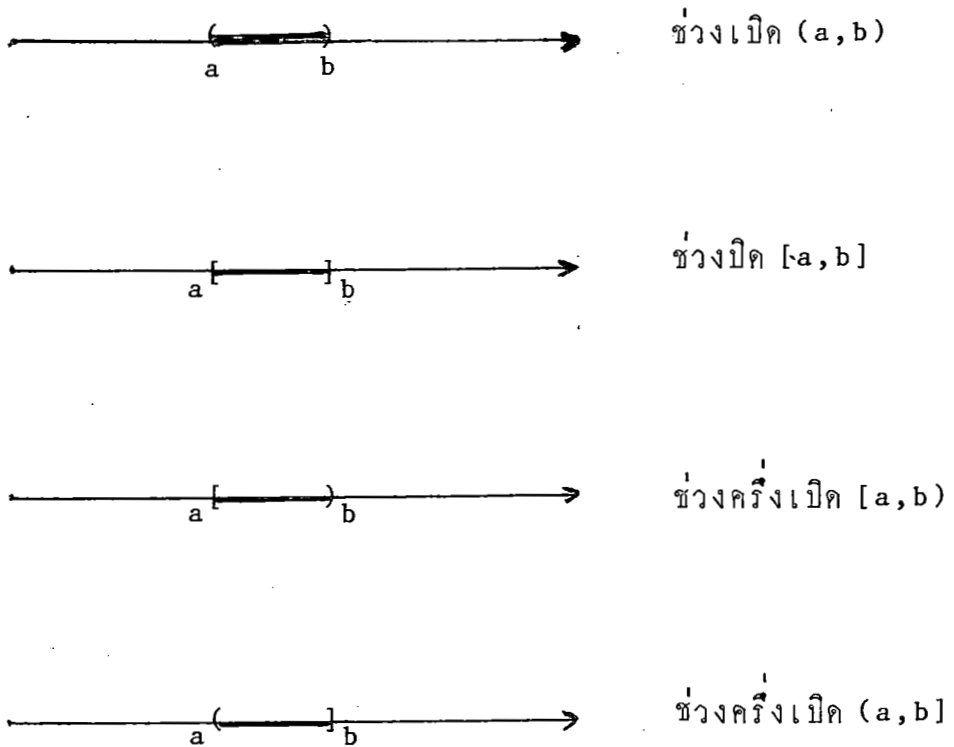
ช่วงครึ่งเปิด (half-open interval) $[a, b)$ และ $(a, b]$ นิยามโดย

$$[a, b) = \{x/a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x/a < x \leq b\}$$

1.5.2 บทนิยาม ให้ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbf{R}$ เซตของจุดบนเส้นจำนวนที่สมนัยกับสมาชิกของเซต S เรียกว่ากราฟของ S

ดังนั้นช่วงใน 1.5.1 บทนิยามจึงเขียนกราฟได้ดังรูป 1.5.2



รูป 1.5.2

(a, b) กราฟประกอบด้วยจุดระหว่าง a และ b แต่ไม่รวมจุดปลาย a และ b

$[a, b]$ กราฟประกอบด้วยจุดปลาย a และ b และจุดระหว่าง a และ b

$[a, b)$ กราฟประกอบด้วยจุด a และ จุดระหว่าง a และ b แต่ไม่รวมจุดปลาย b

$(a, b]$ กราฟประกอบด้วยจุด b และจุดระหว่าง a และ b แต่ไม่รวมจุดปลาย a

เพื่อความสะดวกเราจะนำสัญลักษณ์ ∞ มาใช้ซึ่งแปลว่ามากไม่สิ้นสุด อ่านว่า อนันต์
โดยนิยาม

$$[a, \infty) = \{x/x \in \mathbf{R}, x \geq a\}$$

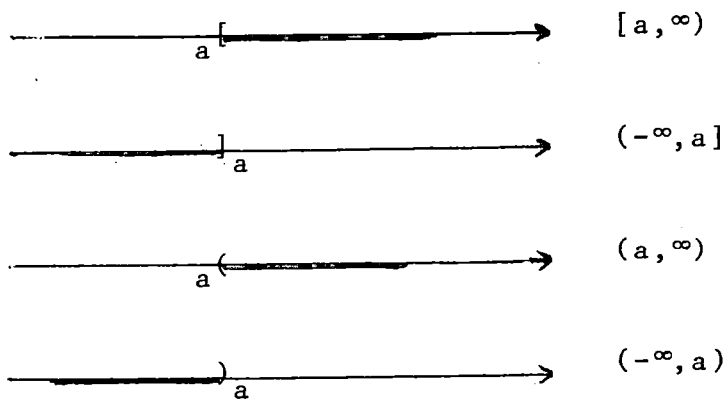
$$(-\infty, a] = \{x/x \in \mathbf{R}, x \leq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x/x \in \mathbf{R}, x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x/x \in \mathbf{R}, x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$$

เขียนกราฟได้ดังรูป 1.5.3



รูป 1.5.3

และ $(-\infty, \infty)$ ก็คือเส้นจำนวน

1.6 ค่าสัมบูรณ์

1.6.1 บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์(absolute value)ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} |x| &= x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ \text{และ } |x| &= -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{aligned}$$

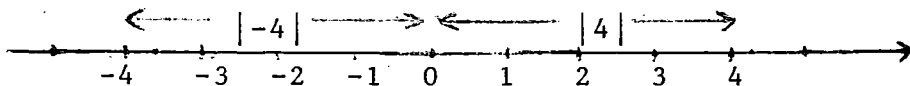
เขียนสั้นๆดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น $|4| = 4$, $|-4| = -(-4) = 4$, $|0| = 0$,

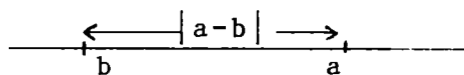
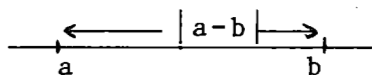
$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{ถ้า } x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & \text{ถ้า } x-5 < 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่า $|-4| = |4|$ ถ้าพิจารณาจากเส้นจำนวน(รูป 1.6.1) จะเห็นว่า -4 และ 4 ห่างจาก 0 เท่ากัน ซึ่งเป็นแนวที่จะทำให้เราเห็นความจริงว่า ค่าสัมบูรณ์ของ x คือระยะทางระหว่าง 0 และ x



รูป 1.6.1

$|a-b|$ คือระยะทางระหว่าง a และ b



รูป 1.6.2

1.6.2 ทฤษฎีบท ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว $|ab| = |a||b|$

พิสูจน์ เพราะว่า ab เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้นข้อความใดต่อไปนี้จริงเพียงข้อความเดียว

$$ab > 0, \quad ab = 0, \quad ab < 0$$

(i) ถ้า $ab > 0$ แล้ว a และ b มีเครื่องหมายเหมือนกัน ดังนั้น

$$|a||b| = ab \quad \text{หรือ} \quad |a||b| = (-a)(-b) = ab$$

เนื่องจาก $ab > 0$ เพราะฉะนั้น $|ab| = ab$ ดังนั้น $|a||b| = |ab|$

ถ้า $ab < 0$ แล้ว a และ b มีเครื่องหมายต่างกัน ดังนั้น

$$|a||b| = (-a)b \quad \text{หรือ} \quad |a||b| = a(-b)$$

$$= -(ab)$$

$$= -(ab)$$

เนื่องจาก $ab < 0$ ดังนั้น $|ab| = -(ab)$ เพราะฉะนั้น $|a||b| = |ab|$

(iii) ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ ดังนั้น $|a||b| = 0$

เพราะว่า $ab = 0$ เพราะฉะนั้น $|ab| = 0$ ดังนั้น $|a||b| = |ab|$

เพราะฉะนั้น ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว $|ab| = |a||b|$ #

1.6.3 ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ ถ้า $b \neq 0$ แล้ว

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

พิสูจน์ จาก 1.6.2 ทฤษฎีบท

$$|b| \left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{ba}{b} \right| = |a|$$

ดังนั้น $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ #

1.6.4 ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง $a > 0$, $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

พิสูจน์ (i) ให้ $|x| < a$ เพราะว่า $a > 0$ เพราะฉะนั้น $-a < 0$

ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $|x| = x$ ดังนั้น $-a < 0 < x = |x| < a$ นั่นคือ $-a < x < a$

ถ้า $x < 0$ แล้ว $|x| = -x$ ดังนั้น $-a < 0 < -x = |x| < a$ หรือ $-a < -x < a$

เพราะฉะนั้น $-a < x < a$ จึงสรุปได้ว่า ถ้า $|x| < a$ แล้ว $-a < x < a$

(ii) ให้ $-a < x < a$

ถ้า $0 \leq x$ แล้ว $-a < |x| = x < a$

ถ้า $x < 0$ แล้ว $x > -a$

เพราะฉะนั้น $-a < |x| = -x < a$ นั่นคือ $|x| < a$ จึงสรุปได้ว่า

ถ้า $-a < x < a$ แล้ว $|x| < a$

เพราะฉะนั้นโดย (i) และ (ii) $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$ #

ดังนั้น ถ้า $a > 0$, b และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$$|x-b| < a \iff -a < x-b < a \\ \iff b-a < x < b+a$$

1.6.4 ทฤษฎีบท(อสมการสามเหลี่ยม Triangle inequality)

สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

พิสูจน์ เพราะ $-|a| \leq a \leq |a|$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

เพราะฉะนั้น $-(|a| + |b|) \leq a+b \leq (|a| + |b|)$

หรือ $|a+b| \leq |a| + |b|$ #

ตัวอย่าง 1. จงแก้สมการ $|2x-5| \leq 5$

ผลเฉลย $|2x-5| \leq 5 \iff -5 \leq 2x-5 \leq 5 \iff 0 \leq 2x \leq 10 \iff 0 \leq x \leq 5$

ดังนั้นเซตของผลเฉลยของสมการคือ $\{x/0 \leq x \leq 5\}$ (รูป 1.6.3) #



รูป 1.6.3

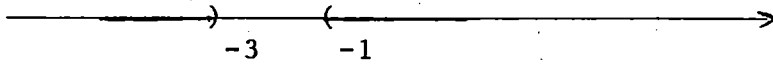
ตัวอย่าง 2. จงแก้สมการ $|4x+8| > 4$

ผลเฉลย $|4x+8| = 4x+8$ หรือ $|4x+8| = -(4x+8)$

(i) ถ้า $|4x+8| = 4x+8$, $|4x+8| > 4 \iff 4x+8 > 4 \iff x > -1$

(ii) ถ้า $|4x+8| = -(4x+8)$, $|4x+8| > 4 \iff -(4x+8) > 4 \iff x < -3$

ดังนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการ $\{x/x > -1 \text{ หรือ } x < -3\}$ (รูป 1.6.4) #



รูป 1.6.4

ตัวอย่าง 3. จงแก้สมการ $|3-4x| < 5|x+1|$

ผลเฉลย เพราะว่า $|3-4x| \geq 0$ เพราะฉะนั้น $|x+1| > 0$ ดังนั้น

$$|3-4x| < 5|x+1| \iff \left| \frac{3-4x}{x+1} \right| < 5 \iff -5 < \frac{3-4x}{x+1} < 5$$

(i) ถ้า $x+1 > 0$

$$-5 < \frac{3-4x}{x+1} < 5 \iff -5x-5 < 3-4x < 5x+5 \iff -5x-5 < 3-4x \text{ และ } 3-4x < 5x+5$$

$$\iff -8 < x \text{ และ } -\frac{2}{9} < x$$

$$\text{ดังนั้น } x > -1, x > -8 \text{ และ } x > -\frac{2}{9}$$

เพราะฉะนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการเมื่อ $x+1 > 0$ คือ $\{x/x > -\frac{2}{9}\}$

(ii) ถ้า $x+1 < 0$

$$-5 < \frac{3-4x}{x+1} < 5 \iff -5x-5 > 3-4x > 5x+5 \iff -5x-5 > 3-4x \text{ และ } 3-4x > 5x+5$$

$$\iff -8 > x \text{ และ } -\frac{2}{9} > x$$

$$\text{ดังนั้น } x < -1, x < -8 \text{ และ } x < -\frac{2}{9}$$

เพราะฉะนั้นเซตของผลเฉลยของอสมการเมื่อ $x+1 < 0$ คือ $\{x/x < -8\}$

โดย (i) และ (ii) สรุปได้ว่าเซตของผลเฉลยของอสมการคือ
 $\{x/x > -\frac{2}{9} \text{ หรือ } x < -8\}$ #

สำหรับตัวอย่าง 3 อาจจะใช้วิธียกกำลังสองทั้งสองข้างคือ

$$|3-4x|^2 < 25|x+1|^2$$

$$9-24x+16x^2 < 25(x^2+2x+1)$$

$$0 < 9x^2+74x+16$$

$$0 < (9x+2)(x+8)$$

แล้วพิจารณาหาผลเฉลยจากอสมการสุดท้าย

แบบฝึกหัด 1.6

ข้อ 1-ข้อ 6 เขียนกราฟของช่วง

1. $(-5, 2)$
2. $[-5, 2]$
3. $(-5, 2]$
4. $[-5, 2)$
5. $\{x/x \geq 2\}$
6. $\{x/x \leq -3\}$

ข้อ 7-ข้อ 23 จงแก้สมการ

$$7. |x-3| < 4$$

8. $|2x-7| < 3$
9. $|4x-9| > 7$
10. $(x+3)(x-1)(x-2) > 0$
11. $(x+1)(2x-1)(x-4) < 0$
12. $\left| \frac{x-1}{2x-3} \right| \leq 2$
13. $|2x-1| \leq 3x-4$
14. $|2x+1| \leq |2x|+1$
15. $|2x+3| < 5x-1$
16. $\frac{(2x-3)(x+1)}{(x+5)(3x-1)} > 0$
17. $|1-3x| < 2|x+3|$
18. $|2x^2+x-1| < 2x^2+|x-1|$
19. $\left| \frac{1}{x-2} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \right|$
20. $\left| \frac{1}{2x-5} \right| \geq \left| \frac{3}{x-1} \right|$
21. $\left| 2-\frac{3}{x} \right| \leq 5$
22. $|2x-1| \leq 3x-4$
23. $|2x+1| \leq |2x|+1$
24. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง x, y ใดๆ $|x-y| \leq |x|+|y|$
[แนะ: แทน y ด้วย $-y$ แล้วใช้ 1.6.4 ทฤษฎีบท]
25. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง x, y ใดๆ $|x|-|y| \leq |x-y|$
[แนะ: เขียน $x=y+(x-y)$ แล้วใช้ 1.6.4 ทฤษฎีบท]
26. จงพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใดๆ $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$.

1.7 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการพิสูจน์ที่ได้จากสัจพจน์

สัจพจน์ 11. (สัจพจน์การอุปนัย (axiom of induction))

ถ้า S เป็นเซตย่อยของ N มีคุณสมบัติ

- (i) $1 \in S$ และ
 - (ii) ถ้า $k \in S$ แล้ว $k+1 \in S$
- แล้ว $S=N$

เรานำสัจพจน์การอุปนัยมาใช้โดยสมมุติ $P(n)$ แทนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ เมื่อ n เป็นจำนวนธรรมชาติ และ ให้ $S = \{ n / P(n) \}$ ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า

- (i) $P(1)$ จริง ก็แปลว่า $1 \in S$
- (ii) ถ้า $P(k)$ จริง แล้ว $P(k+1)$ จริง ก็แปลว่า ถ้า $k \in S$ แล้ว $k+1 \in S$

โดยสัจพจน์ 11 ก็สรุปได้ว่า $S=N$ เมื่อ $S=N$ ก็สรุปได้ว่า $P(n)$ จริงสำหรับทุก $n \in N$ เพื่อความสะดวกในการเขียนพิสูจน์ เราจะลดขั้นตอนบางอย่างดังนี้

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า

- (i) $P(1)$ จริง
- (ii) ถ้า $P(k)$ จริง แล้ว $P(k+1)$ จริง

จึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in N$ ซึ่งแปลว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริงสำหรับทุก $n \in N$

ตัวอย่าง 1. จงพิสูจน์ว่า

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

สำหรับทุก $n \in N$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(i) เพราะว่า $1=\frac{1(1+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ จริง

(ii) ให้ $P(k)$ จริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ
เพราะฉะนั้น

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

นำ $k+1$ บวกทั้งสองข้าง

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ จริง

ดังนั้น $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

นั่นคือ

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 2. จงพิสูจน์

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(i) เพราะว่า $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ จริง

(ii) ให้ $P(k)$ จริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

เพราะฉะนั้น

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

นำ $(k+1)^2$ บวกทั้งสองข้าง

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ จริง

ดังนั้นสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

นั่นคือ

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbf{N} \quad \#$$

ถึงแม้ข้อความที่ต้องการพิสูจน์จะเริ่มจากจำนวนเต็มบวก $n \neq 1$ ก็สามารถประยุกต์
สัจพจน์ 1 มาใช้ได้ดังตัวอย่าง 3

ตัวอย่าง 3. ให้ $a > -1$ และ $a \neq 0$ จงพิสูจน์

$$(1+a)^n > 1+na$$

สำหรับทุก $n \in \mathbf{N}$ และ $n \geq 2$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(1+a)^n > 1+na$

(i) เพราะ $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$ เพราะฉะนั้น $P(2)$ จริง

(ii) ให้ $P(k)$ จริงเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใดที่มากกว่า 1 เพราะฉะนั้น

$$(1+a)^k > 1+ka$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $1+a$

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a+ka^2 > 1+(k+1)a$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ จริง ดังนั้น $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \geq 2$ นั่นคือเมื่อ $a > -1$

และ $a \neq 0$, $(1+a)^n > 1+na$ สำหรับทุก $n \in \mathbf{N}$ และ $n \geq 2$ $\#$

แบบฝึกหัด 1.7

ข้อ 1-ข้อ 4 จงพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1. \quad 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$2. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$3. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$4. \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

5. จงพิสูจน์ สูตรการก้าวหน้าเลขคณิต(arithmetic progression)

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-1)d] = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

6. จงพิสูจน์ สูตรการก้าวหน้าเลขคณิต(geometric progression)

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

7. จงพิสูจน์ว่า $x-y$ เป็นตัวประกอบ(factor)ของ $x^n - y^n$

8. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ ถ้า $a < b$ แล้ว $a^n < b^n$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

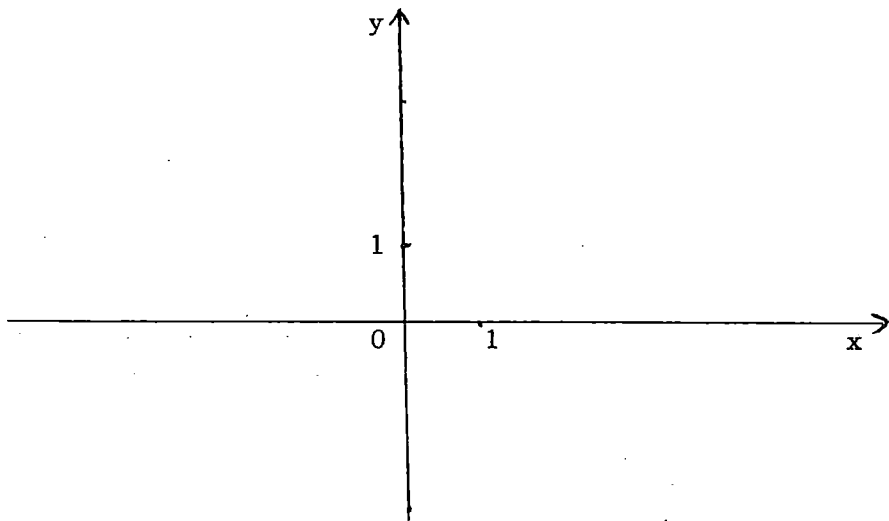
9. จงพิสูจน์ $2^n < n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 3.

บทที่ 2

ระนาบคาร์ทีเซียน

2.1 พิกัดคาร์ทีเซียน

กำหนดเส้นจำนวน 2 เส้น ตั้งฉากกันที่จุด 0 และมีหน่วยความยาวเดียวกัน เส้นหนึ่งวางอยู่ในแนวนอนทิศทางบวกไปทางขวา อีกเส้นวางอยู่ในแนวตั้งทิศทางบวกพุ่งขึ้นข้างบน (รูป 2.1.1)

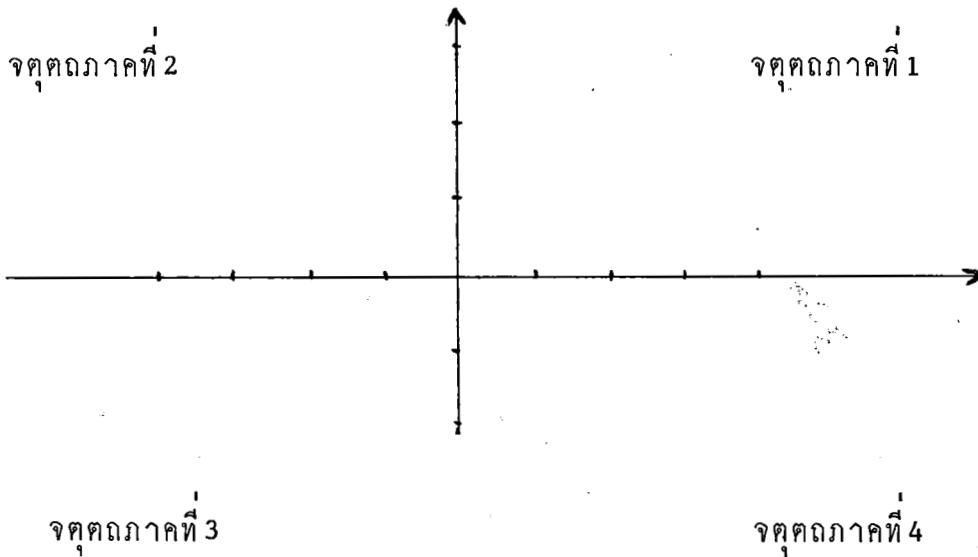


รูป 2.1.1

เส้นแนวนอน ox เรียกว่า แกน x เส้นแนวตั้ง oy เรียกว่า แกน y แกนทั้งสอง เรียกว่า แกนพิกัด (coordinate axis) จุด O ซึ่งเป็นผลตัดของ 2 เส้นเรียกว่า จุดกำเนิด (origin)

ระนาบที่มีแกนพิกัด x และแกนพิกัด y เรียกว่า ระนาบ xy หรือ ระนาบพิกัดฉาก หรือ ระนาบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian plane)

แกนพิกัดจะแบ่งระนาบเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จุดตัดภาค (quadrant) (รูป 2.1.2)

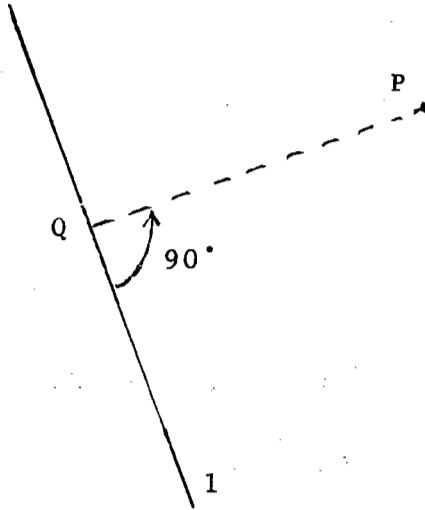


รูป 2.1.2

ถ้า P เป็นจุดใดๆบนระนาบ และ l เป็นเส้นตรงบนระนาบ โปรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง l เราจะหมายถึงผลตัดของเส้นตรง l กับเส้นตรงที่ผ่าน P และตั้งฉากกับ l (รูป 2.1.3)

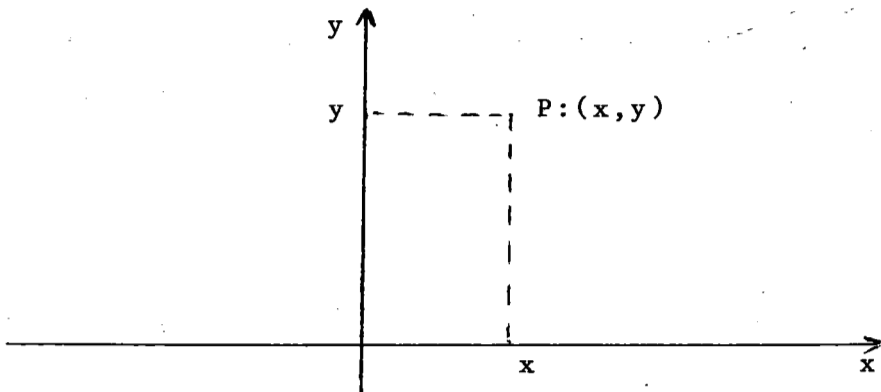
ไม่ว่า P จะเป็นจุดใดๆบนระนาบ จะสมนัยกับจำนวนคู่หนึ่ง เรียกว่า พิกัด (coordinate) ของจุด P จำนวนแรกเรียกว่า พิกัดที่หนึ่ง (abscissa) เป็นโปรเจกชันของจุด P

บนแกน x บางที่เรียกว่าพิภัก x จำนวนที่สองเรียกว่า พิกัดที่สอง
เป็นโพรเจกชันของจุด P บนแกน y บางที่เรียกว่าพิภัก y



รูป 2.1.3 Q เป็นโพรเจกชันของจุด P บน l

ถ้า (x, y) เป็นพิภักของจุด P (รูป 2.1.4)

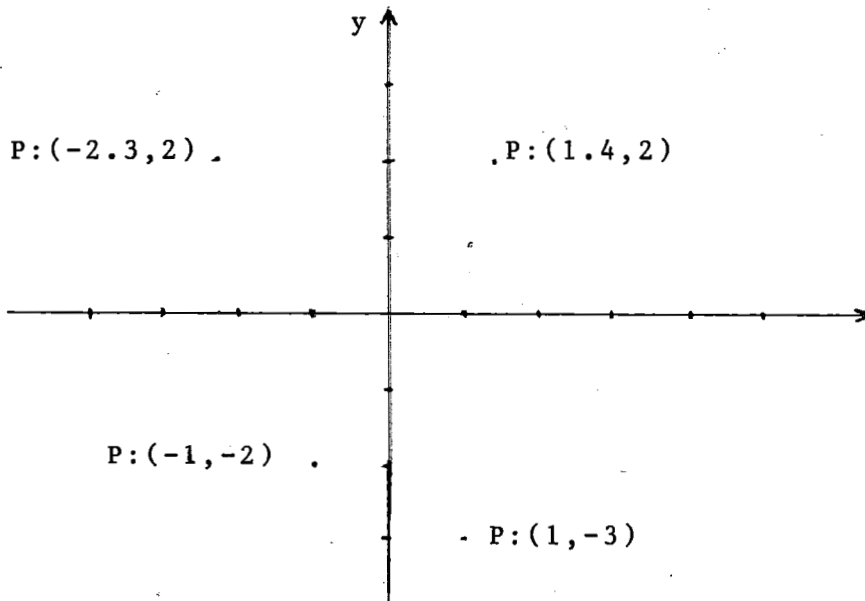


รูป 2.1.4

เราใช้สัญลักษณ์ $P:(x,y)$ แทนจุด P บนระนาบ

ตัวอย่างเช่น $P:(1.4,2)$ จะแทนจุด P โดยพิกัดของจุด P มีพิกัดที่หนึ่ง คือ 1.4 และมีพิกัดที่สอง คือ 2 (รูป 2.1.5)

$P:(-2.3,2)$ จะแทนจุด P โดยพิกัดของจุด P มีพิกัดที่หนึ่ง คือ -2.3 และ พิกัดที่สอง คือ 2 (รูป 2.1.5)



รูป 2.1.5

$P:(-1,-2)$ จะแทนจุด P มีพิกัดที่หนึ่ง คือ -1 พิกัดที่สอง คือ -2

(รูป 2.1.5)

$P:(1,-3)$ จะแทนจุด P มีพิกัดที่หนึ่ง คือ 1 พิกัดที่สอง คือ -3

(รูป 2.1.5)

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงเขียนจุดที่มีพิกัดต่อไปนี้บนระนาบ

$$(4, 2), (4, -2), (-4, 2), (-4, -2)$$

2. โดยประมาณเขียนจุดต่อไปนี้บนระนาบ

$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \sqrt{3}), (2+\sqrt{2}, -2), (\sqrt[3]{6}, \sqrt{6})$$

3. อธิบายตำแหน่งของจุด $P:(x, y)$ ในระนาบ xy ซึ่ง

a. $x > 0$

f. $x = \sqrt{x^2}$

b. $x > 0$ และ $y < 0$

g. $x < 0$ และ $y \geq 0$

c. $x = 0$

h. $|y| = -|x|$

d. $x = y$

i. $y > x$

e. x และ y มีเครื่องหมายเหมือนกัน

j. $x = 3$ และ $y = 4$

4. อธิบายตำแหน่งของจุด $P:(x, y)$ ในระนาบ xy ซึ่ง

a. $y > 0$

f. $x = 4$ และ $y = -5$

b. $y = 0$

g. $x > 4$ และ $y = -3$

c. $y = 3$ และ $x \geq 0$

h. $y > |x|$

d. $|x| \geq 3$

i. $-|x| \leq y \leq |x|$

e. x และ y มีเครื่องหมายเหมือนกัน

j. $xy = 0$

5. กำหนดจุด $P:(x, y)$ จงหาพิกัดของจุด Q ที่ทำให้เส้นตรง PQ ตั้งฉากกับแกน x และถูกแกน x แบ่งครึ่ง

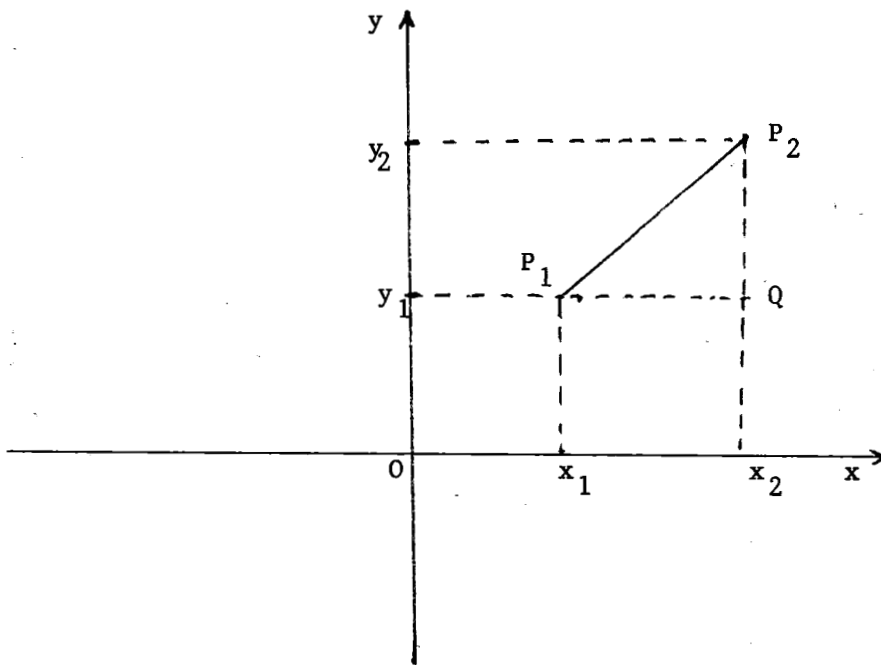
6. กำหนดจุด $P:(4, -6)$ จงหาพิกัดของจุด Q ที่ทำให้เส้นตรง PQ ตั้งฉากกับแกน y และถูกแกน y แบ่งครึ่ง

7. กำหนดจุด $P:(-1, 3)$ จงหาพิกัดของจุด Q ที่ทำให้เส้นตรง PQ ถูกจุด O แบ่งครึ่ง

8. กำหนดจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ จงหาพิกัดของจุดยอดของสามเหลี่ยมนี้.

2.2 ระยะทางระหว่าง 2 จุด

ให้ $P_1:(x_1, y_1)$ และ $P_2:(x_2, y_2)$ เป็น 2 จุดใดๆ ในระนาบ ถ้าเส้นตรง P_1P_2 ไม่ขนานกับแกน x เราให้ Q แทนจุดซึ่งเป็นผลตัดของเส้นตรงซึ่งผ่าน P_1 ขนานกับแกน x กับเส้นตรงที่ผ่าน P_2 ขนานกับแกน y (รูป 2.2.1)



รูป 2.2.1

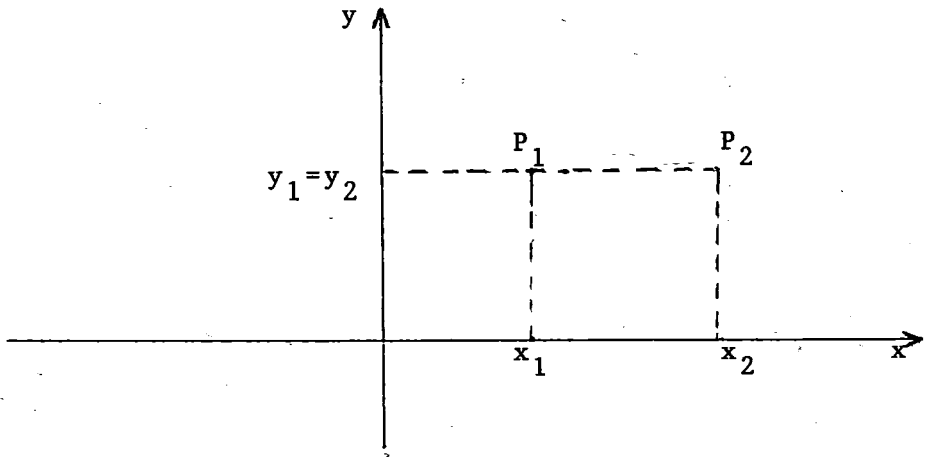
เพราะว่า P_1QP_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean theorem)

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2$$

แต่ $|P_1Q| = |x_2 - x_1|$ และ $|QP_2| = |y_2 - y_1|$ ดังนั้น

$$|P_1P_2| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

ถ้าเส้นตรง P_1P_2 ขนานกับแกน x (รูป 2.2.2)



รูป 2.2.2

แล้ว $y_1 = y_2$ เพราะฉะนั้น $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$ โดยทำนองเดียวกัน ถ้า P_1P_2 ขนานกับแกน y , $|P_1P_2| = |y_2 - y_1|$

2.2.1 บทนิยาม ระยะทาง (ไม่ระบุทิศทาง) ระหว่าง 2 จุด $P_1:(x_1, y_1)$ และ $P_2:(x_2, y_2)$ หรือความยาวส่วนบนเส้น P_1P_2 คือ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.2.1)$$

บางครั้งเพื่อความสะดวกเราจะใช้คำว่า จุด (x, y) แทนค่ากล่าวว่าจุดนี้มีพิกัด (x, y)

ตัวอย่าง 1. จงหาระยะทางระหว่างจุด $P:(-1, 3)$ และ $Q:(1, -2)$

ผลเฉลย จากสูตร (2.2.1)

$$|PQ| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{29}$$

#

คู่ของจำนวนจริงซึ่งเป็นพิกัดของจุดในระนาบ xy เรียกว่า **คู่อันดับ** ของจำนวนจริง
สองคู่อันดับ (a, b) และ (c, d) เท่ากันก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$ ดังนั้น $(1, 5) \neq (5, 1)$

ให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนจริง **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (cartesian product)
ของ A และ B คือเซตของคู่อันดับ

$$A \times B = \{ (x, y) / x \in A, y \in B \}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$

$$A \times B = \{ (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \}$$

เราเขียนแทนผลคูณคาร์ทีเซียน $R \times R$ ด้วย R^2 นั่นคือ

$$R \times R = \{ (x, y) / x \in R, y \in R \} = R^2$$

ดังนั้นแต่ละจุดในระนาบ xy จะสมนัยกับคู่อันดับของจำนวนจริงเพียงคู่เดียว และแต่ละ
คู่อันดับของจำนวนจริงจะสมนัยกับจุดในระนาบ xy เพียงจุดเดียว ความหมายนี้เราแทนด้วย
คำกล่าวว่า จุดในระนาบ xy สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับของจำนวนใน R^2

แบบฝึกหัด 2.2

1. หาระยะระหว่างจุด $P: (1, -2)$ และ $Q: (-4, -3)$
2. จงพิสูจน์ว่าจุด $P_1: (-1, 2), P_2: (7, 5)$ และ $P_3: (2, -6)$ เป็นมุมของสามเหลี่ยม
มุมฉาก
3. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมในข้อ 2

4. ถ้าระยะทางระหว่างจุด $(x, 2)$ และ $(2, -3)$ คือ 10 จงหา x
5. กำหนดจุด $P:(x, y)$ อยู่บนแกน x ห่างจากจุด $Q:(0, -2)$ 10 หน่วย จงหา x และ y
6. จงพิสูจน์ว่าจุด $P_1:(3, 2)$, $P_2:(4, 1)$, $P_3:(5, 4)$ และ $P_4:(6, 3)$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก
7. จงพิสูจน์ว่าเส้นแทยงมุมของสี่เหลี่ยมมุมฉากยาวเท่ากัน
8. จงพิสูจน์ว่าจุด $P_1:(-2, 6)$, $P_2:(4, 3)$, $P_3:(1, -3)$ และ $P_4:(-5, 0)$ เป็นมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส.

2.3 ความชันและจุดกึ่งกลางของส่วนเส้น

ในระนาบพิกัดคาร์ทีเซียน เส้นตรงที่ขนานกับแกน x กับแกน y จะมีทิศทางบวกเหมือนกับแกนพิกัด นอกนั้นขึ้นอยู่กับกรเลื่อ

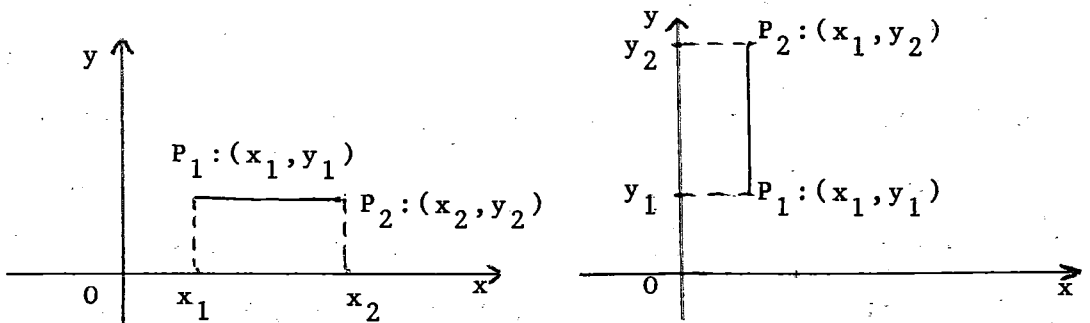
ให้ $P_1:(x_1, y_1)$ และ $P_2:(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ระยะทางระหว่างทิศทางจาก P_1 ถึง P_2 คือ

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

และถ้า P_1 และ P_2 อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

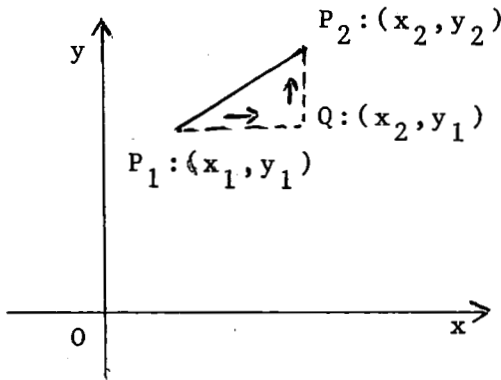
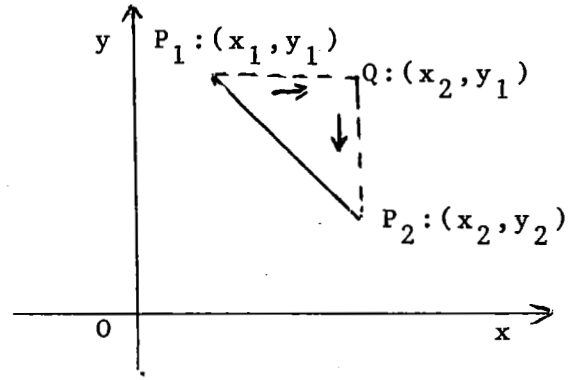
$$\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1$$

(รูป 2.3.1)



รูป 2.3.1

ถ้า P_1 และ P_2 ไม่เป็นจุดบนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน x หรือแกน y (รูป 2.3.2)

(a) $m > 0$ (b) $m < 0$

รูป 2.3.2

โดย P_1 อยู่ทางซ้ายของ P_2 และเส้นตรงที่ผ่าน P_1 ขนานกับแกน x ตัดเส้นตรงที่ผ่าน P_2 ขนานกับแกน y ที่จุด $Q: (x_2, y_1)$ แล้ว

$$\overline{QP_2} = y_2 - y_1$$

$$\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$$

อัตราส่วน $\frac{\overline{QP_2}}{\overline{P_1Q}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

เรียกว่า **ความชัน** ของส่วนเส้น P_1P_2 เขียนแทนด้วย m

ข้อสังเกต จะเห็นว่า ถ้า $m > 0$ เส้นตรง P_1P_2 จะเอียงขึ้นไปทางขวา (รูป 2.3.2) ถ้า $m < 0$ เส้นตรง P_1P_2 จะเอียงลงไปตามทางขวา (รูป 2.3.2)

ถ้าสลับที่ระหว่าง P_1 และ P_2 ค่าของ m จะเท่าเดิมเพราะว่า

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2.3.1 บทนิยาม ความชันของส่วนเส้นที่มีจุดปลายที่ $P_1:(x_1, y_1)$ และ $P_2:(x_2, y_2)$ คือ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ถ้า} \quad x_1 \neq x_2$$

ถ้า $y_1 = y_2$ ส่วนเส้น P_1P_2 ขนานกับแกน x (รูป 2.3.1) และมีความชันเป็นศูนย์
 ถ้า $x_1 = x_2$ ส่วนเส้น P_1P_2 ขนานกับแกน y ไม่มีความชัน

ตัวอย่าง 1. ความชันส่วนเส้นที่มีจุดปลายที่ $(-1, 2)$ และ $(3, 4)$ คือ

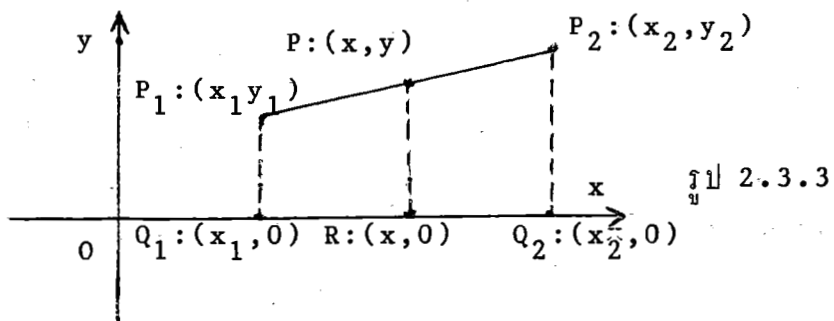
$$\frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ความชันส่วนเส้นที่มีจุดปลายที่ $(1, 3)$ และ $(-3, 4)$ คือ

$$\frac{4-3}{-3-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

#

กำหนด $P:(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนเส้น P_1P_2 (รูป 2.3.3)



โปรเจกชัน P_1, P และ P_2 บนแกน x คือ $Q_1: (x_1, 0), R: (x, 0)$ และ

$$Q_2: (x_2, 0)$$

ดังนั้น P อยู่บนจุดกึ่งกลางของส่วนเส้น $P_1 P_2$ ก็ต่อเมื่อ R อยู่บนจุดกึ่งกลางของ

$$Q_1 Q_2$$

นั่นคือ P อยู่บนจุดกึ่งกลางของ $P_1 P_2$ ก็ต่อเมื่อ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

โดยทำนองเดียวกัน

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2.3.2 ทฤษฎีบท พิกัดของจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นที่มีจุดยอด $P_1: (x_1, y_1)$ และ $P_2: (x_2, y_2)$ คือ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ตัวอย่าง 2. หาจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นซึ่งมีจุดปลายที่ $(-4, 3)$ และ $(7, -2)$

เฉลย $x = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

#

แบบฝึกหัด 2.3

1. หาความชันของส่วนเส้นซึ่งมีจุดปลายที่ $(-2, 4)$ และ $(6, 8)$

2. กำหนดส่วนเส้นมีความชัน 3 ถ้าส่วนเส้นมีจุดปลายที่ $(-4, 10)$ และจุดปลายอีกจุดอยู่บน x จงหาพิกัดของจุดปลายนี้
3. กำหนดส่วนเส้นมีความชัน $-\frac{1}{2}$ และมีจุดปลายจุดหนึ่งอยู่ที่ $(10, 2)$ จุดปลายอีกจุดอยู่บนแกน y จงหาพิกัดของจุดปลาย
4. จงหาความชันของด้านของสามเหลี่ยมซึ่งมีมุมยอดคือ $(-7, 1)$, $(-4, 5)$ และ $(3, -2)$
5. จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นซึ่งมีจุดปลายที่ $(-8, 4)$ และ $(0, -7)$
6. จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นซึ่งมีจุดปลายที่ (a, b) และ (b, a)
7. ถ้าจุด $(8, -4)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นซึ่งมีจุดปลายที่ $(2, 2)$ และ (x, y) จงหา (x, y)
8. กำหนดจุด $(4, -3)$ และ $(3, 7)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางวงกลม จงหาจุดศูนย์กลางวงกลมและรัศมีวงกลม
9. กำหนดจุด $(0, 1)$, $(4, 2)$ และ $(2, -2)$ เป็นจุดกึ่งกลางของสามเหลี่ยมจงหามุมยอด
10. กำหนดส่วนเส้นมีจุดปลายที่ $P_1: (x_1, y_1)$ และ $P_2: (x_2, y_2)$ จงหาพิกัดของจุด $P: (x, y)$ บนส่วนเส้นซึ่งเป็น $\frac{1}{3}$ ของระยะทางจาก P_1 ถึง P_2 .

2.4 กราฟของสมการ

เซตผลเฉลยของสมการที่อยู่ในรูป x และ y หมายถึงเซตของคู่อันดับของจำนวนซึ่งเมื่อนำจำนวนที่ 1 แทนที่ x และจำนวนที่ 2 แทนที่ y แล้วสมการเป็นจริง

ตัวอย่างเช่น $x - y - 2 = 0$ มีเซตผลเฉลยคือ

$$S = \{(x, y) / x - y - 2 = 0\}$$

$(-1, -3)$ เป็นสมาชิกของ S เพราะว่าเมื่อนำ -1 แทนที่ x และ -3 แทนที่ y แล้วสมการ $-1 - (-3) - 2 = 0$ จริง

จากที่เราให้

$$R^2 = R \times R = \{(x, y) / x \in R, y \in R\}$$

ระนาบพิกัดคาร์ทีเซียนจะเป็นเซตของจุด

$$E^2 = \{P: (x, y) / (x, y) \in R^2\}$$

2.4.1 บทนิยาม กราฟของสมการที่อยู่ในรูป x และ y คือ เซตของจุดใน E^2 ซึ่งมีพิกัดของจุดสอดคล้องสมการ

นั่นคือ จุดอยู่บนกราฟก็ต่อเมื่อพิกัดของจุดสอดคล้องสมการ

ถ้าไม่มีพิกัดของจุดสอดคล้องสมการเรากล่าวว่าสมการไม่มีกราฟ

ตัวอย่าง 1. เขียนกราฟของสมการ $y^2 - x^2 = 0$

เฉลย เขียน y ในเทอมของ x

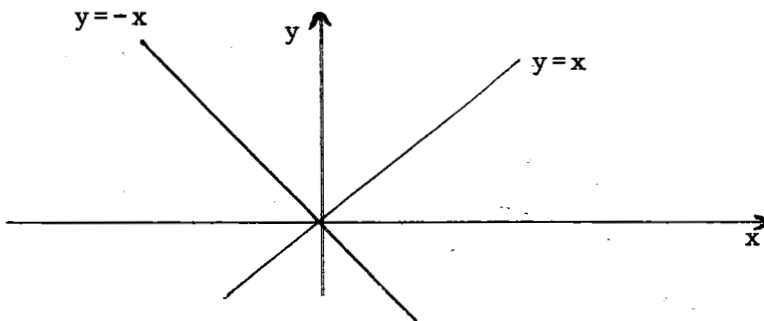
$$y = \pm x$$

จะมี 2 สมการคือ $y = x$ และ $y = -x$

สำหรับแต่ละสถานะกราฟ กำหนดจุด (x, y) ซึ่งสอดคล้องสมการลงบนระนาบเท่าที่จะมองออกว่ากราฟเป็นอย่างไร

กรณี $y = x$ จะเป็นเส้นตรงดังรูป 2.4.1

กรณี $y = -x$ จะเป็นเส้นตรงดังรูป 2.4.1



รูป 2.4.1

2.4.2 บทนิยาม ผลตัดของ 2 กราฟหมายถึง เซตของจุดซึ่งเป็นจุดร่วมของกราฟ

ตัวอย่าง 2. หา $\{P:(x,y) / y=x\} \cap \{P:(x,y) / y=-x\}$

เฉลย โดยการแก้สมการ พิกัดของจุดซึ่งสอดคล้อง $y=x$ และ $y=-x$ คือ $(0,0)$ ดังนั้น

$$\{P:(0,0)\} = \{P:(x,y) / y=x\} \cap \{P:(x,y) / y=-x\} \quad \#$$

ดังนั้นตัวอย่าง 2 $\{P:(0,0)\}$ เป็นผลตัดของ 2 กราฟ ซึ่งมีสมการเป็น $y=x$ และ $y=-x$ $\#$

แบบฝึกหัด 2.4

ข้อ 1-ข้อ 13 สร้างตารางหาพิกัด (x,y) เขียนจุดที่สมมูลลงในระนาบคาร์ทีเซียน และเขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุดเหล่านั้น ถ้าไม่มีพิกัดซึ่งสอดคล้องสมการให้เขียนว่าสมการไม่มีกราฟ

1. $x+3y-4=0$

2. $x-4y+4=0$

3. $x=3$

4. $y=-4$

5. $y=0$

6. $x=-2$

7. $x^2+y^2=9$

8. $x^2+y^2=-16$

9. $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2$

$$10. (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$$

$$11. y^2 = 4x$$

$$12. y = x^2 + 2$$

$$13. 25x^2 + 9y^2 - 175 = 0$$

ข้อ 14- ข้อ 17 เขียนกราฟของสมการ 2 สมการแล้วหาพิกัดของจุดซึ่งเป็นผลตัดของ 2 กราฟ

$$14. x - 4y + 8 = 0, 3x + y - 15 = 0$$

$$15. 2x - 4y + 13 = 0, x + 3y = 0$$

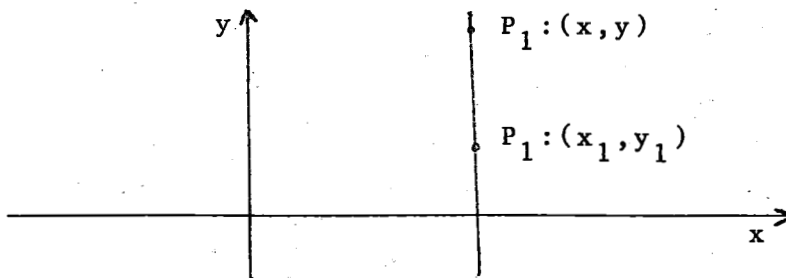
$$16. 2x - y = 0, x^2 + y^2 = 25$$

$$17. x + y - 2 = 0, y = x^2$$

2.5 เส้นตรง

ให้ $P_1 : (x_1, y_1)$ เป็นจุดคงตัวใดๆ ในระนาบคาร์ทีเซียน ดังนั้นจะมีเส้นตรงผ่าน P_1 เป็นไปได้ 2 กรณีคือ ขนานกับแกน y หรือไม่ขนานกับแกน y

ถ้าเส้นตรงที่ผ่าน P_1 เป็นเส้นแนวตั้งขนานกับแกน y (รูป 2.5.1)



รูป 2.5.1

จุดทั้งหมดบนเส้นนี้จะมีพิกัด x เป็น x_1

เส้นแนวดิ่งที่ผ่าน $P_1:(x_1, y_1)$ คือ $\{P:(x, y)/x=x_1\}$

ดังนั้น ถ้าจุด P_1 อยู่บนแกน y เส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 ในแนวดิ่งจะมีสมการ $x=0$

ถ้าเส้นตรงที่ผ่าน P_1 ไม่อยู่ในแนวดิ่ง เส้นตรงนั้นจะมีความชัน

สมมติ 1 เป็นเส้นตรงที่ผ่าน $P_1:(x_1, y_1)$ และความชันของเส้นตรง 1 คือ m

ดังนั้น จุด $P:(x, y)$ เป็นจุดใดๆบน 1 ก็ต่อเมื่อ

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

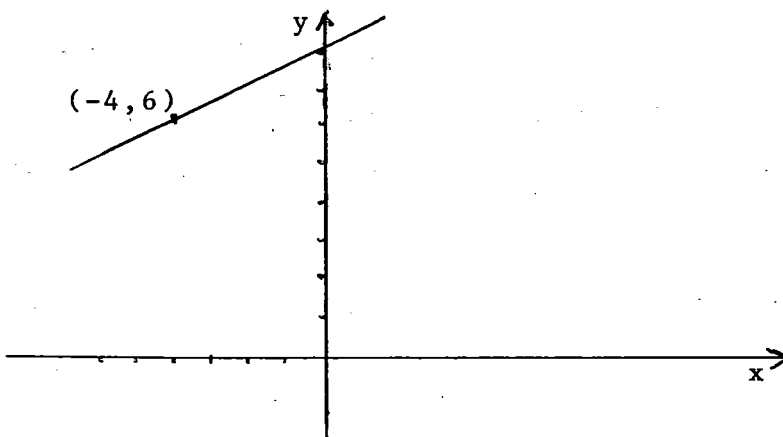
หรือ $y-y_1=m(x-x_1)$ (2.5.1)

สมการ (2.5.1) เรียกว่า **แบบความชันจุด (point-slop form)** ของสมการเส้นตรง ดังนั้นเส้นตรงที่ผ่าน $P_1:(x_1, y_1)$ มีความชัน m คือ

$$\{P:(x, y)/y-y_1=m(x-x_1)\}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{1}{2}$ และผ่านจุด $(-4, 6)$ (รูป 2.5.2)

เฉลย



รูป 2.5.2

โดยแทน (x_1, y_1) ด้วย $(-4, 6)$ และ $m = \frac{1}{2}$ ในสมการ (2.5.1)

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4)$$

หรือ $2y - x - 16 = 0$

#

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่าน 2 จุด $(2, 4)$ และ $(3, -4)$

เฉลย ความชันของเส้นตรงคือ

$$m = \frac{4 - (-4)}{2 - 3} = -8$$

โดยสมการ (2.5.1) สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 4)$ มีความชัน -8 คือ

$$y - 4 = -8(x - 2)$$

หรือ $y + 8x - 20 = 0$

#

พิกัด y ของจุดซึ่งเป็นผลตัดของเส้นตรงและแกน y เรียกว่า **ส่วนตัด y (y-intercept)** ของเส้นตรง

พิกัด x ของจุดซึ่งเป็นผลตัดของเส้นตรงและแกน x เรียกว่า **ส่วนตัด x (x-intercept)**

ดังนั้น ถ้า b เป็นส่วนตัด y ของเส้นตรงจุด $(0, b)$ จะอยู่บนแกน y และโดย (2.5.1) เส้นตรงที่ผ่าน $(0, b)$ และมีความชัน m จะมีสมการ

$$y - b = m(x - 0)$$

หรือ $y = mx + b$

(2.5.2)

สมการ (2.5.2) เรียกว่า **แบบส่วนตัดความชัน (slope-intercept form)** ของสมการเส้นตรง

เส้นตรงที่ไม่อยู่ในแนวตั้งและมีสมการ (2.5.1) สามารถเขียนให้อยู่ในแบบสมการ (2.5.2) ได้เสมอ

ดังนั้นโดยเหตุผลที่ว่าเส้นตรงในระนาบคาร์ทีเซียนมีโอกาสเป็นได้ 2 กรณีคือ ขนานกับแกน y หรือไม่ขนานกับแกน y เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงก็จะเป็นไปได้ 2 กรณีคืออยู่ในแบบ

$$x=k \quad \text{หรือ} \quad y=mx+b$$

เมื่อ k, m และ b เป็นค่าคงตัว ซึ่งทั้ง 2 กรณีสามารถเขียนให้อยู่ในแบบ

$$Ax+By+C=0 \quad (2.5.3)$$

เมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ดังนั้นเส้นตรงใดๆในระนาบคาร์ทีเซียนจะเขียนอยู่ในแบบสมการ (2.5.3) ได้ เราเรียกสมการ (2.5.3) ว่าเป็นแบบทั่วไป (general form) ของสมการเส้นตรงในระนาบคาร์ทีเซียน

ถ้า $B=0$ และ $A \neq 0$ สมการ (2.5.3) สามารถเขียนได้เป็น

$$x = -\frac{C}{A}$$

กราฟของสมการจะเป็นเส้นตรงแนวนอนขนานกับแกน y

ถ้า $B \neq 0$ สมการ (2.5.3) สามารถเขียนได้เป็น

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right)$$

ซึ่งอยู่ในแบบสมการ (2.5.2) ดังนั้นเส้นตรงนี้将有ความชัน $-\frac{A}{B}$ และส่วนตัด y $-\frac{C}{B}$

2.5.1 บทนิยาม เส้นตรงในระนาบคาร์ทีเซียนคือ

$$\{P:(x,y)/Ax+By+C=0, A,B,C \in \mathbb{R}, A \neq 0 \text{ หรือ } B \neq 0\}$$

บางครั้งสมการ $Ax+By+C=0$ เรียกว่าสมการเชิงเส้น

เพื่อความสะดวกบางครั้งเราจะกล่าวว่า เส้นตรง $Ax+By+C=0$ แทนค่ากล่าวว่า
เส้นตรงมีสมการ $Ax+By+C=0$

ตัวอย่าง 3. หาส่วนตัด x ส่วนตัด y และความชันของเส้นตรง $2x-4y+10=0$
พร้อมเขียนกราฟ

เฉลย หาส่วนตัด x แทน $y=0$ ในสมการ

$$2x+10=0$$

$$x=-5$$

เพราะฉะนั้นส่วนตัด x คือ -5

หาส่วนตัด y แทน $x=0$ ในสมการ

$$-4y+10=0$$

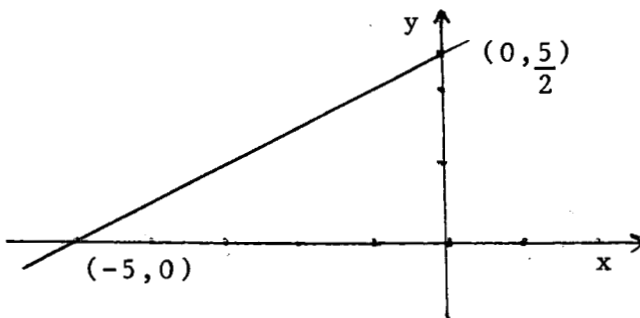
$$y=\frac{5}{2}$$

เพราะฉะนั้นส่วนตัด y คือ $\frac{5}{2}$

เขียนสมการให้อยู่ในแบบ (2.5.2)

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรงคือ $\frac{1}{2}$ (รูป 2.5.3)



รูป 2.5.2

ข้อสังเกต กราฟของสมการ $Ax+By+C=0$ จะเหมือนกับกราฟของสมการ $k(Ax+By+C)=0$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวไม่เท่ากับศูนย์
 เพราะถ้าถ้า $P_1: (x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆบนเส้นตรง $Ax+By+C=0$ แล้ว

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

ดังนั้น $k(Ax_1 + By_1 + C) = 0$ เพราะฉะนั้น $P_1: (x_1, y_1)$ มีพิกัดสอดคล้องสมการ $k(Ax+By+C)=0$ นั่นคือจุด P_1 อยู่บนเส้นตรง $k(Ax+By+C)=0$

โดยทำนองเดียวกัน จุดใดๆบนเส้นตรง $k(Ax+By+C)=0$ ก็อยู่บนเส้นตรง $Ax+By+C=0$ จึงสรุปได้ว่า สมการเส้นตรงเมื่อคูณด้วยค่าคงตัวไม่เท่ากับศูนย์จะไม่มีผลกระทบต่อกราฟ

แบบฝึกหัด 2.5

1. หาสมการ

a. แกน x

c. เส้นแนวดิ่งผ่านจุด $(-2, 3)$

b. แกน y

d. เส้นแนวนอนผ่านจุด $(5, -2)$

2. หาสมการเส้นตรง

a. ผ่านจุด $(-5, 2)$ มีความชัน 3

b. ผ่านจุด $(-4, 1)$ มีความชัน -2

c. ผ่านจุด $(6, 3)$ มีความชัน 0

d. ผ่านจุด $(4, -2)$ มีความชัน 6

3. หาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-6, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งมีความชัน -3

4. ถ้า a และ b ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่ จงพิสูจน์ว่าสมการของเส้นตรงซึ่งผ่าน $(a, 0)$ และ $(0, b)$ คือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เรียกว่า **แบบส่วนตัด(intercept form)** ของสมการเส้นตรง

5. จงหาสมการของเส้นมัธยฐาน(median) ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด $A: (6, 3)$,

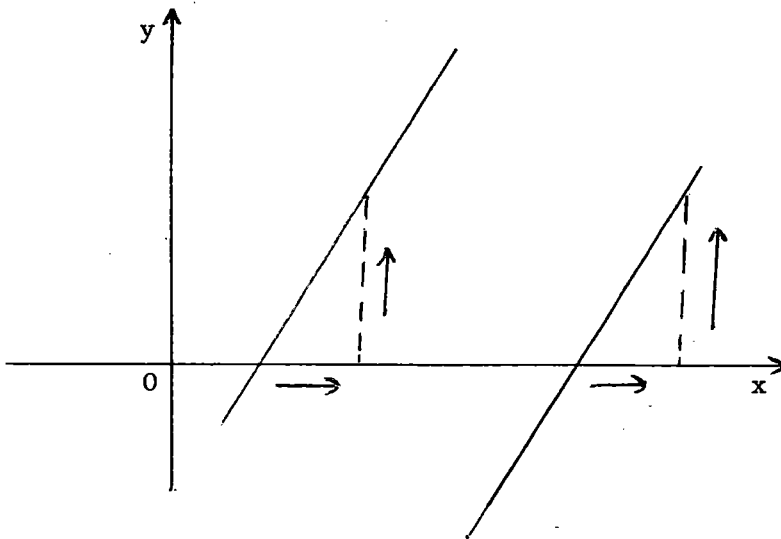
$B: (-3, 9)$ และ $C: (4, -8)$

6. จงพิสูจน์ว่า สมการ $2x-3y+4=0$ และ $4x-6y-9=0$ ไม่ตัดกันและหาความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้น
7. จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งผ่าน $A: (0, 0)$, $B: (2, 4)$ และ $C: (-4, 6)$ [แนะ: หาผลตัดของเส้นตั้งฉากซึ่งแบ่งเส้นตรง AB และ BC เป็น 2 ส่วนเท่ากัน]
8. เขียนกราฟของสมการ $x^2-4xy-8x=0$ [แนะ: แยกส่วนประกอบ].

2.6 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

ระยะทางระหว่างจุดและเส้น

2.6.1 บทนิยาม เส้นแนวตั้งทั้งหมดขนานกัน เส้นที่ไม่อยู่ในแนวตั้งขนานกันก็ต่อเมื่อมีความชันเท่ากัน (รูป 2.6.1)



รูป 2.6.1

เนื่องจากเส้นตรงที่ไม่อยู่ในแนวตั้ง $Ax+By+C=0$ มีความชัน $-\frac{A}{B}$ ดังนั้นโดย

2.6.1 ขณินยามจะมีทฤษฎีบทคือ

2.6.2 ทฤษฎีบท เส้นตรงไม่อยู่ในแนวตั้ง 2 เส้น

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

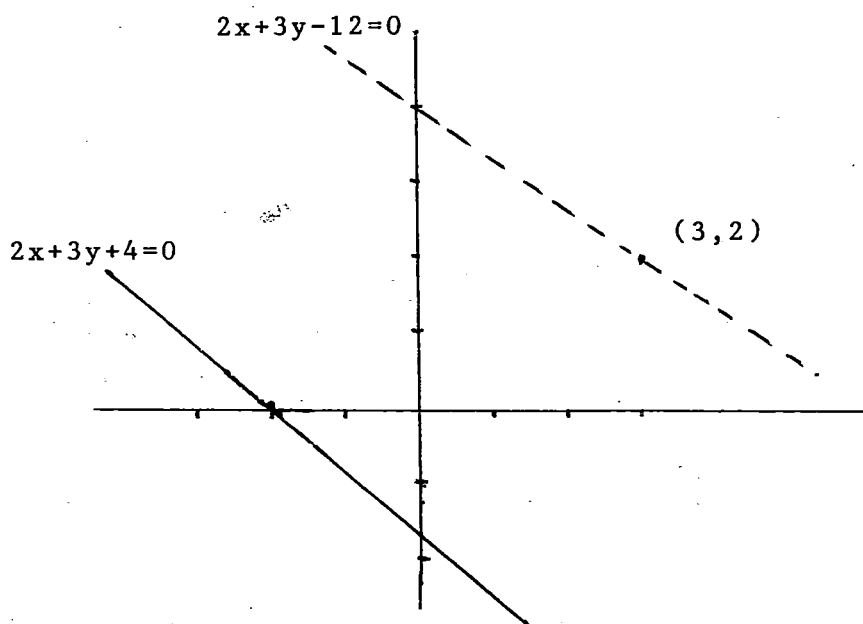
และ $A_2x+B_2y+C_2=0$

ขนานกันก็ต่อเมื่อ $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$

ดังนั้นเส้นขนานของสมการ $Ax+By+C=0$ จะมีสมการอยู่ในแบบ $Ax+By+D=0$

ตัวอย่าง 1. จงหาสมการของเส้นซึ่งผ่านจุด $(3,2)$ และขนานกับเส้น $2x+3y+4=0$

(รูป 2.6.2)



รูป 2.6.2

ผลเฉลย เส้นตรงซึ่งขนานกับเส้น $2x+3y+4=0$ จะมีสมการอยู่ในแบบ

$$2x+3y+D=0$$

เนื่องจากเส้นตรงผ่านจุด $(3,2)$ เพราะฉะนั้น

$$2(3)+3(2)+D=0$$

$$D=-12$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงผ่านจุด $(3,2)$ และขนานกับเส้นตรง $2x+3y+4=0$ คือ

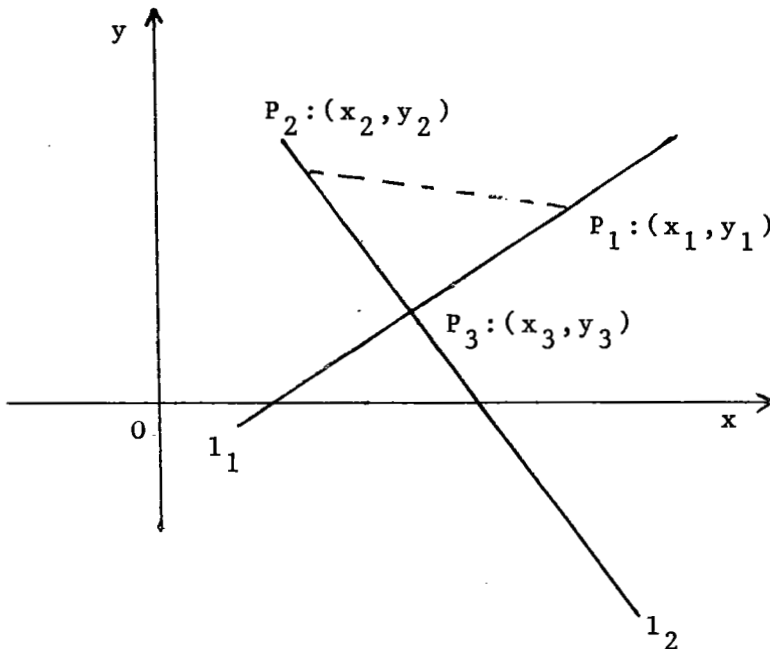
$$2x+3y-12=0 \quad \#$$

กำหนดเส้น l_1 มีความชัน m_1 เส้น l_2 มีความชัน m_2 ตัดกันที่จุด $P_3:(x_3,y_3)$

ให้ $P_1:(x_1,y_1)$ เป็นจุดใดๆบน l_1 และไม่เป็นจุดเดียวกับ $P_3:(x_3,y_3)$

ให้ $P_2:(x_2,y_2)$ เป็นจุดใดๆบน l_2 และไม่เป็นจุดเดียวกับ $P_3:(x_3,y_3)$

(รูป 2.6.3)



รูป 2.6.3

สมมุติ l_1 และ l_2 ตั้งฉากกัน เพราะฉะนั้น $P_1P_2P_3$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากและ

$$|P_2P_3|^2 + |P_3P_1|^2 = |P_1P_2|^2$$

ดังนั้นสูตรระยะทางคือ

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

กระจายออกจะได้สมการ

$$y_3^2 - y_2y_3 - y_1y_3 + y_1y_2 = -(x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_1x_2)$$

หรือ $(y_3 - y_2)(y_3 - y_1) = -(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$

หรือ $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = -\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}$

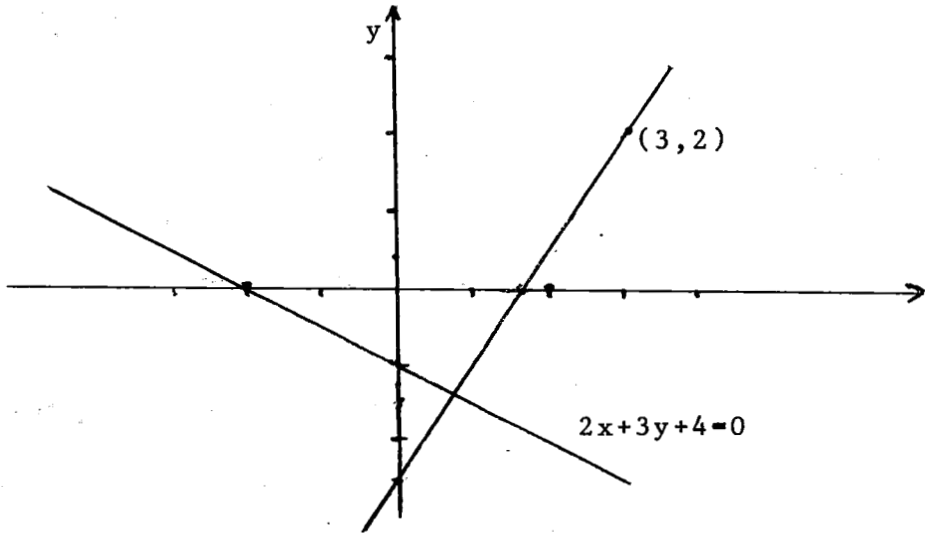
นั่นคือ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

จึงสรุปได้ว่า ถ้าเส้น l_1 และ l_2 ตั้งฉากกันแล้ว

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

โดยทำนองเดียวกัน ถ้า $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ ก็จะได้ว่าเส้น l_1 และ l_2 ตั้งฉากกัน

2.6.3 บทนิยาม ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง 2 เส้น เส้นตรง
เส้นนี้ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$



รูป 2.6.4

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(3, 2)$ และตั้งฉากกับเส้น

$$2x + 3y + 4 = 0$$

(รูป 2.6.4)

เฉลย ความชันของเส้นตรง $2x + 3y + 4 = 0$ คือ $-\frac{2}{3}$ เพราะฉะนั้นความชันของเส้นตั้งฉากคือ $\frac{3}{2}$

สมการของเส้นตั้งฉากจะอยู่ในแบบ

$$3x - 2y + C = 0$$

เนื่องจากเส้นตรงผ่านจุด $(3, 2)$ เพราะฉะนั้น

$$3(3) - 2(2) + C = 0$$

$$C = -5$$

ดังนั้นเส้นตรงผ่านจุด $(3, 2)$ และตั้งฉากกับเส้น $2x + 3y + 4 = 0$ คือ

$$3x - 2y - 5 = 0 \quad \#$$

ต่อไปเราจะพิสูจน์สูตรหาระยะทางระหว่างจุดและเส้น

ระยะทางระหว่างจุดและเส้น หมายถึงความยาวของเส้นตั้งฉากจากจุดถึงเส้น

2.6.4 ทฤษฎีบท ระยะทางไม่วัดทิศทางระหว่างจุด $P_1: (x_1, y_1)$ และเส้น

$Ax + By + C = 0$ คือเส้น

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.6.1)$$

พิสูจน์ ให้ 1 คือเส้น

$$(1) \quad Ax + By + C = 0$$

จะเห็นได้ชัดจากสูตร (2.6.1) จริงเมื่อจุด P_1 อยู่บน 1 หรือเมื่อ 1 ขนานกับแกนพิสัย

สมมติ P_1 ไม่อยู่บน 1 และ 1 ไม่ขนานกับแกนพิสัย

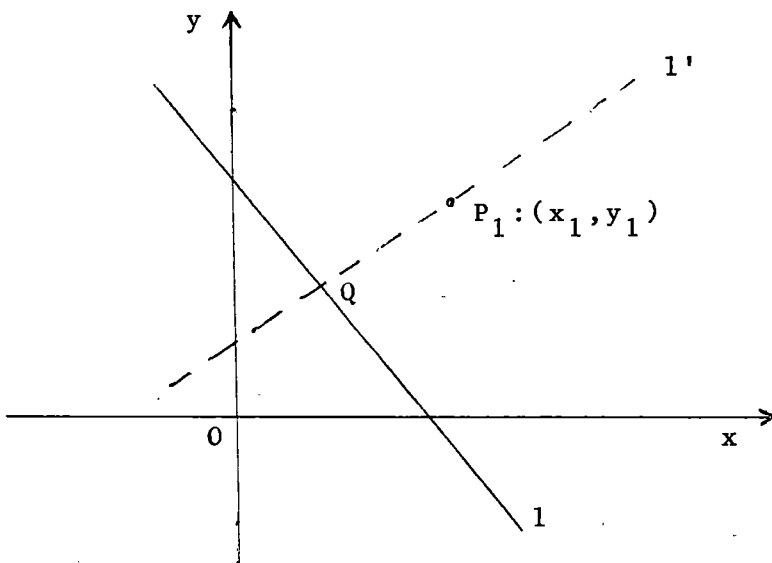
ให้ $1'$ เป็นเส้นที่ผ่าน P_1 และตั้งฉากกับ 1 ที่จุด Q (รูป 2.6.5)

เราจะหาพิสัยของจุด Q

เพราะว่าความชันของ 1 คือ $-\frac{A}{B}$

เพราะฉะนั้นความชันของ $1'$ คือ $\frac{B}{A}$

ดังนั้นสมการของเส้น $1'$ ผ่านจุด $P_1: (x_1, y_1)$ อาจจะเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 2.6.5

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$$

หรือ

$$(2) \quad Bx - Ay(Bx_1 - Ay_1) = 0$$

นำ A คูณสองข้างของสมการ (1) และนำ B คูณสองข้างของสมการ (2) แล้วนำมาบวกกัน

$$(A^2 + B^2)x + AC - B(Bx_1 - Ay_1) = 0$$

ดังนั้นจะมี

$$x = \frac{B^2 x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2}$$

โดยทำนองเดียวกันถ้าเราคูณ (1) โดย B และคูณ (2) โดย A แล้วนำมาบวกกัน

$$(A^2+B^2)y+BC+A(Bx_1-Ay_1)=0$$

ดังนั้นจะมี

$$y = \frac{A^2 y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2}$$

เพราะฉะนั้นพิกัดของ Q คือ

$$\left(\frac{B^2 x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 y_1 - AB x_1 - BC}{A^2 + B^2} \right)$$

โดยการแทนพิกัดของ P_1 และ Q ในกำลังสองของสูตรระยะทาง

$$\begin{aligned} |QP_1|^2 &= \left(x_1 - \frac{B^2 x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2} \right)^2 + \left(y_1 - \frac{A^2 y_1 - AB x_1 - BC}{A^2 + B^2} \right)^2 \\ &= \frac{A^2 (Ax_1 + By_1 + C)^2 + B^2 (Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} \\ &= \frac{(A^2 + B^2) (Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นระยะทางไม่ระบุทิศทางระหว่างเส้น 1 และจุด $P_1: (x_1, y_1)$ คือ

$$|QP_1| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

#

ตัวอย่าง 3. จงหาระยะทางระหว่างเส้นขนาน

$$4x - 3y + 16 = 0$$

และ $4x - 3y - 9 = 0$

เฉลย กำหนด l_1 และ l_2 เป็นเส้น

$$4x - 3y + 16 = 0 \quad \text{และ} \quad 4x - 3y - 9 = 0 \quad \text{ตามลำดับ}$$

เนื่องจากจุด $(-4, 0)$ อยู่บนเส้น l_1 เราอาจใช้สูตร (2.6.1) จะได้ระยะทางระหว่างจุด $(-4, 0)$ และเส้น l_2

$$\frac{|4(-4) - 3(0) - 9|}{\sqrt{16 + 9}} = 5 \quad \#$$

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-2, -1)$ และขนานกับเส้นตรง $4x + 3y + 10 = 0$
2. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(2, -1)$ และตั้งฉากกับเส้น $2x + y + 1 = 0$
3. จงหาระยะทางระหว่างจุด $(-4, 2)$ และเส้น $3x - 4y + 4 = 0$
4. กำหนดสามเหลี่ยมมีมุม $A:(5, 1), B:(-4, -2)$ และ $C:(7, -6)$ จงหาความยาวของความสูงจาก A
5. จงพิสูจน์ พื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม $A:(x_1, y_1), B:(x_2, y_2)$ และ $C:(x_3, y_3)$ วางเรียงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_3y_3 - x_3y_2)]$

6. จงพิสูจน์ พื้นที่สามเหลี่ยมที่มีมุม $A: (x_1, y_1), B: (x_2, y_2)$ และ $C: (x_3, y_3)$ วางเรียงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาคือ

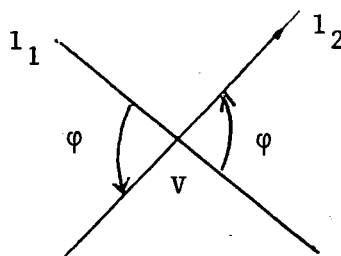
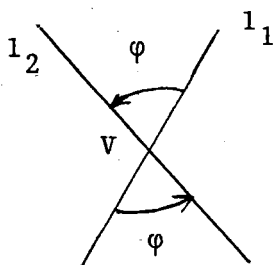
$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

7. จงหาระยะทางระหว่างเส้นขนาน $2x-3y-4=0$ และ $2x-3y+6=0$
8. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งระยะทางจากเส้น $2x+3y-6=0$ และ $2x+3y+18=0$ เท่ากัน
9. กำหนดจุด $F: (8,0)$ ไม่อยู่บนเส้น d ซึ่งมีสมการ $x=3$ และให้จุด Q เป็นโปรเจกชันของจุด P ใดๆ บนเส้น d จงหาสมการในรูป x และ y ซึ่งมีกราฟคือ

$$\{P: (x,y) / |FP|=|QP|\}$$

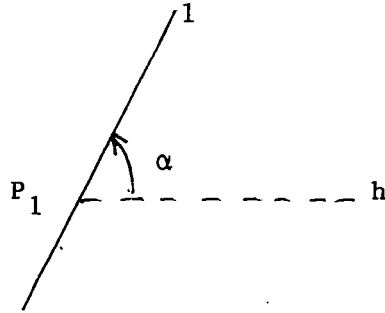
2.7 มุมจากเส้นถึงเส้น

ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรง 2 เส้นตัดกันมีจุด V เป็นผลตัดมุมจากเส้น l_1 ถึง l_2 หมายถึงมุมไม่เป็นลบที่เล็กที่สุดจาก l_1 ถึง l_2 ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (รูป 2.7.1)



รูป 2.7.1 ϕ เป็นมุมระหว่าง l_1 และ l_2

กำหนด l เป็นเส้นและ $P_1 : (x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆบน l ให้ h เป็นเส้นแนวนอนเริ่มจาก P_1 และขยายไปได้ไกลถึงอนันต์(รูป 2.7.2)



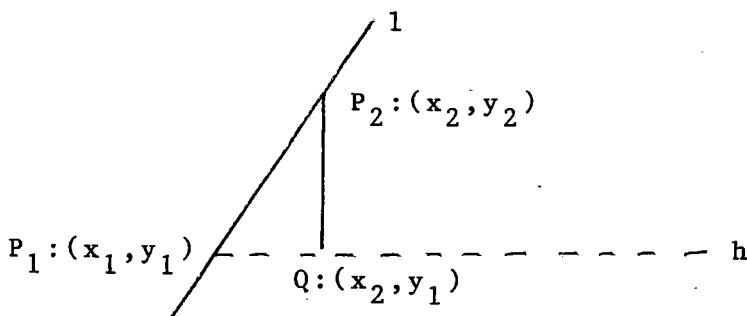
รูป 2.7.2

มุม α จาก h ถึง l เรียกว่ามุมความเอียงของ l หรือเรียกสั้นๆ ความเอียงของ l

1

เลือกจุด $P_2 : (x_2, y_2)$ ใดๆบน l โดยให้สูงกว่า P_1 นั่นคือ $y_2 > y_1$ แล้ว (รูป 2.7.3)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$



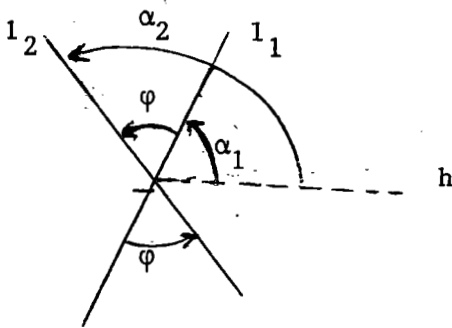
รูป 2.7.3

ความชันของส่วนเส้นจะเท่ากับ แทนเจนต์ (tangent) ของมุมของความเอียง

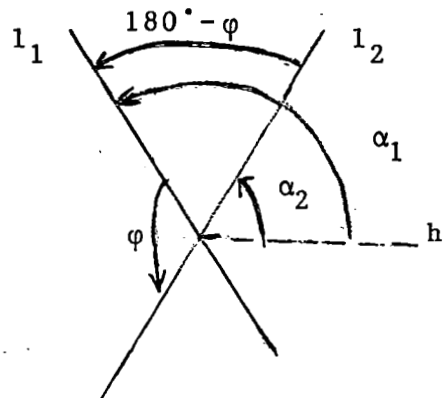
2.7.1 ทฤษฎีบท ถ้า l_1 และ l_2 ไม่เป็นเส้นแนวดิ่ง มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับและ φ เป็นมุมจาก l_1 ถึง l_2 แล้ว

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad (2.7.1)$$

ภายใต้เงื่อนไข $\varphi \neq 90^\circ$



(a)



(b)

รูป 2.7.4

พิสูจน์ แทนความเอียงของ l_1 ด้วย α_1 และแทนความเอียงของ l_2 ด้วย α_2

กรณี 1. $\alpha_1 < \alpha_2$ (รูป 2.7.4 (a))

เพราะว่า $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$

โดยสูตรตรีโกณมิติ

$$\tan \varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

กรณี 2. $\alpha_1 > \alpha_2$ (รูป 2.7.2 (b))

เพราะว่า $180^\circ - \varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ $\tan(180^\circ - \varphi) = \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$

$$\text{แต่ } \tan(180^\circ - \varphi) = \frac{\tan 180^\circ - \tan \varphi}{1 + \tan 180^\circ \tan \varphi} = -\tan \varphi$$

เพราะฉะนั้น

$$-\tan \varphi = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\text{หรือ } \tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

#

ตัวอย่าง 1. กำหนดเส้น l_1 มีความชัน m_1 และเส้น l_2 มีความชัน $m_2 = \frac{2}{3}$ จงหา มุมจากเส้น l_1 ถึง l_2

เฉลย ให้ φ เป็นมุมจากเส้น l_1 ถึง l_2 ดังนั้นโดยสูตร (2.7.1)

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{2}{3} - 5}{1 + (\frac{2}{3})(5)} = \frac{-11}{16} = -0.6875$$

$$\text{แต่ } -\tan .61 = -(0.6875) \quad (\text{ประมาณ})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \tan(\varphi - .61) = -(0.6875)$$

$$\text{ดังนั้น } \varphi - .61 = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

#

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงหาแทนเจนต์ของมุมจากเส้น l_1 ถึง l_2 ถ้าเส้น l_1 มีความชัน $m_1 = \frac{4}{9}$ และ l_2 มีความชัน $m_2 = \frac{1}{3}$
2. จงหามุมจากเส้น l_1 ถึงเส้น l_2 เมื่อ l_1 มีความชัน $m_1 = \frac{1}{4}$ และ l_2 มีความชัน $m_2 = -2$

3. จงหามุมภายในของสามเหลี่ยมซึ่งมีมุมคือ $A:(-4,2), B:(3,-4)$ และ $C:(1,3)$
4. ถ้า t เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(-1,-3)$ และ $(7,2)$ จงหาความชันของเส้น l เพื่อมุมจาก t ถึง l เท่ากับ 60° .

2.8 วงกลม(The Circle)

ให้ $C:(a,b)$ เป็นจุดใดๆในระนาบคาร์ทีเซียน และ r เป็นจำนวนจริงลบ เซตของจุด $P:(x,y)$ ในระนาบซึ่ง $|CP|=r$ เรียกว่าวงกลม จุด C เรียกว่าจุดศูนย์กลาง(center)ของวงกลมและ r เรียกว่ารัศมีของวงกลม

จากสูตรระยะทาง

$$|CP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

เพราะฉะนั้นวงกลมจะมีสมการ

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r^2 \quad (2.8.1)$$

เรียกว่า แบบจุดศูนย์กลางรัศมีของสมการวงกลม

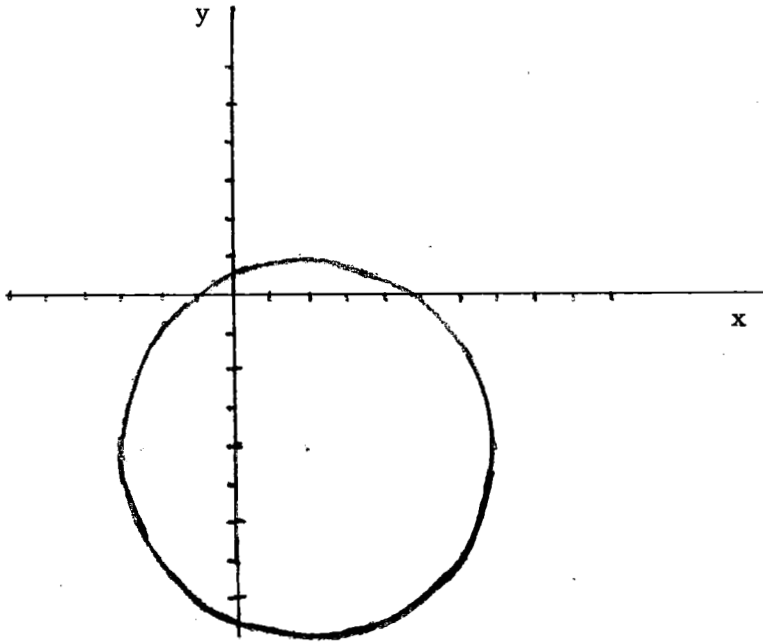
เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด สมการ (2.8.1) ก็จะเป็น

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 1. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(2,-4)$ และรัศมี 5

พิสูจน์ แทน $a=2, b=-4$ และ $r=4$ ใน (2.8.1) จะมีสมการวงกลมจุดศูนย์กลาง $(2,-4)$ รัศมี

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \quad (\text{รูป 2.8.1}) \quad \#$$



รูป 2.8.1 วงกลม $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$

โดยการกระจายสมการ (2.8.1)

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

ซึ่งอยู่ในแบบ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.8.2)$$

เมื่อ D, E และ F เป็นจำนวนจริง

สมการ (2.8.2) เรียกว่า **แบบทั่วไป** (general form) ของสมการวงกลม

สมการ (2.8.2) สามารถเขียนให้อยู่ในแบบ

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

ทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์โดยบวก $\frac{D^2}{4}$ และ $\frac{E^2}{4}$ ทั้งสองข้าง

$$(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}) + (y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

หรือ

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad (2.8.3)$$

โดยการเปรียบเทียบสมการ (2.8.3) กับ (2.8.1)

ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$ กราฟของสมการ (2.8.3) จะเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และรัศมีคือ

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

ถ้า $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} = 0$ สมการ (2.8.3) ก็จะเป็น

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$$

กราฟจะเป็นจุด $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ เรียกว่า **จุดวงกลม (point-circle)**

ถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$ สมการ (2.8.3) ไม่มีกราฟ เพราะว่าทางซ้ายเป็นจำนวนจริงลบ เราสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

2.8.1 ทฤษฎีบท กราฟของสมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

เป็นวงกลม ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$

เป็นจุดวงกลม ถ้า $D^2 + E^2 - 4F = 0$

ไม่มีกราฟถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$

การเขียนกราฟวงกลมจากสมการทั่วไป เราใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หาค่า r และพิกัดของจุดศูนย์กลาง

ตัวอย่าง 2. เขียนกราฟของวงกลม $x^2 + y^2 + 14x - 4y + 12 = 0$

เฉลย เขียนสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

บวก $\left(\frac{14}{2}\right)^2$ และ $\left(\frac{-4}{2}\right)^2$ ทั้งสองข้าง

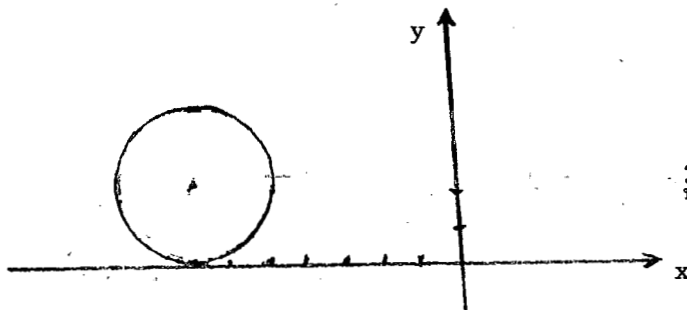
$$(x^2 + 14x + \left(\frac{14}{2}\right)^2) + (y^2 - 4y + \left(\frac{-4}{2}\right)^2) = -52 + \left(\frac{14}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{14}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{2}\right)^2 = 1$$

หรือ $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 1$

โดยการเปรียบเทียบกับสมการ (2.8.1) จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(-7, 2)$ รัศมี 1

เขียนกราฟวงกลมดังรูป 2.8.2



รูป 2.8.2

แบบฝึกหัด 2.8

สำหรับแต่ละข้อให้เขียนกราฟประกอบ

- เขียนแบบจุดศูนย์กลางรัศมีและแบบทั่วไปของสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 1)$ รัศมี 4
- จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(4, 1)$ และผ่านจุด $(-3, -4)$
- จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(-5, -3)$ และสัมผัสเส้นตรง $5x + 12y - 4 = 0$
- จงหาสมการวงกลมซึ่งสัมผัสเส้น $x - 4y + 3 = 0$ ที่จุด $(5, 2)$ และสัมผัสเส้น $4x + y - 5 = 0$ ที่จุด $(2, -3)$
- จงหาสมการวงกลมที่ผ่าน 3 จุด $(0, 0)$, $(3, 3)$ และ $(7, 1)$
- จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$
- จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ ที่จุด $(2, 4)$
- จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางบนแกน x และผ่านจุด $(-2, 8)$ และ $(6, 2)$
- จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางบนเส้นตรง $2x - y = 4$ และสัมผัสแกนพิกัดทั้งสอง
- จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางบนแกน y และสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 14 = 0$ ที่จุด $(1, -1)$
- จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 0$ และผ่านจุด $(-2, 3)$.

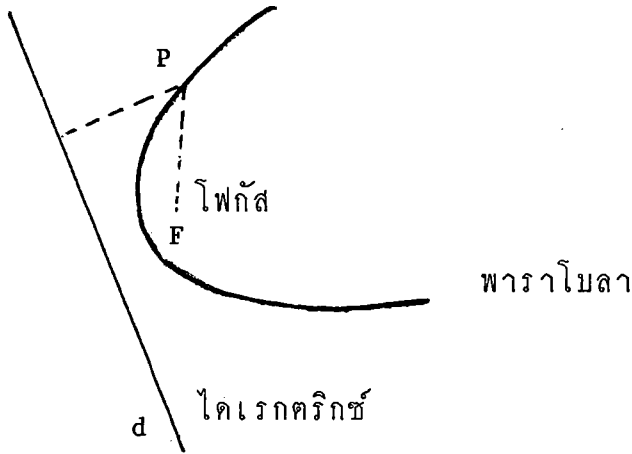
2.9 พาราโบลา (The Parabola)

2.9.1 นิยาม กำหนด F เป็นจุดคงตัว และ d เป็นเส้นตรงคงตัวที่ไม่ผ่านจุด F

พาราโบลา คือ เซตของจุดซึ่งมีระยะทางจากเส้น d และจุด F เท่ากัน

(รูป 2.9.1)

จุดคงตัว F เรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของพาราโบลา
 เส้นคงตัว d เรียกว่า **ไดเรกทริกซ์ (directrix)**



รูป 2.9.1 พาราโบลา

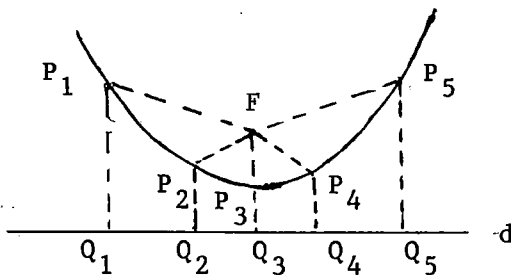
เพราะฉะนั้น ถ้า Q เป็นโปรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง d แล้ว
 P อยู่บนพาราโบลาก็ต่อเมื่อ $|FP| = |QP|$

รูป 2.9.2 จุด P_1, P_2, P_3, P_4 และ P_5 อยู่บนพาราโบลาเพราะว่า

$$|FP_1| = |Q_1P_1|$$

$$|FP_2| = |Q_2P_2|$$

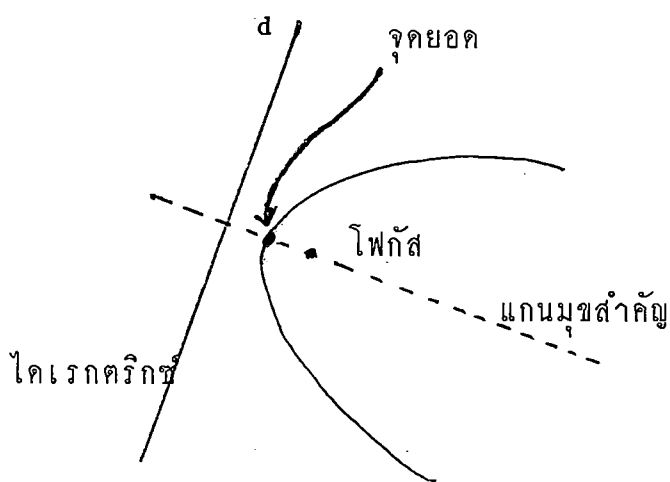
$$|FP_5| = |Q_5P_5|$$



รูป 2.9.2

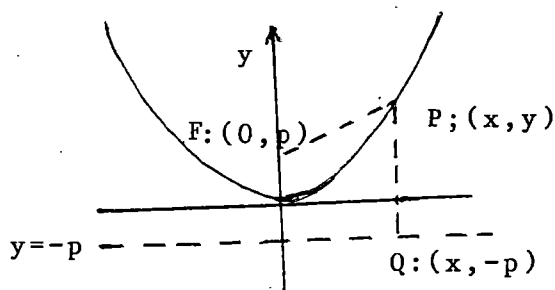
เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไคเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนमुखสำคัญ (principal axis) ของพาราโบลา

จุดของผลตัดระหว่างพาราโบลาและแกนमुखสำคัญ เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของพาราโบลา (รูป 2.9.3)

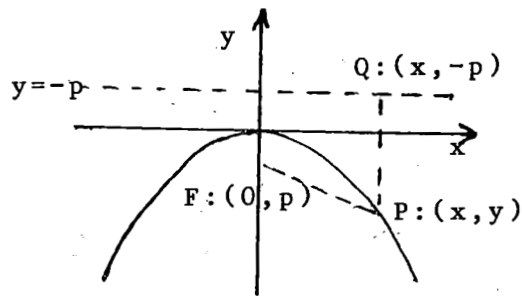


รูป 2.9.3,

กำหนดโฟกัสของพาราโบลา คือจุด $F(0, p)$ อยู่บนแกน y และไคเรกตริกซ์ $y = -p$ (รูป 2.9.4 และ รูป 2.9.5)



รูป 2.9.4 $p > 0, x^2 = 4py$



รูป 2.9.5 $p < 0, x^2 = 4py$

เพราะฉะนั้นจุด $P:(x, y)$ ใดๆอยู่บนพาราโบลา ก็ต่อเมื่อ

$$|FP| = |QP|$$

เมื่อ $Q:(x, -p)$ เป็นโปรเจกชันของ P บนเส้นไคเรกตริกซ์

$$\text{แต่ } |FP| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$\text{และ } |QP| = |y - (-p)|$$

ดังนั้น $P:(x, y)$ อยู่บนพาราโบลา ก็ต่อเมื่อ

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

โดยยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 = 4py$$

ดังนั้นเราจะมีทฤษฎีบท

2.9.2 ทฤษฎีบท สมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสที่ $(0, p)$ และไคเรกตริกซ์ $y = -p$

คือ

$$x^2 = 4py \quad (2.9.1)$$

เราจะกล่าวว่าพาราโบลาที่มีตำแหน่งมาตรฐาน(standard position)เมื่อจุดยอดเป็นจุดกำเนิด และแกนमुखสำคัญอยู่บนแกนพิกัด

สมการพาราโบลาซึ่งมีตำแหน่งมาตรฐานเรียกว่า **สมการมาตรฐาน(standard equation)** ดังนั้นสมการ(2.9.1) เป็นสมการมาตรฐานของพาราโบลา

ตัวอย่าง 1. จงหาพิกัดของโฟกัส และสมการไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา $x^2 = 12y$ และเขียนกราฟพาราโบลา จุดโฟกัส และเส้นไคเรกซ์

เฉลย เปรียบเทียบกับสมการ(2.9.1)

$$p=3 \quad \text{จุดโฟกัสคือ } (0,3)$$

$$\text{เส้นไคเรกตริกซ์คือ } y=-3$$

จุดยอดเป็นจุดกำเนิด กราฟเป็นพาราโบลาเปิดเว้าขึ้นเหมือนกับรูป 2.9.4

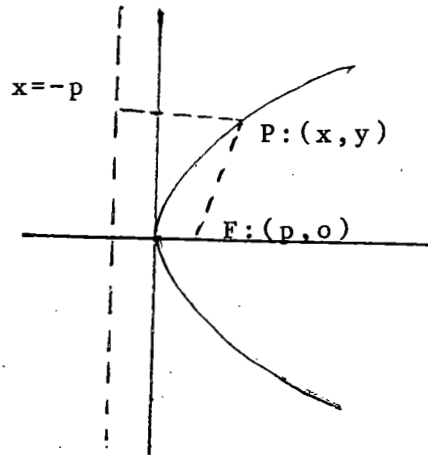
ใน 2.9.2 ทฤษฎีบท ถ้าเราให้แกนमुखสำคัญเป็นแกน x และจุดยอดเป็นจุดกำเนิด จะมีทฤษฎีบทดังนี้

2.9.3 ทฤษฎีบท สมการมาตรฐานของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสที่ $(p,0)$ และไคเรกตริกซ์ $x=-p$ คือ

$$y^2 = 4px$$

ถ้า $p > 0$ พาราโบลาเปิดไปทางขวาดังรูป 2.9.6

ถ้า $p < 0$ พาราโบลาเปิดไปทางซ้าย



รูป 2.9.6 $p > 0$, $y^2 = 4px$

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการพาราโบลาตำแหน่งมาตรฐานซึ่งผ่านจุด $(-5, 2)$ และ $(-5, -2)$

เฉลย จากตำแหน่งของจุดที่จะต้องผ่าน พาราโบลาจะต้องเปิดทางซ้าย และสมการมาตรฐานจะอยู่ในแบบ

$$y^2 = 4px$$

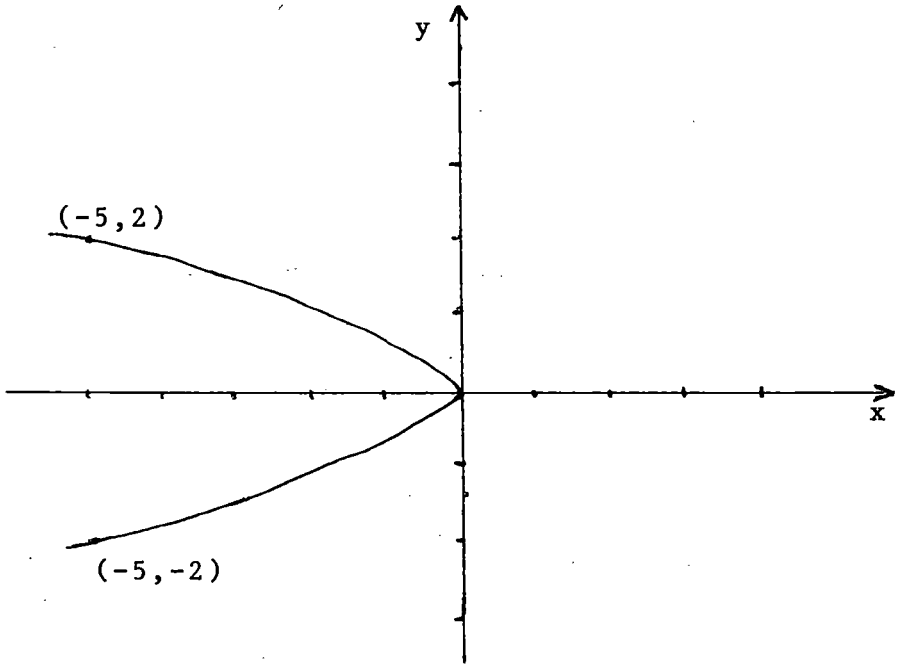
เมื่อ p เป็นจำนวนลบ

เพราะว่า $(-5, 2)$ อยู่บนพาราโบลา

$$(2)^2 = 4p(-5)$$

$$p = -\frac{1}{5}$$

ดังนั้นสมการมาตรฐานคือ $y^2 = -\frac{4}{5}x$ (รูป 2.9.7)



รูป 2.9.7

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการพาราโบลาซึ่งมีโฟกัส $F:(-2, 2)$ และเส้นไดเรกทริกซ์คือ $3x - 2y - 6 = 0$ (รูป 2.9.8)

เฉลย เพราะว่าไดเรกทริกซ์ไม่ขนานกับแกนพิกัด พาราโบลาจึงไม่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และไม่มีสมการมาตรฐาน

กำหนดจุด P เป็นจุดใดๆบนพาราโบลาและ Q เป็นโปรเจกชันของ P บนไดเรกทริกซ์ $3x - 2y - 6 = 0$

จาก 2.9.1 บทนิยาม P อยู่บนพาราโบลาก็ต่อเมื่อ

$$|FP| = |QP|$$

เพราะว่า

$$|FP| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$|QP| = \frac{|3x-2y-6|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}}$$

ดังนั้น

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|3x-2y-6|}{\sqrt{13}}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = \frac{(3x-2y-6)^2}{13}$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 88x - 76y + 68 = 0 \quad \#$$

แบบฝึกหัด 2.9

สำหรับแต่ละข้อให้เขียนกราฟ

ข้อ 1-ข้อ 5 จงหาพิกัดของโฟกัส และสมการไคเรกตริกซ์ของพาราโบลาที่กำหนดให้

1. $y^2 = 10x$

2. $x^2 = 12y$

3. $x^2 = -4y$

4. $y^2 + 3x = 0$

5. $3x^2 + 7y = 0$

ข้อ6-ข้อ10 จงหาสมการมาตรฐานของพาราโบลาเมื่อ

6. เส้นไคเรกตริกซ์คือ $y=-2$

7. เส้นไคเรกตริกซ์คือ $x=7$

8. เส้นไคเรกตริกซ์คือ $x=-4$

9. จุดโฟกัสคือ $(-2,0)$

10. จุดโฟกัสคือ $(0,-\frac{2}{3})$

11. จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่ $(0,0)$ แกนमुखสำคัญเป็นแกน y และผ่านจุด $(-3,5)$

12. จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่ $(0,0)$ แกนमुखสำคัญอยู่บนแกน x และผ่านจุด $(3,-1)$

13. จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสคือ $F:(0,1)$ และเส้นไคเรกตริกซ์ $14x+3y-12=0$

14. จงหาสมการของพาราโบลาในตำแหน่งมาตรฐานซึ่งผ่านจุด $(-4,2)$ และ $(-4,-2)$.

2.10 การเขียนกราฟของสมการ

การเขียนกราฟของสมการ เราจะวิเคราะห์จากสมการโดยเริ่มจาก ทดสอบหา ส่วนตัด (intercept) สมมาตร (symmetry) เส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptotes) และเส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptotes)

เนื่องจากจุดอยู่บนแกน x ก็ต่อเมื่อพิกัด y เป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นถ้าจะหาส่วนตัด x ก็ต้องแทน $y=0$ ลงในสมการ

โดยทำนองเดียวกันถ้าจะหาส่วนตัด y ก็ต้องแทน $x=0$ ลงในสมการ

ตัวอย่าง 1. จงหาส่วนตัดของกราฟ $y^2+8y-16x+16=0$

เฉลย หาส่วนตัด x แทน $y=0$ ลงในสมการ

$$-16x+16=0$$

หรือ $x=1$

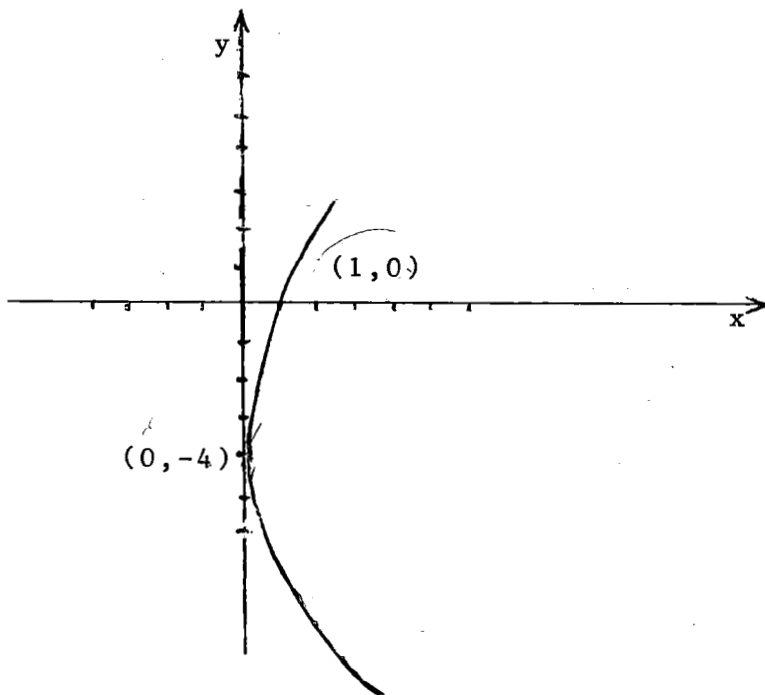
ดังนั้นส่วนตัด x คือ 1

หาส่วนตัด y แทน $x=0$ ลงในสมการ

$$y^2+8y+16=0$$

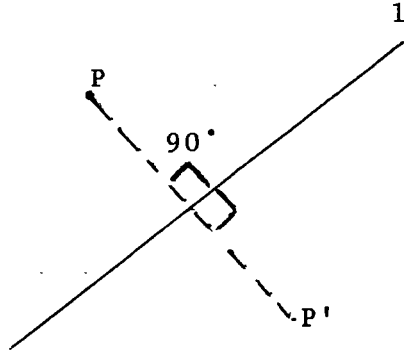
$$(y+4)(y+4)=0$$

ดังนั้นส่วนตัด y คือ -4 (รูป 2.10.1) #



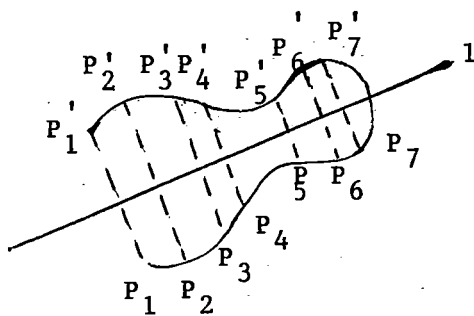
รูป 2.10.1

2 จุด P และ P' เรียกว่า**สมมาตร**เมื่อเทียบกับเส้นตรง l ถ้า l ตั้งฉากและแบ่งครึ่งเส้นตรง PP' (รูป 2.10.2) และเรากล่าวว่า P และ P' เป็นการสะท้อนซึ่งกันและกันรอบเส้นตรง l



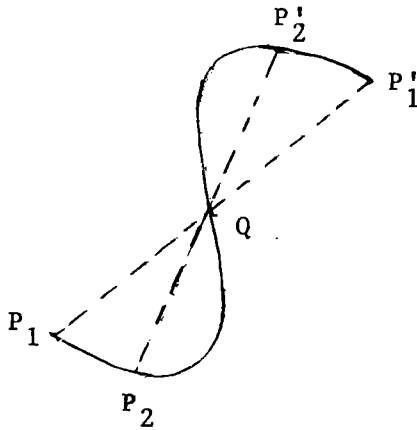
รูป 2.10.2

เราจะกล่าวว่ากราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับเส้นตรง l ถ้าการสะท้อนรอบเส้นตรง l ของทุกจุดบนกราฟอยู่บนกราฟ (รูป 2.10.3) และเส้น l เรียกว่า **เส้นสมมาตรของกราฟ**



รูป 2.10.3

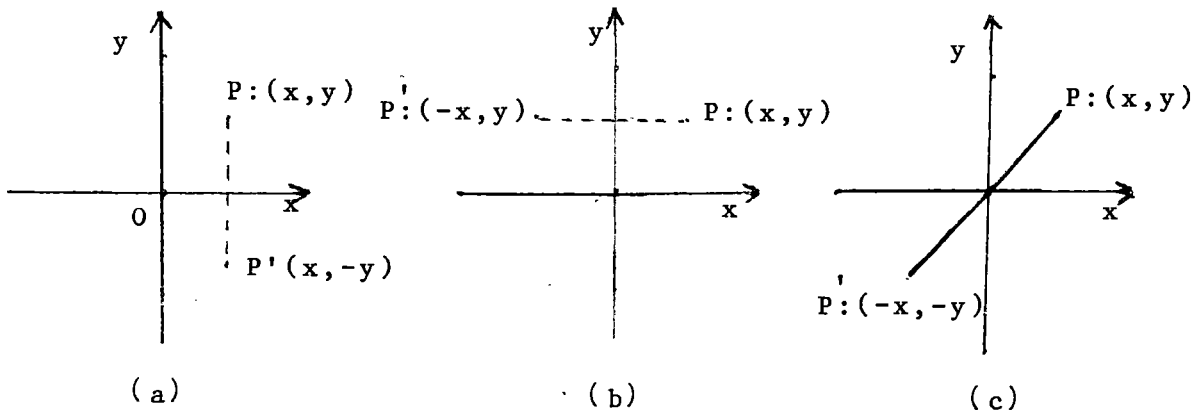
เราจะกล่าวว่ากราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับจุด Q ถ้าโปรเจกชันแต่ละจุด P บนกราฟ มีจุด P' บนกราฟซึ่ง Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนเส้น PP' (รูป 2.10.4)



รูป 2.10.4

จุด $P:(x,y)$ ในระนาบคาร์ทีเซียนเป็นการสะท้อนของจุด $P':(x,-y)$ เมื่อเทียบกับแกน x (รูป 2.10.5 (a)) และเป็นการสะท้อนของจุด $P':(-x,y)$ เมื่อเทียบกับแกน y

จุด $P:(x,y)$ และ $P':(-x,-y)$ สมมาตรกันเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด (รูป 2.10.5 (c))



รูป 2.10.5

เพราะฉะนั้นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x ถ้าพิกัด (x, y) สอดคล้องสมการของกราฟ แล้วพิกัด $(x, -y)$ สอดคล้องสมการของกราฟด้วย

กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y ถ้าพิกัด (x, y) สอดคล้องสมการของกราฟแล้วพิกัด $(-x, y)$ สอดคล้องสมการของกราฟด้วย

กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด ถ้า (x, y) สอดคล้องสมการของกราฟแล้ว $(-x, -y)$ สอดคล้องสมการของกราฟด้วย

เราจะกล่าวว่า 2 สมการสมมูล (equivalent) กัน ถ้ามีเซตของผลเฉลยเหมือนกัน ดังนั้นสมการใดๆ ถ้าเราเปลี่ยนเครื่องหมายทุกพจน์ในสมการก็จะได้สมการเดิม จากที่กล่าวมาทั้งหมดสรุปลักษณะของกราฟได้ดังนี้

1. กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x ถ้าสมการสมมูลกันเมื่อแทน y ด้วย $-y$
2. กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y ถ้าสมการสมมูลกันเมื่อแทน x ด้วย $-x$
3. กราฟสมมูลกันเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด ถ้าสมการสมมูลกันเมื่อแทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ ในสมการ

ตัวอย่าง 2. จงแสดงว่ากราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x

$$y^2 - 16x + 32 = 0 \quad (\text{รูป 2.10.6})$$

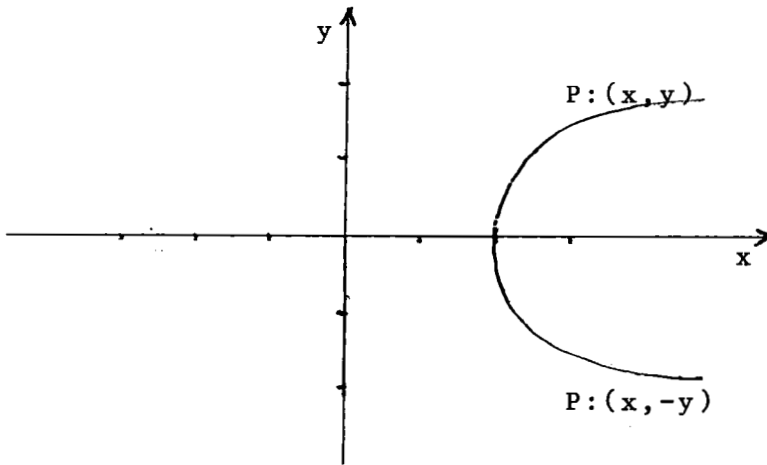
ผลเฉลย เมื่อแทน y ด้วย $-y$ จะมีสมการ

$$(-y)^2 - 16x + 32 = 0$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$y^2 - 16x + 32 = 0$$

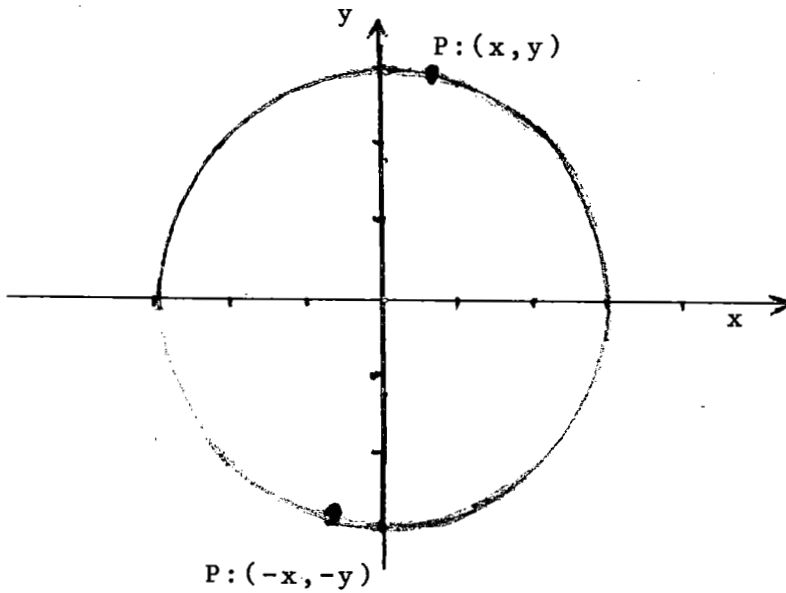
เพราะฉะนั้นกราฟของสมการ $y^2 - 16x + 32 = 0$ สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x



รูป 2.10.6

ตัวอย่าง 3. จงพิสูจน์ว่ากราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 9$ สมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด
(รูป 2.10.7)

เฉลย



รูป 2.10.7

ถ้าแทน x ด้วย $-x$ และแทน y ด้วย $-y$ จะมีสมการ

$$(-x)^2 + (-y)^2 = 9$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$x^2 + y^2 = 9$$

เพราะฉะนั้นกราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 9$ สมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด #

ตัวอย่าง 4. เขียนกราฟของสมการ $y = \frac{1}{x}$

เฉลย กราฟไม่มีส่วนตัด เพราะว่าตัวหารไม่เป็นศูนย์

กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด เพราะว่าสมการ $(-y) = \frac{1}{-x}$ สมมูลกับ

$$y = \frac{1}{x}$$

เมื่อ x เป็นค่าบวกเข้าใกล้ศูนย์ จะสมนัยกับค่าของ y ค่าเดียวและมีค่าเพิ่มขึ้น

เขียนตารางหาพิกัด (x, y)

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
y	1	2	10	100	1000

แกน y เรียกว่าเส้นกำกับแนวดิ่ง

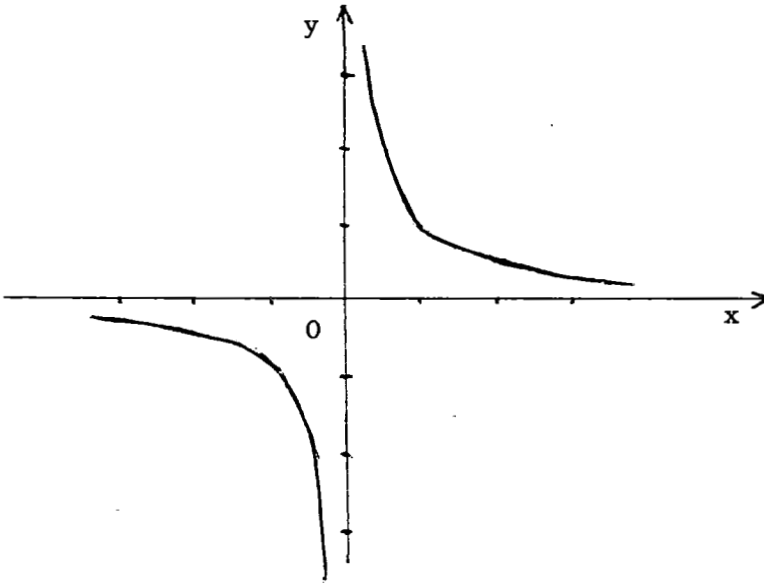
โดยทำนองเดียวกัน เมื่อ x เพิ่มขึ้น จะสมนัยกับค่า y และมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

เขียนตารางหาพิกัด (x, y)

x	1	2	10	100	1000
y	1	0.5	0.1	0.01	0.001

แกน x เรียกว่าเส้นกำกับแนวนอน

โดยข้อมูลทั้งหมด แสดงจุดในตารางลงในระนาบแล้วเขียนกราฟดังรูป 2.10.8



รูป 2.10.8

#

ตัวอย่าง 5. เขียนกราฟของสมการ $x^2y^2 - 4x^2 + 4y^2 = 0$

เฉลย ส่วนตัด y คือ 0

ส่วนตัด x คือ 0

ดังนั้นส่วนตัดของกราฟกับแกนพิกัดมีเพียงจุดเดียวคือ จุดกำเนิด

กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x เพราะแทน x ด้วย $-x$ แล้วสมการสมมูลกัน

กราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y เพราะแทน y ด้วย $-y$ แล้วสมการสมมูลกัน

เขียนสมการให้ x อยู่ในเทอม

$$x = \pm \frac{2y}{\sqrt{4-y^2}}$$

เนื่องจาก $4-y^2 > 0$ เพราะฉะนั้น $-2 < y < 2$

เขียนกราฟให้ y อยู่ในเทอมของ x

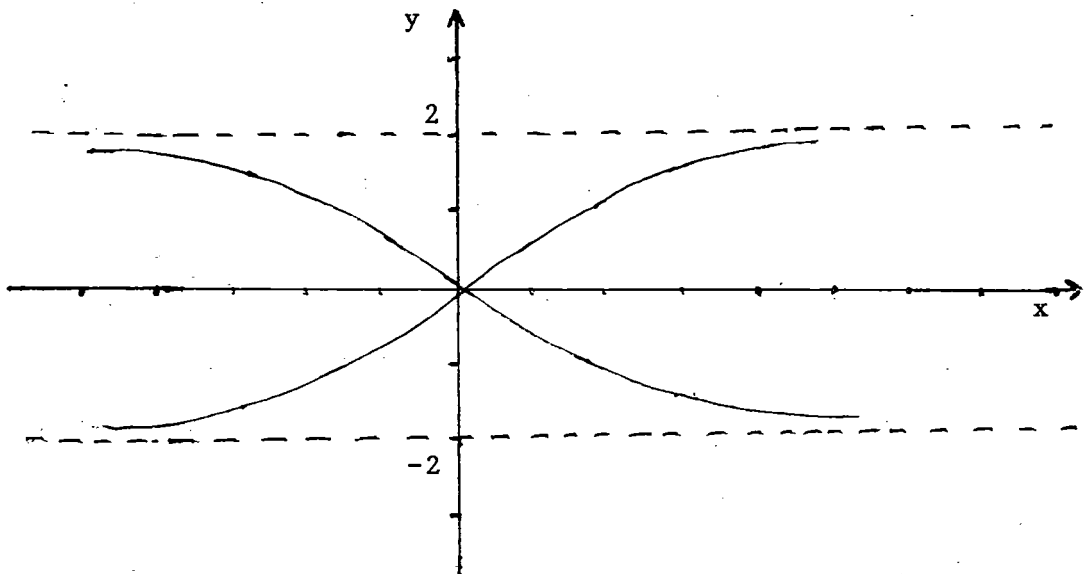
$$y = \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

กำหนด $x = \pm 3, \pm 5, \pm 8, \pm 10$

จะสมนัยกับค่า y คือ $\pm 1.67, \pm 1.86, \pm 1.94, \pm 1.96$

แสดงจุดลงในระนาบ เมื่อกราฟขยายออกไปทางขวาและทางซ้ายกราฟจะเข้าใกล้เส้นแนวนอน $y = \pm 2$ (รูป 2.11.9)

$y = \pm 2$ เรียกว่าเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของสมการ #



รูป 2.10.9

ถ้าสมการของกราฟมีฟังก์ชัน y เข้าใกล้จำนวน b สำหรับค่า x ที่ใหญ่เพียงพอ หรือค่าลบของ x ซึ่งจำนวนเลขใหญ่เพียงพอ เรากล่าวว่าเส้นตรง $y = b$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนของ

กราฟ

โดยทำนองเดียวกัน ถ้าสมการของกราฟมีฟังก์ชัน x เข้าใกล้จำนวน a สำหรับค่า y ที่ใหญ่เพียงพอ หรือค่าลบของ y ซึ่งจำนวนเลขใหญ่เพียงพอ เรากล่าวว่า เส้นตรง $x=a$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟ

กราฟอาจจะมีหรือไม่มีเส้นกำกับก็ได้

แบบฝึกหัด 2.10

1. หาส่วนตัดกราฟของสมการ

a. $3x+4y=24$

b. $y=2x^2+5x-12$

c. $x^2y^2-x^2+y^2+1=0$

d. $x^3-y=0$

2. ทดสอบการสมมาตรของสมการ

a. $y-4x^3=0$

b. $x^2-xy+y^2=1$

c. $y=\frac{1}{1+x^2}$

d. $x^3+xy^2-6x^2+2y^2=0$

3. ทดสอบเส้นกำกับแนวตั้ง เส้นกำกับแนวนอน

a. $xy+2x-3y=0$

b. $y=\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$

c. $x^3+xy^2-6x^2+2y^2=0$

d. $x^2y^2-4x^2+y^2+0$

2.11 การเลื่อนทางขนานของแกนพิกัด

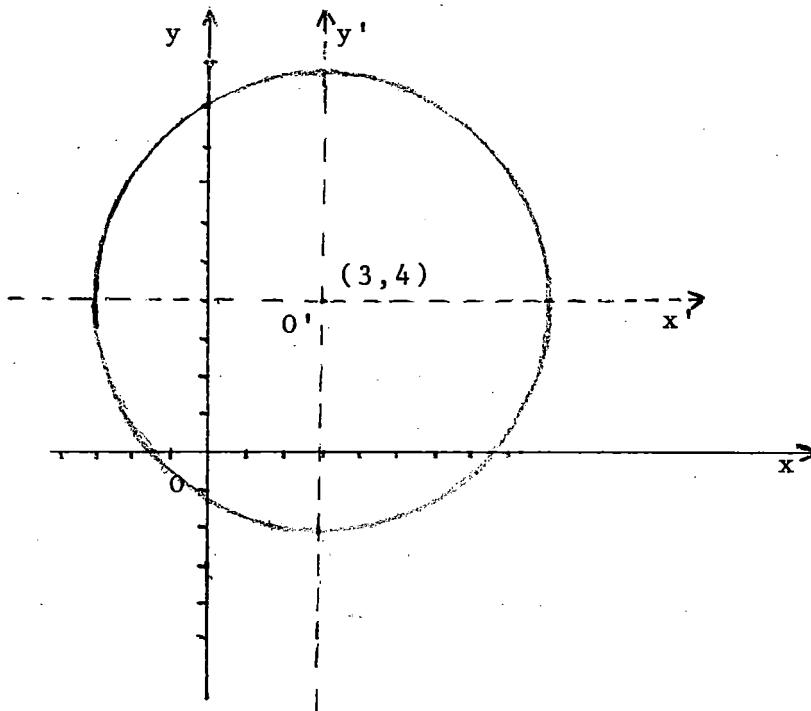
รูป 2.11.1 วงกลมรัศมี 6 จุดศูนย์กลาง (3,4) มีสมการคือ

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36$$

หรือ $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

วงกลมเดียวกันนี้ ถ้าให้มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด จะมีสมการ

$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$



รูป 2.11.1

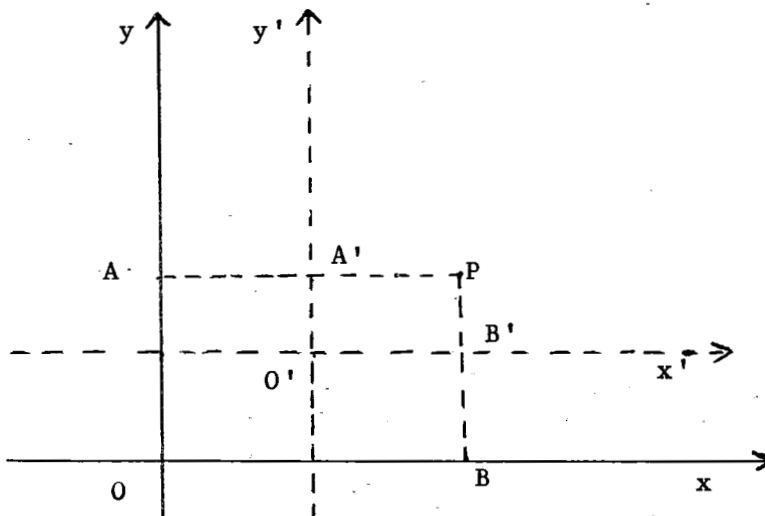
ตำแหน่งของแกนพิกัดไม่ทำให้ขนาดหรือรูปร่างของกราฟเปลี่ยน แต่อาจมีผลกระทบ
ต่อตัวแทนพีชคณิต การเลือกแกนพิกัดใหม่บางครั้งง่ายต่อการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

สมมติเราเลือกแกนใหม่ในระนาบ ทุกจุดในระนาบจะมี 2 พิกัด คือ พิกัดเดิม (x, y)
เทียบกับแกนเดิม และพิกัดใหม่ (x', y') เทียบกับแกนใหม่ วิธีการนี้เรียกว่า **การแปลง**
(transformation) พิกัด ถ้าแกนใหม่ทั้ง 2 แกน ขนานกับแกนเดิม และมีทิศทาง
เหมือนเดิม(รูป 2.11.1) การแปลงนี้เรียกว่า **การเลื่อนทางขนาน(translation)**
เราจะพิสูจน์สูตรความสัมพันธ์ระหว่าง 2 พิกัดในการเลื่อนทางขนาน

2.11.1 ทฤษฎีบท ถ้าเลือกแกนพิกัดใหม่ในระนาบ ให้ขนานและมีทิศทางเหมือนกับแกน
พิกัดเดิม โดยจุดกำเนิดใหม่ออยู่ที่ (h, k) เมื่อเทียบกับแกนเดิม แล้วพิกัดเก่า (x, y)
และพิกัดใหม่ (x', y') ของจุดใดๆในระนาบสัมพันธ์กันโดย สมการของการเลื่อนทาง
ขนาน

$$x = x' + h, \quad y = y' + k \quad (2.11.1)$$

พิสูจน์ ให้ P เป็นจุดใดๆในระนาบ (รูป 2.11.2)



รูป 2.11.2

เส้นที่ผ่าน P ขนานกับแกน x ตัดแกน y ที่จุด A และแกน y' ใหม่ที่จุด A'

เส้นที่ผ่าน P ขนานกับแกน y ตัดแกน x ที่จุด B และตัดแกน x' ใหม่ที่ B'

ในระบบพิกัดเดิม พิกัดของจุด P คือ (x, y) พิกัดของ A' คือ (h, y) และพิกัด A คือ $(0, y)$ เพราะฉะนั้น

$$\overline{A'P} = x - h$$

แต่ $\overline{A'P} = \overline{O'B'} = x'$ เพราะฉะนั้น

$$x' = x - h$$

หรือ $x = x' + h$

โดยทำนองเดียวกัน $y = y' + k$ #

ตัวอย่าง 1. จงหาพิกัดใหม่ของจุด $(-4, 3)$ หลังจากเลื่อนทางขนานมีจุดกำเนิดใหม่ที่ $(3, -4)$

เฉลย พิกัดเดิมของ P คือ $x = -4$ และ $y = 3$

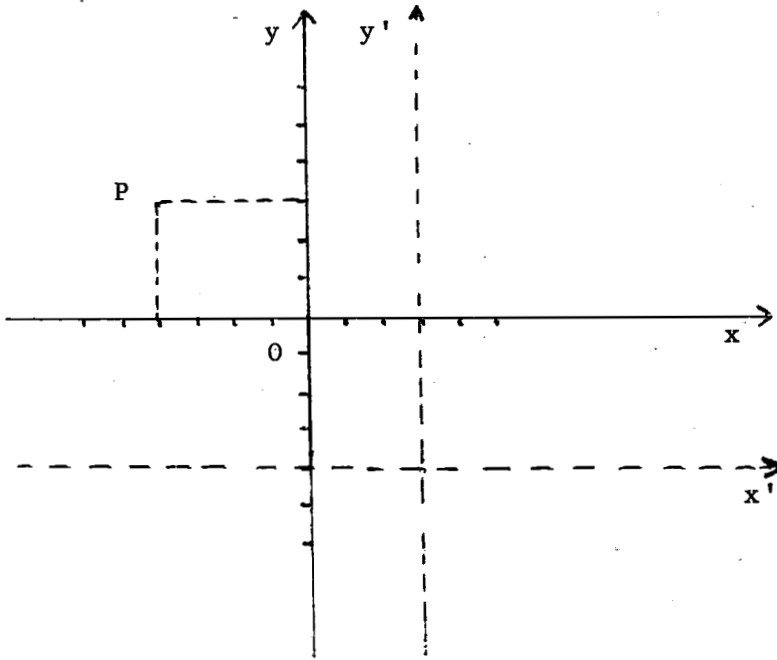
พิกัดของจุดกำเนิดใหม่ คือ $h = 3$ และ $k = -4$ (รูป 2.11.3)

แทนค่าในสมการ (2.12.1) จะมี

$$-4 = x' + 3 \quad \text{และ} \quad 3 = y' + (-4)$$

$$x' = -7 \quad \text{และ} \quad y' = 7$$

ดังนั้นพิกัดใหม่ของ P คือ $(-7, 7)$ #



รูป 2.10.3

ตัวอย่าง 2. กำหนดสมการ $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 6 = 0$ จงหาสมการของกราฟหลังจาก
เลื่อนทางขนานให้จุดกำเนิดใหม่อยู่ที่ $(2, -4)$

เฉลย โดย 2.11.1 ทฤษฎีบท ทุกจุดในระนาบที่มีพิกัดเดิม (x, y) และพิกัดใหม่
 (x', y') จะสัมพันธ์กันโดย

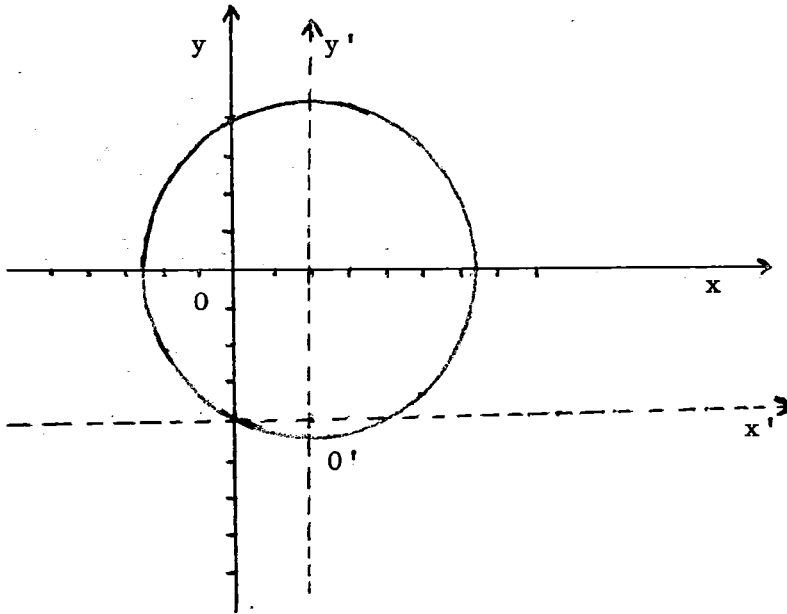
$$x = x' + 2 \quad \text{และ} \quad y = y' - 4$$

แทน x และ y ในสมการ

$$(x' + 2)^2 + (y' - 4)^2 - 4(x' + 2) + 8(y' - 4) + 6 = 0$$

จะได้สมการ $x'^2 + y'^2 - 20 = 0$

กราฟจะเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดรัศมี $\sqrt{20}$ (รูป 2.11.4)



รูป 2.11.4

#

ระดับชั้นของเทอมในพหุนามของ 2 ตัวแปร เราหมายถึงผลบวกของกำลังของตัวแปรในพจน์นั้น

ตัวอย่างเช่น $2x^2y^4 + 4xy + 6x^2 - 8y + 10 = 0$

ระดับชั้นของพจน์ $2x^2y^4$ คือ $2+4+6$

ระดับชั้นของพจน์ $4xy$ คือ $1+1=2$

ระดับชั้นของพจน์ $6x^2$ คือ 2

ระดับชั้นของพจน์ $-8y$ คือ 1

ระดับชั้นของพจน์ 10 คือ 0

สมการ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เมื่อ A, B และ C ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด เรียกว่าสมการระดับชั้น 2 (second degree) ในตัวแปร x และ y

ถ้า B=0 สมการระดับชั้น 2 ไม่มีเทอม xy เราสามารถแปลงให้อยู่ในแบบง่าย โดยวิธีเลื่อนทางขนานได้ 2 วิธี จะแสดงให้ดูดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3. จงแปลงพิกัดเพื่อให้สมการของกราฟของสมการ

$$25x^2 + 4y^2 + 150x - 8y + 129 = 0$$

ไม่มีเทอมคี่กรหนึ่ง

ผลเฉลย สมการระดับชั้น 2 ไม่มีเทอม xy แต่มีเทอม x^2 และ y^2 สมการจะอยู่ในแบบ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เมื่อ $A \neq 0$ และ $C \neq 0$

เราจะลดทอนสมการนี้ให้อยู่ในแบบ

$$Ax'^2 + Cy'^2 + F = 0$$

ซึ่งเป็นสมการสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x' ใหม่และแกน y' ใหม่

วิธี 1. เขียนสมการให้อยู่ในแบบ

$$25(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 2y) = -129$$

ทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยบวก $25(9) = 225$ และ $4(1) = 4$ ทั้งสองข้างของสมการ

$$25(x^2+6x+9)+4(y^2-2y+4)=100$$

หรือ $25(x+3)^2+4(y-2)^2=100$

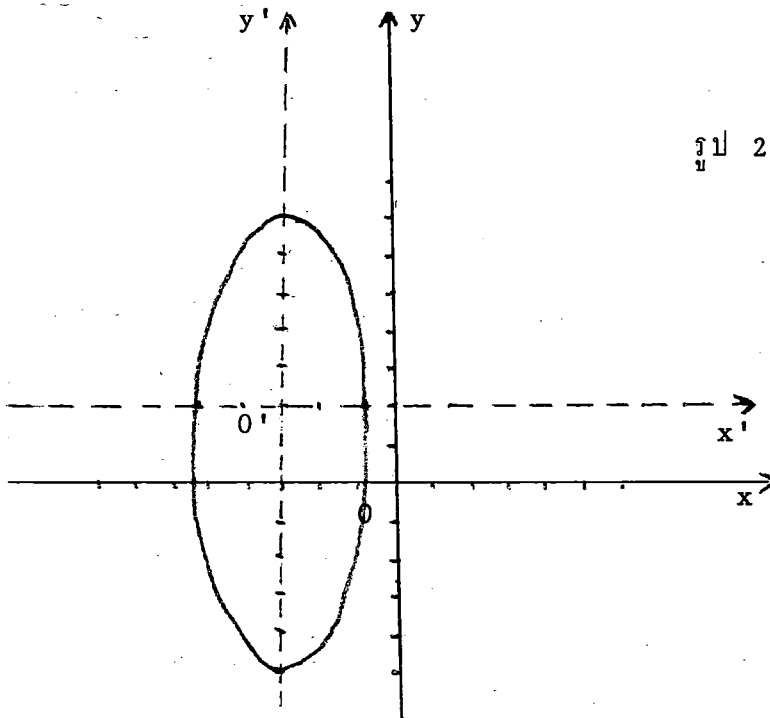
แทน $x'=x+3$ และ $y'=y-2$ ในสมการ

$$25x'^2+4y'^2=100$$

สมการนี้เกิดจากการเลื่อนทางขนานด้วยสมการ

$$x=x'-3, \quad y=y'+2$$

จุดกำเนิดใหม่ที่ $(-3, 2)$ เขียนกราฟได้ดังรูป 2.11.5 กราฟจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่



รูป 2.11.5

วิธีที่ 2. แทนสมการของการเลื่อนทางขนาน

$$x = x' + h, \quad y = y' + k$$

ในสมการ

$$25(x' + h)^2 + 49y' + k)^2 + 150(x' + h) - 8(y' + k) + 129 = 0$$

โดยการกระจายและรวมพจน์

$$(1) \quad 25x'^2 + 4y'^2 + x'(50h + 150) + y'(8k - 8) + (25h^2 + 4k^2 + 150h - 8k + 129) = 0$$

หาค่า h และ k เพื่อในสมการ (1) ไม่มีเทอมระดับชั้นหนึ่งใน x' และ y' ให้

$$50h + 150 = 0 \quad \text{และ} \quad 8k - 8 = 0$$

แก้สมการ $h = -3$ และ $k = 1$

โดยการแทน $h = -3$ และ $k = 1$ ในสมการ (1)

$$25x'^2 + 4y'^2 + 25(9) + 4(1) + 150(-3) - 8(1) + 129 = 0$$

$$\text{หรือ} \quad 25x'^2 + 4y'^2 = 100 \quad \#$$

ตัวอย่าง 4. แปลงสมการให้อยู่ในแบบง่ายโดยการเลื่อนทางขนาน

$$y^2 - 8x - 6y + 1 = 0$$

เฉลย สมการอยู่ในแบบ $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $C \neq 0$ และ $D \neq 0$

เราจะแสดงว่าสมการสามารถลดทอนเป็น

$$Cy'^2 + Dx' = 0$$

โดยวิธีเลื่อนทางขนานสมการนี้สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x' ใหม่และผ่านจุดกำเนิด

วิธีที่ 1. เขียนสมการให้อยู่ในแบบ $y^2 - 6y = 8x - 1$

โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ บวกทั้งสองข้างด้วย 9

$$y^2 - 6y + 9 = 8x + 8$$

$$(y-3)^2 = 8(x+1)$$

ให้ $x' = x+1$ และ $y' = y-3$

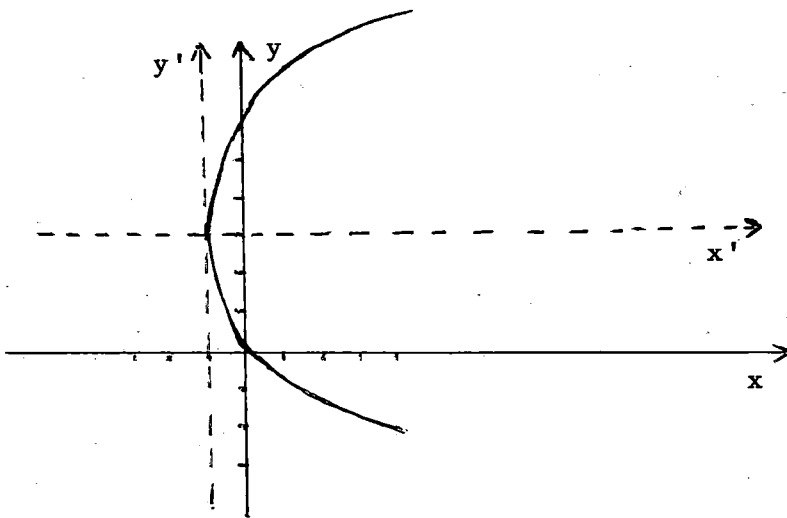
ดังนั้นโดยการเลื่อนทางขนานด้วยสมการ

$$x = x' - 1, \quad y = y' + 3$$

จุดกำเนิดใหม่ไปอยู่ที่ $(-1, 3)$ สมการคือ

$$y'^2 = 8x'$$

รูป 2.11.6 เป็นกราฟของสมการ $y'^2 = 8x'$ เทียบกับแกนใหม่



รูป 2.11.6

วิธีที่ 2. โดยแทนสมการเลื่อนทางขนาน $x=x'+h$ และ $y=y'+k$ ลงในสมการ

$$(y'+k)^2 - 8(x'+h) - 6(y'+k) + 1 = 0$$

โดยการกระจายแล้วรวมพจน์

$$(1) \quad y'^2 - 8x' + (2k-6)y' + (k^2 - 8h - 6k + 1) = 0$$

หาค่า h, k เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ไม่มีพจน์ระดับชั้นหนึ่งใน y'

$$\text{ให้ } 2k-6=0 \quad \text{และ} \quad k^2 - 8h - 6k + 1 = 0$$

$$\text{แก้สมการได้ } h=-1 \quad \text{และ} \quad k=3$$

$$\text{โดยการแทน } h=-1 \quad \text{และ} \quad k=3 \quad \text{แทนใน(1)} \quad y'^2 = 8x' \quad \#$$

แบบฝึกหัด 2.11

ข้อ 1-ข้อ 4 จงใช้วิธีเลื่อนทางขนานทั้ง 2 วิธี เพื่อให้สมการอยู่ในแบบง่าย

$$1. \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$2. \quad 4x^2 + 9y^2 + 8x - 90y + 193 = 0$$

$$3. \quad y^2 - 4x - 12y + 28 = 0$$

$$4. \quad 9x^2 - 16y^2 + 90x + 192y - 495 = 0$$

5. โดยการเลื่อนทางขนานวิธีที่ 2 จงลดทอนสมการ $xy + 8x - 7y - 59 = 0$ เพื่อไม่มีพจน์ระดับชั้น 1 แล้วเขียนกราฟเทียบกับแกนพิกัดทั้ง 2 แบบ

6. โดยการเลื่อนทางขนานวิธีที่ 2 จงลดทอนสมการ

$$x^2y - 8x^2 + 8xy - 64x + 16y - 129 = 0$$

เพื่อไม่มีพจน์ระดับชั้น 2 และไม่มีพจน์ระดับชั้น 1 แล้วเขียนกราฟเทียบกับแกนพิกัดทั้ง 2 แบบ.

2.12 กราฟของอสมการ

เซตของผลเฉลยของอสมการที่มีสองตัวแปร x และ y เป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง ซึ่งมีคุณสมบัติเมื่อแทน x ด้วยจำนวนที่ 1 และ y ด้วยจำนวนที่ 2 แล้วอสมการเป็นจริง

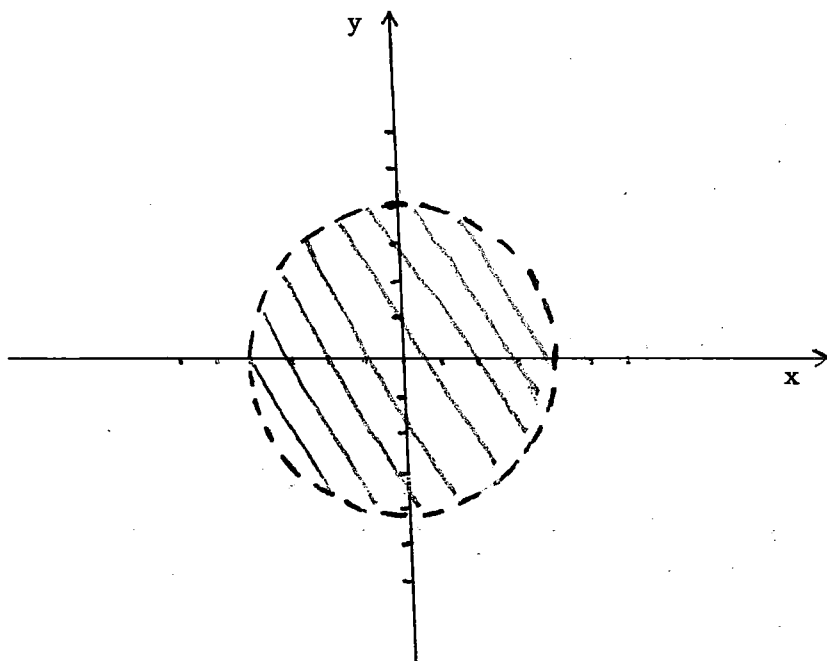
กราฟของอสมการในตัวแปร x และ y เป็นเซตของจุด $P:(x,y)$ ซึ่งมีพิกัดเป็นผลเฉลยของอสมการ

ตัวอย่างเช่น กราฟของอสมการ

$$(1) \quad x^2 + y^2 < 16$$

เป็นแผ่นกลมเปิด(open disk) ซึ่งประกอบด้วยจุดภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 16$

(รูป 2.12.1)

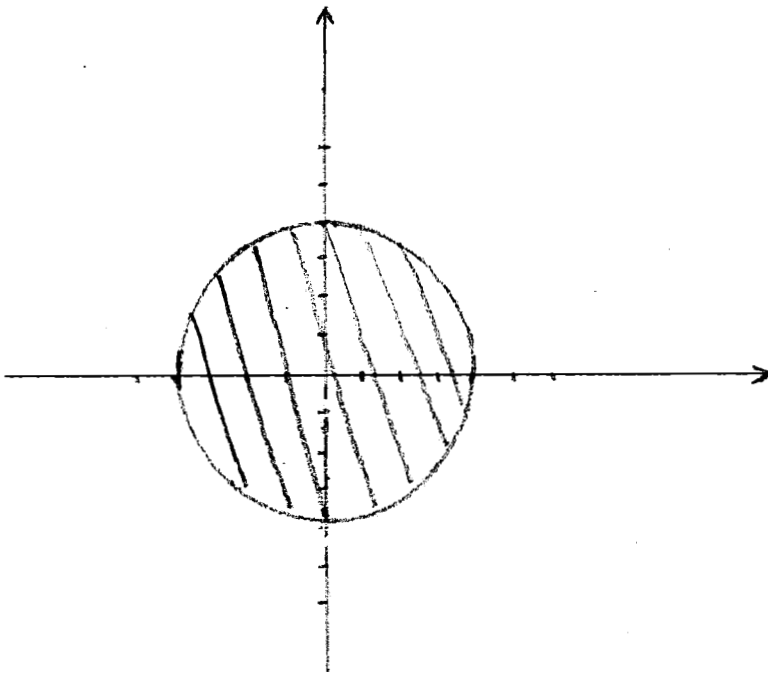


รูป 2.12.1

กราฟของอสมการ

$$(2) \quad x^2 + y^2 \leq 16$$

เป็นแผ่นกลมปิด(closed disk) ซึ่งประกอบด้วยจุดภายในหรือบนวงกลม
 $x^2 + y^2 = 16$ (รูป 2.12.2)



รูป 2.12.2

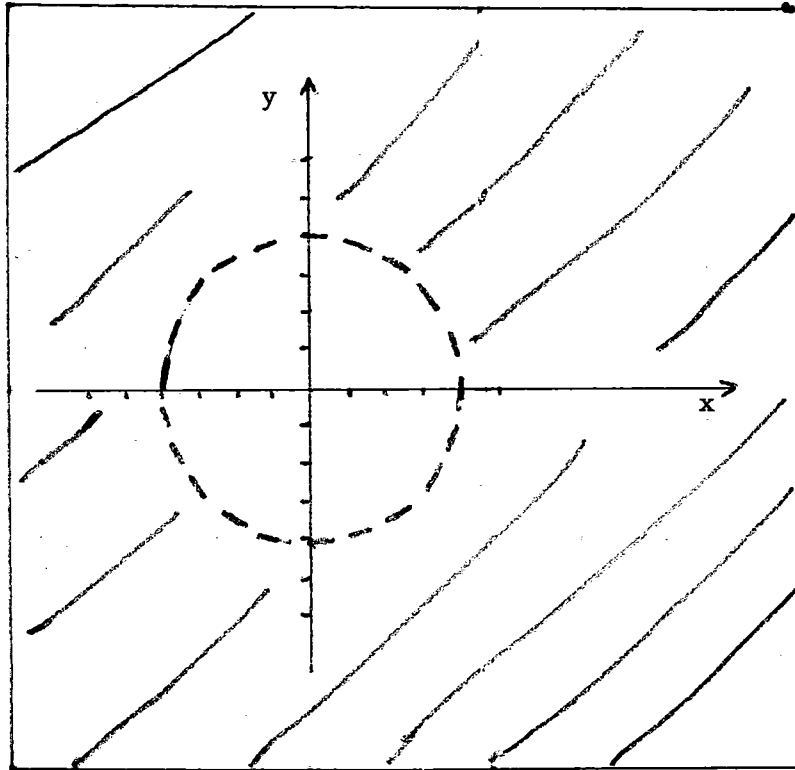
กราฟของอสมการ(1) ไม่รวมจุดขอบ เรียกว่าบริเวณเปิด(open region)

กราฟของอสมการ(2) เรียกว่าบริเวณปิด(closed region)

กราฟของอสมการ

$$x^2 + y^2 > 16$$

เป็นบริเวณที่ประกอบด้วยจุดทั้งหมดที่อยู่นอกวงกลม $x^2+y^2=16$ (รูป 2.12.3)



รูป 2.12.3

กราฟของอสมการ

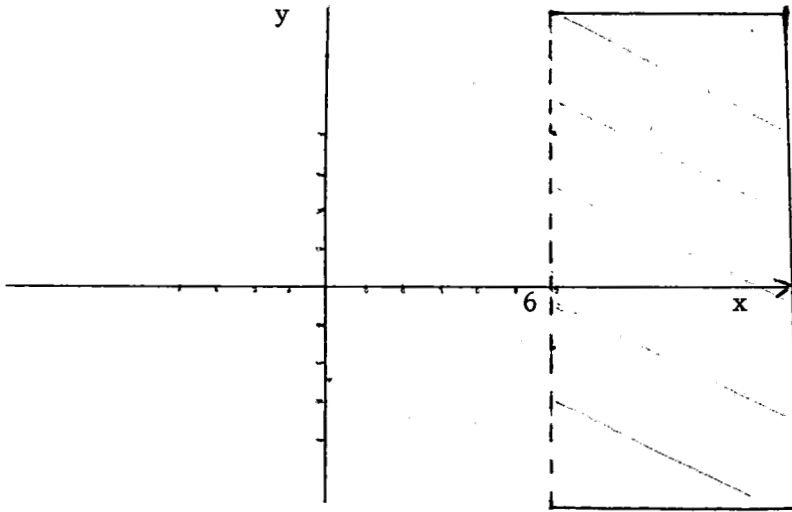
$$x > 6$$

เป็นครึ่งระนาบเปิด(open half-plane) ประกอบด้วยจุดทั้งหมดในระนาบที่อยู่ทางขวาของเส้นแนวดิ่ง $x=6$ (รูป 2.12.4)

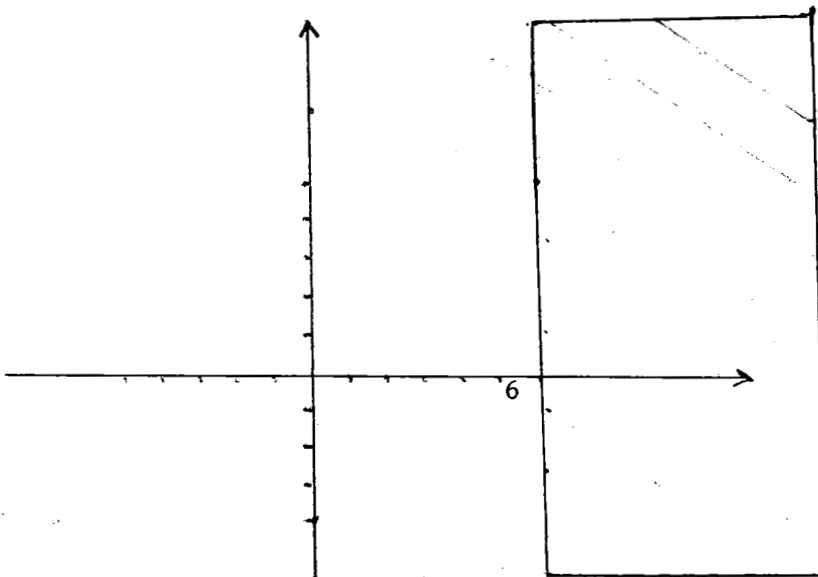
กราฟของอสมการ

$$x \geq 6$$

เป็นครึ่งระนาบปิด(closed half-plane)ประกอบด้วยจุดทั้งหมดที่อยู่บนหรือทางขวา
ของเส้นแนวดิ่ง $x=6$ (รูป 2.12.5)



รูป 2.12.4

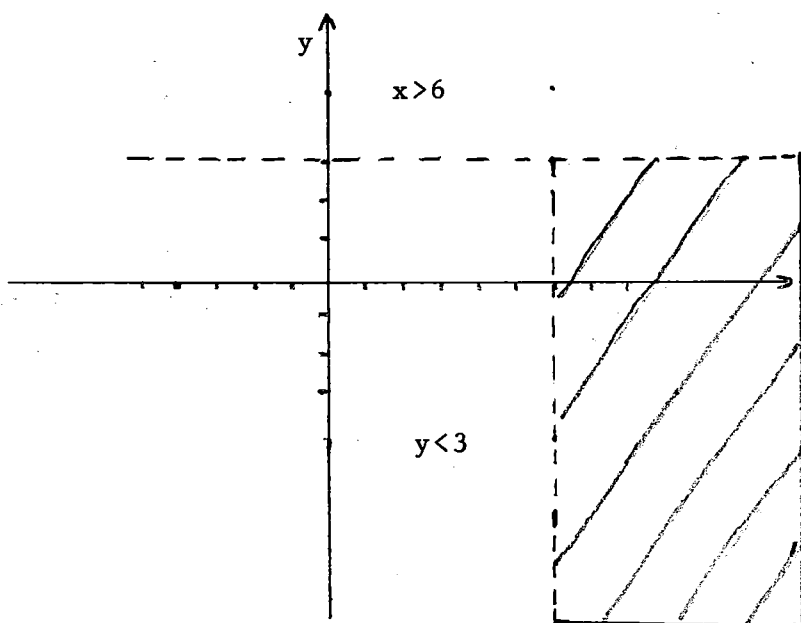


รูป 2.12.5

เซต

$$(3) \quad \{ P:(x,y) / x>6, y<3 \}$$

เป็นผลตัดของ 2 ครึ่งระนาบเปิด $x>6$ และ $y<3$ ดังนั้น (3) เป็นเซตของจุดที่อยู่ทางขวาของเส้นแนวดิ่ง $x=6$ และต่ำกว่าเส้นแนวนอน $y=3$ (รูป 2.12.6)



รูป 2.12.6 $x>0$ และ $y<3$

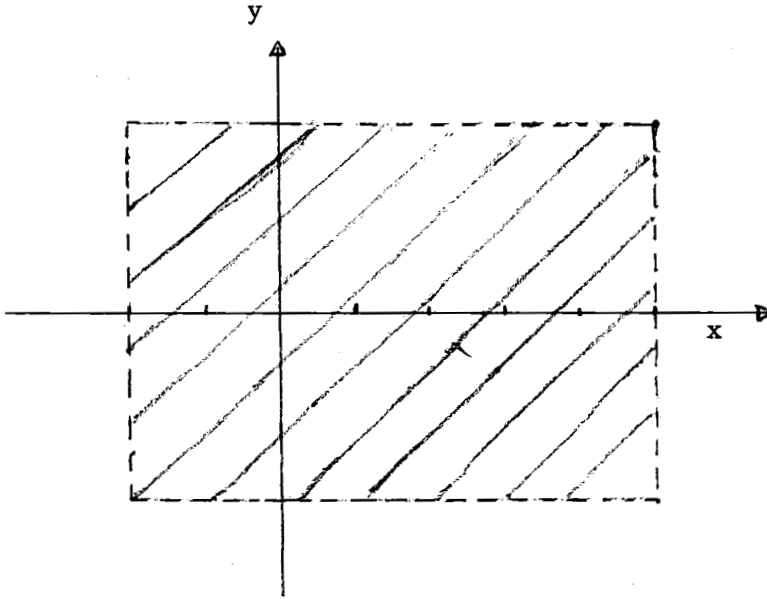
กราฟของอสมการ

$$-2 < x < 5$$

เป็นสายยาวเปิดแนวดิ่ง (open vertical strip) ระหว่างเส้นแนวดิ่ง $x=-2$ และ $x=5$ (รูป 2.12.7) ซึ่งเป็นผลตัดของ 2 ครึ่งระนาบเปิด $x>-2$ และ $x<5$

เซตของจุด

$$\{P:(x,y) / -2 < x < 3, 4 < y < 6\}$$



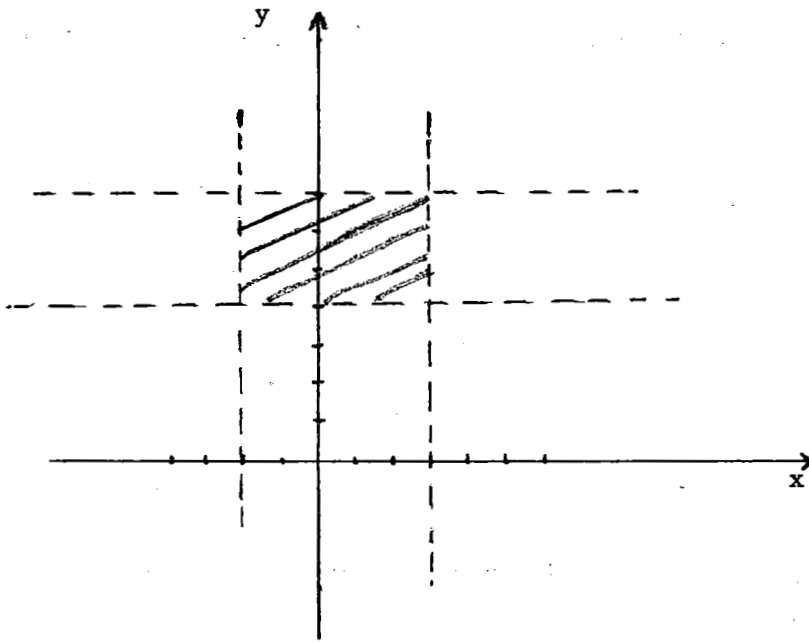
รูป 2.12.7

เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิด (รูป 2.12.8) ซึ่งเป็นผลตัดของสายยาวแนวตั้งเปิด $-2 < x < 3$ และสายยาวแนวนอน $4 < y < 6$

ตัวอย่าง 1. กำหนดเส้นตรง $x+2y-3=0$ จงพิสูจน์ จุด $P_1:(x_1, y_1)$

- (i) อยู่เหนือเส้นตรงก็ต่อเมื่อ $x_1+2y_1-3 > 0$
- (ii) อยู่บนเส้นตรงก็ต่อเมื่อ $x_1+2y_1-3 = 0$
- (iii) อยู่ใต้เส้นตรงก็ต่อเมื่อ $x_1+2y_1-3 < 0$

พิสูจน์ เส้นแนวตั้งผ่านจุด $P_1:(x_1, y_1)$ คือ $x=x_1$ (รูป 2.12.9) ตัดเส้นที่กำหนดให้ที่จุด $Q:(x_1, \frac{3-x_1}{2})$



รูป 2.12.8

P_1 อยู่เหนือเส้นที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อเส้นตรง $\overline{QP}_1 > 0$

P_1 อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อเส้นตรงระบุทิศทาง $\overline{QP}_1 = 0$

P_1 อยู่ใต้เส้นตรงที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อเส้นตรงระบุทิศทาง $\overline{QP}_1 < 0$

นั่นคือ

P_1 อยู่เหนือเส้นตรงที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อ

$$y_1 - 3 - x_1 > 0$$

ซึ่งหมายความว่า $x_1 + 2y_1 - 3 > 0$

P_1 อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อ

$$y_1 - 3 - x_1 = 0$$

ซึ่งหมายความว่า $x_1 + 2y_1 - 3 = 0$

P_1 อยู่ใต้เส้นตรงที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อ

$$y_1 - \frac{3 - x_1}{2} < 0$$

ซึ่งหมายความว่า $x_1 + 2y_1 - 3 < 0$ #

เรามีทฤษฎีบทเป็นหลักทั่วไปดังนี้

2.12.1 ทฤษฎีบท กำหนดเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ และ $B > 0$ จุด $P_1 : (x_1, y_1)$

อยู่เหนือเส้นตรงก็ต่อเมื่อ $Ax_1 + By_1 + C_1 > 0$

อยู่บนเส้นตรงก็ต่อเมื่อ $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$

อยู่ใต้เส้นตรงก็ต่อเมื่อ $Ax_1 + By_1 + C_1 < 0$

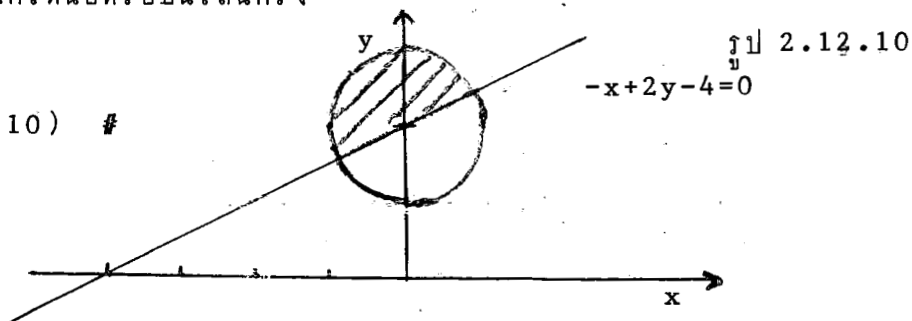
การพิสูจน์เหมือนกับตัวอย่าง 1 จึงเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 2. เขียนกราฟของบริเวณซึ่งประกอบด้วยจุดในเซต

$$\{ P : (x, y) / x^2 + (y - 2)^2 \leq 1, -x + 2y - 4 \geq 0 \}$$

เฉลย เซตของจุดเป็นผลตัดของแผ่นกลมปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 2)$ รัศมี 1 และครึ่งระนาบปิดเหนือหรือบนเส้นตรง

(รูป 2.12.10) #



แบบฝึกหัด 2.12

1. เขียนกราฟของบริเวณปิด $\{ P:(x,y) / x^2+y^2 \leq 4 \}$
2. เขียนกราฟของบริเวณเปิด $\{ P:(x,y) / x^2+y^2 > 4 \}$
3. เขียนกราฟของครึ่งระนาบเปิด $\{ P:(x,y) / x+4y-5 > 5 \}$
4. เขียนกราฟของครึ่งระนาบปิด $\{ P:(x,y) / x-3y-5 \geq 0 \}$
5. จงพิสูจน์ 2.1 2.1 ทฤษฎีบท

6. กำหนดวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $C:(a,b)$ รัศมี r จงพิสูจน์ จุด $P:(x,y)$

a. อยู่ในวงกลมก็ต่อเมื่อ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

b. อยู่บนวงกลมก็ต่อเมื่อ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

c.อยู่นอกวงกลมก็ต่อเมื่อ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$$

[แนะ: จุด P อยู่ภายในวงกลมก็ต่อเมื่อ $|CP| < r$]

7. เขียนกราฟบริเวณเปิด

$$\{ P:(x,y) / x^2+y^2 < 4, y > 0 \}$$

8. เขียนกราฟของบริเวณ

$$\{ P:(x,y) / x^2+y^2 < 4, x+y \geq 0 \}$$

9. จงนิยามเซตของจุดที่อยู่เหนือเส้น $3x+2y-10=0$ และอยู่ทางขวาของแกน y พร้อมเขียนกราฟ

10. จงนิยามบริเวณปิดด้วย 4 อสมการใน x และ y ซึ่งมีขอบเขตเป็นสามเหลี่ยมมีมุมยอดคือ $(0,5), (-6,0)$ และ $(1,-3)$ และวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $(-2,1)$ รัศมี 1 พร้อมเขียนกราฟ.

บทที่ 3

ฟังก์ชัน

3.1 ฟังก์ชัน

3.1.1 บทนิยาม ฟังก์ชันเป็นการสมนัยระหว่าง 2 เซตไม่ว่างเรียกว่าโดเมนและเรนจ์ โดยแต่ละสมาชิกของโดเมนสมนัยกับสมาชิกของเรนจ์เพียงตัวเดียวและแต่ละสมาชิกของเรนจ์จะสมนัยกับสมาชิกของโดเมนอย่างน้อย 1 สมาชิก

ตัวอย่าง 1. กำหนดทรงกระบอกกลมตรง (a right circular cylinder) รัศมี r คงตัว มีปริมาตร V เมื่อความสูง h

การสมนัยระหว่างเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดซึ่งเป็นค่าของ h กับเซตของค่าของ V เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นค่าของ h จะสมนัยกับค่าของ V เพียงค่าเดียว

$$V = \pi r^2 h$$

เป็นการสมนัยระหว่างโดเมนซึ่งเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก h และเรนจ์ซึ่งเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก V

ตัวอย่าง 2. สมการ $y = \sqrt{x^2}$ นิยามฟังก์ชันมีโดเมนเป็นเซต $A = \{x/x \in \mathbf{R}\}$ และ

เรนจ์เป็นเซต $B = \{y/y \geq 0\}$

แต่ละจำนวนในโดเมน A จะสมนัยกับจำนวน y ใน B เพียงตัวเดียว

ตัวอย่างเช่น

$$x=4 \text{ ใน } A \text{ จะสมนัยกับ } y=\sqrt{(4)^2}=4 \text{ ใน } B$$

$$x=-4 \text{ ใน } A \text{ จะสมนัยกับ } y=\sqrt{(-4)^2}=4 \text{ ใน } B \quad \#$$

ข้อสังเกต ตัวอย่างที่ 1 เป็นการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะว่าแต่ละสมาชิกของโดเมนสมนัยกับสมาชิกของเรนจ์เพียงสมาชิกเดียว ตัวอย่างที่ 2 การสมนัยไม่เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะว่าสมาชิกของโดเมน A 2 สมาชิกสมนัยกับสมาชิกของเรนจ์ 1 สมาชิก

ดังนั้นฟังก์ชันประกอบด้วย 3 สิ่งคือ

1. เซตไม่ว่างเรียกว่าโดเมน
2. เซตไม่ว่างเรียกว่าเรนจ์
3. กฎการสมนัย

โดยทั่วไปจะเรียกสมาชิกของโดเมนว่า **ตัวแปรต้นหรือตัวแปรอิสระ (independent variable)** และเรียกสมาชิกของเรนจ์ว่า **ตัวแปรตาม (dependent variable)** เขียนแทนฟังก์ชันด้วย $f, g, F, H, \dots$ ถ้า x เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน f แล้ว $f(x)$ อ่านว่า f ของ x ใช้แทนสมาชิกในเรนจ์ที่สมนัยกับ x ดังนั้นบางครั้งจึงกล่าวว่า ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

ตัวอย่างเช่น ถ้านิยามฟังก์ชัน f โดย $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

โดเมนคือเซต $\{x/x \neq 0\}$

$$f(-1) = \frac{1^2-1}{1} = 0, \quad f(-2) = \frac{(-2)^2-1}{2} = \frac{3}{2}$$

โดยทั่วไปนิยามฟังก์ชันที่บอกกฎการสมนัยมาให้แต่ไม่บอกโดเมนเราจะหมายความว่าโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่กฎการสมนัยมีความหมาย

ตัวอย่างเช่น กำหนด g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

ถ้าไม่กำหนดโดเมนอย่างใดอย่างหนึ่งมาให้ เราจะหมายถึงโดเมนเป็นเซต

$$\{x/|x| \geq 2\}$$

เพราะว่า x ที่น้อยกว่า 2 $g(x)$ ไม่เป็นจำนวนจริง เช่น $x = -1$

$$g(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 2} = \sqrt{-1}$$

เราใช้สัญลักษณ์ D_f แทนโดเมนของฟังก์ชัน f

R_f แทนเรนจ์ของฟังก์ชัน f

ดังนั้นฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \sqrt{x}$$

D_f เป็นเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

R_f เป็นเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

นั่นคือ

$$D_f = \{x/x \geq 0\}$$

$$R_f = \{f(x)/f(x) \leq 0\} = \{y/y \leq 0\}$$

บางครั้งฟังก์ชัน f เรียกว่าการส่ง(mapping) โดเมน D_f ไปทั่วถึง R_f และ $f(x)$ เรียกว่าภาพ(image) ของ x ภายใต้ f

ดังนั้นถ้านิยามการส่ง f โดย

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

f จะส่งโดเมน $(-\infty, 2]$ ไปทั่วถึงเรนจ์ $[0, \infty)$

ภาพของ 1 คือ 1

ภาพของ 2 คือ 0

บางครั้งเราอาจเขียนแทนฟังก์ชันโดยเซตของคู่อันดับ โดยมีสมาชิกที่¹อยู่ในโดเมน และสมาชิกที่²อยู่ในเรนจ์เป็นภาพของสมาชิกที่¹

นั่นคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน เราอาจเขียนแทน f ด้วย $\{(x, f(x)) / x \in D_f\}$

เนื่องจากเราสามารถเขียนแทนฟังก์ชันด้วยเซตของคู่อันดับของจำนวน ดังนั้นเราก็สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันในระนาบคาร์ทีเซียนได้

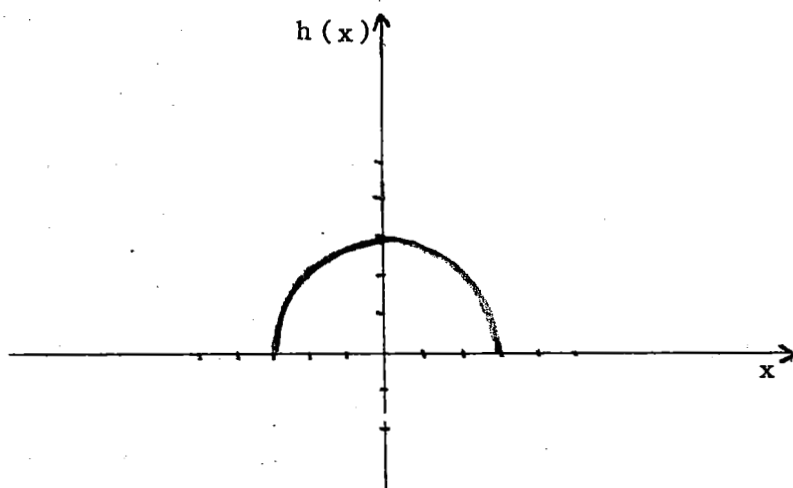
เพราะว่าสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชันสมนัยกับสมาชิกของเรนจ์เพียงตัวเดียว ดังนั้นไม่มีเส้นแนวดิ่งตัดกราฟของฟังก์ชันมากกว่า 2 จุด

ตัวอย่าง 3. นิยามฟังก์ชัน h โดย $h(x) = \sqrt{9-x^2}$ มีกราฟเป็นครึ่งวงกลมดังรูป 3.1.1.

$$D_h = \{ x / |x| \leq 3 \}$$

$$R_h = \{ h(x) / 0 \leq h(x) \leq 3 \}$$

#



รูป 3.1.1

จากหัวข้อ 2.1 โพรเจกชันของจุด p บนเส้นตรง l คือจุดซึ่งเป็นผลตัดของ l กับเส้นตรงที่ผ่าน p และตั้งฉากกับ l (รูป 2.1.3)

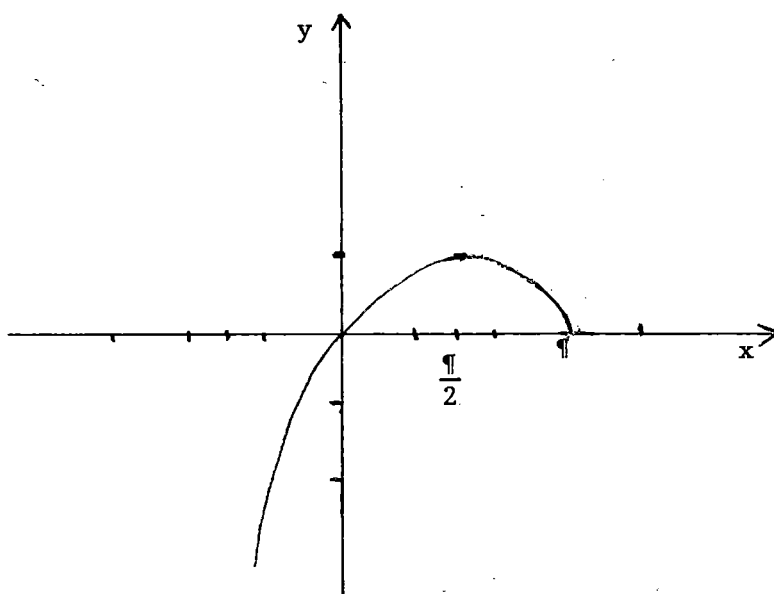
โพรเจกชันของกราฟบนเส้นเราหมายถึงเซตของโพรเจกชันของจุดของกราฟบนเส้น
 ตัวอย่างเช่น โพรเจกชันของครึ่งวงกลมในรูป 3.1.1 บนแกน เป็นช่วงปิด $[-3, 3]$
 ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่าโคเมนของฟังก์ชันเป็นโพรเจกชันของกราฟไปทั่วถึงแกน
 แนวนอนและเรนจ์ของฟังก์ชันเป็นโพรเจกชันของกราฟไปทั่วถึงแกนแนวดิ่ง

ตัวอย่าง 4. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{ถ้า } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \sin x & \text{ถ้า } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

เขียนกราฟได้ดังรูป 3.1.2 โคเมนของฟังก์ชันคือ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ โพรเจกชันกราฟบนแกน y
 จะได้เรนจ์ของฟังก์ชันคือ

$$\{ y / y \leq 1 \}$$



รูป 3.1.2

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนด $f(x) = 2x^2 + x$ จงหา

a. $f(-3)$

d. $f(\sqrt{2})$

b. $f\left(\frac{1}{2}\right)$

e. $f(1)$

c. $f(-0.3)$

f. $f\left(\frac{1}{x}\right)$

2. กำหนด $F(y) = \frac{2}{y-2}$ จงหา

a. $F(0)$

d. $F(y^2)$

b. $F(1.99)$

e. $F(-x)$

c. $F(12)$

f. $F\left(\frac{1}{z}\right)$

3. กำหนด $f(x) = x^2 - 1$ จงหา $f(a)$, $f(a+h)$ และ $f(a+h) - f(a)$ แล้วหา

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. ถ้า $g(t) = t^3$ จงหา $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$

5. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f, g, F และ H เมื่อ

a. $f(z) = \sqrt{3z+2}$

b. $g(v) = \frac{1}{2v-1}$

c. $F(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

d. $H(y) = -\sqrt{225 - y^2}$

6. จงหาโดเมน เรนจ์ของฟังก์ชัน f, g, F และ H เมื่อ

a. $f(x) = \frac{(16-x^2)}{x+4}$

b. $G(y) = \sqrt{(y+1)^{-1}}$

c. $F(u) = |2u - 1|$

c. $H(t) = t^{\frac{1}{3}} - 1$

7. เซตของจุดที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาโดเมนและเขียนกราฟ

a. $\{ P:(x,y) / y = \frac{1}{x^2 - x} \}$

b. $\{ P:(u,v) / u^2 + v^2 = 9 \}$

c. $\{ P:(s,t) / t^2 - 4s = 0 \}$

d. $\{ P:(x,y) / (x-1)^3 - y - 2 = 0 \}$

8. เขียนกราฟของฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x \geq 0 \\ -1 & \text{สำหรับ } x < 0 \end{cases}$$

3.2 การดำเนินการของฟังก์ชัน

เนื่องจากเราสามารถเขียนฟังก์ชันเป็นเซตของคู่อันดับ ดังนั้นเราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้จากฟังก์ชันเดิมเหมือนกับการสร้างเซตใหม่จากเซตเดิม โดยนิยามการดำเนินการบนฟังก์ชันดังนี้

3.2.1 บทนิยาม ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันมีโดเมน D_f และ D_g ผลบวก $f+g$ ผลต่าง $f-g$ ผลคูณ $f \cdot g$ และผลหาร $\frac{f}{g}$ นิยามโดย

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x/g(x)=0\}$$

ตัวอย่าง 1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ แล้ว ผลบวก $f+g$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$(f+g)(x) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x}$$

$$D_f = \{x/|x| \leq 2\}$$

$$D_g = \{x/x \geq 0\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x/0 \leq x \leq 2\}$$

#

ตัวอย่าง 2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$f(x) = \frac{x}{x+2}$ และ $g(x) = -x^3 + 2$ แล้ว fg เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$(fg)(x) = \frac{x(-x^3+1)}{x+2}$$

$$D_f = \{x/x \neq -2\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \{x/x \neq -2\}$$

#

ตัวอย่าง 3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{และ} \quad g(x) = \frac{x}{x^2-4} \quad \text{แล้ว}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}(x^2-4)}{x}$$

$$D_f = \{x/x \geq -1\}$$

$$D_g = \{x/x \neq \pm 2\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \{x/x \geq -1, x \neq 2\} \quad \#$$

3.2.2 บทนิยาม ฟังก์ชันประกอบ (composite function) $f \circ g$ อ่านว่า f วงกลม g นิยามโดย

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

โดเมนของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ คือเซตของ x ในโดเมน g ซึ่ง $g(x)$ อยู่ในโดเมน f นั่นคือ

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

ฟังก์ชัน $f \circ g$ บางทีเรียกว่าฟังก์ชันประกอบของ f กับ g หรือฟังก์ชัน f ของ g

ตัวอย่าง 4. กำหนดฟังก์ชัน $F(x) = \sqrt{3x-5}$ ถ้าเราให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = 3x-5$ แล้ว $F = f \circ g$ นั่นคือ

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-5) = \sqrt{3x-5}$$

$$D_f = \{x/x \geq 0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in \mathbb{R}, 3x-5 \geq 0\} = \{x/x \geq \frac{5}{3}\}$$

แบบฝึกหัด 3.2

ข้อ1-ข้อ3 กำหนด $f(x)=\sqrt{x^2-2}$ และ $g(x)=\frac{3}{x}$ จงหา

1. $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ และโดเมน $f \pm g, fg$ และ $\frac{f}{g}$
2. $(fog)(x)$ และหาโดเมน fog
3. $(gof)(x)$ และหาโดเมน gof

ข้อ4-ข้อ6 กำหนด $f(x)=\frac{1}{3x-4}$ และ $g(x)=x-1$ จงหา

4. $(f+g)(x), (f \cdot g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ และโดเมน $f, g, f+g, gf, \frac{f}{g}$
5. $(fog)(x)$ และโดเมน fog
6. $(gof)(x)$ และโดเมน gof
7. จงยกตัวอย่างการดำเนินการฟังก์ชันประกอบไม่มีคุณสมบัติสลับที่
นั่นคือ $fog \neq gof$

8. จงพิสูจน์ กฎการเปลี่ยนกลุ่มของฟังก์ชันประกอบจริง นั่นคือ $f(goh)=(fog)oh$
[และ พิสูจน์ว่า $D_{fo(goh)}=D_{(fog)oh}$ แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า
 $fo(goh)(x)=(fog)oh(x)$]

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคู่ ถ้า $f(-x)=f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f และกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันคี่ ถ้า $f(-x)=-f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมน f

9. ยกตัวอย่าง
 - a. ฟังก์ชันคู่
 - b. ฟังก์ชันคี่
 - c. ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่
10. เป็นได้หรือไม่ที่ฟังก์ชันเป็นทั้งฟังก์ชันคี่และฟังก์ชันคู่
11. จงพิสูจน์ว่ากราฟของฟังก์ชันคู่สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y และกราฟของฟังก์ชันคี่สมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

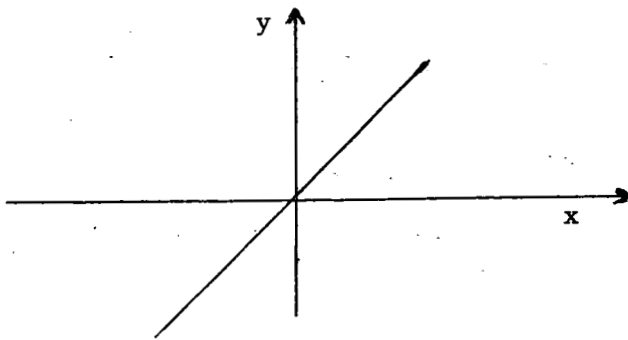
12. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันคู่ แล้ว $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันคู่.

3.3 ฟังก์ชันพิเศษ

ฟังก์ชันคงตัว (constant function) เป็นฟังก์ชันที่มีเรนจ์เป็นเซตของจำนวนเพียงจำนวนเดียว ฟังก์ชันนี้จะอยู่ในแบบ $f(x) = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว ถ้าให้โดเมนของฟังก์ชันเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด กราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นแนวนอนตัดแกน y ที่จุด $y = k$ แต่ถ้าให้โดเมนของฟังก์ชันไม่เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

ตัวอย่างเช่น $f(n) = 2$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ กราฟของฟังก์ชันจะเป็นเซตของจุด $(1, 2), (2, 2), (3, 2), \dots$

ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = x$ ถ้ากำหนดให้โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด กราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นตรงผ่านจุดกำเนิดมีความชัน 1 (รูป 3.3.1)



รูป 3.3.1

ฟังก์ชันพหุนาม เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงคงตัว

ถ้า $a_0 \neq 0$ เราจะกล่าวว่าฟังก์ชันพหุนามมีระดับชั้น n และถ้า $n=0$ แล้ว $f(x)=a_0$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันคงตัว

ถ้า $a_0=0$ และ $n=0$ เราไม่นิยามระดับชั้นของฟังก์ชันพหุนาม

ฟังก์ชันที่ไม่นิยามระดับชั้นเรียกว่า **ฟังก์ชันศูนย์ (zero function)** เพราะว่า $f(x)=0$ สำหรับทุก x

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น 1 นิยามโดย

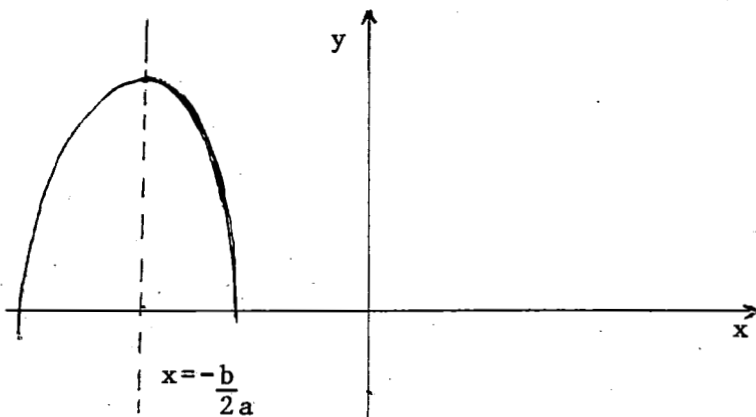
$$f(x)=ax+b$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ กราฟเป็นเส้นตรงมีความชัน a และส่วนตัด y เท่ากับ b

ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น 2 นิยามโดย

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ กราฟเป็นพาราโบลาสมมาตรเมื่อเทียบกับเส้นแนวนิ่ง $x=-\frac{b}{2a}$ และ เว้าขึ้นถ้า $a>0$ และ เว้าลงถ้า $a<0$ (รูป 3.3.1)



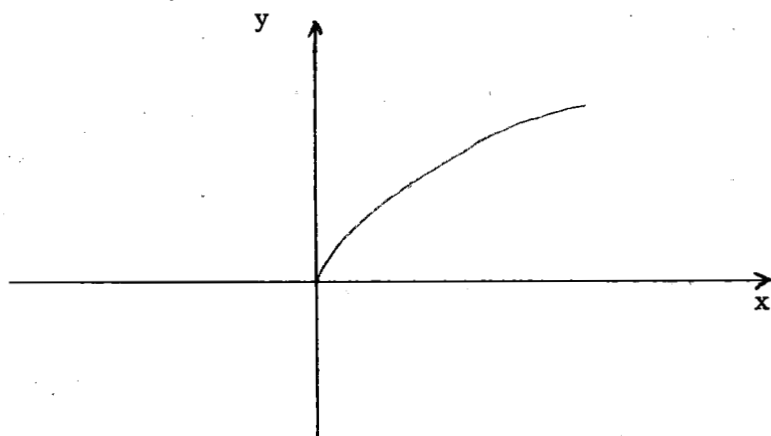
รูป 3.3.1

ฟังก์ชันครกยะ: คือฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปผลหารของ 2 ฟังก์ชันพหุนามนิยามโดย

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_m}$$

สำหรับทุก x ซึ่งตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

ฟังก์ชันรากกำลังสอง (square root function) คือฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \sqrt{x}$
 $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบซึ่งกำลังสองเป็น x กราฟของฟังก์ชันรากกำลังสองแสดงดัง
 รูป 3.3.2



รูป 3.3.2 ฟังก์ชันรากกำลังสอง $f(x) = \sqrt{x}$

ฟังก์ชันพีชคณิต (algebraic function) คือฟังก์ชันที่นิยามโดย $y = f(x)$ เมื่อ

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

โดย $P_0, P_1, \dots, P_n$ เป็นพหุนามและ n เป็นจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันที่เราเจอบ่อยส่วนมากจะเป็นฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างเช่น

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{4x^3+x+1}}$$

เป็นฟังก์ชันพีชคณิตเพราะสามารถเขียนให้อยู่ในแบบ

$$(4x^3+x+1)y^2-(x+2)^2=0$$

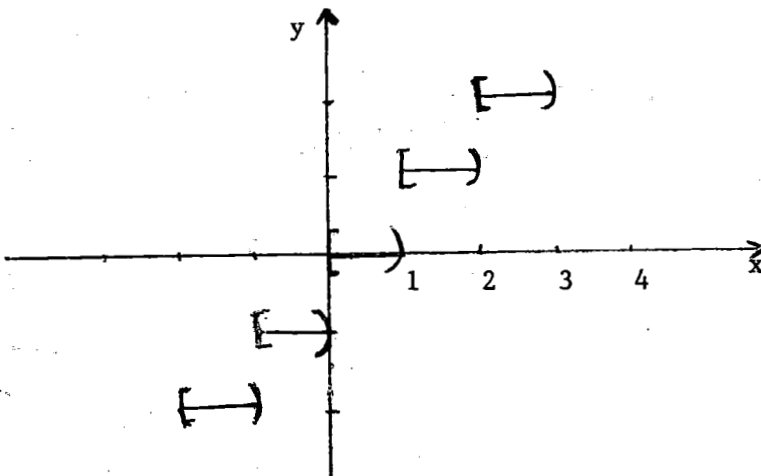
ฟังก์ชันอดิศัย (transcendental function) คือฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันยกกำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม
ฟังก์ชันจำนวนเต็มใหญ่สุด (greatest interger function) คือฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = [x]$$

เมื่อ $[x]$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า x

ตัวอย่างเช่น $[3]=3, [3.5]=3, [-3]=-3$ และ $[-3.5]=-4$

กราฟฟังก์ชันจำนวนเต็มใหญ่สุดเป็นขั้นบันไดดังรูป 3.3.3

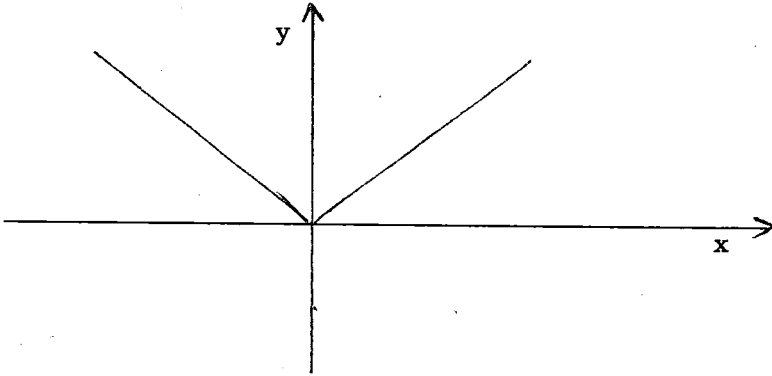


รูป 3.3.3 ฟังก์ชันจำนวนเต็มใหญ่สุด $f(x) = [x]$

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (absolute value function) คือฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = |x|$$

กราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 3.3.4



รูป 3.3.4 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ $f(x) = |x|$

แบบฝึกหัด 3.3

ข้อ 1-ข้อ 7 เขียนกราฟของฟังก์ชัน หาโดเมนและเรนจ์ และบอกด้วยว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันชนิดใดบ้าง

1. $f(x) = -5$

2. $F(x) = 2x - 3$

3. $g(y) = 4y^2 - 3y + 1$

4. $H(t) = \frac{2t^2 - 3t - 1}{t - 1}$

5. $G(x) = \sqrt{x^3 + 4}$

$$6. \quad G(u) = \frac{1}{\sqrt{u+2}}$$

$$7. \quad f(t) = \sqrt{\frac{2t}{t^2-9}}$$

ข้อ 8- ข้อ 11 จงเขียนกราฟของฟังก์ชันและหาโดเมนและเรนจ์

$$8. \quad f(x) = |2x+1|$$

$$9. \quad g(x) = [x+3]$$

$$10. \quad F(x) = |x| - [x]$$

$$11. \quad H(t) = \frac{|t|}{[t]}$$

ข้อ 13- ข้อ 14 เขียนกราฟของฟังก์ชัน หาโดเมนและเรนจ์

$$12. \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } t=0 \\ t+1 & \text{เมื่อ } 0 < t < 2 \\ t^2-1 & \text{เมื่อ } t \geq 2 \end{cases}$$

$$13. \quad F(t) = \begin{cases} [t] & \text{เมื่อ } [t] \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3t - [t+1] & \text{เมื่อ } [t] \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

14. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่ เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ถ้านิยาม f โดย $f(x) = x - [x]$ สำหรับ $-3 \leq x \leq 3$

14. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า

$$[x+y] = [x] + [y] \quad \text{หรือ} \quad [x+y] = [x] + [y] + 1.$$

บทที่ 4

ลิมิตและความต่อเนื่อง

4.1 บทนำสู่ลิมิต

เราจะนำไปสู่ลิมิตของฟังก์ชัน โดยเริ่มจากตัวอย่าง

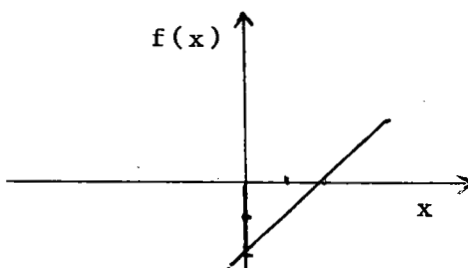
ตัวอย่าง 1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = x - 2$

กำหนดค่า x ให้เข้าใกล้ 1 และหาค่า $f(x)$ ดังตาราง

x	0.7	0.8	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	-1.3	-1.2	-1.1	-1.01	-1.001	-1.999	-1.99	-1.9	-1.8	-1.7

พิจารณาจากตารางจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ค่า $f(x)$ จะเข้าใกล้ -1 หรือ

ดูจากกราฟรูป 4.1.1



รูป 4.1.1

สถานการณ์แบบนี้เรากล่าวว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ 1 เท่ากับ -1

ตัวอย่าง 2. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

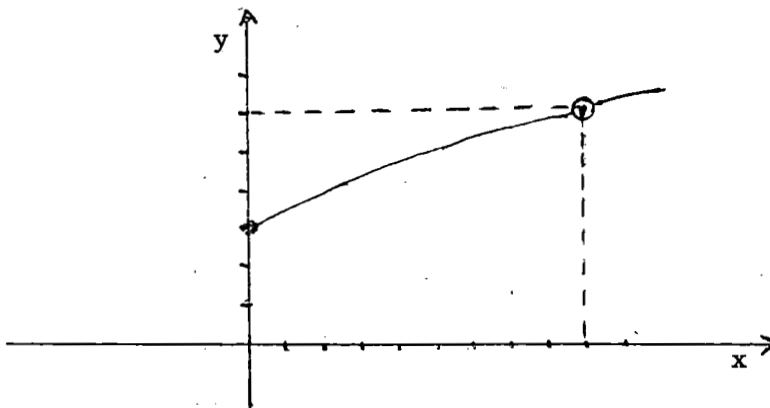
โดเมนของฟังก์ชันคือ $D_f = \{x/x \geq 0, x \neq 9\}$

เพราะว่า $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+3$

ดังนั้นกราฟของ f เหมือนกับกราฟของสมการ $\sqrt{x}+3$ ยกเว้นที่ $x=9$ ซึ่ง $f(9)$ ไม่มีค่า (รูป 4.1.2)

เมื่อ x เข้าใกล้ 9 หาค่า $f(x)$ ดังตาราง

x	8	8.5	8.8	8.9	8.99	8.999	9.001	9.01	9.1	9.5
$f(x)$	5.83	5.91	5.97	5.98	5.998	5.9998	6.0002	6.002	6.02	6.03



รูป 4.1.2

พิจารณาจากตารางจะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 9 $f(x)$ จะเข้าใกล้ 6 ถึงแม้ว่าค่าของ $f(9)$ จะไม่มี

สถานกรณแบบนี้เราเรียกว่า ลิมิตของฟังก์ชันที่ 9 เท่ากับ 6

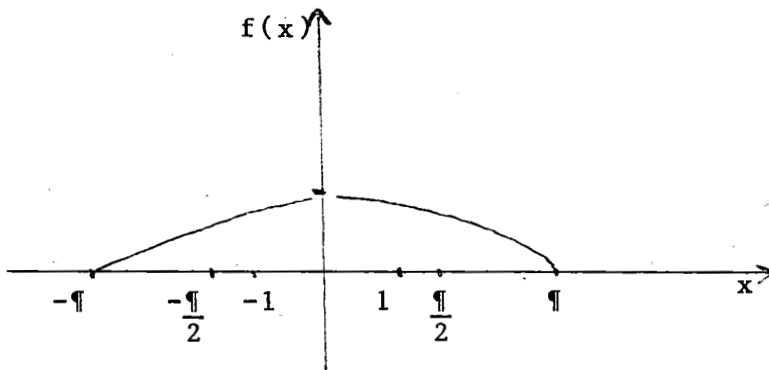
ข้อสังเกต: ดูจากกราฟจะเห็นว่ากราฟขาดช่วงที่จุด $x=9$ นั่นคือ $f(9)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 3. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ เมื่อ x วัดเป็นเรเดียน

(รูป 4.1.3)

พิจารณาจากตารางจะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 1

x	$\pm\pi$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	± 1.0	± 0.5	± 0.2	± 0.1
$f(x)$	0	0.637	0.842	0.959	0.994	0.994	0.998



รูป 4.1.3

สถานกรณแบบนี้ก็เหมือนกับตัวอย่างที่ 2 จึงกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชันที่ 0 เท่ากับ 1

ตัวอย่าง 4. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x)=[x]$

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 และมากกว่า 2 $[x]=2$

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 และน้อยกว่า 2 $[x]=1$

สถานกราฟแบบนี้เรากล่าวว่า f ไม่มีลิมิตที่ 2

แบบฝึกหัด 4.1

จงคำนวณหาค่า $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ c (แต่ไม่เท่ากับ c) พร้อมเขียนกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ c และถ้า f มีลิมิตที่ c ให้หาลิมิตของ f ที่ c

1. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$, $c = -1$

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $c = 2$

3. $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$, $c = 2$

4. $f(x) = \frac{\sin x}{\tan x}$, $c = 0$ เมื่อ x วัดเป็นเรเดียน

5. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$, $c = 0$ เมื่อ x วัดเป็นเรเดียน

6. $f(x) = 3x^{-\frac{1}{2}} + 1$, $c = 0$

4.2 ความลึกรวบยอดของลิมิต

ตัวอย่าง 1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

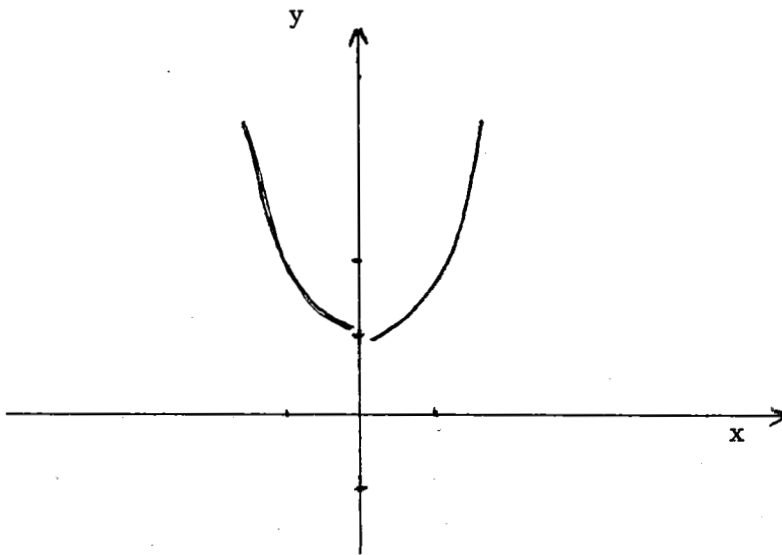
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 + 1.01 & \text{สำหรับ } x > 0 \\ x^2 + 0.09 & \text{สำหรับ } x < 0 \end{cases}$$

โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริงยกเว้นศูนย์ กราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป

4.2.1

สร้างตารางกำหนดค่า x เข้าใกล้ 0 จากทางขวาและทางซ้าย จะเห็นว่าค่าของ $\varphi(x)$ เข้าใกล้ 1 แต่ φ ไม่มีลิมิตที่ 0

x	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.34	0.25	0.18	0.13	0.1	1.02	1.05	1.1	1.17	1.26



รูป 4.2.1

#

ข้อแตกต่างระหว่างตัวอย่าง 1 หัวข้อ 4.1 และตัวอย่าง 1 หัวข้อนี้ เราสามารถจะทำให้ $f(x) = x - 2$ ห่างจาก -1 น้อยเท่าไรก็ได้ แต่เราไม่สามารถทำให้ $\varphi(x)$ ห่างจาก 0 น้อยกว่า 0.09

ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการให้ $f(x)$ ห่างจาก -1 น้อยกว่า .01 เราต้องจำกัด x ให้อยู่ในช่วง $(.99, 1.01)$

ถ้าต้องการให้ $\varphi(x)$ ห่างจาก -1 น้อยกว่า $.001$ เราต้องจำกัด x ให้อยู่ในช่วง $(.999, 1.001)$

แต่เราไม่สามารถทำให้ $\varphi(x)$ ห่างจาก 1 น้อยกว่า $.91$

จึงสรุปเป็นสาระสำคัญของลิมิตได้ดังนี้ เราสามารถทำให้ $f(x)$ ห่างจาก -1 น้อยเท่าไรก็ได้ โดยจำกัด x ให้อยู่ในช่วงเปิดรอบจุด $(x \neq 1)$ ที่เล็กพอ

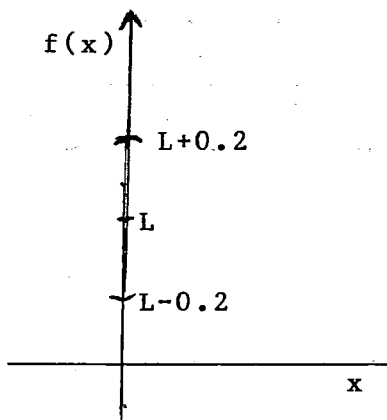
ต่อไปเราจะนำสัญลักษณ์ที่เจอบ่อยในเรื่องลิมิตมาแนะนำ

ข้อความ $f(x)$ ห่างจาก L น้อยกว่า 0.2 เขียนเป็นอสมการได้ดังนี้

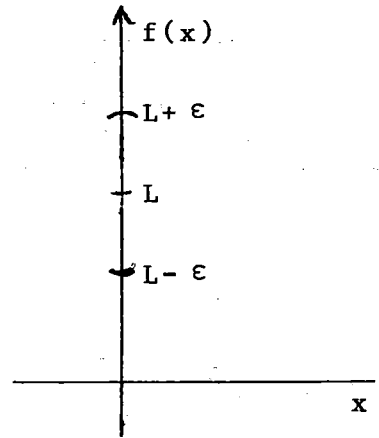
$$|f(x) - L| < 0.2$$

หรือ $L - 0.2 < f(x) < L + 0.2$

(รูป 4.2.2(a))



(a)



(b)

รูป 4.2.2

ซึ่งแปลว่า $f(x)$ อยู่ในช่วง $(L-0.2, L+0.2)$ กล่าวโดยทั่วไปคือถ้า ϵ เป็นจำนวนบวกข้อความ $f(x)$ ต่างจากจำนวน L น้อยกว่า ϵ หมายความว่า

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

หรือ $|f(x) - L| < \epsilon$

(รูป 4.2.2(b))

ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2 + 1$, $L = 2$ และ $\epsilon = 0.2$ แล้ว $f(x)$ ต่างจาก 2 น้อยกว่า 0.2 ก็ต่อเมื่อ

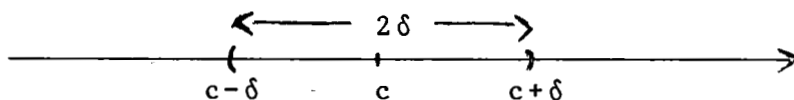
$$2 - 0.2 < x^2 + 1 < 2 + 0.2$$

หรือ $0.8 < x^2 + 1 < 2.02$

ให้ δ เป็นจำนวนบวก x อยู่ในช่วงเปิดมี c เป็นจุดศูนย์กลางความยาวช่วง 2δ $(c - \delta, c + \delta)$ (รูป 4.2.3) ก็ต่อเมื่อ

$$c - \delta < x < c + \delta$$

หรือ $|x - c| < \delta$

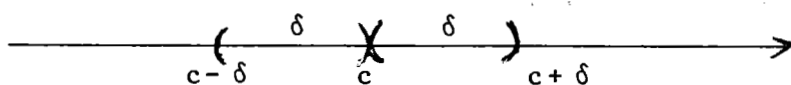


รูป 4.2.3

ตัวอย่างเช่น $c = 1$ และ $\delta = 2$

$$x \in (1 - 2, 1 + 2) = (-1, 3) \text{ ก็ต่อเมื่อ } |x - 1| < 2$$

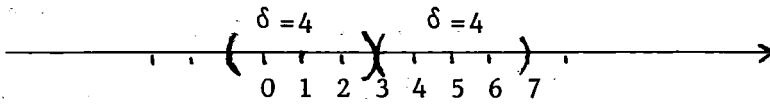
สัญลักษณ์ $0 < |x - c|$ หมายความว่า $x \neq c$ ดังนั้น x อยู่ในช่วงเปิด $(c - \delta, c + \delta)$ แต่ไม่เท่ากับ c ก็ต่อเมื่อ $0 < |x - c| < \delta$ (รูป 4.2.4)



รูป 4.2.4

ตัวอย่างเช่น $c=3$ และ $\delta=4$ (รูป 4.2.5)

x อยู่ในช่วง $(3-4, 3+4) = (-1, 7)$ และ $x \neq 3$ ก็คือเมื่อ $0 < |x-3| < 4$



รูป 4.2.5

ตัวอย่าง 2. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = \frac{x-1}{3}$ (รูป 4.2.6) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าลิมิตของ f ที่ $x=4$ คือ 1 จงหาจำนวนบวก ที่เล็กพอเพื่อ x อยู่ในช่วง $(4-\delta, 4+\delta)$ และ $x \neq 4$ $f(x)$ ต่างจาก 1 น้อยกว่า 0.2

เฉลย เราต้องการจำนวนบวก δ ซึ่ง

$$(1) \quad 0 < |x-4| < \delta \longrightarrow 1-0.2 < \frac{x-1}{3} < 1+0.2$$

เนื่องจาก

$$1-0.2 < \frac{x-1}{3} < 1+0.2 \longrightarrow 0.8 < \frac{x-1}{3} < 1.2$$

$$\longrightarrow 2.4 < x-1 < 3.6$$

$$\longrightarrow 3.4 < x < 4.6$$

$$\longrightarrow 4-0.6 < x < 4+0.6$$

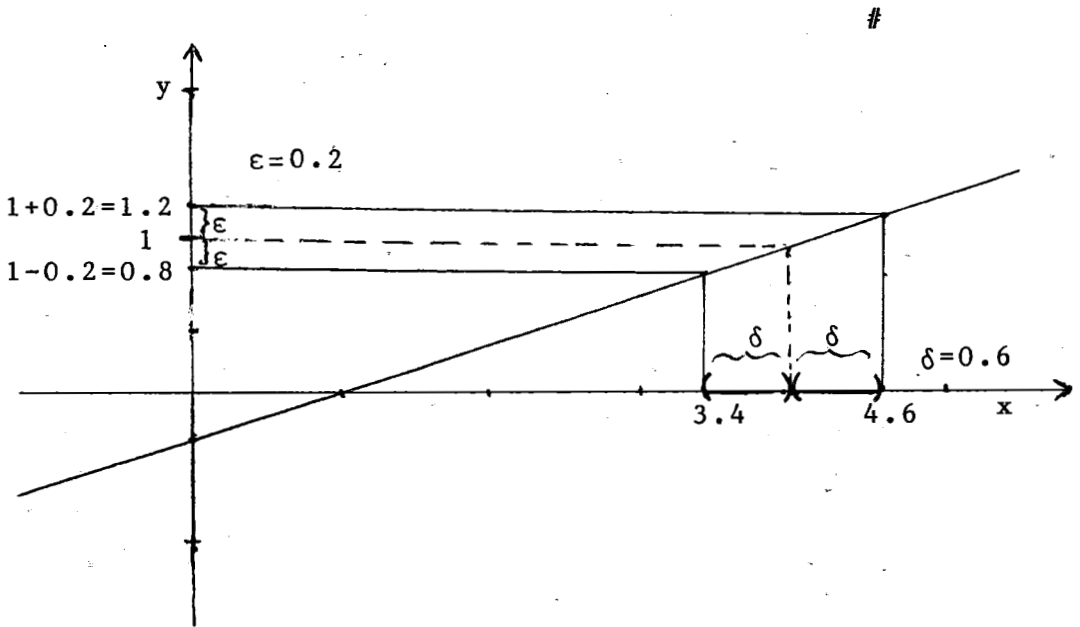
$$\longrightarrow |x-4| < 0.6$$

ดังนั้น $|x-4| < 0.6 \iff 1-0.2 < \frac{x-1}{3} < 1+0.2$

เพราะว่า $0 < |x-4| < 0.6 \iff |x-4| < 0.6$

ดังนั้น $0 < |x-4| < 0.6 \iff 1-0.2 < \frac{x-1}{3} < 1+0.2$

โดยเปรียบเทียบกับ (1) ถ้าเราให้ $\delta = 0.6$ ก็จะได้ตามต้องการ



รูป 4.2.6 $c=4$, $\epsilon=0.2$, $\delta=0.6$

ตัวอย่าง 3. ให้ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $g(x) = \sqrt{x+2}$ เราสามารถแสดงได้ว่าลิมิตของ g ที่ $x=1$ คือ 3 (รูป 4.2.7) ให้ $\epsilon = 0.3$ จงหาจำนวนบวก δ ที่เล็กพอเพื่อจำนวน x ทั้งหมดที่สอดคล้องอสมการ $0 < |x-1| < \delta$, $g(x)$ ต่างจาก 3 น้อยกว่า 0.3

เฉลย $g(x)$ ต่างจาก 3 น้อยกว่า 0.3 ก็ต่อเมื่อ

$$(1) \quad 3 - 0.3 < \sqrt{x} + 2 < 3 + 0.3$$

เราต้องการหาจำนวนบวก δ ซึ่ง

$$(2) \quad 0 < |x - 1| < \delta \longrightarrow 3 - 0.3 < \sqrt{x} + 2 < 3 + 0.3$$

อันดับแรกจะหาเขตผลเฉลยของอสมการ (1)

$$3 - 0.3 < \sqrt{x} + 2 < 3 + 0.3 \longrightarrow 2.7 < \sqrt{x} + 2 < 3.3$$

$$\longrightarrow 0.7 < \sqrt{x} < 1.3$$

$$\longrightarrow 0.49 < x < 1.66$$

ดังนั้น

$$(3) \quad .49 < x < 1.66 \longrightarrow 3 - 0.3 < \sqrt{x} + 2 < 3 + 0.3$$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \sqrt{x} + 2$ ต่างจาก 2 น้อยกว่า $\epsilon = 0.3$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นจำนวนในช่วง $(.49, 1.66)$

จะเห็นว่า 1 ไม่เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง $(.49, 1.66)$ เพราะ 1 ห่างจากจุดปลายซ้ายของช่วง .51 และจุดปลายขวาของช่วง .66 ระหว่าง 2 จำนวนนี้เราเลือก δ เป็นจำนวนที่เล็กที่สุดคือ .51

$$(1 - \delta, 1 + \delta) = (.49, 1.55) \subseteq (.49, 1.66)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad .49 < x < 1.51 \longrightarrow .59 < x < 1.66$$

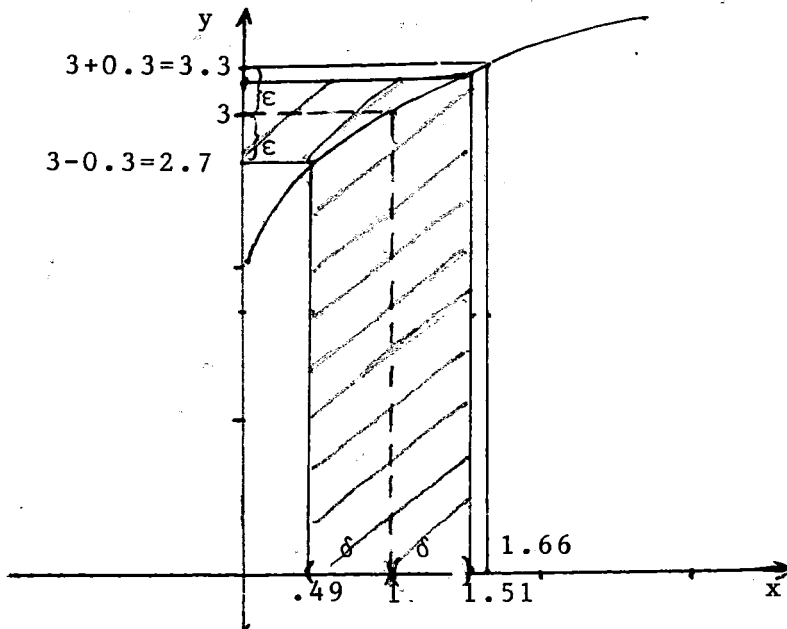
$$\text{แต่} \quad |x - 1| < \delta = 0.51 \longrightarrow .49 < x < 1.51$$

เพราะฉะนั้นจาก (3)

$$(4) \quad 0 < |x-1| < \delta = 0.51 \longrightarrow 3-0.3 < \sqrt{x}+1 < 3+0.3$$

โดยเปรียบเทียบ(2)กับ(4)จะได้ $\delta = 0.51$ เป็นค่าที่ต้องการ

#



รูป 4.2.7 $c=1, \epsilon=0.3, \delta=0.51$

ตัวอย่าง 4. ให้ h เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $h(x) = \frac{x^2}{9}$ เราสามารถแสดงได้ว่า ลิมิตของ h ที่ 3 คือ 1 (รูป 4.2.8) ให้ $\epsilon = 0.79$ จงหาจำนวนบวก δ ที่เล็กพอเพื่อ

$$0 < |x-3| < \delta \longrightarrow 1-0.79 < \frac{x^2}{9} < 1+0.79$$

เฉลย เราจะหาผลเฉลยของอสมการ

$$(1) \quad 1-0.79 < \frac{x^2}{9} < 1+0.79$$

เนื่องจาก

$$1-0.79 < \frac{x^2}{9} < 1+0.79 \longleftrightarrow 0.21 < \frac{x^2}{9} < 1.79 \longleftrightarrow 1.89 < x^2 < 16.11$$

$$\longleftrightarrow 1.37 < x < 4.01 \text{ หรือ } -4.01 < x < -1.37$$

ต่อไปเราจะหาช่วงที่มี 3 เป็นจุดศูนย์กลาง $(3-\delta, 3+\delta)$ ซึ่งสอดคล้องสมการ (1) พิจารณา x ที่เป็นค่าบวกซึ่ง $1.37 < x < 4.01$ 3 ไม่เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง $(1.37, 4.01)$ เพราะว่า 3 ห่างจุดปลายช่วงทางซ้าย 1.63 ห่างจากจุดปลายช่วงทางขวา 1.01 ระหว่าง 2 จำนวนนี้เราเลือกจำนวนที่เล็กที่สุดเป็น δ นั่นคือให้ $\delta = 1.01$ แล้ว

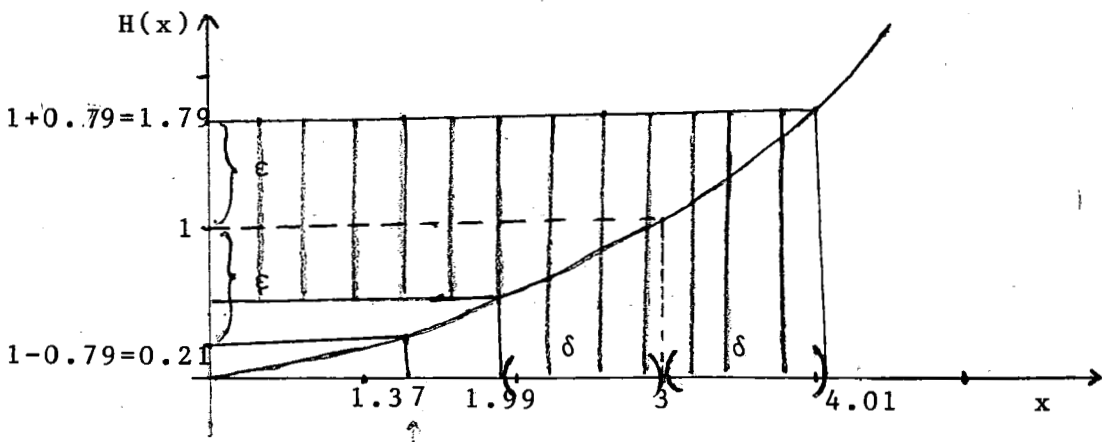
$$(3-\delta, 3+\delta) = (1.99, 4.01) \quad (1.37, 4.01)$$

ดังนั้น $1.99 < x < 4.01 \longleftrightarrow 1.37 < x < 4.01$

และเพราะว่า $|x-3| < 1.01 \longleftrightarrow 1.37 < x < 4.01$

ดังนั้น $0 < |x-3| < \delta = 1.01 \longleftrightarrow 1-0.79 < \frac{x^2}{9} < 1+0.79$

เพราะฉะนั้น $\delta = 1.01$ เป็นค่าตามต้องการ #



รูป 4.2.8 $c=3, \epsilon=0.79, \delta=1.01$

แบบฝึกหัด 4.2

ข้อ 1-ข้อ 7 ลิมิตของฟังก์ชัน H ที่ c เท่ากับ L กำหนด ϵ มาให้ จงหาจำนวนบวก δ ที่เล็กที่สุดเพื่อ x ในช่วง $(c-\delta, c+\delta)$ แต่ $x \neq c$ $H(x)$ จะต่างจากลิมิต L น้อยกว่า ϵ นั่นคือจะต้องหาจำนวนเต็มบวก δ ซึ่ง

$$0 < |x-c| < \delta \implies L-\epsilon < H(x) < L+\epsilon$$

1. $H(x) = \frac{x+1}{2}$, $c=0$, $L=1$ และ $\epsilon=0.4$
2. $H(x) = 4x-5$, $c=2$, $L=3$ และ $\epsilon=0.5$
3. $H(x) = -\frac{2x}{3} + 2$, $c=1$, $L=\frac{4}{3}$ และ $\epsilon=\frac{2}{3}$
4. $H(x) = \sqrt{x}+1$, $c=1$, $L=2$ และ $\epsilon=0.5$
5. $H(x) = \sqrt{x}-1$, $c=2$, $L=1$ และ $\epsilon=\frac{1}{4}$
6. $H(x) = \frac{1}{x-1}$, $c=2$, $L=1$ และ $\epsilon=0.1$
7. $H(x) = \frac{x^2}{4}$, $c=2$, $L=1$ และ $\epsilon=0.69$.

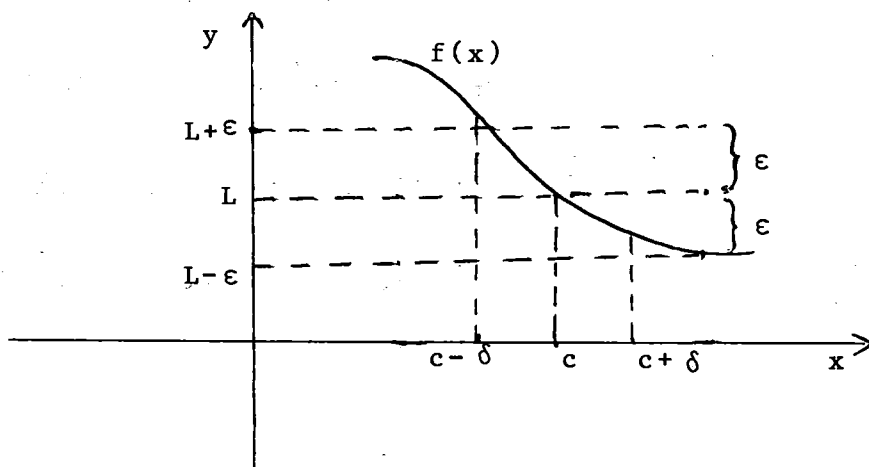
4.3 บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน

ความคิดรวบยอดของลิมิตเราสรุปเป็นหลักว่า f มีลิมิต L ที่ $x=c$ ก็ต่อเมื่อเราสามารถทำให้ $f(x)$ ห่างจาก L น้อยเท่าไรก็ได้โดยให้ x อยู่ในช่วงรอบจุด c ที่เล็กพอและ $x \neq c$ ($x \neq c$ เป็นสิ่งจำเป็นเพราะบางที f ไม่นิยามที่ c)

หรือเราจะกล่าวโดยนำสัญลักษณ์ ϵ, δ มาใช้

f มีลิมิตที่ c ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนบวก ϵ จะมีจำนวนบวก δ ซึ่ง

$$\text{ถ้า } 0 < |x-c| < \delta \text{ แล้ว } L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon \quad (\text{รูป 4.3.1})$$



รูป 4.3.1 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

4.3.1 บทนิยาม ให้ c เป็นจุดใดๆในช่วง I และ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I อาจจะยกเว้นที่จุด c ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ c คือ L เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนบวก ϵ จะมีจำนวนบวก δ ซึ่ง x อยู่ในโดเมนของ f และ $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x)$ ห่างจาก L น้อยกว่า ϵ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$x \in D_f \text{ และ } 0 < |x - c| < \delta \implies L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

$$\text{หรือ } x \in D_f \text{ และ } 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ตัวอย่าง จงใช้บทนิยามลิมิตพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = 1$

วิเคราะห์ เราจะต้องสรุปให้ได้ว่า เมื่อกำหนด ϵ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ มาให้ สามารถหาจำนวนจริง $\delta > 0$ มีคุณสมบัติ

$$0 < |x-2| < \delta \implies |(2x-3)-1| < \epsilon$$

อันดับแรกจะหา x ซึ่งสอดคล้องอสมการ $|(2x-3)-1| < \epsilon$

$$|(2x-3)-1| < \epsilon \iff |2x-4| < \epsilon$$

$$\iff -\epsilon < 2x-4 < \epsilon$$

$$\iff 4-\epsilon < 2x < 4+\epsilon$$

$$\iff 2-\frac{\epsilon}{2} < x < 2+\frac{\epsilon}{2}$$

$$\iff -\frac{\epsilon}{2} < x-2 < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\iff |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$$

ดังนั้น ถ้า $|x-2| < \frac{\epsilon}{2}$ แล้ว $|(2x-3)-1| < \epsilon$

เพราะฉะนั้นเราจึงเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ เพราะฉะนั้น

$$0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \iff -\frac{\epsilon}{2} < x-2 < \frac{\epsilon}{2} \iff -\epsilon < 2x-4 < \epsilon \iff |(2x-3)-1| < \epsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3) = 1$

#

ข้อสังเกต จะเห็นว่า δ อยู่ในรูปของ ϵ เพราะฉะนั้นเมื่อ ϵ เปลี่ยนแปลง δ ก็

เปลี่ยนตาม

ตัวอย่างเช่น $\epsilon = 0.1, \delta = .05$ $\epsilon = 0.001, \delta = .0005$

ตัวอย่าง 2. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = x^2$ จงพิสูจน์ $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

วิเคราะห์ ให้ $\epsilon > 0$ จะหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-2| < \delta \implies |x^2-4| < \epsilon$$

อันดับแรกจะหา x สอดคล้องอสมการ $|x^2-4| < \epsilon$

$$|x^2-4| = |x+2| |x-2|$$

เงื่อนไขที่ 1 กำหนด $|x-2| < 1$ นั่นคือ $1 < x < 3$ ดังนั้น

$$|x^2-4| = |x+2| |x-2| < |3+2| |x-2| = 5|x-2|$$

เงื่อนไขที่ 2 กำหนด $|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$

ดังนั้น $|x^2-4| < 5|x-2| < 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon$

เราใช้ 2 เงื่อนไขโดยเลือก δ เท่ากับค่าต่ำสุดของ 1 และ $\frac{\epsilon}{5}$ เพราะฉะนั้น

$$|x-2| < \delta \implies |x^2-4| = |x+2| |x-2| < 5|x-2| < 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$

เพราะว่า $|x-2| < 1 \implies 1 < x < 3$,

$$0 < |x-2| < \delta \implies |x^2-4| = |x-2| |x+2| < |3+2| |x-2| = 5|x-2|$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ #

$$0 < \delta \leq \frac{5\epsilon}{5} = \epsilon$$

หมายเหตุ $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$ แทนความหมาย δ เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดระหว่าง 1 และ $\frac{\epsilon}{5}$ โดย $\min$ ย่อมาจาก minimum

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 เราไม่ได้เขียน $x \in D_f$ ในข้อความ

$$x \in D_f, 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

โดยทั่วไปถ้าโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดเราจะไม่เขียนไว้

4.3.2 ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวแล้ว ไม่ว่า c เป็นจำนวนจริงใดๆ ลิมิตของ f ที่ c เท่ากับ k นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ว่า สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ มีคุณสมบัติ

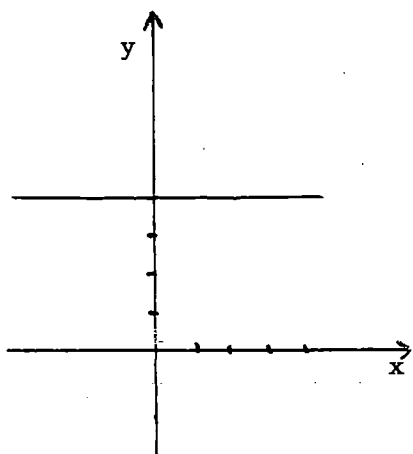
$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - k| < \epsilon$$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = k$ ดังนั้น

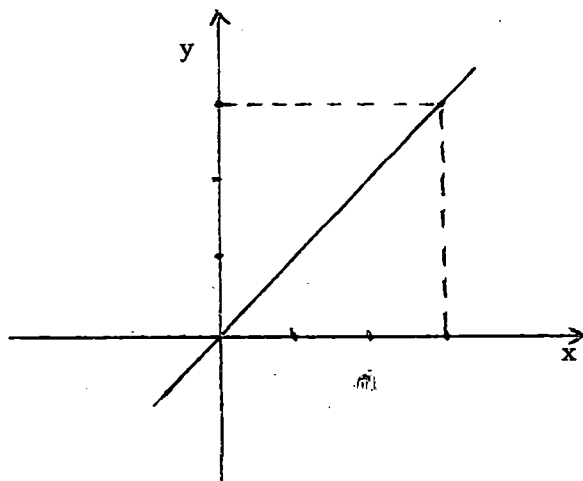
$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ #

รูป 4.3.2 $\lim_{x \rightarrow 3} 4 = 4$



รูป 4.3.2



รูป 4.3.3

4.3.3 ทฤษฎีบท ลิมิตฟังก์ชันเอกลักษณ์ที่จำนวนจริง c ใดๆ เท่ากับ c นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon$ เพราะฉะนั้น

$$0 < |x - c| < \delta \implies |x - c| < \delta = \epsilon$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

#

รูป 4.3.3 $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

4.3.4 ทฤษฎีบท เมื่อ c เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ โดเมนของ f คือเซต $\{x/x \geq 0\} = D_f$

เราจะพิสูจน์ว่า สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก $x \in D_f$

$$0 < |x - c| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon$$

เราจะแยกพิสูจน์เป็น 2 กรณีคือ

กรณี 1. $c > 0$

ให้ $\epsilon > 0$ เราจะหา $\delta > 0$ ซึ่ง $x \in D_f$ และ

$$0 < |x - c| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon$$

$$\text{พิจารณา } |\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{c}| |\sqrt{x} + \sqrt{c}|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{|x - c|}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|}$$

$$\text{ดังนั้น } |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon \implies \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} < \epsilon \implies |x - c| < \epsilon(\sqrt{x} + \sqrt{c})$$

$$\text{เนื่องจาก } \sqrt{x} \geq 0 \text{ ดังนั้น } \epsilon\sqrt{c} \leq \epsilon(\sqrt{x} + \sqrt{c})$$

เพราะฉะนั้น

$$|x - c| < \epsilon\sqrt{c} \implies |x - c| < \epsilon(\sqrt{x} + \sqrt{c}) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon$$

ดังนั้นเราเลือก $\delta = \epsilon\sqrt{c}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $x \in D_f$

$$|x - c| < \epsilon\sqrt{c} \implies |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

กรณี $c=0$

ให้ $\epsilon > 0$ จะหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$x \in D_f, 0 < |x-0| < \delta \implies |\sqrt{x}-0| < \epsilon$$

หรือสมมูลกับ $x < \delta \implies \sqrt{x} < \epsilon$

เพราะว่า $\epsilon > 0$, $0 < \sqrt{x} < \epsilon \implies 0 < x < \epsilon^2$

ดังนั้นเลือก $\delta = \epsilon^2$ เพราะฉะนั้น $0 < x < \delta \implies \sqrt{x} < \epsilon$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ ไม่ว่า c เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่เป็นลบ #

แบบฝึกหัด 4.3

ข้อ 1-ข้อ 5 จงใช้บทนิยามลิมิต

1. $\lim_{x \rightarrow 1} 4x+2=6$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}=6$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2=8$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2-1=26$

6. จงพิสูจน์ ถ้า f มีลิมิตที่ c แล้วลิมิตจะมีเพียงลิมิตเดียว นั่นคือ

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_2 \text{ แล้ว } L_1 = L_2$$

7. ให้ F และ G เป็นฟังก์ชันซึ่ง $0 \leq F(x) \leq G(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง I อาจ
จะยกเว้นจุด a ใน I จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0 \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$$

4.4 ทฤษฎีบทของลิมิต

เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญเพื่อช่วยในการหาลิมิต

4.4.1 ทฤษฎีบท ถ้าฟังก์ชัน f และ g มีลิมิตที่ c แล้ว

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \quad \text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนบวกใดๆภายใต้เงื่อนไข $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวน

คู่

นั่นคือ ลิมิตของผลบวกของ 2 ฟังก์ชัน เท่ากับผลบวกของลิมิตของฟังก์ชัน ลิมิตของผลคูณ
ของ 2 ฟังก์ชัน เท่ากับผลคูณของลิมิตของฟังก์ชัน ลิมิตของผลหารของ 2 ฟังก์ชัน
เท่ากับผลหารของลิมิตของฟังก์ชัน ภายใต้เงื่อนไขลิมิตของฟังก์ชันตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ ลิมิต

รากที่ n ของฟังก์ชันเท่ากับรากที่ n ของลิมิตของฟังก์ชัน

จะพิสูจน์ข้อ 1 สำหรับข้ออื่นการพิสูจน์ค่อนข้างยาก จึงเว้นไว้ไม่แสดงการพิสูจน์
สำหรับผู้สนใจสามารถหาอ่านได้จากหนังสือในบรรณานุกรม [2]

พิสูจน์ (i) ให้ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$

เราจะพิสูจน์ว่า สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta \implies |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon$$

ให้ $\epsilon > 0$ เพราะ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

เพราะ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ เพราะฉะนั้น

$$0 < |x - c| < \delta \implies |(f(x) + g(x)) - (L + M)|$$

$$= |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$$

$$< |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

#

ตัวอย่าง 1. จงพิสูจน์ $\lim_{x \rightarrow -3} x^3 = -27$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์ } \lim_{x \rightarrow -3} x^3 &= \lim_{x \rightarrow -3} (x) x^2 = (\lim_{x \rightarrow -3} x)(\lim_{x \rightarrow -3} x^2) = (\lim_{x \rightarrow -3} x)(\lim_{x \rightarrow -3} xx) \\ &= (\lim_{x \rightarrow -3} x)(\lim_{x \rightarrow -3})(\lim_{x \rightarrow -3} x) \end{aligned}$$

โดย 4.3.3 ทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow -3} x^3 = (-3)(-3)(-3) = (-3)^3 = -27 \quad \#$$

4.4.2 ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ มีและ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆแล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$$

การพิสูจน์ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับ 4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(ii)

4.4.3 ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ มีและ k เป็นค่าคงตัวใดๆแล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

ทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจาก 4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(ii) โดยให้ $g(x) = k$

ตัวอย่าง 2. จงพิสูจน์ $\lim_{x \rightarrow -3} x^7 - 5x^5 - 2x^3 + 18 = -900$

พิสูจน์ โดย 4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(i)

$$\lim_{x \rightarrow -3} x^7 - 5x^5 - 2x^3 + 18 = \lim_{x \rightarrow -3} x^7 - \lim_{x \rightarrow -3} 5x^5 - \lim_{x \rightarrow -3} 2x^3 + \lim_{x \rightarrow -3} 18$$

$$= (-3)^7 - 5 \lim_{x \rightarrow -3} x^5 - 2 \lim_{x \rightarrow -3} x^3 + 18$$

โดย 4.4.2 ทฤษฎีบท

$$= (-3)^7 - 5(-3)^5 - 2(-3)^3 + 18 = -900 \quad \#$$

ตัวอย่าง 3. จงพิสูจน์

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^3 - 1} \quad \frac{\sqrt{3}}{-17}$$

พิสูจน์ โดย 4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(iii)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^3 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 1}}{\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 - 1}$$

โดย 4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(i)และข้อ(iv)

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1)}}{\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 - \lim_{x \rightarrow -2} 1} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 1}}{2 \lim_{x \rightarrow -2} x^3 - \lim_{x \rightarrow -2} 1}$$

โดย 4.4.2 ทฤษฎีบท

$$= \frac{\sqrt{(-2)^2 - 1}}{2(-2)^3 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{-17} \quad \#$$

4.4.4 ทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - L] = 0$

พิสูจน์ สมมติ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ โดย 4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(i)

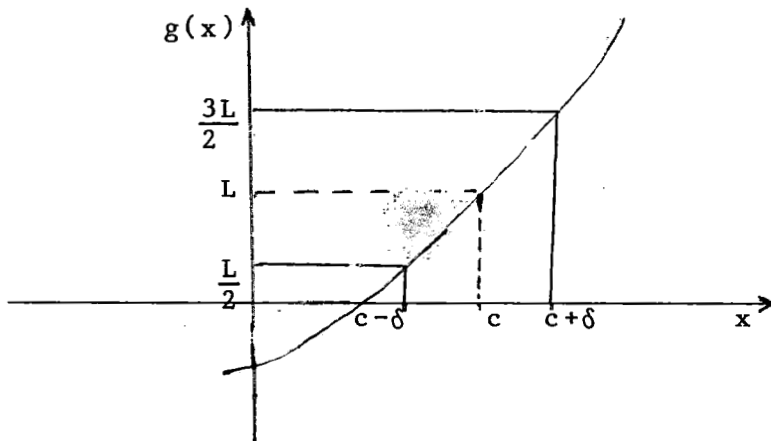
$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - L] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} (-L) = L - L = 0$$

บทกลับสมมติให้ $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - L] = 0$ เพราะว่า $f(x) = [f(x) - L] + L$ ดังนั้นโดย

4.4.1 ทฤษฎีบทข้อ(i)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} ([f(x) - L] + L) = \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - L] + \lim_{x \rightarrow c} L = 0 + L = L \quad \#$$

4.4 5 ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} g(x) > 0$ แล้วจะมีช่วง $(c - \delta, c + \delta), \delta > 0$ ซึ่ง $g(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (c - \delta, c + \delta), x \neq c$ และ $x \in D_g$



รูป 4.4.1

นั่นคือ ถ้า x เล็กพอและไม่เท่ากับ c , $g(x)$ จะเป็นบวก(รูป 4.4.1)

พิสูจน์ ให้ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L > 0$ และ $\epsilon = \frac{L}{2}$
โดย 4.3.1 บทนิยาม จะมีจำนวนบวก δ ซึ่ง

$$x \in D_f, 0 < |x - c| < \delta \implies L - \frac{L}{2} < g(x) < L + \frac{L}{2}$$

$$(1) \quad \implies \frac{L}{2} < g(x) < \frac{3L}{2}$$

เพราะว่า $0 < |x-c| < \delta \iff c-\delta < x < c+\delta$ และ $x \neq c$

ดังนั้นโดย(1)

$$g(x) > \frac{L}{2} > 0$$

สำหรับทุก x ในช่วง $(c-\delta, c+\delta)$ และ $x \neq c$ ภายใต้เงื่อนไข $x \in D_g$ #

โดยทำนองเดียวกัน จะมี 4.4.6 ทฤษฎีบท

4.4.6 ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < 0$ จะมีช่วง $(c-\delta, c+\delta)$, $\delta > 0$ ซึ่ง $f(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $(c-\delta, c+\delta)$, $x \neq c$ และ $x \in D_f$

4.4.7 ทฤษฎีบท ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ สำหรับทุก x ในช่วงเปิด I อาจจะยกเว้นที่ c

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L \quad \text{แล้ว } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เพราะ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ จะมีจำนวนบวก δ_1 และ δ_2

ซึ่ง สำหรับ $x \in I$

$$0 < |x-c| < \delta_1 \implies L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon$$

$$\text{และ } 0 < |x-c| < \delta_2 \implies L-\epsilon < h(x) < L+\epsilon$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ แล้วสำหรับทุก $x \in I$

$$(1) \quad |x-c| < \delta \implies L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon \quad \text{และ} \quad L-\epsilon < h(x) < L+\epsilon$$

ดังนั้นสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{และ} \quad x \in I \implies L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ #

แบบฝึกหัด 4.4

ข้อ 1-ข้อ 5 จงพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบท

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + x - 3 = 2$$

$$2. \lim_{t \rightarrow -1} \frac{2t+3}{3t^2+1} = \frac{1}{4}$$

$$3. \lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{4y^2 - 3} = \sqrt{13}$$

$$4. \lim_{y \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{3y^3 + 4y}{5y + 14}} = -2$$

$$5. \lim_{w \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4w}}{(w-5)^5} = -\sqrt{8}$$

ข้อ 6-ข้อ 7 จงหา $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ เมื่อ

$$6. f(x) = 2x^2, \quad c = 9 \quad [\text{แนะ: } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x^2 - 18}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} 2(x + 9)]$$

$$7. f(x) = \sqrt{x}, \quad c = 9 \quad [\text{แนะ: } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{9})(\sqrt{x} + \sqrt{9})}{(x - 9)(\sqrt{x} + \sqrt{9})} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3}]$$

8. จงพิสูจน์ ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|A - B| < \epsilon$ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ แล้ว $A = B$ [แนะ: สมมติ $A \neq B$ แล้วให้ $\epsilon = |A - B|$].

4.5 ลิมิตข้างเดียว

ในบทนิยาม $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ เราไม่ได้กำหนดว่า x จะมากกว่า c หรือน้อยกว่า c แต่ถ้าเราต้องการเฉพาะ $x > c$ นั่นคือ ให้ x เข้าใกล้ c ทางขวา เราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

อ่านว่า ลิมิตขวา(right-hand limit) ของ f ที่ c เท่ากับ L

4.5.1 บทนิยาม เราจะกล่าวว่า ลิมิตขวาของ f ที่ c เท่ากับ L เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

ก็คือเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $(c, c+\delta) \subseteq D_f$ และ

$$0 < x - c < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

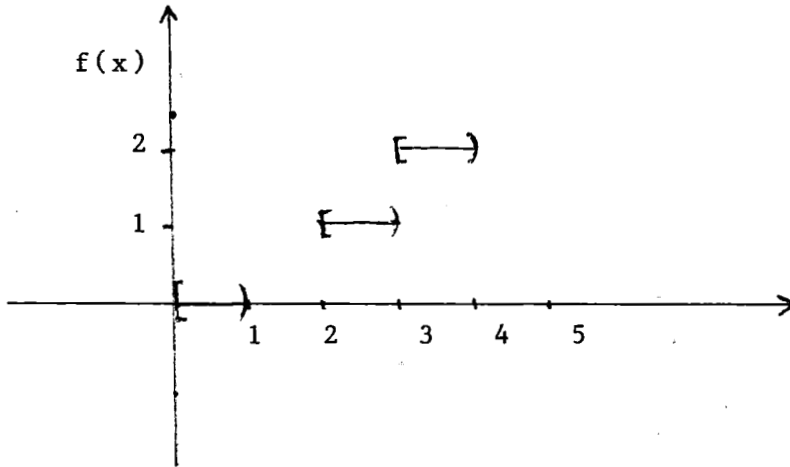
ลิมิตทางซ้าย(left-hand limit) ของ f ที่ c เท่ากับ L เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

ก็คือเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $(c-\delta, c) \subseteq D_f$

$$c - \delta < x < c \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ฟังก์ชันบางฟังก์ชันไม่มีลิมิตที่ c แต่มีลิมิตซ้าย ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันจำนวนเต็มใหญ่สุด (รูป 4.4.1)



รูป 4.4.1 $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$

4.5.2 ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I และ c เป็นจุดข้างใน I แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

การพิสูจน์ไม่ยากจะเว้นให้เป็นแบบฝึกหัด

หมายเหตุ c เป็นจุดข้างใน ช่วงปิด I หมายความว่า c เป็นสมาชิกของ I แต่ไม่เป็นจุดปลายช่วง สำหรับ c ที่เป็นจุดปลายช่วงลิมิตที่ c เราจะหมายถึงลิมิตข้างเดียว ซึ่งกรณีแบบนี้ลิมิตที่ c มี แต่ลิมิตข้างเดียวทางค่านึงจะไม่มี

ตัวอย่างเช่น $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ แต่ $\lim_{x \rightarrow c^-} \sqrt{x}$ ไม่มี

เพราะว่า $\sqrt{x}$ นิยามเฉพาะ $x > 0$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

แบบฝึกหัด 4.5

ข้อ 1-ข้อ 8 หาลิมิตข้างเดียวและเขียนกราฟ

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x-3$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} |x+2|$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} x[x]$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{[x]}{x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x|}{[x]}$$

8. ให้

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{จงหา } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

9. จงพิสูจน์ 4.5.2 ทฤษฎีบท .

4.6 ความต่อเนื่อง

มีฟังก์ชันบางฟังก์ชันมีลิมิตที่ c และค่า $f(c)$ มี ดังตัวอย่าง หัวข้อ 4.1 มีบางฟังก์ชันมีลิมิตที่ c และค่า $f(c)$ ไม่มี ดังตัวอย่าง 2 หัวข้อ 4.1

ฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ c และเท่ากับ $f(c)$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องที่ c

4.6.1 บทนิยาม เรากล่าวว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ c ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

ดังนั้นฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ c ก็ต่อเมื่อ

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{มี}$$

$$(ii) \quad f(c) \quad \text{มี}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

ตัวอย่าง 1. ฟังก์ชันคงตัวต่อเนื่องทุกจุด

พิสูจน์ ให้ $f(x) = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวและ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$$

$$(ii) \quad f(c) = k$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด c

เนื่องจาก c เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น f ต่อเนื่องทุกจุด นั่นคือฟังก์ชันคงตัวต่อเนื่องทุกจุด $\#$

ตัวอย่าง 2. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ต่อเนื่องทุกจุด

พิสูจน์ ให้ $f(x)=x$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

$$(ii) \quad f(c) = c$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

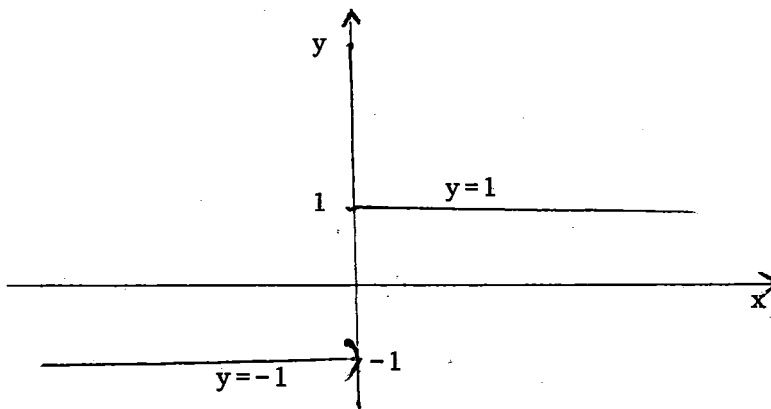
เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จุด c แต่ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้นสรุปได้ว่า ฟังก์ชันเอกลักษณ์ต่อเนื่องทุกจุด $\#$

ตัวอย่าง 3. ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$

ไม่ต่อเนื่องที่ c เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ (รูป 4.6.1) ดังนั้น

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ไม่มี



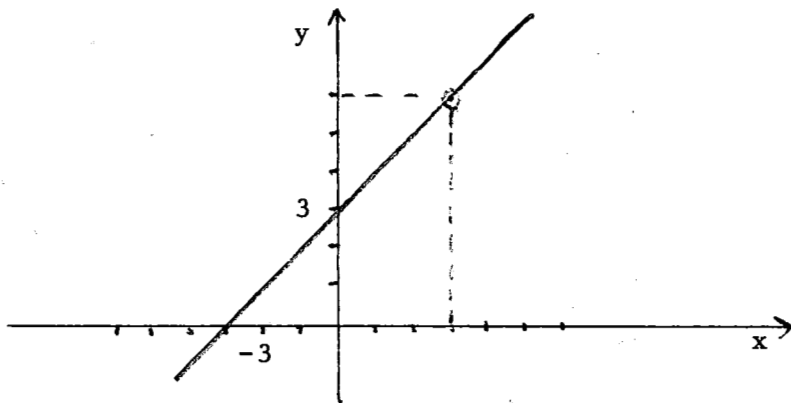
รูป 4.6.1

ข้อสังเกต เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงจะไม่ขาดช่วง นั่นคือ ถ้าลากปากกาตามกราฟจะลากได้ตลอดกราฟโดยไม่ต้องยกปากกา สำหรับการพิสูจน์ไม่ง่ายจึงไม่แสดงไว้ สำหรับผู้สนใจสามารถหาอ่านได้จากหนังสือในบรรณานุกรม[2] เราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

4.6.2 ทฤษฎีบท(ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง(The Intermediate Value Theorem))

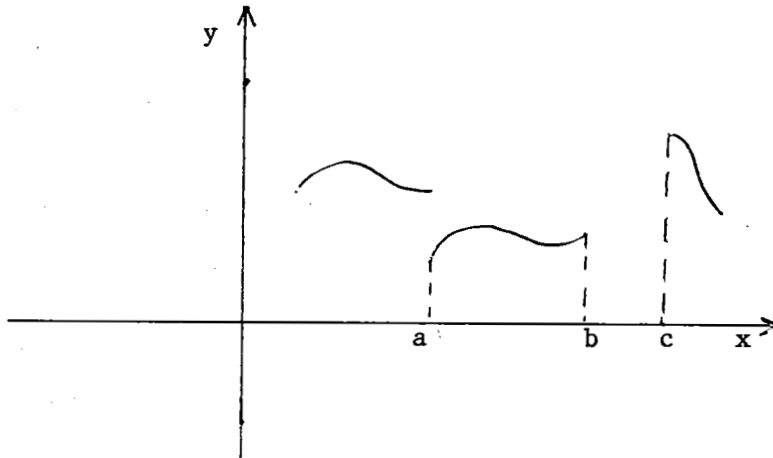
ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ w เป็นจำนวนจริงระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมีจำนวนจริง c ระหว่าง a และ b ซึ่ง $f(c) = w$ (รูป 4.6.4)

รูป 4.6.2 ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่จุด 3 จะเห็นว่ากราฟขาดช่วงที่ $x=3$

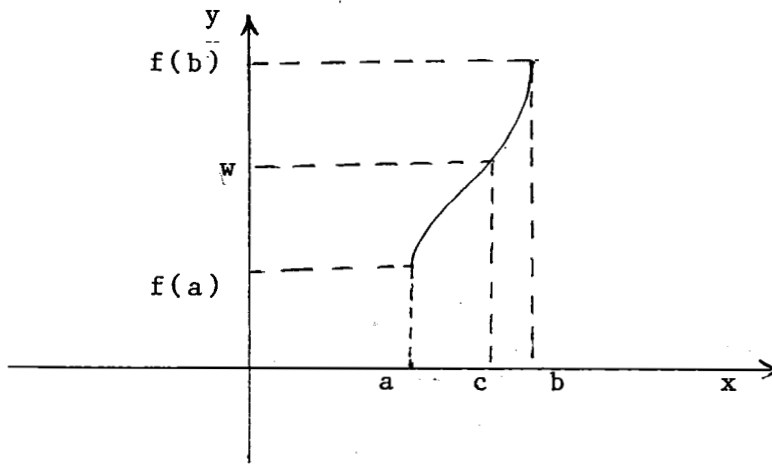


รูป 4.6.2 $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, x \neq 3$

รูป 4.6.3 ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด a และ b และไม่ต่อเนื่องตลอดช่วง (b, c)



例 4.6.3



例 4.6.4

ตัวอย่าง 4. กำหนด $f(x)=3x-1$ จงหา c ในช่วง $[0,2]$ ซึ่ง $f(c)=2$

เฉลย เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow c} f(x)=3c-1=f(c)$ สำหรับทุก $c \in [0,2]$ ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $[0,2]$

เพราะว่า $f(0)=-1$ และ $f(2)=5$ ดังนั้น $w=2$ อยู่ในระหว่าง -1 และ 5

เพราะว่าฉะนั้นโดย 4.6.2 ทฤษฎีบทจะมี $c \in [0,2]$ ซึ่ง

$$f(c)=2$$

$$\text{หรือ } 3c-1=2$$

$$c=1$$

นั่นคือมี $c=1$ ในช่วง $[0,2]$ และ $f(1)=2$ #

4.6.3 ทฤษฎีบท ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c แล้ว $f+g$, fg ต่อเนื่องที่ c และถ้า $g(c) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ c

พิสูจน์ จะพิสูจน์ $f+g$ ต่อเนื่องที่ c นั้นคือจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow c} (f+g)(x) = (f+g)(c)$$

เพราะว่า f และ g ต่อเนื่องที่ c ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow c} f(x)=f(c)$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x)=g(c)$ ดังนั้นโดย 4.4.1 ทฤษฎีบท

$$\lim_{x \rightarrow c} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$= f(c) + g(c) = (f+g)(c)$$

จึงสรุปได้ว่า $f+g$ ต่อเนื่องที่ c

โดยทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า fg ต่อเนื่องที่ c นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = (\lim_{x \rightarrow c} f(x))(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(c)g(c)$$

ดังนั้น fg ต่อเนื่องที่ c

สำหรับ $\frac{f}{g}$ ก็พิสูจน์โดยทำนองเดียวกัน จะเว้นไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด #

เพราะว่าฟังก์ชันพหุนามเกิดจากผลคูณและผลบวกของฟังก์ชันคงตัวและฟังก์ชันเอกลักษณะ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุด ดังนั้นโดย 4.6.3 ทฤษฎีบท ฟังก์ชันพหุนาม f จึงนิยามโดย

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

ต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}$

เนื่องจากฟังก์ชันตรรกยะเป็นผลหารของฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้นฟังก์ชันตรรกยะต่อเนื่องทุกจุดที่ค่าของฟังก์ชันตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

เนื่องจากฟังก์ชันต่อเนื่องมีค่าลิมิตเท่ากับค่าฟังก์ชันที่จุดนั้น ดังนั้น ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ c เราสามารถหาลิมิตของ f ที่ c ได้โดยแทน $x=c$

ตัวอย่าง 5.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x + 10}{x^3 + 10} = \frac{(-1)^3 - 2(-1) + 10}{(-1)^3 + 10} = \frac{11}{0}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{2x^2} = \frac{3+1}{2(3)^2} = \frac{1}{3} \quad \#$$

4.6.4 ทฤษฎีบท ถ้า f ต่อเนื่องที่ b และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

พิสูจน์ เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ b ดังนั้น สำหรับ $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนบวก δ_1 ซึ่ง

$$(1) \quad |t-b| < \delta_1 \implies |f(t)-f(b)| < \epsilon$$

แทน $t=g(x)$ ใน (1) แล้ว

$$|g(x)-b| < \delta_1 \implies |f(g(x))-f(b)| < \epsilon$$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$ ดังนั้น สำหรับ $\delta_2 > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-c| < \delta_2 \implies |g(x)-b| < \delta_1$$

ดังนั้น

$$0 < |x-c| < \delta_2 \implies |g(x)-b| < \delta_1 \implies |f(g(x))-f(b)| < \epsilon$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(b)$ #

ตัวอย่าง 6. จงพิสูจน์ $H(x) = \sqrt{x^2+2}$ ต่อเนื่องทุกจุด

พิสูจน์ โดย 4.3.4 ทฤษฎีบท ถ้า c เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

ดังนั้น ฟังก์ชันรากที่สองต่อเนื่องทุกจุดที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ และเนื่องจาก x^2+2 เป็นฟังก์ชันพหุนามจึงต่อเนื่องทุกจุด ดังนั้นโดย 4.6.4 ทฤษฎีบท

$$\lim_{x \rightarrow c} H(x) = \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x^2+2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} (x^2+2)} = \sqrt{c^2+2} = H(c)$$

ดังนั้น H ต่อเนื่องทุกจุด #

4.6.5 ทฤษฎีบท ถ้า g ต่อเนื่องที่ c และ f ต่อเนื่องที่ $g(c)$ แล้ว $f \circ g$ ต่อเนื่องที่ c

ทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจาก 4.6.4 ทฤษฎีบทพิสูจน์ไม่ยากจะเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 4.6

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ต่อเนื่องที่ 2 หรือไม่ ให้เขียนกราฟของ f

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{สำหรับ } x \neq 2 \\ 5 & \text{สำหรับ } x = 2 \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่ 2 หรือไม่

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{สำหรับ } x \neq 2 \\ 4 & \text{สำหรับ } x = 2 \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่ 2 หรือไม่

4. ให้ h เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$h(x) = \frac{2x^2+x-1}{2x-1} \quad \text{สำหรับ } x \neq \frac{1}{2}$$

จงกำหนดค่า $h\left(\frac{1}{2}\right)$ เพื่อให้ h ต่อเนื่องที่ $\frac{1}{2}$

5. ให้ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{สำหรับ } x \neq 1$$

จงกำหนดค่า $G(1)$ เพื่อ G ต่อเนื่องที่ 1

ข้อ 6-ข้อ 13 หาจุดซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องและบอกด้วยว่าทำไมไม่ต่อเนื่อง พร้อมเขียนกราฟ

$$6. \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$7. \quad H(x) = \sqrt{x-3}$$

$$8. \quad G(t) = \frac{3+t}{2t-1}$$

$$9. \quad F(s) = \frac{s+1}{2s^2+s-1}$$

$$10. \quad H(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2x^2+x-6} & \text{สำหรับ } x \neq -2 \text{ และ } x \neq \frac{3}{2} \\ -7 & \text{สำหรับ } x = -2 \\ 3 & \text{สำหรับ } x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$11. \quad F(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{สำหรับ } x = 0 \\ 0 & \text{สำหรับ } x < 0 \end{cases}$$

$$12. \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{สำหรับ } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

13. จงพิสูจน์ ถ้า f และ g ต่อเนื่องที่ c และ $g(c) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ c
[แนะ : เขียน $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$]

14. ให้ f ต่อเนื่องที่ c จงพิสูจน์ ถ้า $f(c) > 0$ จะมีช่วง I บรรจบ c ซึ่ง $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in I \cap D_f$ ถ้า $f(c) < 0$ จะมีช่วง I บรรจบ c ซึ่ง $f(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in I \cap D_f$.

14. จงพิสูจน์ 4.6.5 ทฤษฎีบท.

4.7 ค่าที่เปลี่ยนไป (Increments)

ถ้า x_1 และ x_2 เป็นจำนวน 2 จำนวนและค่าของตัวแปร x เปลี่ยนจาก x_1 ถึง x_2 แล้ว $x_2 - x_1$ เรียกว่า ค่าที่เปลี่ยนไปของ x เขียนแทนด้วย Δx อ่านว่า เดลต้า x นั่นคือ

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า x เปลี่ยนจาก $x_1 = 2.1$ ถึง $x_2 = 4.5$ แล้ว $\Delta x = 4.5 - 2.1 = 2.4$

ถ้า x เปลี่ยนจาก 2.1 ถึง -0.4 แล้ว $\Delta x = -0.4 - 2.1 = -2.5$

โดยทำนองเดียวกัน Δy ก็หมายถึงค่าที่เปลี่ยนไปของ y , Δu หมายถึงค่าที่เปลี่ยนไปของ u และ Δt คือค่าที่เปลี่ยนไปของ t

ให้ x_1 และ $x_2 = x_1 + \Delta x$ เป็นจำนวนจริงในโดเมนของฟังก์ชัน f และ $y = f(x)$

ถ้า y_1 เป็นค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ซึ่งสมนัยกับค่า x_1 ของตัวแปรอิสระ x ดังนั้น

$$(1) \quad y_1 = f(x_1)$$

ในขณะที่ค่าของ x เปลี่ยนจาก x_1 ถึง $x_1 + \Delta x$ ค่าของ y จะเปลี่ยนจาก y_1 ถึง $y_1 + \Delta y$

$$(2) \quad y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x)$$

นำสมการ (2) - (1)

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

ดังนั้น Δy เป็นค่าที่เปลี่ยนไปของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x เปลี่ยนจาก x_1 ถึง $x_1 + \Delta x$

4.7.1 บทนิยาม ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า x_1 และ $x_1+\Delta x$ เป็น 2 จำนวนในโดเมนของ f แล้ว

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

เป็นค่าที่เปลี่ยนไปของตัวแปรตาม y ซึ่งสมนัยกับค่าที่เปลี่ยนไป Δx ของตัวแปร x ที่ x_1

หรืออาจจะเขียน Δf แทน Δy นั่นคือ

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

เป็นค่าที่เปลี่ยนไปของฟังก์ชัน f สมนัยกับค่าที่เปลี่ยนไป Δx ของตัวแปรอิสระ x ที่ x_1

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = x^2$

ค่าของ x ที่ $x_1 = 2$

ค่าที่เปลี่ยนไป $\Delta x = 6$ จะสมนัยกับค่าที่เปลี่ยนไปของฟังก์ชันคือ

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = f(2+6) - f(2)$$

$$= (2+6)^2 - (2)^2 = 64 - 4 = 60$$

ถ้า $x_1 = 6$ และ $\Delta x = -0.2$ แล้ว

$$\Delta f = (6-0.2)^2 - (6)^2 = 36 - 2(6)(0.2) + 0.04 - 36 = -2.4 + 0.04 = -1.36 \quad \#$$

ตัวอย่าง 2. รูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านแต่ละด้านยาว 4.5 นิ้ว ถ้าการวัดมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.05 นิ้ว จงหาความคลาดเคลื่อนของปริมาตรรูปทรงนี้

เฉลย ปริมาตรของรูปทรงคือ $V = x^3$ เมื่อ x เป็นความยาวของด้านแต่ละด้าน

เมื่อ $x_1 = 4.5$ และ $\Delta x = \pm 0.05$ จะสมนัยกับค่าที่เปลี่ยนไปของ V คือ ΔV

$$\Delta V = (x_1 \pm \Delta x)^3 - x_1^3 = (4.5 \pm 0.05)^3 - (4.5)^3$$

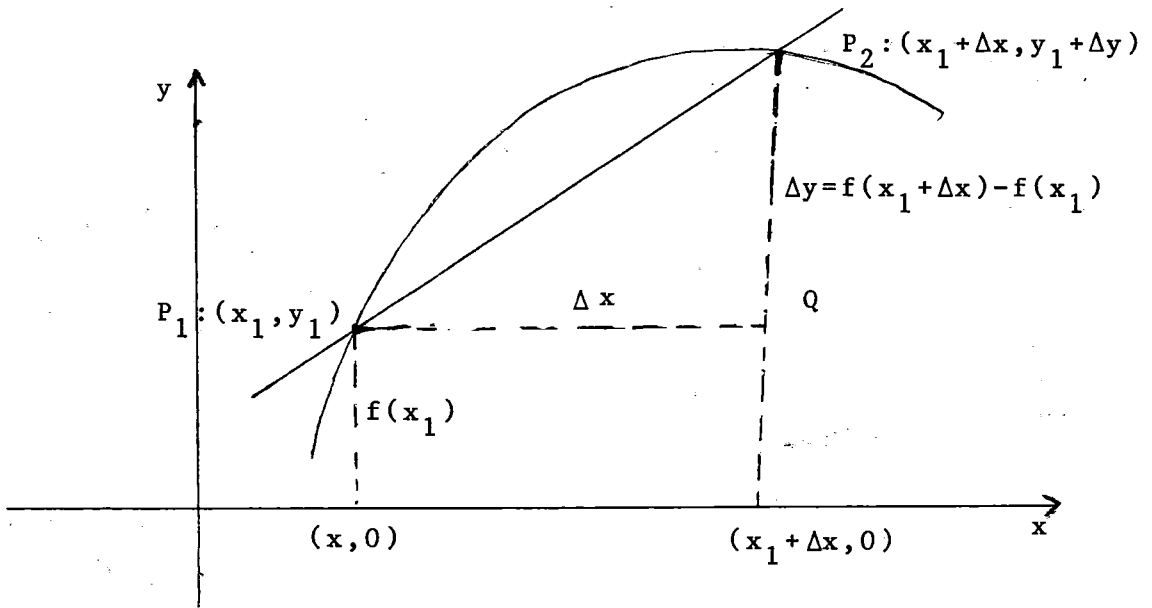
เพราะฉะนั้นความคลาดเคลื่อนของปริมาตรไม่เกิน $\Delta V = 3.071$ หรือ $\Delta V = -3.003875$ #

รูป 6.7.1 $P_1(x_1, y_1)$ และ P_2 เป็น 2 จุดบนกราฟของ $y=f(x)$

ตัวแปรอิสระ x ที่ P_1 คือ x_1

ค่าที่เปลี่ยนไป $\Delta x = \overline{P_1Q}$ คือระยะทางระดับทิศทางจาก P_1 ถึง Q และ

y_1 เป็นตัวแปรตามที่สัมพันธ์กับ x และ $\Delta y = \overline{QP_2}$ คือระยะทางระดับทิศทางจาก Q ถึง P_2
 ดังนั้นพิกัดของ P_2 คือ $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ เมื่อ $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$



รูป 6.7.1

ข้อสังเกต ความชันของ P_1P_2 คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

แบบฝึกหัด 4.7

ข้อ 1- ข้อ 3 จงหา $\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ ซึ่งสมนัยกับค่า x_1 และ Δx

1. $f(x) = x^3 - x^4$, $x_1 = 2$ และ $\Delta x = 0.4$

2. $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $x_1 = 3$ และ $\Delta x = -0.5$

3. $f(x) = \sqrt{1-2x}$, $x_1 = 0$ และ $\Delta x = \pm 0.1$

4. ให้ $f(x) = 1 - x^2$ และ $g(x, \Delta x) = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ จงหาฟังก์ชัน g และค่าของ $g(2, -4)$

5. จงหาพื้นที่ที่เปลี่ยนแปลงไปของวงกลม เมื่อเส้นผ่าศูนย์กลางเปลี่ยนจาก 4 เซนติเมตรเป็น 4.2 เซนติเมตร

6. ทรงกลมมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 นิ้ว ทาสีภายนอกหนา $\frac{1}{8}$ นิ้ว จงหาปริมาตรของสีที่ใช้

7. ระยะทาง s ที่รถวิ่งเป็นฟังก์ชันของ t ดังสมการ $s(t) = t^2 + 3t$ จงหาระยะทางที่เปลี่ยนแปลงไปในช่วงเวลา $t=6$ ถึง $t=6.9$

8. วัฏจักรมีวงกลมยาว 21.83 นิ้ว มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.04 นิ้ว จงหาความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการคำนวณหาพื้นที่วงกลม

ข้อ 9- ข้อ 10 กำหนด $f(x)$, x_1 และ Δx ให้เขียนกราฟของ f สำหรับ x เข้าใกล้ x_1

หา $\Delta y = \Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ และแสดงพิกัดของจุด $P_1 : (x_1, y_1)$ และ

$P_2 : (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ บนเส้นโค้ง

ลากเส้นตัดกราฟ $P_1 P_2$ หาความชัน $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ และเขียนเส้นแนวนอนและแนวดิ่ง x และ y ดังรูป 6.7.1

9. $f(x) = x^2 - x$, $x_1 = 1$ และ $\Delta x = 0.6$

10. $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $x_1 = 2$ และ $\Delta x = -\frac{4}{5}$

บทที่ 5

อนุพันธ์

5.1 อนุพันธ์

5.1.1 บทนิยาม อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือฟังก์ชัน f' ซึ่งค่าที่จุด c ใดๆ ในโดเมนของ f คือ

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

ภายใต้เงื่อนไขลิมิตมี

ถ้าลิมิตมี เรากล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่ c โดเมนของ f' เป็นเซตย่อยของโดเมนของ f

สัญลักษณ์ f' บางทีเขียนแทนด้วย $D_x f$ อ่านว่า อนุพันธ์ของ f เทียบกับ x เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระของฟังก์ชัน f

ถ้าให้ $y = f(x)$ บางทีเขียน $\frac{dy}{dx}$ หรือ y' หรือ $D_x y$ อ่านว่า อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

ตัวอย่าง 1. ให้ $f(x) = 2x - 5$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ 2

ผลเฉลย $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(2+\Delta x) - 5] - [2(2) - 5]}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 = 2$$

ดังนั้นอนุพันธ์ f' ที่ 2 เท่ากับ 2 #

ตัวอย่าง 2. ให้ $f(x) = x^3 + x$ จงหาอนุพันธ์ของ f

ผลเฉลย ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆในโดเมนของ f แล้ว

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(c+\Delta x)^3 + (c+\Delta x)] - [c^3 + c]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3c^2\Delta x + 3c(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3c^2 + 3c(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 = 3c^2 + 1$$

ดังนั้นอนุพันธ์ของ f ที่จุด c ใดๆ คือ $3c^2 + 1$ นั่นคือ $f'(x) = 3x^2 + 1$ #

ตัวอย่าง 3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \frac{1}{x}$

ผลเฉลย ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆและ $c \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{c+\Delta x} - \frac{1}{c}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - (c + \Delta x)}{\frac{c(c + \Delta x)}{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{c(c + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{c(c + \Delta x)} = -\frac{1}{c^2}$$

ดังนั้น f' เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่เท่ากับศูนย์ #

แบบฝึกหัด 5.1

ข้อ1-ข้อ10 จงหา $f'(x)$ โดยใช้ 5.1.1บทนิยาม

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว
3. $f(x) = 2x^2 - 3$
4. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว
5. $f(x) = 2x^3 + 1$
6. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 1$
7. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
8. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว
9. $f(x) = x^4$
10. $f(x) = 3x^4 - 8x + 10$

ข้อ11-ข้อ18 จงหา $D_x F$ โดยใช้ 5.1.1บทนิยาม และหาโดเมนของอนุพันธ์

$$11. F(x) = \frac{3}{x}$$

$$12. \quad F(x) = \frac{3}{2x-3}$$

$$14. \quad F(x) = \frac{1}{x^2-3x-2}$$

$$13. \quad F(x) = \frac{4}{2x^3+1}$$

ข้อ 15-ข้อ 18 จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$15. \quad y = \frac{2}{x^3}$$

$$16. \quad y = \frac{1}{2x^3-3}$$

$$17. \quad y = \frac{1}{x^4}$$

$$18. \quad y = \frac{1}{(2x^4+3)}$$

ข้อ 19-ข้อ 23 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$19. \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$20. \quad H(y) = \frac{2}{\sqrt{y-3}}$$

$$21. \quad H(z) = \sqrt{z^2-1}$$

$$22. \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+8}}$$

$$23. \quad G(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

ถ้าลิมิต $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$

มี เรียกว่าอนุพันธ์ทางขวาของฟังก์ชัน f ที่ c

โดยทำนองเดียวกัน ถ้าลิมิตซ้าย $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$

มี เรียกว่า **อนุพันธ์ทางซ้าย** ของฟังก์ชัน f ที่ c

24. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I และ c เป็นจุดข้างใน I จงพิสูจน์ $f'(c)$ มีก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ทางซ้ายและทางขวาของ f มีที่ c และเท่ากัน
25. เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = |x^2 - 1|$ และ
- จงพิสูจน์ $f'(1)$ และ $f'(-1)$ ไม่มี
 - หา $f'(x)$ สำหรับ $|x| > 1$
 - หา $f'(x)$ สำหรับ $|x| < 1$.

5.2 อัตราการเปลี่ยนแปลง

(1) ผลหาร $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$

ใน 5.2.1 บทนิยาม เรียกว่า **ผลต่างผลหาร (difference quotient)**

ตัวส่วนเป็นผลต่างระหว่าง 2 ค่าของ x คือ c และ $c+\Delta x$ และตัวเศษเป็นผลต่างระหว่างค่าที่สมนัยของฟังก์ชัน กล่าวคือ ตัวส่วนเป็นการเปลี่ยนค่าของ x และตัวเศษเป็นการเปลี่ยนค่าของ f ที่สมนัยกับค่าของ x

ดังนั้น (1) เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เมื่อเทียบกับตัวแปรอิสระ x โดยเริ่มที่ $x=c$

5.2.1 บทนิยาม อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับตัวแปรอิสระ x ณ ที่จุด $x=c$ คือ

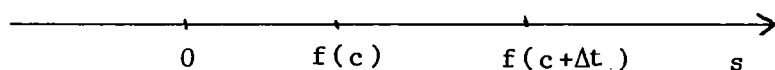
$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

เพราะฉะนั้นอนุพันธ์ f' ที่ c ก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับตัวแปรอิสระ x

ณ ที่จุด $x=c$

การนำไปประยุกต์ขึ้นอยู่กับว่าเรากำหนดฟังก์ชัน f ให้เป็นอย่างไร

ตัวอย่างเช่น เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรง ให้ s เป็นระยะทางและ t เป็นเวลา สัมพันธ์กันโดย $s=f(t)$ (รูป 5.2.1)



รูป 5.2.1

ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วงเวลา $t=c$ ถึง $t=c+\Delta t$ คือ

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} = \frac{f(c+\Delta t) - f(c)}{\Delta t}$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(t)$ เทียบกับเวลา ณ จุด $t=c$ คือความเร็วของวัตถุ ณ จุด $t=c$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta t) - f(c)}{\Delta t}$$

5.2.2 บทนิยาม ให้ $s=f(t)$ เป็นฟังก์ชันระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามแนวเส้นตรงเมื่อเวลา t ความเร็วของอนุภาค ณ เวลา c คือ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta t) - f(c)}{\Delta t}$$

ตัวอย่าง 1. วัตถุเคลื่อนที่เป็นระยะทาง $s(t)=16t^2$ ฟุต เมื่อเวลา t วินาที จงหา

ความเร็วของวัตถุเมื่อ $t=1$

ผลเฉลย

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(1+\Delta t) - s(1)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{16(1+\Delta t)^2 - 16(1)^2}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{16(1+2\Delta t + (\Delta t)^2) - 16}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2 + \Delta t) = 2
 \end{aligned}$$

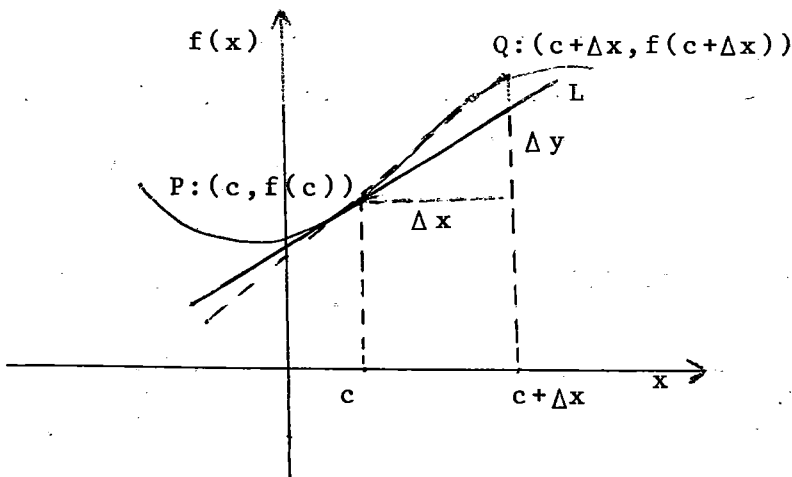
นั่นคือ ความเร็วอนุภาคเมื่อ $t=1$ คือ 2 ฟุต/วินาที

#

ให้ $y=f(x)$ ผลต่างผลหาร (1) เป็นการเปลี่ยนค่าของฟังก์ชัน หาด้วยการเปลี่ยนค่าของตัวแปรอิสระ x เมื่อจุดเคลื่อนที่จาก $(c, f(c))$ ไปยัง $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$

นั่นคือ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x (รูป 5.2.2)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$



รูป 5.2.2

เมื่อเราให้ Δx มีค่าน้อย จุด Q จะเลื่อนเข้าใกล้จุด P และเส้นตรง PQ ก็จะเป็นเส้นเดียวกับเส้น L ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ P

ดังนั้นความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดกำหนดให้ก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ณจุดนั้น

ดังนั้นเราจึงนิยามความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P คือ

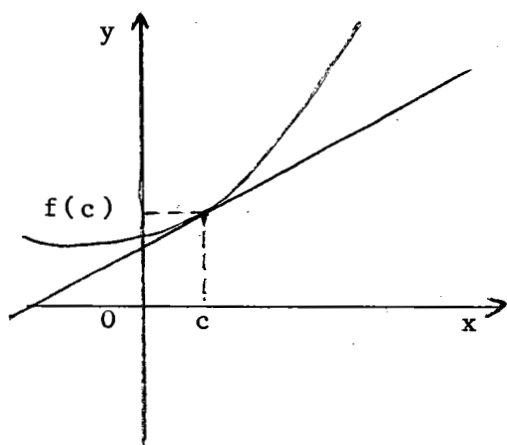
$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ซึ่งก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ณจุด $x=c$

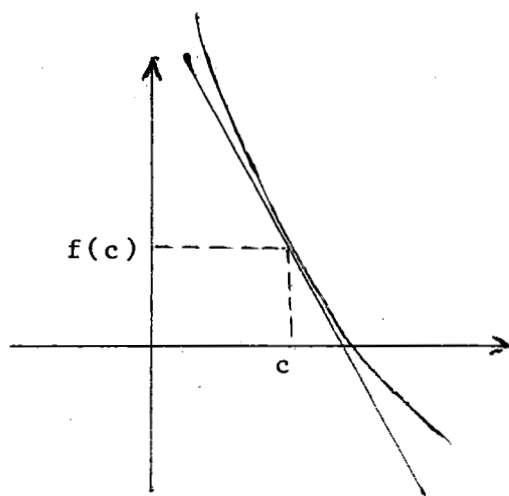
ถ้า $f'(c) > 0$ เส้นสัมผัสที่จุดนั้นจะพุ่งขึ้นไปทางขวา และเส้นโค้งจะสูงขึ้น

ถ้า $f'(c) < 0$ เส้นสัมผัสที่จุดนั้นจะพุ่งลงไปตามทางขวา และเส้นโค้งจะตกลง

(รูป 5.2.3)



(a) $f'(c) > 0$



(b) $f'(c) < 0$

รูป 5.2.3

5.2.3 บทนิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $P: (c, f(c))$ เป็นจุดบนกราฟของ $y=f(x)$ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $P: (c, f(c))$ คือ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

ภายใต้เงื่อนไขลิมิตมี

ตัวอย่าง 2. จงหาความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งของสมการ $y=x^2$ ที่จุด $P:(1,1)$

เฉลย $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

ดังนั้นความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=x^2$ ที่จุด $(1,1)$ คือ 2 #

ตัวอย่าง 3. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกบาศก์ เมื่อเทียบกับความยาวของด้านของลูกบาศก์

เฉลย ปริมาตรของลูกบาศก์คือ $V=x^3$ เมื่อ x คือความยาวด้านของลูกบาศก์
ให้ c เป็นค่าคงตัวใดๆของ แล้ว

$$D_x V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(c+\Delta x)^3 - c^3}{\Delta x}$$

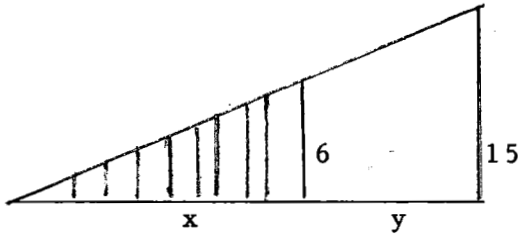
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3c^2(\Delta x) + 3c(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3c^2 + 3c(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 3c^2$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกบาศก์ เมื่อเทียบกับความยาวด้านคือ $3x^2$
เมื่อ x คือความยาวด้านของลูกบาศก์

ตัวอย่าง 4. เสาไฟฟ้าสูง 15 ฟุต ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต เดินออกไปจากเสาไฟฟ้าด้วยความเร็ว 4 ฟุต/วินาที เงาของเขาจะยาวขึ้นด้วยความเร็วอย่างไร

เฉลย ให้ x เป็นความยาวเงาของเขามีหน่วยเป็นฟุต
 y เป็นระยะห่างจากเขาถึงเสาไฟฟ้า (รูป 5.2.4)



รูป 5.2.4

เราจะหาอัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวของเงาของเขาเทียบกับเวลา นั่นคือจะต้องหาอนุพันธ์ของ x เทียบกับ t ; $D_t x$

วิธีหาเราจะต้องเขียน x ในรูปของ t
โดยสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{x}{6} = \frac{x+y}{15}$$

(1) หรือ $x = \frac{2y}{3}$

เพราะว่าเขาเดินด้วยความเร็ว 4 ฟุต/วินาที ดังนั้นในเวลา t วินาที เขาจะห่าง

จากเสาไฟฟ้าเท่ากับ $y = 4t$ แทน y ใน (1)

$$x = \frac{8t}{3}$$

ให้ t_1 เป็นค่าใดๆของ t แล้ว

$$D_t x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{8(t_1 + \Delta t)}{3} - \frac{8t_1}{3}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{8(\Delta t)}{3}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

ดังนั้นเงาของเขายาวขึ้นด้วยความเร็ว $\frac{8}{3}$ ฟุต/วินาที #

แบบฝึกหัด 5.2

1. ให้ $y = 3x^2 - 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

a. จาก $x=2$ ถึง $x=2.2$

b. จาก $x=2$ ถึง $x=2.1$

c. จาก $x=2$ ถึง $x=2.01$

และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่ $x=2$

2. ถ้า $y = \frac{2}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

a. จาก $x=4$ ถึง $x=5$

b. จาก $x=4$ ถึง $x=4.2$

c. จาก $x=4$ ถึง $x=4.01$

และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่ $x=4$

3. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวของด้าน
4. จงพิสูจน์ อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของวงกลมเทียบกับรัศมีเท่ากับเส้นรอบวง
5. ถ้าความยาวด้านที่เท่ากันของสามเหลี่ยมหน้าจั่วเปลี่ยนแปลงในขณะที่ความยาวด้านที่สามยาว 20 หน่วยไม่เปลี่ยนแปลง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่สามเหลี่ยมเทียบกับความยาวของด้านที่เปลี่ยนเมื่อมีความยาว 25 หน่วย
6. จงพิสูจน์อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของวงกลมเทียบกับเส้นรอบวงเท่ากับรัศมี
7. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลมตรง
 - a. เทียบกับรัศมีของฐานโดยให้ความสูงคงตัว
 - b. เทียบกับความสูงโดยให้รัศมีของฐานคงตัว
8. บันไดยาว 14 ฟุต เอียงพิงกำแพง ถ้าปลายบันไดค่อยๆ ลื่นไถลห่างจากกำแพง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปลายบนของบันไดเทียบกับระยะทางของปลายด้านล่างจากกำแพง เมื่อปลายด้านล่างห่างจากกำแพง 7 ฟุต
9. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของส่วนกลับของกำลัง 4 ของจำนวนเทียบกับจำนวน เมื่อจำนวนนั้นเป็น 3
10. เทน้ำลงในแท่งทรงกระบอกมีรัศมี 5 ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 30 ลูกบาศก์ฟุต/นาที ระดับน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไร.

5.3 อนุพันธ์และความต่อเนื่อง

จาก 5.1.5 บทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ c คือ

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

ถ้าเรากำหนดให้ $x = c + \Delta x$, $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

ดังนั้นนิยามอนุพันธ์สามารถเขียนได้ดังนี้

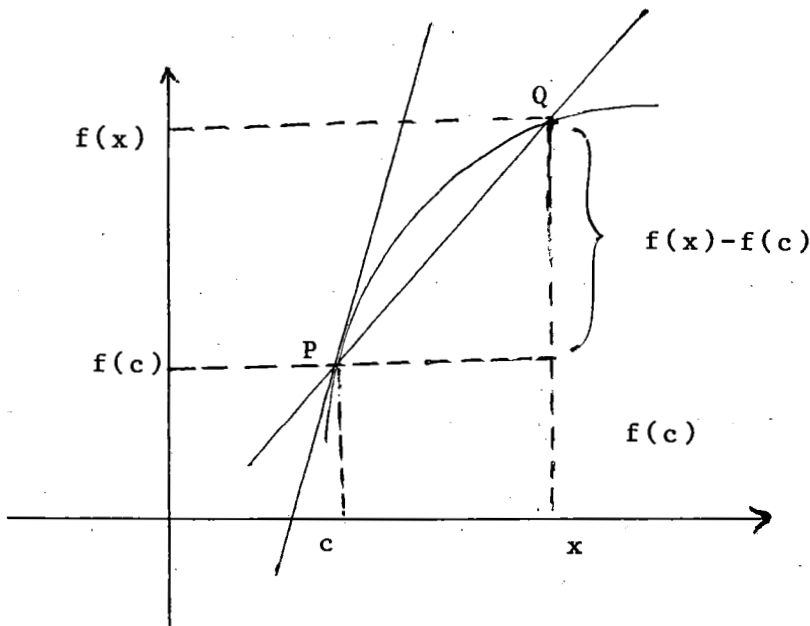
5.3.1 นิยาม อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือฟังก์ชัน f' นิยามโดย สำหรับทุกจุด c ใดๆ ในโดเมน f

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ภายใต้เงื่อนไขลิมิตมี

เราแปลความหมายอนุพันธ์เป็นความหมายทางเรขาคณิตได้ดังนี้

รูป 5.3.1 ให้ $P:(c, f(c))$ เป็นจุดคงตัวบนเส้นโค้ง $y=f(x)$ และ $Q:(x, f(x))$



รูป 5.3.1

เมื่อ $x \neq c$ เป็นจุดใกล้กับจุด P บนเส้นโค้งเดียวกันแล้วผลหาร

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

คือความชันของส่วนเส้น PQ และ

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ P

โดย 5.3.1 บทนิยามเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทดังนี้

5.3.2 ทฤษฎีบท ถ้า f เป็นฟังก์ชันและ $f'(c)$ มีแล้ว f ต่อเนื่องที่ c

พิสูจน์ ให้ $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ เราจะพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

เนื่องจาก $f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$ สำหรับทุก $x \neq c$ ในโดเมนของ f

ให้ $x \rightarrow c$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot [\lim_{x \rightarrow c} (x-c)] = f'(c) \cdot 0 = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

นั่นคือ f ต่อเนื่องที่ c #

บทกลับทฤษฎีบทไม่จริง กล่าวคือฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ไม่จำเป็นต้องมีอนุพันธ์ที่จุดนั้น

ตัวอย่าง 1. ให้ $f(x) = |x|$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=0$ แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x=0$

พิสูจน์ รูป 5.3.2 กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $(0,0)$ แต่ไม่มีเส้นสัมผัส (เส้นเดียว) ที่จุด $(0,0)$ นั่นคือ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0,0)$

เราจะแสดงการพิสูจน์ดังนี้

สำหรับ $x \geq 0$, $|x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = |0|$$

สำหรับ $x \leq 0$, $|x| = -x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 = |0|$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0|$

จึงสรุปได้ว่า $f(x) = |x|$ ต่อเนื่องที่ $x=0$
เนื่องจาก

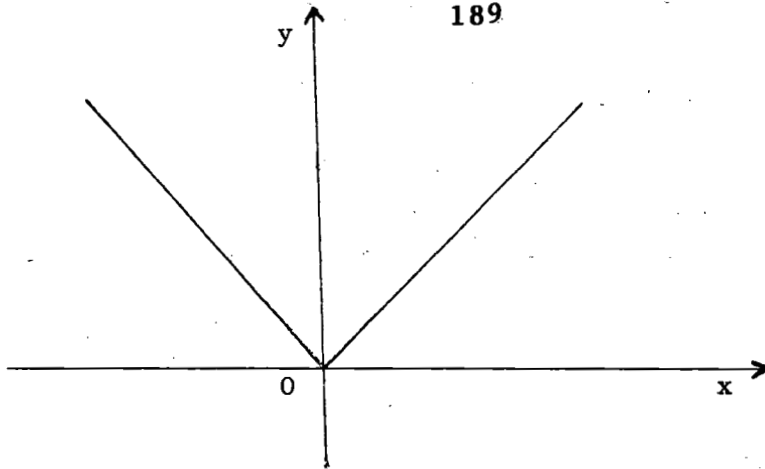
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

และ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ไม่มี นั่นคือ $f'(0)$ ไม่มี เพราะฉะนั้น f ไม่มี

อนุพันธ์ที่ 0



รูป 5.3.2

ถ้าเราให้ $\Delta x = x - c$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad \text{ก็จะสมมูลกับ} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c + \Delta x) = f(c)$$

ดังนั้นเราอาจจะเขียนนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องดังนี้

5.3.3 บทนิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงซึ่งบรรจุ c และ $c + \Delta x$ แล้วฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c ก็คือเมื่อ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c + \Delta x) = f(c)$$

ดังนั้น ถ้า f ต่อเนื่องที่ c ก็สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \Delta f = f(c + \Delta x) - f(c)$$

แบบฝึกหัด 5.3

ข้อ 1-ข้อ 5 เขียนกราฟของฟังก์ชันและบอกจุดซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

$$1. \quad f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x - 1}$$

$$2. \quad f(t) = \frac{t}{2t + 1}$$

$$3. \quad H(w) = \sqrt{4 - 25w^2}$$

$$4. \quad G(x) = [x - 1]$$

$$5. \quad F(y) = \frac{y}{|2y|}$$

6. ให้ $f(x) = |x|(x^2 - 1)$ จงพิสูจน์ f ต่อเนื่องที่ 0 แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ 0

7. ให้ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ x^3 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

a. เขียนกราฟของ g

b. จงพิสูจน์ g ต่อเนื่อง หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด และจงหา $g'(0)$

[แนะนำ : แยกเป็น 3 กรณี $x > 0$, $x < 0$ และ $x = 0$] .

บทที่ 6

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

6.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม

ฟังก์ชัน $f(x)=k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว มีกราฟเป็นเส้นตรงแนวนอน มีความชันเป็นศูนย์ ดังนั้น $f'(x)=0$ สำหรับทุก x นั่นคือ ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัวเป็นศูนย์ทุกจุด

6.1.1 ทฤษฎีบท ถ้า k เป็นค่าคงตัวและ $f(x)=k$ แล้ว $D_x f=0$

พิสูจน์ ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น

$$f'(c)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k-k}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0=0$$

เพราะฉะนั้น $f'(c)=0$ สำหรับจำนวนจริง c ใดๆ

นั่นคือ $D_x f(x)=D_x k=0$ สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใดๆ #

6.1.2 ทฤษฎีบท ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $D_x x=1$

พิสูจน์ ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$f'(c)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(c + \Delta x) - c}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

ดังนั้น $f'(c) = 1$ สำหรับจำนวนจริง c ใดๆ

นั่นคือ $D_x x = 1$ สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใดๆ #

จากสูตรพีชคณิต

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ถ้า $a \neq b$

$$(1) \quad \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

เราจะนำสูตรนี้ไปพิสูจน์สูตรการหาอนุพันธ์คือ

6.1.3 ทฤษฎีบท ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $D_x x^n = nx^{n-1}$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

โดย 6.1.2 ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทเป็นจริงเมื่อ $n=1$

สมมติทฤษฎีบทเป็นจริงเมื่อ $n>1$

ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(c+\Delta x)^n - c^n}{\Delta x}$$

โดยการแทน $a=c+\Delta x$ และ $b=c$ ใน (1)

$$\frac{(c+\Delta x)^n - c^n}{\Delta x} = (c+\Delta x)^{n-1} + (c+\Delta x)^{n-2}c + (c+\Delta x)^{n-3}c^2 + \dots + (c+\Delta x)c^{n-2} + c^{n-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(c+\Delta x)^n - c^n}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(c+\Delta x)^{n-1} + (c+\Delta x)^{n-2}c + (c+\Delta x)^{n-1}c^2 + \dots \\ &\quad + (c+\Delta x)c^{n-2} + c^{n-1}] \end{aligned}$$

โดย 4.4.1 ทฤษฎีบท

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)^{n-1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)^{n-2}c + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)^{n-1}c^2 \\ &\quad + \dots + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)c^{n-2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c^{n-1} \end{aligned}$$

โดย 4.4.2 ทฤษฎีบท และ 4.4.3 ทฤษฎีบท

$$\begin{aligned} &= [\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)]^{n-1} + c[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)]^{n-2} \\ &\quad + c^2[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)]^{n-1} + \dots + c^{n-2}[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (c+\Delta x)] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c^{n-1} \end{aligned}$$

โดย 5.3.3บทนิยาม

$$= c^{n-1} + c \cdot c^{n-2} + c^2 \cdot c^{n-3} + \dots + c^{n-2} \cdot c + c^{n-1}$$

$$= c^{n-1}$$

ดังนั้น

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(c+\Delta x)^n - c^n}{\Delta x} = nc^{n-1}$$

สำหรับ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น $D_x x^n = nx^{n-1}$ สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใดๆ #

6.1.4 ทฤษฎีบท ถ้า k เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$D_x [k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$$

พิสูจน์ ให้ F เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $F(x) = k \cdot f(x)$

ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆในโดเมน f แล้ว

$$F'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(c+\Delta x) - F(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(c+\Delta x) - k \cdot f(c)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot f'(c)$$

เพราะว่า c เป็นจำนวนจริงใดๆในโดเมน f' ดังนั้น $D_x [kf(x)] = kD_x f(x)$

สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใดๆ #

6.1.5 ทฤษฎีบท ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$D_x(f \pm g) = D_x f \pm D_x g$$

นั่นคือ อนุพันธ์ของผลบวก 2 ฟังก์ชัน เท่ากับผลบวกของอนุพันธ์

พิสูจน์ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นจำนวนจริงในผลตัดโดเมน $D_f \cap D_g$ แล้ว

$$\begin{aligned} [(f+g)(c)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(f+g)(c+\Delta x) - (f+g)(c)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(c+\Delta x) - f(c)] + [g(c+\Delta x) - g(c)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(c+\Delta x) - g(c)}{\Delta x} \\ &= f'(c) + g'(c) \end{aligned}$$

ดังนั้น $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$ สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ใน $D_f \cap D_g$

เพราะว่า $f(x) - g(x) = f(x) + (-)g(x)$ และ $D_x[(-1)g(x)] = -D_x g(x)$

ดังนั้น $D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$ #

เราสามารถขยาย 6.1.5 ทฤษฎีบทไปยัง 3 ฟังก์ชันได้ คือ ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$\begin{aligned} D_x[f(x) + g(x) + h(x)] &= D_x[(f(x) + g(x)) + h(x)] = D_x[f(x) + g(x)] + D_x h(x) \\ &= D_x f(x) + D_x g(x) + D_x h(x) \end{aligned}$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เราสามารถขยายไปยัง n พังค์ชันได้

ตัวอย่าง 1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบท

$$f(x) = 2x^7 - 3x^6 + 10x^3 + 3x + 5$$

ผลเฉลย

$$\begin{aligned} D_x(2x^7 - 3x^6 + 10x^3 + 3x + 5) &= D_x(2x^7) - D_x(3x^6) + D_x(10x^3) + D_x(3x) + D_x(5) \\ &= 2D_x x^7 - 3D_x x^6 - 10D_x x^3 + 3D_x x + 0 \\ &= 2(7x^6) - 3(6x^5) - 10(3x^2) + 3 \\ &= 14x^6 - 18x^5 - 30x^2 + 3 \end{aligned} \quad \#$$

6.2 อนุพันธ์ของผลคูณหรือผลหารของฟังก์ชัน

6.2.1 ทฤษฎีบท ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$D_x(u \cdot v) = u D_x v + v \cdot D_x u$$

ผลเฉลย ให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $F = u \cdot v$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆในโดเมน $D_u \cap D_v$ แล้ว

$$\begin{aligned} F'(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(c+\Delta x) - F(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(c+\Delta x) \cdot v(c+\Delta x) - u(c) \cdot v(c)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(c+\Delta x) \cdot v(c+\Delta x) - u(c+\Delta x) \cdot v(c) + u(c+\Delta x) \cdot v(c) - u(c) \cdot v(c)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[u(c+\Delta x) \cdot \frac{v(c+\Delta x) - v(c)}{\Delta x} + v(c) \cdot \frac{u(c+\Delta x) - u(c)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

$$= [\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(c+\Delta x)] \cdot [\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(c+\Delta x)-v(c)}{\Delta x}]$$

$$+ [\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(c)] [\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(c+\Delta x)-u(c)}{\Delta x}]$$

เพราะว่า u และ v ต่อเนื่องที่ c

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(c+\Delta x) = u(c) \quad \text{และ} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(c+\Delta x) = v(c)$$

เพราะว่า

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(c+\Delta x)-v(c)}{\Delta x} = v'(c)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(c+\Delta x)-u(c)}{\Delta x} = u'(c)$$

ดังนั้น $F'(c) = u(c) \cdot v'(c) + v(c) \cdot u'(c)$

นั่นคือ $D_x(u \cdot v) = u \cdot D_x v + v \cdot D_x u$ #

เราสามารถขยาย 6.2.1 ทฤษฎีบทไปยังการหาอนุพันธ์ผลคูณของฟังก์ชันจำนวนจำกัด

ตัวอย่าง 1. ถ้า $f(x) = (2x^3 - 4)(8x^4 + 6x + 2)$ จงหา $D_x f$

เฉลย $D_x f(x) = (2x^3 - 4)D_x(8x^4 + 6x + 2) + (8x^4 + 6x + 2)D_x(2x^3 - 4)$

$$= (2x^3 - 4)(32x^3 + 6) + (8x^4 + 6x + 2)(6x^2)$$

$$= 64x^6 + 12x^3 - 128x^3 - 24 + 48x^6 + 36x^3 + 12x^2$$

$$= 112x^6 - 36x^3 + 12x^2 - 24$$

#

6.2.2 ทฤษฎีบท ถ้า v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$D_x \left(\frac{1}{v} \right) = - \frac{D_x v}{v^2}$$

ภายใต้เงื่อนไข $v(x) \neq 0$

พิสูจน์ ให้ $F = \frac{1}{v}$ แล้ว

$$F'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(c+\Delta x) - F(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{v(c+\Delta x)} - \frac{1}{v(c)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(c) - v(c+\Delta x)}{\Delta x (v(c+\Delta x) \cdot v(c))}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{-v(c+\Delta x) - v(c)}{\Delta x} \right]}{v(c+\Delta x) \cdot v(c)}$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(c+\Delta x) - v(c)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [v(c+\Delta x) \cdot v(c)]}$$

เนื่องจาก $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(c+\Delta x) - v(c)}{\Delta x} = v'(c)$ และ v ต่อเนื่องที่ c ดังนั้น

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(c+\Delta x) = v(c) \text{ และ } F'(x) = - \frac{D_x v(c)}{[v(c)]^2}$$

เนื่องจาก c เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น $D_x \left(\frac{1}{v} \right) = - \frac{D_x v}{v^2}$

6.2.3 ทฤษฎีบท ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$D_x \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot D_x u - u D_x v}{v^2}$$

เมื่อ $v(x) \neq 0$

พิสูจน์ โดย 6.2.1 และ 6.2.2 ทฤษฎีบท

$$\begin{aligned} D_x \left(\frac{u}{v} \right) &= D_x \left(u \cdot \frac{1}{v} \right) \\ &= u \cdot D_x \left(\frac{1}{v} \right) + \frac{1}{v} D_x (u) \\ &= -u \cdot \frac{D_x v}{v^2} + \frac{D_x u}{v} \\ &= \frac{v \cdot D_x u - u D_x v}{v^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1. ถ้า $y = \frac{4x^5 - 10x + 3}{3x^2 + 2x}$ จงหา y'

เฉลย

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x^2 + 2x) D_x (4x^5 - 10x + 3) - (4x^5 - 10x + 3) D_x (3x^2 + 2x)}{(3x^2 + 2x)^2} \\ &= \frac{(3x^2 + 2x) 920x^4 - 10 - (4x^5 - 10x + 3)(6x - 2)}{(3x^2 + 2x)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{=60x^6-30x^2+40x^5-24x^6+60x^2-18x-8x^5+20x-6}{(3x^2+2x)^2}$$

$$\frac{=36x^6+32x^5+30x^2+2x-26}{(3x^2+2x)^2}$$

#

แบบฝึกหัด 6.2

ข้อ1-ข้อ8 ใช้สูตรอนุพันธ์หา $D_x y$

1. $y=x^6+10$

2. $y=7x^5-4x^3+2$

3. $y=\frac{1}{2}(-5x^3+x-2)$

4. $y=(3x-5)(4x^3+5x-1)$

5. $y=(x^2-2)(2x+3)(x^4-x^2+5)$

6. $y=\frac{1}{3x^5+2x^2+3}$

7. $y=\frac{x^5-10x^2+3}{x-2}$

8. $y=\frac{3x+7}{(x-8)(x+3)}$

ข้อ9-ข้อ10 ใช้สูตรอนุพันธ์หา f'

9. $f(v)=\frac{2v^2+9v-3}{v^3+6v^2-v+2}$

10. $f(t) = \frac{7t^3 + 2}{(2t^3 - t)^2}$

11. ใช้สูตรอนุพันธ์หา G' เมื่อ $G(y) = \frac{3y^2 - 4}{(y^3 + 2y - 1)(2y^2 + 5)}$

12. จงพิสูจน์ $D_x[f(x)]^2 = 2f(x) \cdot f'(x)$

13. จงพิสูจน์ $D_x[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

14. ใช้แบบฝึกหัดข้อ 13 พิสูจน์ $D_x[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$

15. จงพิสูจน์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

16. จงพิสูจน์

$$D_x(5x^{15} + 8x^9 + 3)^5 = 50(5x^{15} + 8x^9 + 3)^4 (75x^{14} + 7x^8)$$

[แนะ: ใช้แบบฝึกหัดข้อ 15]

17. จงหา

$$D_x \left[\frac{(2x^4 - 15)}{(3x^6 + 4)^{10}} \right]$$

18. จงหา $D_x(3x^8 + 6x^4 - 2)^{-5}$

[แนะ: ใช้ 6.2.3 ทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดข้อ 15]

19. ให้ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g(t) = \begin{cases} t^3 & \text{สำหรับ } t \leq 2 \\ t^2 + bt + c & \text{สำหรับ } t > 2 \end{cases}$$

จงหา b และ c ซึ่ง $g'(2)$ มี

6.3 กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันประกอบ

กฎลูกโซ่จะช่วยให้เราหาอนุพันธ์ฟังก์ชันประกอบง่ายและรวดเร็ว

6.3.1 ทฤษฎีบท(กฎลูกโซ่(Chain Rule))

ให้ $F=f \circ g$ เป็นฟังก์ชันประกอบ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ใน D_f และ D_g ตามลำดับและ $R_g \subseteq D_f$ แล้วสำหรับทุก x ใน D_g

$$F'(x) = f'(u)g'(x)$$

เมื่อ $u=g(x)$

การพิสูจน์ค่อนข้างยากจึงเว้นไว้ สำหรับผู้สนใจสามารถหาอ่านได้จากหนังสือบรรณานุกรม[2]

ตัวอย่าง 1. ให้ $F(x) = (3x^3 - 4x^2 + 1)^{50}$ จงหา $F'(x)$

เฉลย ให้ $f(u) = u^{50}$ และ $u = g(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$

เพราะฉะนั้น

$$F(x) = f(u) = f(g(x)) = (3x^3 - 4x^2 + 1)^{50}$$

ดังนั้นโดย 6.3.1 กฎลูกโซ่

$$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$$

$$= 50u^{49}(9x^2 - 8x)$$

$$= 50(3x^3 - 4x^2 + 1)^{49}(9x^2 - 8x)$$

#

ตัวอย่าง 2. ให้ $F(x) = (x^3 - x)^{-5}$ จงหา $F'(x)$

ผลเฉลย ให้ $f(u) = u^{-5}$ และ $u = g(x) = x^3 - x$

เพราะฉะนั้น $F(x) = f(u) = f(g(x)) = (x^3 - x)^{-5}$

ดังนั้นโดย 6.3.1 กฎลูกโซ่ $F'(x) = f'(u)g'(x) = -5u^{-6}(3x^2 - 1)$
 $= -5(x^3 - x)^{-6}(3x^2 - 1)$ #

ถ้าเราเขียน $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ กฎลูกโซ่อาจจะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง 3. ถ้า $y = \left(\frac{2x^4 - 3x^2}{3x + 2} \right)^{20}$ จงหา y'

ผลเฉลย ให้ $u = \frac{2x^4 - 3x^2}{3x + 2}$ เพราะฉะนั้น $y = u^{20}$

ดังนั้น

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 20u^{19} \frac{d}{dx} \left(\frac{2x^4 - 3x^2}{3x + 2} \right)$$

แต่

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^4 - 3x^2}{3x + 2} \right) = \frac{(3x + 2)(8x^3 - 6x) - (2x^4 - 3x^2)(3)}{(3x + 2)^2}$$

$$= \frac{24x^4 - 18x^2 + 16x^3 - 12x - 6x^4 + 9x^2}{(3x + 2)^2}$$

$$= \frac{18x^4 + 16x^3 - 9x^2 - 12x}{(3x + 2)^2}$$

แทน $u = \frac{2x^4 - 3x^2}{3x + 2}$ ใน (1)

$$\frac{dy}{dx} = 20 \left(\frac{2x^4 - 3x^2}{3x+2} \right)^{19} \left(\frac{18x^4 + 16x^3 - 5x^2}{(3x+2)^2} \right)$$

แบบฝึกหัด 6.3

ข้อ 1-ข้อ 10 จงหา $D_x y$

1. $y = (3-8x)^{20}$

2. $y = (x^3 - 5x^2 + 1)^{10}$

3. $y = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

4. $y = (3x-2)^3 (x^3-1)^2$

5. $y = (3x^4 - 4x^3 + x + 1)^4 (-4x^5 + 10x^3 - 12)^8$

6. $y = \frac{1}{(3x^5 - 2x^3 + 1)^8}$

7. $y = 5(-4x^7 + 3x^3 + 10)^{-5}$

8. $y = \frac{(3x^4 - 5x^3 + 10)^4}{(x^4 - 3x^2 + 1)^3}$

9. $y = \frac{8x^3(x^4-1)^5}{(3x+1)^2(x^4-3)^4}$

ข้อ 10-ข้อ 14 จงหาอนุพันธ์

10. $F(u) = \left(\frac{5u+2}{7-3u} \right)^4$

11. $G(t) = \left(\frac{3t^4 - t + 5}{t^6 + 3t^3 + t} \right)^3$

$$12. \quad f(w) = (10w^4 + 8w + 2)^{-4} (4w^5 - w^2 + 6)^3$$

$$13. \quad h(s) = \left(\frac{4s^4 + 5s}{3s^3 + 1} \right)^{-8}$$

$$14. \quad \varphi(x) = \frac{3x^4 - 2x + 1}{(3x^2 + x + 5)^3}$$

15. ให้ $\phi(t) = 19t^2 - 41$ จงหา $\phi'(t)$ โคเมนของ ϕ และ ϕ' และเขียนกราฟสำหรับ $-2 \leq t \leq 2$

16. ถ้า $f(y) = \frac{y}{[2y-3]^2}$ จงหา $f'(14.1)$.

6.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

6.1.3 ทฤษฎีบทเราได้พิสูจน์ว่า

$$D_x x^n = nx^{n-1}$$

เป็นจริงสำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า $D_x x^n = nx^{n-1}$ สำหรับ n เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ

พิจารณา $x^{\frac{1}{q}}$ เมื่อ q เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1

$$D_x x^{\frac{1}{q}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{\Delta x}$$

$$(1) \quad = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{(x + \Delta x) - x}$$

เพราะว่า q เป็นจำนวนตรรกยะบวกมากกว่า 1 และ $a \neq b$

$$\frac{a-b}{a^q - b^q} = \frac{1}{a^{q-1} + a^{q-2}b + a^{q-3}b^2 + \dots + ab^{q-2} + b^{q-1}}$$

แทน $a = (x+\Delta x)^{\frac{1}{q}}$ และ $b = x^{\frac{1}{q}}$ เพราะฉะนั้น

$$(2) \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{(x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{q-1}{q}} + (x+\Delta x)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + (x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} x^{\frac{q-2}{q}} + x^{\frac{q-1}{q}}}$$

โดยการแทน (2) ใน (1)

$$\begin{aligned} D_x x^{\frac{1}{q}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{q-1}{q}} + (x+\Delta x)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + (x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} x^{\frac{q-2}{q}} + x^{\frac{q-1}{q}}} \\ &= \frac{1}{q(x^{\frac{q-1}{q}})} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(3) \quad D_x x^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1}$$

ต่อไปเราให้ n เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ ที่มีเป็นบวก โดย $n = \frac{p}{q}$ เมื่อ p, q เป็น

จำนวนเต็มบวก

กรณี $p=1$ เราได้พิสูจน์แล้ว ต่อไปจะพิสูจน์กรณี $p>1$

โดย (3)

$$\begin{aligned}
 D_x x^n &= D_x x^{\frac{p}{q}} = D_x (x^{\frac{1}{q}})^p = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} D_x x^{\frac{1}{q}} \\
 &= p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \left(\frac{1}{q}\right) x^{\frac{1}{q}-1} \\
 &= p x^{\frac{p-1}{q}} = n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $D_x x^n = n x^{n-1}$

สำหรับ n เป็นจำนวนตรรกยะใดๆที่เป็นบวก

กรณี n เป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นลบ เขียน $n = -r$ เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ให้ $x^r = v$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
 D_x x^n &= D_x x^{-r} = D_x \frac{1}{x^r} = -\frac{1}{(x^r)^2} \cdot (r x^{r-1}) \\
 &= -r x^{-r-1} = n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $D_x x^n = n x^{n-1}$ สำหรับ n เป็นจำนวนตรรกยะใดๆที่เป็นลบ

ถ้า $n=0$ และ $x \neq 0$

$$D_x x^n = D_x x^0 = D_x 1 = 0 = 0 \cdot x^{0-1} = n x^{n-1}$$

ดังนั้น $D_x x^n = n x^{n-1}$

เมื่อ $n=0$ และ $x \neq 0$

เราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

6.4.1 ทฤษฎีบท ถ้า n เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ แล้ว

$$D_x x^n = nx^{n-1}$$

เมื่อ x เป็นจำนวนใดๆ ซึ่ง x^{n-1} เป็นจำนวนจริง

โดยการประยุกต์กฎลูกโซ่กับ 6.4.1 ทฤษฎีบทจะมี 6.4.2 ทฤษฎีบท

6.4.2 ทฤษฎีบท ถ้า u เป็นจำนวนตรรกยะและ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x แล้ว

$$D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$$

สำหรับ x ซึ่ง $[u(x)]^{n-1}$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1. $D_x (\sqrt[4]{x}) = D_x x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{x^3}}$ #

ตัวอย่าง 2. $D_x \left(\frac{1}{3\sqrt{x}} \right) = D_x x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3 \sqrt[3]{x^4}}$ #

ตัวอย่าง 3. $D_t \sqrt{t^5 - 3t^2 + 10} = D_t (t^5 - 3t^2 + 10)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} (t^5 - 3t^2 + 10)^{-\frac{1}{2}} D_t (t^5 - 3t^2 + 10)$$

$$= \frac{1}{2} (t^5 - 3t^2 + 10)^{-\frac{1}{2}} (5t^4 - 6t) = \frac{1}{2} \frac{(5t^4 - 6t)}{\sqrt{t^5 - 3t^2 + 10}} \quad \#$$

ตัวอย่าง 4. ถ้า $y = \frac{1}{x^5 \sqrt{2x^2-3}}$ จงหา $D_x y$

ผลเฉลย

$$D_x y = D_x [x^{-5} (2x^2-3)^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= x^{-5} D_x (2x^2-3)^{-\frac{1}{2}} + (2x^2-3)^{-\frac{1}{2}} D_x x^{-5}$$

$$= x^{-5} \left(-\frac{1}{2} \right) (2x^2-3)^{-\frac{3}{2}} (4x) + (2x^2-3)^{-\frac{1}{2}} (-5)x^{-6}$$

$$= -2x^{-4} (2x^2-3)^{-\frac{3}{2}} - 5x^{-6} (2x^2-3)^{-\frac{1}{2}}$$

แบบฝึกหัด 6.4

กำหนด a, b, c และ d เป็นค่าคงตัว จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $y = \sqrt{2-3x^2}$

2. $y = (3x^4 - 2x + 4)^{\frac{3}{2}}$

3. $y = \frac{11}{\sqrt{7x^3 - 3x + 10}}$

4. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

5. $y = \sqrt{\frac{8-x}{2+x}}$

6. $f(u) = u \sqrt{(u^3 - a)^3}$

$$7. \quad f(w) = (w-3)^4 + \frac{1}{(w-3)^4}$$

$$8. \quad s = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$$

$$9. \quad y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}$$

$$10. \quad s = \frac{5t^3 - 3t^2 + 1}{\sqrt{6+4t}^3}$$

$$11. \quad F(z) = \left(\frac{\sqrt{10z}}{17z^2 - 5} \right)^{\frac{5}{2}}$$

$$12. \quad G(u) = \sqrt{2 + \sqrt{3+u^2}}.$$

6.5 อนุพันธ์อันดับสูง

เพราะว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชัน ดังนั้นเราสามารถนิยามอนุพันธ์ของอนุพันธ์ฟังก์ชัน

กล่าวคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ f' มี อนุพันธ์ของ f' เรียกว่า **อนุพันธ์อันดับสอง(second derivative)** ของ f เขียนแทนด้วย f'' อ่านว่า f ดับเบิลไพรม (double prime)

ตัวอย่าง 1. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + x + 1$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ f คือ $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 + 1$

อนุพันธ์อันดับสองของ f คือ $f''(x) = 36x^2 + 24x$ #

โดยทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามอนุพันธ์อันดับสาม(third derivative)ของ f คือ อนุพันธ์อันดับสองของ f'' เขียนแทนด้วย f''' อ่านว่า f ทริฟเพิลไพรม์

เนื่องจากอนุพันธ์ของ f บางครั้งจะเขียนแทนด้วย $D_x f$ ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองของ f บางครั้งจะเขียนแทนด้วย $D_x^2 f$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $D_x(D_x f)$

ถ้าเขียน $y=f(x)$ บางครั้งจะเขียนแทนอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วย $\frac{dy}{dx}$ และอนุพันธ์อันดับสองคือ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right]$

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 2 อนุพันธ์อันดับ n ของฟังก์ชัน คือฟังก์ชันซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับ $n-1$

$$f^{(n)}, D_x^n f \quad \text{และ} \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

เพื่อความสะดวกบางครั้งจะเขียน $f^{(0)}$ แทน f และถ้าเขียน $y=f(x)$ จะเขียนแทนอนุพันธ์อันดับ n ของ f ด้วย $\frac{d^n y}{dx^n}$

ตัวอย่าง 2. $y = \frac{1}{x^2}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = D_x y = (-2)x^{-3}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x^2 y = (-2)(-3)x^{-4}$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = D_x^3 y = (-2)(-3)(-4)x^{-5}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D_x^n y = (n+1)!(-1)^n x^{-(n+2)}$$

แบบฝึกหัด 6.5

ข้อ 1-ข้อ 7 จงหา $f''(x)$

1. $f(x) = x^4 - 6x^3 + x + 1$

2. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว

3. $f(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{4x^5 - 4x^3 + 2}$

5. $f(x) = (2x+1)(x-3)^2(2x+1)$

6. $f(x) = \frac{1}{2x+4}$

7. $f(x) = 3(2x^3 - 1)^2(x+1)^3$

ข้อ 8-ข้อ 12 จงหา $D_x^3 y$

8. $y = 3x^4 - 4x^5 + 6$

9. $y = \frac{1}{8x+1}$

10. $y = \sqrt{3-4x}$

11. $y = \frac{2x}{3x+1}$

12. $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

13. จงหา $D_x y$, $D_x^2 y$ และ $D_x^3 y$

และคาดเดาสู่ตรรกอนันต์อันดับ n และพิสูจน์สูตรโดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

$$y = \frac{2x}{1-2x}$$

6.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

กำหนดสมการ

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

ถ้ามีฟังก์ชัน g ซึ่ง $y = g(x)$ เรากล่าวว่า g เป็นฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function) โดยสมการ (1)

ตัวอย่างเช่น

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1$$

$$h(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1$$

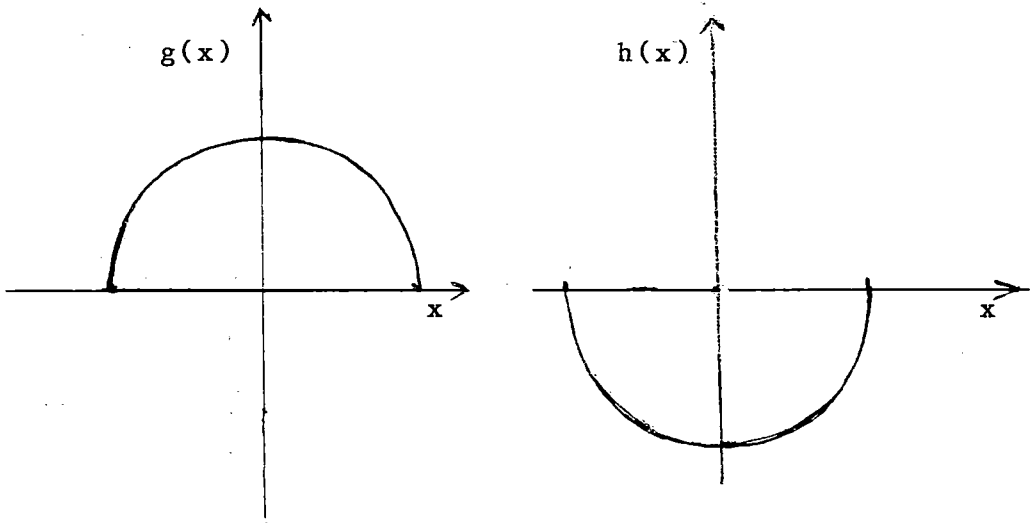
$$s(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

ฟังก์ชัน g, h และ s เป็นฟังก์ชันโดยปริยายโดยสมการ $x^2 + y^2 = 1$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน g และ h ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-1, 1]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด $(-1, 1)$ แต่ฟังก์ชัน s ต่อเนื่องเฉพาะที่จุด $x = -1$ และ $x = 1$ จุดอื่นไม่ต่อเนื่อง กราฟของ g และ h แสดงได้ดังรูป 6.6.1

สมการ $f(x, y) = 0$ บางสมการเราไม่สามารถเขียน y ในรูปของ x ได้ ดังตัวอย่าง

$$x + y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0$$



$$(a) \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$(b) \quad h(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

รูป 6.6.1

แต่เราสามารถนิยามฟังก์ชันโดยปริยายโดยสมการนี้ได้หลายฟังก์ชัน กล่าวคือ เมื่อกำหนด x มาให้เราสามารถหาค่า y ได้ ตัวอย่างเช่น เมื่อ $x=0$ จะได้ $y=1, -1, -2$ แสดงว่าเราสามารถนิยามฟังก์ชันได้หลายฟังก์ชัน

การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยาย(implicit differentiation) เป็นวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายจากสมการโดยไม่ต้องเขียนออกมาเป็นฟังก์ชันชัดเจน โดยมีสมมุติฐานว่า สมการนั้นจะกำหนดฟังก์ชันโดยปริยายได้อย่างน้อย 1 ฟังก์ชัน

เราจะแสดงวิธีการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยายด้วยตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1. สมมุติ $x^3 + x^2y - 5x^3 + 5 = 0$ นิยามฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $D_x y$

เฉลย หาอนุพันธ์แต่ละเทอมโดยเทียบกับ x

$$D_x(x^3) + D_x(x^2y) - D_x(5y^3) + D_x(5) = 0$$

$$3x^2 + x^2 D_x y + 2xy - 15y^2 D_x y = 0$$

$$D_x y (x^2 - 15y^2) = -3x^2 - 2xy$$

$$D_x y = \frac{3x^2 + 2xy}{15y^2 - x^2}$$

$$\text{เมื่อ } 15y^2 - x^2 \neq 0 \quad \#$$

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการเส้นสัมผัสไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 9y^2 = 36$ ที่จุด $(6, 2\sqrt{3})$

เฉลย เราสมมติว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นิยามฟังก์ชันชัดเจนของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ และแทนอนุพันธ์ของ y ด้วย y' หาอนุพันธ์แต่ละเทอมของสมการเทียบกับ x

$$8x - 18yy' = 0$$

$$\text{หรือ } y' = \frac{4x}{9y}$$

มีจุด $(6, 2\sqrt{3})$ ความชันเส้นสัมผัสคือ $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสคือ $4x - 3\sqrt{3}y - 6 = 0$ #

ตัวอย่าง 3. สมมติว่า $2y^2 = x^3$ นิยามฟังก์ชันโคอปรียายของ x จงหา $D_x^2 y$

เฉลย หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x

$$D_x(2y^2) = D_x(x^3)$$

$$(1) \quad 4yD_x y = 3x^2$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ (1) เทียบกับ x

$$D_x(4yD_x y) = D_x(3x^2)$$

$$4yD_x(D_x y) + D_x y(D_x 4y) = 6x$$

$$(2) \quad 4yD_x^2 y + 4D_x y D_x y = 6x$$

จาก (1) แทน $D_x y = \frac{3x^2}{4y}$ ใน (2) เพราะฉะนั้น

$$4yD_x^2 y + 4\left(\frac{3x^2}{4y}\right)^2 = 6x$$

$$4yD_x^2 y = 6x - 4 \cdot \frac{9x^4}{16y^2}$$

$$= 6x - \frac{9x^4}{4y^2}$$

$$D_x^2 y = \frac{6x - \frac{9x^4}{4y^2}}{4y} = \frac{24xy^2 - 9x^4}{16y^3}$$

ตัวอย่าง 4. สมการ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ นิยามฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา y''

เฉลย หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ

$$(1) \quad \frac{1}{x}^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{y}^{-\frac{2}{3}} y' = 0$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x อีกครั้ง

$$(2) \quad \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}[y^{-\frac{2}{3}}y'' + y'(-\frac{2}{3})y^{-\frac{5}{3}}y'] = 0$$

จาก(1) แทน $y' = -\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}$ ใน(2)

$$-\frac{2x^{-\frac{5}{3}}}{3} + y^{-\frac{2}{3}}y'' + \left(\frac{y^{-\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)y^{-\frac{5}{3}} = 0$$

$$y'' = \frac{2}{3} \frac{y^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{5}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} + \frac{2x^{-\frac{5}{3}}}{3y^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{y^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} + y^{-\frac{5}{3}} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{y^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{5}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}} \right]$$

$$= \frac{2y^{-\frac{1}{3}}}{3} \frac{(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{2y^{-\frac{1}{3}}}{3} \frac{a^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}} \quad \#$$

แบบฝึกหัด 6.6

ข้อ1-ข้อ6 จงหา D_{xy} โดยการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยาย

1. $xy^3=12$

2. $4x^2+9y^2=36$

3. $x^3+3x^2y+7y+1=0$

4. $\sqrt{xy}+3y=10x$

5. $\frac{y^2}{x^3}=1+y^{\frac{3}{2}}$

6. $x^2+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ข้อ7-ข้อ11 จงหา D_{xy}^2 โดยการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยาย

7. $xy^3=x$

8. $xy-y^2=5$

9. $\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}=a^{\frac{2}{3}}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

10. $x^3-4y^2+3=0$

11. $y^2-x^2=3$

บทที่ 7

การประยุกต์ของอนุพันธ์

7.1 เส้นสัมผัสและเส้นคังฉาก

7.1.1 บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $f'(c)$ มี เส้นสัมผัส(tangent) กราฟของ f ที่จุด $(c, f(c))$ คือเส้นที่ผ่านจุด $(c, f(c))$ และมีความชัน $f'(c)$

โดยแบบความชันจุด(the point-slope form)ของสมการของเส้นตรง เราสามารถเขียนสมการเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่ $(c, f(c))$

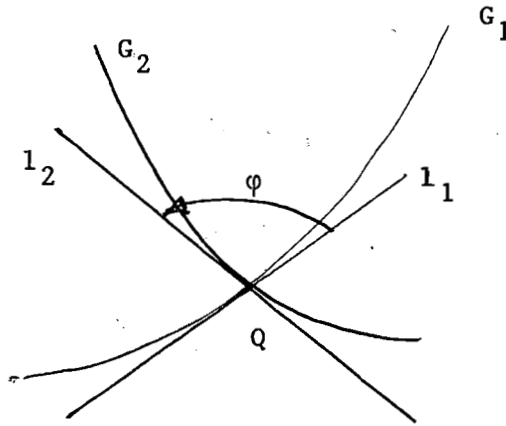
7.1.2 ทฤษฎีบท ถ้า f เป็นฟังก์ชันและ $f'(c)$ มี แล้วสมการเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(c, f(c))$ บนกราฟ คือ

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

เมื่อกล่าวถึงความชันของกราฟที่จุดใดๆ เราจะหมายถึงความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดนั้น

รูป 7.1.1 กราฟ G_1 และ G_2 ตัดกันที่จุด Q โดย l_1 และ l_2 เป็นเส้นสัมผัสกราฟที่ Q ตามลำดับ

มุมระหว่างกราฟ G_1 และ G_2 ที่ Q เราจะหมายถึงมุมจาก l_1 ถึง l_2



รูป 7.1.1

ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f มีเส้นสัมผัสที่ $(c, f(c))$ เส้นที่ผ่าน $(c, f(c))$ และตั้งฉากเส้นสัมผัส เรียกว่า **เส้นนอร์มัล (normal)** ของกราฟที่ $(c, f(c))$ ดังนั้นความชันจะเป็นลบของส่วนกลับของความชันเส้นสัมผัส

7.1.3 ทฤษฎีบท ถ้า f เป็นฟังก์ชันและ $f'(c)$ มีและไม่เป็นศูนย์ แล้วสมการเส้นนอร์มัลของกราฟของ f ที่จุด $(c, f(c))$ บนกราฟคือ

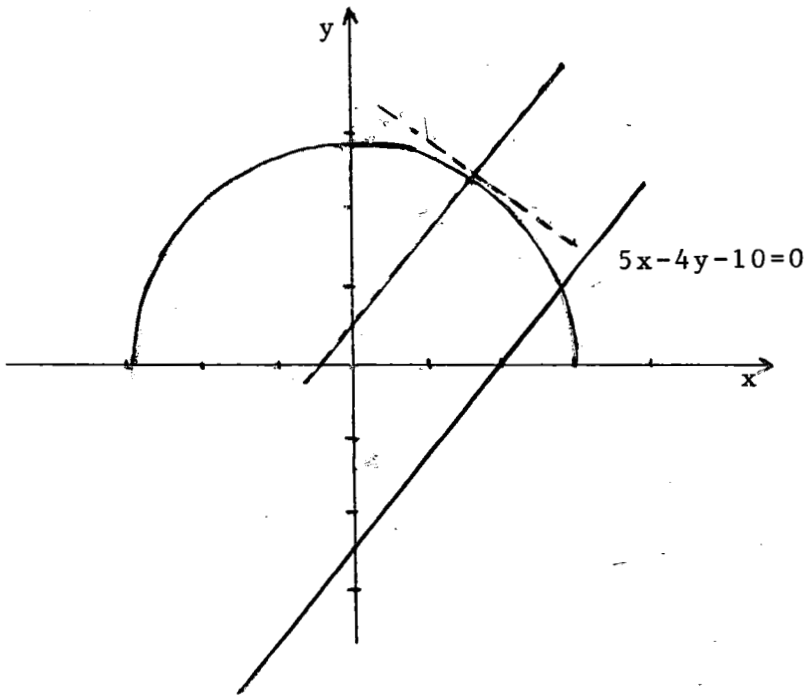
$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c)$$

ตัวอย่าง 1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

จงหาสมการของเส้นนอร์มัลของกราฟ f ซึ่งขนานกับเส้นตรง $5x - 4y - 10 = 0$
(รูป 7.1.2)

เฉลย ความชันเส้นตรงที่กำหนดให้คือ $\frac{5}{4}$



รูป 7.1.2

เพราะว่า $f'(x) = \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

$$= -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \quad -3 < x < 3$$

ดังนั้นความชันเส้นสัมผัสที่จุด $(x, f(x))$, $x \neq 0$ บนกราฟ f คือ $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$
 แก้สมการหา x จาก

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} = \frac{5}{4}$$

$$16(9-x^2) = 25x^2$$

$$144 - 16x^2 = 25x^2$$

$$41x^2 = 144$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{41}}$$

นำ $x = \frac{12}{\sqrt{41}}$ แทนใน (1)

$$f(x) = \sqrt{9 - \frac{144}{41}} = \frac{15}{\sqrt{41}}$$

ดังนั้น $Q: \left(\frac{12}{\sqrt{41}}, \frac{15}{\sqrt{41}} \right)$ เป็นจุดที่เส้นนอร์มัลมีความชัน $\frac{5}{4}$

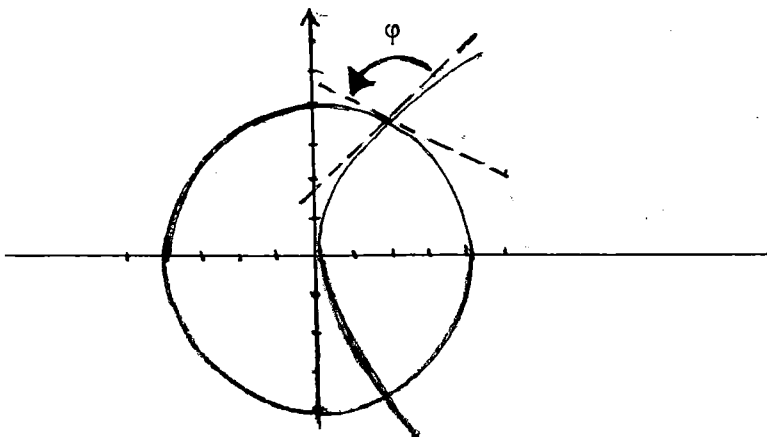
โดยแบบความชันจุดของสมการ สมการเส้นนอร์มัลกราฟ f ที่จุด $Q: \left(\frac{12}{\sqrt{41}}, \frac{15}{\sqrt{41}} \right)$ คือ

$$y - \frac{15}{\sqrt{41}} = \frac{5}{4} \left(x - \frac{12}{\sqrt{41}} \right)$$

หรือ $4\sqrt{41} - 5\sqrt{41}x = 0$

#

ตัวอย่าง 2. หามุม ϕ จากพาราโบลา $y^2 = 6x$ ถึงวงกลม $x^2 + y^2 = 16$ ที่จุดซึ่ง
เป็นผลตัดในจุดตัดภาคที่ 1 (รูป 7.1.3)



รูป 7.1.3

เฉลย หาจุดตัดของ 2 กราฟ

$$x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(x+8)(x-2) = 0$$

หรือ $x = -8, 2$

นำค่า x ไปแทนค่าหา y

เมื่อ $x=2, y^2=12$ เพราะฉะนั้น $y=\pm 2\sqrt{3}$

ดังนั้นจุด $(2, 2\sqrt{3})$ และ $(2, -2\sqrt{3})$ เป็นจุดตัดของกราฟ

พิจารณาจุดตัดของกราฟในจุดตัดภาคที่ 1

สมการวงกลมคือ

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

ดังนั้นความชันวงกลมที่ $(2, 2\sqrt{3})$ คือ $\frac{-2}{\sqrt{16-4}} = \frac{-2}{\sqrt{12}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

โดยทำนองเดียวกัน สมการครึ่งบนของพาราโบลา คือ $y = \sqrt{6x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (6x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6x}}$$

ดังนั้นความชันพาราโบลาที่จุด $(2, 2\sqrt{3})$ คือ $\frac{3}{\sqrt{6 \cdot 2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$
โดยสมการ (2. 7.1)

$$\tan \varphi = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3}} + 1}{\frac{\sqrt{3}}{1 + (-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.8868$$

ดังนั้น $\varphi \approx 74.8$

#

แบบฝึกหัด 7.1

ข้อ1- ข้อ2 จงหาสมการเส้นสัมผัสและเส้นนอร์แมลของกราฟของ f ที่จุด P พร้อมเขียนกราฟ

1. $y = x^2$, $P: (1, 1)$

2. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$, $P: (1, -\frac{7}{4})$

ข้อ3- ข้อ4 จงหา $D_{x_i}y$ โดยการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยาย และหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของสมการที่กำหนดให้ที่จุด P พร้อมเขียนกราฟ

3. $x^2 - y^2 = 36$, $P: (16, 6)$

4. $x^3 - 9x^2 - y^2 + 27x - 2y - 28 = 0$, $P: (4, -2)$

จงหามุมซึ่งเป็นผลตัดที่จุด P ของกราฟของสมการที่กำหนดให้ พร้อมเขียนกราฟ

$$x^4 + 2x - y - 5 = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x - y + 1 = 0 , P: (-1, -6)$$

6. จงหาสมการเส้นสัมผัสของกราฟของสมการ $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 8x$ และขนานกับเส้น $4x + y - 7 = 0$
7. จงหาสมการของเส้นสัมผัสของสมการ $x^3 - 18x - 3y + 1 = 0$ และตั้งฉากกับเส้น $x - 2y + 5 = 0$.

7.2 อัตราสัมพันธ์ (Related Rates)

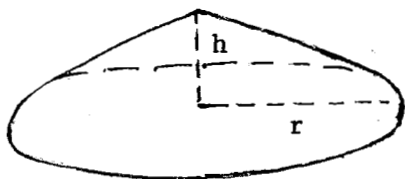
ถ้า $y = \varphi(t)$ และ φ หาอนุพันธ์ได้ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ t ณ ที่จุด t คือ $\frac{d\varphi}{dt}$

ถ้า $y = f(x)$ และ x, y เป็นฟังก์ชันของ t เราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ t ; $\frac{dy}{dt}$ โดยไม่ต้องเขียน y ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ t ใช้วิธีหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ t โดยใช้กฎลูกโซ่

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dx}{dt}$ และ $\frac{dy}{dt}$ เรียกว่า อัตราสัมพันธ์

ตัวอย่าง 1. เทหราชจากท่อด้วยความเร็ว 20 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที ถ้าทรายตกมากองบนพื้นเป็นรูปกรวย มีความสูงเป็น $\frac{1}{6}$ ของเส้นผ่าศูนย์กลางของฐาน ความสูงจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไรเมื่อกองทรายสูง 6 ฟุต

เฉลย ปริมาตรกรวย คือ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



รูป 7.2.1

เมื่อ V เป็นปริมาตรของฐาน และ h เป็นความสูง (รูป 7.2.1)

ให้ $h = \frac{1}{6}(2r)$ ดังนั้น $r = 3h$

เพราะฉะนั้น

$$(1) \quad V = 3\pi h^3$$

หาอนุพันธ์ (1) ทั้งสองข้างเทียบกับ t

$$(2) \quad D_t V = 9\pi h^2 D_t h$$

เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนความสูงเทียบกับ t เมื่อ $h=6$

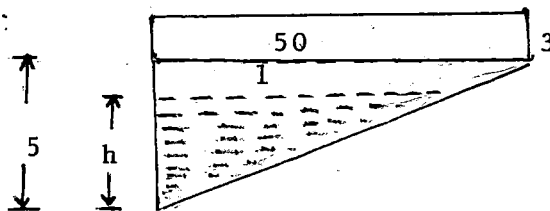
นำ $D_t V = 20$ ลูกบาศก์ฟุต/วินาที และ $h=6$ แทนใน (2)

$$20 = 9\pi (6)^2 D_t h$$

หรือ $D_t h = \frac{20\pi}{324} = \frac{5\pi}{82}$ ฟุต/วินาที

#

ตัวอย่าง 2. สระว่ายน้ำยาว 50 ฟุต กว้าง 30 ฟุต ทางปลายด้านลึกลึก 8 ฟุต ทางปลายด้านตื้นลึก 3 ฟุต ขอบบนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้าต้องการปัมน้ำให้เต็มสระด้วยความเร็ว 40 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที ระดับน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไรเมื่อน้ำลึก 4 ฟุตที่ปลายด้านลึก



รูป 7.2.2

เฉลย รูป 7.2.2 ให้ h เป็นความสูงของน้ำที่ปลายด้านลึก

เราต้องการหา $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ $h=4$

สำหรับ $h \leq 5$ ปริมาตรน้ำในสระคือ $V = \frac{1}{2}h(30)$ ลูกบาศก์ฟุต

โดยสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{1}{h} = \frac{50}{5}$$

หรือ $1 = 10h$

ดังนั้น สำหรับ $h \leq 5$

$$V = 150h^2$$

โดยหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$(1) \quad \frac{dV}{dt} = 300h \frac{dh}{dt}$$

ถ้า $\frac{dV}{dt} = 40$ และ $h = 4$ แทนใน (1)

$$40 = 300(4) \frac{dh}{dt}$$

หรือ $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{30}$ ฟุต/วินาที

ดังนั้นเมื่อปลายด้านลึกน้ำสูง 4 ฟุต ระดับน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว $\frac{1}{30}$ ฟุต/วินาที #

ตัวอย่าง 3. อนุภาค P เคลื่อนที่ไปตามความยาวกราฟ $y = x^3 - 3x + 1$ ถ้าพิกัด x เพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว $\sqrt{3}$ หน่วย/นาที ระยะทางของ P จากจุดกำเนิดเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไรเมื่อ $x = 2$

เฉลย ให้ s เป็นระยะทางของ $P: (x, y)$ จากจุดกำเนิด เพราะฉะนั้น

$$(1) \quad s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

เราต้องการหา $\frac{ds}{dt}$ เมื่อ $x=2$

โดยหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของ (1) เทียบกับ t

$$(2) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

หา $\frac{dy}{dt}$

เพราะว่า P อยู่บนกราฟ $y = x^3 - 3x - 1$ ดังนั้นฟังก์ชันของ P จะต้องสอดคล้องสมการ
หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างโดยเทียบกับ t

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} - 3 \frac{dx}{dt}$$

เมื่อ $x=2$, $y = (2)^3 - (3)(2) + 1 = 3$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dt} = 3(2)^2 \sqrt{13} - 3 \sqrt{13} = 9\sqrt{13}$$

นำ $\frac{dy}{dt} = 9\sqrt{13}$, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{13}$ และ $x=2$ แทนใน (2)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(2(2)\sqrt{13} + 2(3)9\sqrt{13})}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{13}} (4\sqrt{13} + 54\sqrt{13}) = \frac{58\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}$$

$$= 29$$

หน่วย/นาที

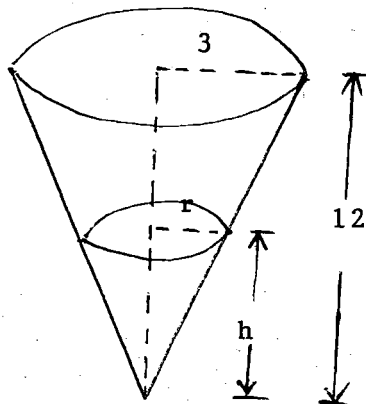
#

แบบฝึกหัด 7.2

1. ให้แต่ละด้าน ของลูกบาศก์เพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 2 นิ้ว/วินาที ปริมาตรของลูกบาศก์จะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไร เมื่อความยาวด้านแต่ละด้านยาว 5 นิ้ว
2. สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 5 ฟุต และอีก 2 ด้านยาว x และ y ถ้า x เพิ่มขึ้นด้วยความเร็วคงตัว 6 ฟุต/นาที่ y จะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วเท่าไร เมื่อ x ยาว 4 ฟุต
3. เทหรัยจากหอด้วยความเร็ว 16 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที ถ้าทรายตกลงมากองบนพื้น โดยมีความสูงเป็น $\frac{1}{4}$ ของเส้นผ่าศูนย์กลางของฐานเสมอ ความสูงของกองทรายจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไรเมื่อกองทรายสูง 4 ฟุต
4. มีเสาไฟฟ้าสูง 15 ฟุต ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต เดินออกจากเสาไฟฟ้าด้วยความเร็ว 5 ฟุต/วินาที เงาของเขาจะยาวเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไร ณ เวลา t ใดๆ
5. สระว่ายน้ำยาว 40 ฟุต กว้าง 20 ฟุต ปลายด้านลึกลึก 3 ฟุต ปลายด้านตื้นลึก 1 ฟุต ขอบบนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้ามีน้ำเข้าสระด้วยความเร็ว 40 ลูกบาศก์ฟุต/นาที่ ระดับน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไรเมื่อปลายด้านลึกน้ำลึก 3 ฟุต
6. อนุภาค P เคลื่อนที่ไปตามความยาวพาราโบลา $y^2 = 3(2-x)$ เมื่อ P ผ่านจุด $(-1, 3)$ พิกัดจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 2 หน่วย/วินาที ระยะทางของ P จากจุดกำเนิดจะเปลี่ยน ณ ที่จุดใดๆด้วยความเร็วอย่างไร
7. ปลอยลูกโป่งลอยขึ้นจากพื้นด้วยความเร็ว 8 ฟุต/วินาที ผู้สังเกตการณ์อยู่ห่างจากลูกโป่งเมื่อเริ่มปล่อย 150 ฟุต จงหาว่าลูกโป่งลอยห่างจากผู้สังเกตการณ์ด้วยความเร็วเท่าไร เมื่อลูกโป่งอยู่สูงจากพื้นดิน 50 ฟุต
8. เหน้าลงถึงรูปกรวยหงายด้วยความเร็ว 8 ลูกบาศก์ฟุต/นาที่ ถ้าความสูงของกรวย 12 ฟุตและรัศมีฐาน 6 ฟุต จงหาว่าระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยความเร็วเท่าไรเมื่อระดับน้ำในกรวยสูง 4 ฟุต
9. เครื่องบินลำหนึ่งบินไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 64 ไมล์/ชั่วโมง ผ่านหมู่บ้านแห่งหนึ่งเมื่อเวลาเที่ยงวัน ต่อมาอีก 15 นาที เครื่องบินลำหนึ่งบินผ่านหมู่บ้านเดิม

ไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 580 ไมล์/ชั่วโมง ถ้าเครื่องบินทั้งสองบินด้วยความสูงเท่ากัน เครื่องบินทั้งสองลำจะบินจากกันด้วยความเร็วเท่าไร เมื่อเวลา 13.30 นาฬิกา

10. บันไดยาว 20 ฟุต วางพิงกำแพง ถ้าปลายบันไดด้านล่างถูกดึงเลื่อนออกจากกำแพงด้วยความเร็ว 2 ฟุต/วินาที ปลายด้านบนจะเคลื่อนลงด้วยความเร็วอย่างไร ขณะที่ปลายบันไดด้านล่างอยู่ห่างจากกำแพง 4 ฟุต
11. ถังรูปทรงกระบอกกลมรัศมี 4 ฟุต สูง 6 ฟุต บรรจุน้ำเต็ม ถ้าด้านล่างของถังเจาะรูให้น้ำออก โดยความเร็วของน้ำที่ไหลออกขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำ ถ้า h เป็นระดับน้ำ ความเร็วของน้ำที่ไหลออกจะเท่ากับ $\frac{h}{2}$ ลูกบาศก์ฟุต/นาที จงหาความเร็วของระดับน้ำที่ลดลง เมื่อเหลือน้ำ $\frac{1}{2}$ ถัง
12. อนุภาค P เคลื่อนที่ไปตามกราฟ $y = \sqrt{x^2 - 4}$ ถ้าพิกัด x เพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 5 หน่วย/วินาที พิกัด y จะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วเท่าไร ขณะที่ $x = 3$
13. รินน้ำในกรวยกลมตรง(right-circular cone) ดังรูป 7.2.3



รูป 7.2.3

ด้วยความเร็ว 12 ลูกบาศก์ฟุต/นาที ระดับน้ำเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไรเมื่อน้ำลึก 7 ฟุต

14. ถึงรูปกรวยกลมทงายมีรัศมีฐาน 3 ฟุต สูง 5 ฟุต ถ้าเทน้ำใส่ถึงด้วยความเร็ว 2 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที เมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที
- จงหาความเร็วการเพิ่มระดับน้ำ
 - จงหาความเร็วการเพิ่มของพื้นที่ผิวน้ำ
15. ชายคนหนึ่งยืนบนท่าเรือสูงจากพื้นผิวน้ำ 12 ฟุต เขาดึงเชือกลากเรือด้วยความเร็ว 3 ฟุต/วินาที จงหาว่าเรือแล่นเข้าฝั่งด้วยความเร็วอย่างไร เมื่อเหลือเชือกยาว 20 ฟุต
16. สามเหลี่ยมมีมุมคงตัวกว้าง $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน มีด้านติดกันยาว a และ b เพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 2 ฟุต/นาที และ 1 ฟุต/นาที ตามลำดับ ถ้า $a=2$ ฟุต เมื่อ $b=16$ ฟุต ด้านที่สามจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วอย่างไร เมื่อสามเหลี่ยมมีด้านยาวเท่ากัน.

บทที่ 8

ทฤษฎีบทค่ากลางและการประยุกต์

8.1 ทฤษฎีบทของโรล (Rolle's Theorem)

ทฤษฎีบทของโรลเป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ดังนั้นเราจะเริ่มด้วยบทนิยามค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

8.1.1 บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนเซต S และ $c \in S$ เราจะกล่าวว่า

- (i) $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน S ถ้า $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ใน S
- (ii) $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน S ถ้า $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ใน S
- (iii) $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดของ f บน S ถ้า ข้อ (i) หรือ ข้อ (ii) จริง

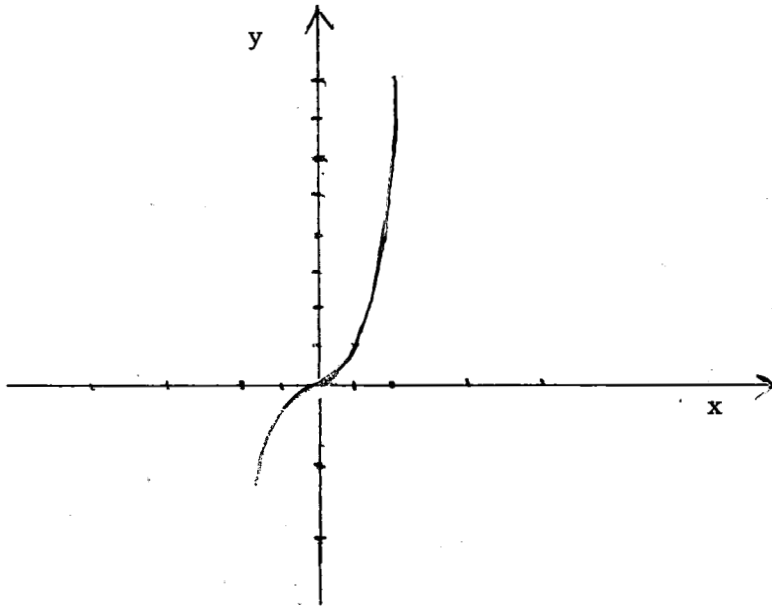
บางฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดบนเซต บางฟังก์ชันไม่มี

ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^3$ บนช่วงปิด $[0, 2]$

$$f(2) = 2^3 = 8 \text{ เป็นค่าสูงสุดบนช่วง } [0, 2]$$

$$f(0) = 0^3 = 0 \text{ เป็นค่าต่ำสุดบนช่วงปิด } [0, 2]$$

แต่บนช่วง $(0, 2)$, f ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (รูป 8.1.1)



รูป 8.1.1

เรามีทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับการมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดดังนี้

8.1.2 ทฤษฎีบทค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ จะมีจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใน $[a, b]$ ซึ่ง $f(x_1)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน $[a, b]$ และ $f(x_2)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน $[a, b]$

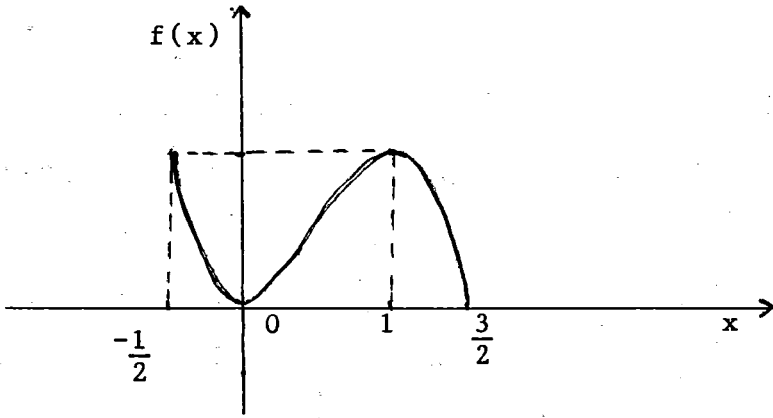
การพิสูจน์ต้องใช้ความรู้ที่ไม่มีในหนังสือเล่มนี้ จึงเว้นการพิสูจน์ไว้ สำหรับผู้สนใจหาอ่านได้จากบรรณานุกรม [2]

ตัวอย่าง 1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ บนช่วงปิด $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

(รูป 8.1.2)

ค่าสูงสุดของ f คือ 1 เกิดที่ $x = -\frac{1}{2}$ และ $x = 1$

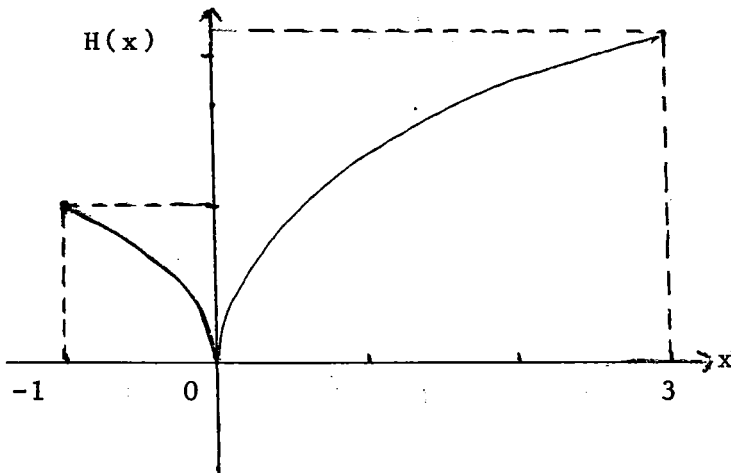
ค่าต่ำสุดของ f คือ 0 เกิดที่ $x=0$ และ $x=\frac{3}{2}$



รูป 8.1.2

ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดรับรองว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดอย่างน้อย 1 จุด ซึ่งอาจมีหลายจุดก็ได้ดังตัวอย่าง 1

ตัวอย่าง 2. ฟังก์ชัน H นิยามโดย $H(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วงปิด $[-1, 3]$ ค่าสูงสุดของ H คือ $H(3) = \sqrt[3]{9}$ และค่าต่ำสุดของ H คือ $H(0) = 0$ (รูป 8.1.3)



รูป 8.1.3

ข้อสังเกต ตัวอย่าง 1 สำหรับค่าสุดขีดซึ่งเกิดที่จุดข้างในช่วง $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ เส้นสัมผัสกราฟ
อยู่ในแนวนอน ดังนั้น $f'(0)=0$ และ $f'(1)=0$

ตัวอย่าง 2 ถึงแม้ 0 จะเป็นจุดข้างในช่วงปิด $[-1, 3]$ แต่เส้นสัมผัสกราฟ
อยู่ในแนวตั้ง (รูป 8.1.3) ดังนั้น $h'(0)$ ไม่มี

2 ตัวอย่างข้างต้นแสดงผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

8.1.3 ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I และ c เป็นจุดข้างใน (interior point) ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ f แล้ว $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มี

พิสูจน์ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน I โดย 8.1.1 บทนิยาม

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in I$$

นั่นคือ

$$f(x) - f(c) \leq 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \in I$$

$$\text{สำหรับ } x < c, \ x - c < 0 \text{ แล้ว } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

ดังนั้นโดย 4.4.5 ทฤษฎีบท

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{ไม่เป็นลบ}$$

$$\text{สำหรับ } x > c, \ x - c > 0 \text{ แล้ว } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

เพราะฉะนั้นโดย 4.4.6 ทฤษฎีบท ลิมิตของ (1) ไม่เป็นบวก

ดังนั้นลิมิต (1) จะเป็นศูนย์หรือไม่มี นั่นคือ $f'(c)=0$ หรือไม่มี

สำหรับ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน I ก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน

#

จำนวน c ซึ่ง $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มี เราเรียกว่า **จำนวนวิกฤต** ของ f
 บทกลับ 8.1.3 ทฤษฎีบทไม่จริง กล่าวคือ $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มี $f(c)$ อาจ
 จะไม่เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

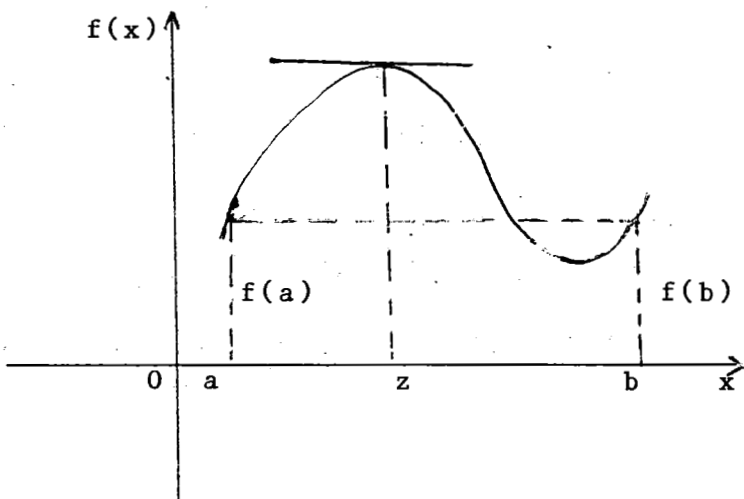
ตัวอย่างเช่น $f(x)=x^3$ รูป 8.1.1 บนช่วงปิด $I=[-1,1]$, $f'(0)=0$ และ 0
 เป็นจุดข้างใน I แต่ $f(0)$ ไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f บน I

8.1.4 ทฤษฎีบทของโรล

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) และ
 ถ้า $f(a)=f(b)$ แล้วจะมีจำนวน z ระหว่าง a และ b , $a < z < b$ ซึ่ง $f'(z)=0$

พิสูจน์ ถ้า $f(x)=f(b)$ สำหรับทุก x ใน $[a,b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัว และ
 $f'(z)=0$ สำหรับทุก z ใน (a,b)

ถ้า $f(x) > f(a)$ สำหรับบาง x ใน (a,b) โดย 8.1.2 ทฤษฎีบทค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด
 ค่าสูงสุดของ f บนช่วงปิด $[a,b]$ มี แต่เนื่องจากมี x ใน (a,b) ซึ่ง $f(x) > f(a)$
 ดังนั้นค่าสูงสุดของ f บนช่วงปิด $[a,b]$ จะไม่เกิดที่จุดปลายของช่วง ดังนั้นจะมีจุด z
 เป็นจุดข้างในของ $[a,b]$ ซึ่ง $f(z)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน $[a,b]$ (รูป 8.1.4)



รูป 8.1.4

เพราะว่า f หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) และ z เป็นจุดข้างในของ $[a, b]$ โดย

$$8.1.3 \quad f'(z)=0$$

ถ้าไม่มี x ในช่วง (a, b) ซึ่ง $f(x) > f(a)$ ดังนั้นมี x ในช่วง (a, b) ซึ่ง $f(x) < f(a)$ เราก็สามารถพิสูจน์ได้โดยทำนองเดียวกัน #

เราใช้ทฤษฎีบทของโรล หาจำนวนรากของสมการคั่งตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3. จงหาจำนวนรากของสมการ $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$ และให้บอกช่วงที่บรรจรรากโดยบอกช่วงที่เป็นจำนวนติดกัน

เฉลย ให้ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ เพราะฉะนั้น $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

เนื่องจาก f และ f' เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้นต่อเนื่องทุกจุดบน $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \iff (6x - 12)(x + 1) = 0 \iff x = 2 \text{ หรือ } x = -1$$

ดังนั้นไม่มี x ในช่วง $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$ ซึ่ง $f'(x) = 0$

ดังนั้นโดย 8.1.4 ทฤษฎีบทของโรล สำหรับแต่ละช่วงต่อไปนี้ $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$

และ $(2, \infty)$ จะมี x ไม่มากกว่า 1 ค่าซึ่ง $f(x) = 0$ เพราะถ้ามีมากกว่า 1 ราก

สมมติ a และ b ซึ่ง $f(a) = f(b) = 0$ ดังนั้น โดย 8.1.4 ทฤษฎีบทของโรล จะมี z อยู่

ระหว่าง a และ b ซึ่ง $f'(z) = 0$ ซึ่งขัดแย้งที่ว่า $f'(x) = 0 \iff x = -1, 2$

พิจารณาช่วง $(-1, 2)$ เนื่องจาก

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = 8$$

$$f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 12(1) + 1 = -12$$

ดังนั้นโดย 4.6.2 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมี x ระหว่าง -1 และ 1 ซึ่ง $f(x) = 0$

แต่เราต้องการช่วงเป็นจำนวนติดกัน

พิจารณา

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 - 12(0) + 1 = 1$$

เนื่องจาก 0 อยู่ระหว่าง 1 และ -12 ดังนั้นโดย 4.6.2 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมีจำนวนจริงในช่วง $(0, 1)$ ซึ่ง $f(x) = 0$

พิจารณาช่วง $(-\infty, -1)$

$$f(-1) = 8$$

$$f(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 12(-3) + 1 = -44$$

ดังนั้นจะมีจำนวนจริงอยู่ในช่วง $(-3, -1)$ ซึ่ง $f(x) = 0$

พิจารณา

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1 = 5$$

เนื่องจาก 0 อยู่ระหว่าง 5 และ -44 ดังนั้นโดย 4.6.2 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมี x ในช่วง $(-3, -2)$ ซึ่ง $f(x) = 0$ พิจารณาส่ง $(2, \infty)$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1 = -19$$

$$f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 - 12(4) + 1 = 129$$

เนื่องจาก 0 อยู่ระหว่าง 129 และ -19 ดังนั้นโดย 4.6.2 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมี x อยู่ระหว่าง 2 และ 4 ซึ่ง $f(x) = 0$

แต่เราต้องการช่วงเป็นจำนวนติดกัน

พิจารณา

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 1 = 54 - 27 - 36 + 1 = -8$$

เนื่องจาก 0 อยู่ระหว่าง -8 และ 129 ดังนั้น โดย 4.6.2 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง

จะมี x อยู่ในช่วง $(3, 4)$ ซึ่ง $f(x) = 0$
 เพราะฉะนั้นสมการ

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$$

มี 3 รากอยู่ในช่วง $(0, 1), (-3, -2), (3, 4)$ #

แบบฝึกหัด 8.1

ข้อ 1-ข้อ 4 กำหนดฟังก์ชันนิยามบนช่วง I จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันบนช่วง I พร้อมเขียนกราฟ

1. $f(x) = x^3 - 3x$, $I = [0, 2]$

2. $H(x) = (3-x)^{\frac{2}{3}}$, $I = [0, 6]$

3. $f(x) = |x| + 1$, $I = [-1, 2]$

4. $f(t) = 4t^3 + 15t - 18t + 3$, $I = [-4, 1]$

5. ให้ $F(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ จงหาค่าของ x ซึ่ง $F'(x) = 0$ F มีค่าสุดขีดบนช่วงเปิด $(0, 3)$ หรือไม่ จงอธิบาย

6. ฟังก์ชันจำนวนเต็มใหญ่สุดมีค่าสุดขีดบนช่วง $(0, 2)$ หรือไม่ ถ้ามีให้หาค่าสุดขีด
 ข้อ 7-ข้อ 8 จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้สอดคล้องเงื่อนไขทฤษฎีบทของโรลบนช่วงที่กำหนดให้ และหา z ทั้งหมดที่เป็นไปได้ พร้อมเขียนกราฟ

7. $H(x) = x^3 - 9x = 1$, $I = [-3, 3]$

8. $g(x) = x^2 - x^{-2}$, $I = [-1, 2]$

ข้อ 9-ข้อ 10 จงใช้ทฤษฎีบทของโรล หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการที่กำหนดให้ และให้บอกช่วงที่บรรจุนรากโดยบอกช่วงเป็นจำนวนติดกัน

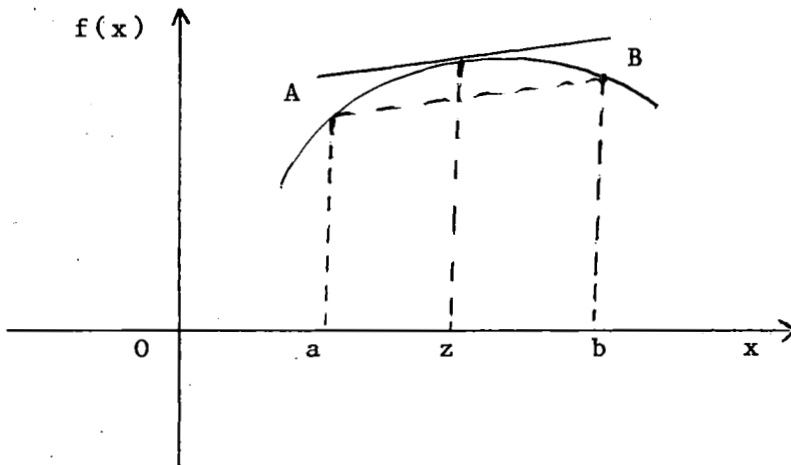
9. $2x^5 + 5x^4 + 1 = 0$

10. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

11. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีอนุพันธ์ต่อเนื่อง จงพิสูจน์ บนช่วง $[a, b]$ ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม และถ้า $f'(x) \neq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ระหว่าง a และ b , $a < x < b$ แล้วสมการ $f(x) = 0$ มีรากเพียงรากเดียวอยู่ระหว่าง a และ b [แนะ ใช้ 4.6.2 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง และ 8.1.4 ทฤษฎีบทของโรล]

8.2 ทฤษฎีบทค่ากลาง (The Mean Value Theorem)

ทฤษฎีบทค่ากลางในความหมายเรขาคณิตกล่าวว่า ถ้ากราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง มีเส้นสัมผัสทุกจุดระหว่าง A และ B (รูป 8.2.1) แล้วจะมีอย่างน้อย 1 จุดระหว่าง A และ B ซึ่งเส้นสัมผัสที่จุดนี้จะขนานกับคอร์ด (chord) AB



รูป 8.2.1

รูป 8.2.1 เพราะว่า $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ เป็นความชันของคอร์ด AB และ $f'(x)$

เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(x, f(x))$ โดยความหมายทางเรขาคณิตของ
ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมีจุด z ในช่วง (a, b) ซึ่ง

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(z)$$

หรือ $f(b)-f(a) = (b-a)f'(z)$

ข้อสังเกต ถ้า $f(a)=f(b)$ ทฤษฎีบทค่ากลางก็คือทฤษฎีบทของโรลนั่นเอง

8.2.1 ทฤษฎีบทค่ากลาง ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง
 (a, b) แล้วจะมีจำนวนจริง z ระหว่าง a และ $b, a < z < b$ ซึ่ง

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(z)$$

พิสูจน์ นิยามฟังก์ชัน F มีโคเมนบนช่วง $[a, b]$ โดย

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ดังนั้น F ต่อ
เนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b)

เพราะว่า $F(a)=F(b)=0$ ดังนั้น F จะเป็นฟังก์ชันสอดคล้องเงื่อนไขทฤษฎีบท
ของโรล ดังนั้นจะมี z อยู่ระหว่าง a และ b ซึ่ง

$$0 = F'(z) = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

หรือ $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

หรือ $f(b)-f(a) = (b-a)f'(z)$

#

ตัวอย่าง 1. ให้ $f(x) = x^2 + 3x - 3$ นิยามบนช่วงปิด $[0, 4]$ จงหาจุด z ที่กล่าวในทฤษฎีบทค่ากลาง

เฉลย $a=0$ และ $b=4$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, 4]$ $f'(x) = 2x + 3$ มีอนุพันธ์ทุกจุดบนช่วงเปิด $(0, 4)$ เพราะฉะนั้นโดย 8.2.1 ทฤษฎีบทค่ากลางจะมี z ในช่วง $(0, 4)$ ซึ่ง

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2z + 3 = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$= \frac{(4^2 + 3(4) - 3) - (-3)}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

ดังนั้น $z = 2$ #

แบบฝึกหัด 8.2

ข้อ 1-ข้อ 5 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีคุณสมบัติสอดคล้องเงื่อนไขทฤษฎีบทค่ากลาง หรือไม่ ถ้าสอดคล้อง จงหาจุด z ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทค่ากลาง

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $I = [-3, 1]$

2. $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $I = [2, 4]$

3. $H(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $I = [-1, 1]$

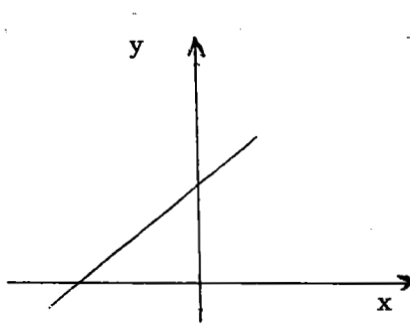
4. $H(w) = |w-1|$, $I = [-3, 2]$

5. $H(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $I = [2, 3]$

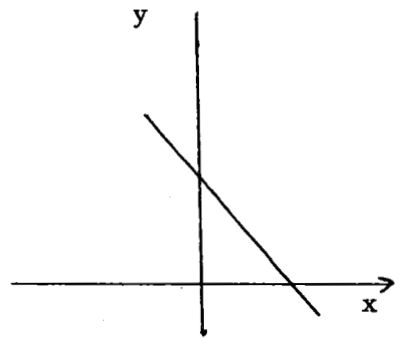
6. จงพิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = cx^2 + dx + e$, $c \neq 0$ แล้ว z ในทฤษฎีบทค่ากลางจะอยู่กึ่งกลางช่วงปิด $[a, b]$ เสมอ .

8.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ถ้าความชันเส้นตรงเป็นบวก เส้นตรงจะพุ่งขึ้นไปทางขวา ถ้าความชันเส้นตรงเป็นลบ เส้นตรงจะพุ่งลงไปทางขวา (รูป 8.3.1)



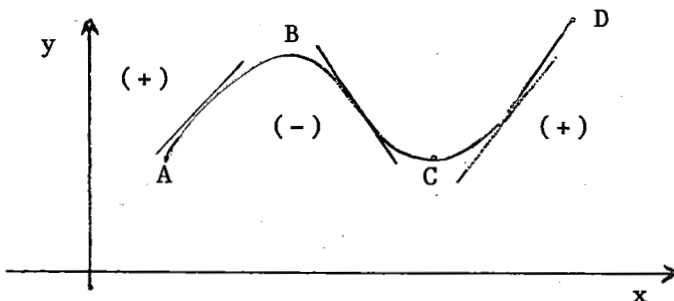
(a) ความชันเป็นบวก



(b) ความชันเป็นลบ

รูป 8.3.1

การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เราจะต้องสังเกตว่า ความชันเส้นสัมผัสกราฟเป็นบวกตลอด ช่วงกราฟจะเพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้น และถ้าความชันเส้นสัมผัสเป็นลบตลอดช่วง กราฟจะลดลงเมื่อ x เพิ่มขึ้น



รูป 8.3.2

รูป 8.3.2 กราฟเพิ่มขึ้นจาก A ไป B และตกลงจาก B ไป C และเพิ่มขึ้นจาก C ไป D

เพราะว่าความชันเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คือค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนั้นเราอาจจะกล่าวได้ว่า ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง I แล้ว $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้นบนช่วง I

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ใน I แล้ว $f(x)$ จะลดลงเมื่อ x เพิ่มขึ้นบนช่วง I

8.3.1 บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I เรากล่าวว่า

(i) f เพิ่มขึ้นบน I ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใดๆใน I

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) f ลดลงบน I ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใดๆใน I

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$ เพราะว่า

$$x_1 < x_2 < 0 \implies x_1^2 > x_2^2$$

ดังนั้น f ลดลงบนช่วง $(-\infty, 0)$

เพราะว่า

$$0 < x_1 < x_2 \implies x_1^2 < x_2^2$$

ดังนั้น f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(0, \infty)$

8.3.2 บทนิยาม เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ (strictly monotone) บนช่วง I ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน I หรือฟังก์ชันลดลงบน I

ถ้า f นิยามบนช่วง I และสำหรับทุก x_1 และ x_2 ใน I

$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

เราจะกล่าวว่า f ไม่ลดลง (nondecreasing) บน I

ถ้าสำหรับทุก x_1 และ x_2 บน I

$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

เราจะกล่าวว่า f ไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing) บน I

ดังนั้นฟังก์ชันจำนวนเต็มใหญ่สุด ไม่ลดลงบน $(-\infty, \infty)$ (รูป 3.3.3)

เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวบนช่วง I ถ้า f ไม่ลดลงบน I หรือ f ไม่เพิ่มขึ้นบน I

8.3.3 ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดข้างใน I

(i) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I แล้ว f เพิ่มขึ้นบน I

(ii) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I แล้ว f ลดลงบน I

พิสูจน์ (i) สมมุติ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกจุด x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I

ให้ x_1 และ x_2 เป็น 2 จำนวนใดๆใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$ โดย 8.2.1 ทฤษฎีบทค่ากลาง จะมีจำนวน z ระหว่าง x_1 และ x_2 ซึ่ง

$$f'(z) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

แต่ $f'(z) > 0$ สำหรับทุกจุด z ซึ่งเป็นจุดข้างใน I และ $x_2 - x_1 > 0$ ดังนั้น

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

หรือ $f(x_1) < f(x_2)$

เพราะฉะนั้น สำหรับ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆใน I

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน I

สำหรับ (ii) ก็พิสูจน์ได้โดยทำนองเดียวกัน

#

ตัวอย่าง 1. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 24x - 2$

จงหาช่วงซึ่ง F เพิ่มขึ้นและช่วงซึ่ง F ลดลง

เฉลย $F'(x) = 2x^2 - 14x + 24 = (2x-6)(x-4) = 2(x-3)(x-4)$

เพราะฉะนั้น $x=3$ และ $x=4$ เป็นจุดวิกฤต

เราจะใช้จุดวิกฤตเป็นหลักในการพิจารณาเครื่องหมาย $F'(x)$

ช่วงที่จะพิจารณาคือ $x < 3$, $3 < x < 4$ และ $x > 4$

สำหรับ $x < 3$, $F'(x) > 0$

สำหรับ $3 < x < 4$, $F'(x) < 0$

สำหรับ $x > 4$, $F'(x) > 0$

ดังนั้น F ลดลงบนช่วง $[3, 4]$ เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 3]$ และ $[4, \infty)$ #

8.3.4 ทฤษฎีบท ถ้า f' ต่อเนื่องบนช่วง I และ ถ้า $f'(x) \neq 0$ สำหรับทุก x ที่เป็นจุดข้างใน I แล้ว f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บน I

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ว่า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I

สมมติว่ามีจุด a และ b เป็นจุดข้างใน I ซึ่ง

$$f'(a) < 0 \quad \text{และ} \quad f'(b) > 0$$

เพราะว่า f' ต่อเนื่อง ดังนั้นโดย 4.6.2 ทฤษฎีบทจะมีจุด c อยู่ระหว่าง a และ b ซึ่ง $f'(c) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ดังนั้น $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I หรือไม่ว่า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I

โดย 8.3.3 ทฤษฎีบท f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ #

แบบฝึกหัด 8.3

ข้อ 1-ข้อ 5 จงหาช่วงซึ่งฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือช่วงซึ่งฟังก์ชันลดลง

1. $f(z) = z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z + 3$

2. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 10$

3. $f(x) = x^3 - 6x - 3$

4. $H(x) = x^4 + 4$

5. $F(x) = \frac{(2-x)}{x^2}$

6. ให้ $f(x) = x^3$ จงใช้ 8.3.1 บทนิยาม พิสูจน์ f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, \infty)$

7. ให้ $f(t) = 2t^5 - 15t^4 + 30t^3 - 6$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง.

8.4 ความเร็วและความเร่ง

กำหนดอนุภาคเคลื่อนที่บนเส้นจำนวน ถ้า $s = f(t)$ เป็นฟังก์ชันตำแหน่ง (position

function) ซึ่งให้ระยะทางระยะทาง s ของอนุภาคจากจุดกำเนิดเมื่อเวลา t หน่วย
เรานิยามความเร็ว ณ จุดหนึ่งของอนุภาคที่เวลา t คือ

$$v = f'(t)$$

อัตราเร็วของอนุภาคคือ ค่าสัมบูรณ์ของความเร็ว $|v|$
ความเร่งของการเคลื่อนที่ของอนุภาคคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลา
เขียนแทนด้วย a

$$a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

ตัวอย่าง 1. กำหนดตำแหน่งอนุภาคเคลื่อนที่ไปบนเส้นจำนวนที่เวลา t คือ

$$s = t^3 - 9t^2 + 15t + 2$$

เมื่อ s วัดเป็นฟุตและ t เป็นวินาที จงอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค สำหรับ $t \geq 0$

เฉลย ความเร็วของอนุภาคที่เวลา t คือ

$$v = s'(t) = 3t^2 - 18t + 15$$

ความเร่งเมื่อเวลา t คือ $a = v'(t) = s''(t) = 6t - 18$

แก้สมการ $3t^2 - 18t + 15 = 0$ ได้ $t = 1, 5$

นั่นคือ $v = 0$ เมื่อ $t = 1$ หรือ $t = 5$

แก้สมการ $6t - 18 = 0$ ได้ $t = 3$

นั่นคือ $a = 0$ เมื่อ $t = 3$ โดย 8.3.3 ทฤษฎีบท

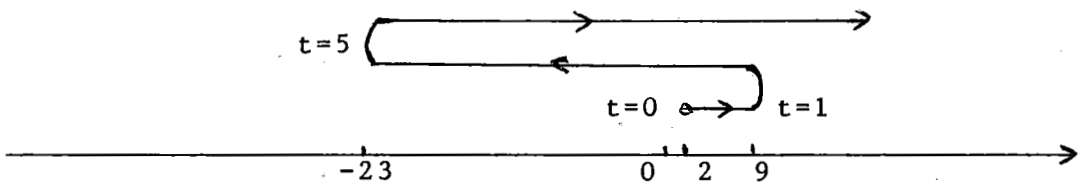
เมื่อ $v = s'(t) < 0$ แล้ว s ลดลง อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางซ้าย

เมื่อ $v = s'(t) > 0$ แล้ว s เพิ่มขึ้น อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางขวา

เมื่อ $a = v'(t) > 0$ ความเร็วของอนุภาคเพิ่มขึ้น

เมื่อ $a = v'(t) < 0$ ความเร็วของอนุภาคลดลง

กราฟการเคลื่อนที่เขียนแสดงดังรูป 8.3.3 เมื่อ $t=0$ อนุภาคห่างจากจุดกำเนิดไปทางขวา 2 หน่วย และเริ่มเคลื่อนที่ไปทางขวาคด้วยความเร็ว 15 ฟุต/วินาที และความเร็วลดลงเป็นศูนย์เมื่อ $t=1$ ระยะห่างจากจุดกำเนิด 9 ฟุต และเริ่มเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็วเพิ่มไปถึงวินาทีที่ 3 หลังจากนั้นความเร็วลดลงเป็นศูนย์ เมื่อ $t=5$ ห่างจากจุดกำเนิดไปทางซ้าย 23 ฟุต และเริ่มเคลื่อนที่ไปทางขวาและมีความเร็วเพิ่มขึ้นๆ #



รูป 8.3.3

ตัวอย่าง 2. โยนก้อนหินพุ่งตรงไปในอากาศด้วยความเร็ว 48 ฟุต/วินาที ใต้ความสูงตั้งสมการ

$$s = 48t - 16t^2$$

- (i) จงหาระยะสูงที่สุด
- (ii) จงหาความเร็วเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที
- (iii) เมื่อใดวัตถุตกถึงพื้น
- (iv) วัตถุตกถึงพื้นด้วยความเร็วเท่าใด

เฉลย $v = s'(t) = 48 - 32t$

ถ้า $v=48-32t=0$ จะได้ $t=1.5$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป $t=1.5$ วินาที ความเร็วจะเป็นศูนย์ ก่อนที่จะไปได้สูงสุด

$$s(1.5)=48(1.5)-16(1.5)^2=36$$

ดังนั้น (i) ระยะสูงสุดคือ 31 ฟุต (รูป 8.3.4)

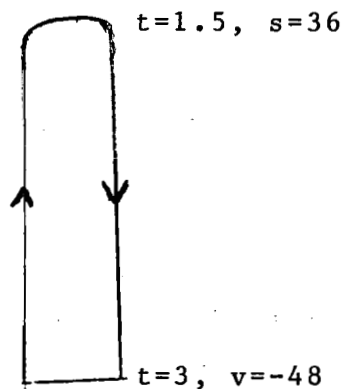
(ii) ความเร็วเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที คือ $v(1)=16$ ฟุต/วินาที

(iii) ให้ $s=48t-16t^2=0$ แก่สมการได้ $t=0$ หรือ $t=3$

ดังนั้นเมื่อ $t=3$ วัตถุตกถึงพื้นดิน

(iv) ตกถึงพื้นดินด้วยความเร็ว $v(3)=48-32(3)=-48$ ฟุต/วินาที

#



รูป 8.3.4

แบบฝึกหัด 8.4

ข้อ 1-ข้อ 5 อนุภาคเคลื่อนที่บนเส้นตรงด้วยสมการ $s=f(t)$ เมื่อ s วัดเป็นฟุต และ t วัดเป็นวินาที จงหาตัวแทนความเร็ว และความเร่งในรูปของ t และอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค สำหรับ $t \geq 0$ พร้อมเขียนกราฟ แบบรูป 8.3.3

1. $s=2t^2-4t-5$

2. $s = -t^3 + 6t + 1$

3. $s = 3t^2 - 12t + 4$

4. $s = t^4 - 2t^3 + t^2$

5. $s = t^2 + \frac{16}{t}$

6. อนุภาคเคลื่อนที่ไปบนเส้นจำนวนด้วยสมการ $s = t^3 - 6t$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นฟุต t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา

(i) ระยะทาง, ความเร็ว, ความเร่ง เมื่อ $t = 3$

(ii) ช่วงเวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปข้างหน้า และช่วงเวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่ย้อนกลับ

(iii) เมื่อใดอนุภาคหยุดเคลื่อนที่

(iv) ช่วงเวลาที่ไปขึ้นบวกและช่วงเวลาที่ไปลบ

(v) ความเร็วเมื่อความเร่งเป็นศูนย์

7. โยนก้อนหินพุ่งตรงไปในอากาศ มีความสูงดังสมการ $s = 80t - 16t^2$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นฟุต t เป็นวินาที จงหาว่าก้อนหินขึ้นไปสูงสุดเท่าใด เมื่อตกถึงพื้นมีความเร็วเท่าใด

8. โยนก้อนหินจากหน้าผาด้วยความเร็วต้น v_0 และก้อนหินตกลงมาได้ระยะทางดังสมการ $s = v_0 t + 16t^2$ เมื่อ s เป็นฟุต และ t เป็นวินาที ถ้าก้อนหินกระทบพื้นล่างใน 3 วินาที ด้วยความเร็ว 140 ฟุต/วินาที จงหาความสูงของหน้าผา

9. อนุภาค 2 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง จากจุดตั้งต้นเดียวกัน ณ เวลา t ระยะทางระยะทิศทางจากจุดกำเนิดเป็นฟุต กำหนดโดยสมการ

$$s_1 = 4t - 3t^2 \quad \text{และ} \quad s_2 = t^2 - 2t \quad \text{ตามลำดับ จงหา}$$

(i) เมื่อใดอนุภาคทั้งสองมีความเร็วเท่ากัน

(ii) เมื่อใดอนุภาคทั้งสองอยู่ตำแหน่งเดียวกัน

8.5 ผลต่างเชิงอนุพันธ์(Differential)

เดิมทีเมื่อเขียน $\frac{dy}{dx}$ เราจะหมายถึงอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x โดยไม่ได้คิดถึงผลหาร

ต่อไปเราจะนิยาม ผลต่างเชิงอนุพันธ์(differential) โดยให้ความหมาย dy และ dx แยกจากกัน

ดังนั้นสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ ก็จะมี 2 ความหมาย คือ อนุพันธ์ y เทียบกับ x หรือ ผลหาร

8.5.1 บทนิยาม ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของ x เขียนแทนด้วย dx คือส่วนที่เปลี่ยนไปของ x นั่นคือ

$$(i) \quad dx = \Delta x$$

ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f (หรือ dy ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของตัวแปร y) ที่จุด x_1 คือ

$$(ii) \quad df(x) = f'(x_1)dx$$

ตัวอย่าง 1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = 3x^4 - 1$ และ ถ้า $y = f(x)$ แล้ว

$$f'(x_1) = 12x_1^3$$

ดิฟเฟอเรนเชียลของ f ที่ x_1 คือ $df(x) = dy = 12x_1^3 dx$

ถ้าเราให้ $x_1 = 2$ และ $dx = 2$ แล้ว $df = dy = 12(2)^3(2) = 192$

ถ้า $x_1 = -1$ และ $dx = 0.02$ แล้ว $df = dy = 12(-1)^3(0.02) = -0.24$ *

ถ้าเราหารทั้งสองข้างของ(ii) ด้วย dx จะมี

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_1) \quad (dx \neq 0)$$

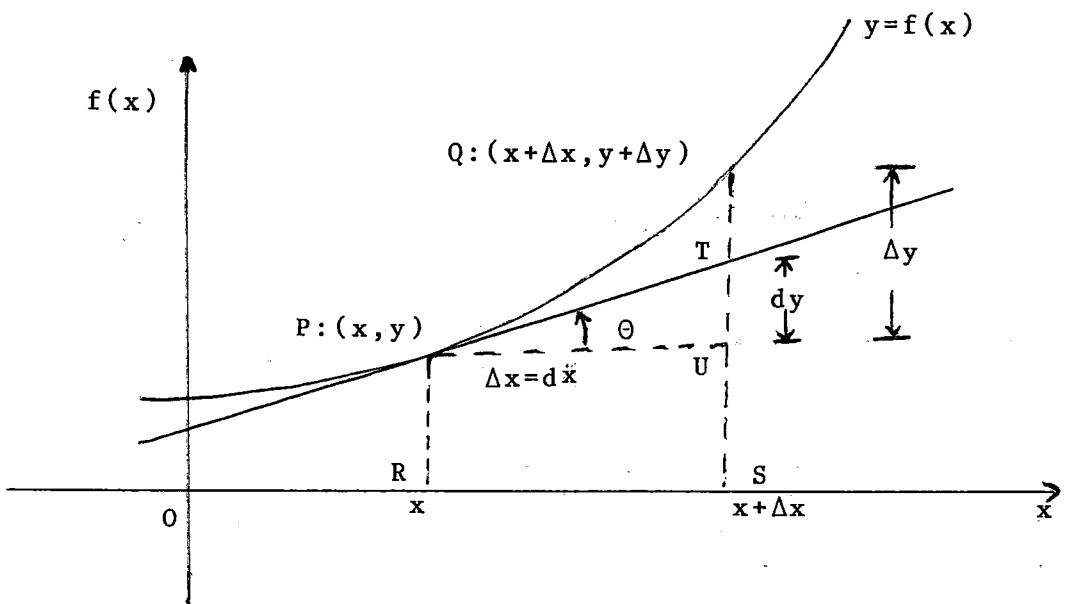
$\frac{dy}{dx}$ ทางซ้ายเป็นผลหารของ 2 ผลค่าเชิงอนุพันธ์ dy โดย dx ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ อาจ
จะแทนผลหารของ 2 ผลค่าเชิงอนุพันธ์ หรืออนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ซึ่งขึ้นอยู่กับ
สถานะกราฟ

ในขณะที่ dx เป็นส่วนที่เปลี่ยนไปของ x แต่โดยทั่วไป dy ไม่เท่ากับส่วนที่เปลี่ยน
ไปของ Δy เพราะว่า

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

แต่ $dy = f'(x)dx$

รูป 8.5.1 ผลต่างระหว่าง Δy และ dy สำหรับ x และ dx ที่เหมือนกัน คือ
ระยะทางระยะทาง TQ



รูป 8.5.1

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดใด ๆ บนกราฟของ $y = f(x)$

(รูป 8.5.1)

เพราะว่า $f'(x) = \tan \theta = \frac{\overline{UT}}{dx}$

ดังนั้น $\overline{UT} = f'(x)dx$ หรือ $\overline{UT} = dy$

แต่ $\Delta y = \overline{UQ}$

เพราะฉะนั้น ผลต่างระหว่าง Δy และ dy คือ $\overline{TQ}$ รูป 8.5.1 ถ้าเราให้ x คง
ตัว เราสามารถที่จะทำให้ $|\overline{TQ}|$ เล็กลงโดยให้ $|dx| = |\Delta x|$ เล็กลง

เมื่อเรากำหนดให้ $|dx|$ เล็กลง dy ก็จะเข้าใกล้ Δy ดังนั้น ถ้าให้ $|dx| = |\Delta x|$
น้อยมากๆ $dy = f'(x)dx$ จึงใช้ประมาณค่า Δy ได้อย่างดี

ตัวอย่าง 2. ถ้า $y = x^2 - 3$ จงหาค่า Δy และ dy เมื่อ $x = 2$ และ $dx = \Delta x = 0.5$

ผลเฉลย จาก $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

แทน $x = 2$ และ $\Delta x = 0.5$

$$\Delta y = f(2.5) - f(2) = [(2.5)^2 - 3] - [(2)^2 - 3] = 2.25$$

จาก $dy = f'(x)dx = 2x dx$

แทน $x = 2$ และ $dx = 0.5$

$$dy = 2(2)(0.5) = 2$$

เพราะฉะนั้น $\Delta y = 2.25$, $dy = 2$ #

ตัวอย่าง 3. จงใช้ผลต่างอนุพัทธ์ประมาณค่า $\sqrt{402}$

ผลเฉลย ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$

จาก $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(402) - f(400) = \sqrt{402} - \sqrt{400} = \sqrt{402} - 20$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{402} = 20 + \Delta y$

เราประมาณค่า Δy โดยใช้ dy นั่นคือ $\sqrt{402} \approx 20 + dy$

หา dy เมื่อ $x=400$, $dx=2$

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20}$$

ดังนั้นค่าประมาณของ $\sqrt{402} \approx 20 + \frac{1}{20} = 20.25$ #

สูตรการหาผลต่างเชิงอนุพันธ์ เราสามารถหาได้จากการคูณสูตรการหาอนุพันธ์ด้วย dx ตัวอย่างเช่น ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x แล้ว

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

ถ้าเราคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย dx กระทำเหมือน $\frac{d}{dx}(uv)$, $\frac{du}{dx}$ และ $\frac{dv}{dx}$ เป็นเศษส่วนแล้ว

$$d(uv) = u dv + v du \quad (8.5.1)$$

โดยทำนองเดียวกัน ถ้า c เป็นค่าคงตัวและ u, v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

$$dc = 0$$

$$d(cu) = c du$$

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = u dv + v du \quad (8.5.2)$$

$$\frac{d(u)}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$d(u^n) = n u^{n-1} du \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

โดยกฎลูกโซ่ ถ้า $y=f(x)$ และ $u=g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

คูณทั้งสองข้างด้วย dx

$$dy = f'(u) g'(x) dx$$

เขียนเป็นทฤษฎีบทดังนี้

8.5.5 ทฤษฎีบท (กฎลูกโซ่สำหรับการหาผลต่างอนุพันธ์)

ให้ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า g มีอนุพันธ์ที่ x และ f มีอนุพันธ์ที่ $u = g(x)$ แล้ว

$$dy = f'(u) g'(x) dx$$

ตัวอย่าง 4. ถ้า $y = \frac{(3x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ จงหา dy

เฉลย โดยสูตร (8.5.2)

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\sqrt{x^2+1} d(3x+1) - (3x+1) d\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} \\ &= \frac{3\sqrt{x^2+1} dx - (3x+1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} x dx}{x^2+1} \\ &= \left[\frac{3\sqrt{x^2+1} - (3x^2+x)}{x^2+1} \right] dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{3(x^2+1) - 3x^2 - x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right] dx$$

$$= \left[\frac{3-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right] dx$$

#

ตัวอย่าง 5. ถ้า $x^2+5xy-2y^2=4$ จงใช้ผลต่างอนุพันธ์หา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$

เฉลย ใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$2xdx + 5(xdy + ydx) - 4ydy = 0$$

หรือ

$$(5x-4y)dy = (-2x-5y)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-5y}{5x-4y}$$

$$dy' = - \left[\frac{(5x-4y)(2dx+5dy) - (-2x-5y)(5dx-4dy)}{(5x-4y)^2} \right]$$

$$= - \left[\frac{10xdx + 25xdy - 8ydx - 20ydy - 10xdx + 8xdy - 25ydx + 20ydy}{(5x-4y)^2} \right]$$

$$= - \left[\frac{33xdy - 33ydx}{(5x-4y)^2} \right]$$

หารทั้งสองข้างด้วย dx

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-33x \frac{dy}{dx} - 33y}{(5x-4y)^2} \\
&= - \frac{[33x(-\frac{2x+5y}{5x-4y}) - 33y]}{(5x-4y)^2} \\
&= - \frac{[66x^2 - 165xy - 165xy + 132y^2]}{(5x-4y)^3} \\
&= \frac{66x^2 + 330xy - 132y^2}{(5x-4y)^3} \\
&= \frac{66(x^2 + 5xy - 2y^2)}{(5x-4y)^3} \quad \#
\end{aligned}$$

ถ้าให้ $y=f(x)$ และ $x=g(t)$ โดย $R_g \subseteq D_f$ แล้ว $y=f(g(t))$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ โดยกฎลูกโซ่สำหรับผลต่างอนุพันธ์ $dy=f'(x)g'(t)dt$ และโดย 8.5.1 บทนิยาม(ii) $dx=g'(t)dt$ ดังนั้น $dy=f'(x)dx$

8.5.6. บทแทรก ให้ $y=f(x)$ แล้ว $dy=f'(x)dx$ ไม่ว่า x จะเป็นตัวแปรอิสระหรือตัวแปรตามขึ้นอยู่กับตัวแปรอื่น

แบบฝึกหัด 8.5

1. ให้ $y=\frac{1}{x}$ จงหา dy เมื่อ

a. $x=2$ และ $dx=-0.5$

b. $x=-1$ และ $dx=0.2$

2. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงหา df เขียนกราฟของ f เส้นสัมผัสที่จุด x แสดง df และ dx เมื่อ

a. $x=2$ และ $dx=0.1$

b. $x=-2$ และ $dx=0.3$

ข้อ 3-ข้อ 5 จงหา dy

3. $y = x^2 + 2x + 1$

4. $y = (3 + 2x^3)^{-4}$

5. $y = \sqrt{3x^4 + 2x - 1}$

6. ถ้า $s = \frac{5}{\sqrt{(t^3 - 4)^3}}$ จงหา ds

7. ถ้า $F(x) = (3x^3 + 1)^2 (x - 3)^3$ จงหา dF

8. ถ้า $F(x) = \frac{1}{(x-1)^2 (x^2+1)}$ จงหา dF

9. ใช้ผลต่างอนุพันธ์ หา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ

$$x^4 + y^4 = 1$$

10. ถ้า $y = x^2 - 3$ จงหา Δy และ dy เมื่อ

a. $x=2$ และ $dx=\Delta x=0.2$

b. $x=2$ และ $dx=\Delta x=0.1$

11. ให้ $y = 5x^3 - 2x^2 + 6$ จงใช้ผลต่างอนุพันธ์ ประมาณค่าที่เปลี่ยนไปของ y ในขณะที่ x เปลี่ยนจาก 1 ถึง 1.03

12. จงใช้ผลต่างอนุพันธ์ประมาณค่า

a. $\sqrt{50}$

b. $\sqrt[3]{28}$

13. ทรงกลมมีรัศมี 3 นิ้ว ถ้ารัศมีเพิ่มขึ้น 0.2 นิ้ว ปริมาตรจะเพิ่มขึ้นจากเดิมเท่าไร
14. ต้องการหาสี่ทรงกลมซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 นิ้ว โดยหาหน้า $\frac{1}{8}$ นิ้ว จะต้องใช้สีเป็นปริมาตรเท่าใด
15. ท่อโลหะทรงกลมมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 4 นิ้ว ยาว 6 นิ้ว หนา 0.07 นิ้ว จงหาปริมาตรโดยประมาณโลหะที่ทำท่อ.

8.6 การขยายทฤษฎีบทค่ากลาง

เราสามารถขยายทฤษฎีบทค่ากลางดังนี้

8.6.1 ทฤษฎีบท (ทฤษฎีบทค่ากลางขยาย)

ให้ I เป็นช่วงปิด มีจุดปลาย a และ b ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง f' ต่อเนื่องบน I และ ถ้า f' หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดข้างใน I แล้ว จะมีจำนวน z อยู่ระหว่าง a และ b ซึ่ง

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(z) \quad (8.6.1)$$

พิสูจน์ เรานิยามค่าคงตัว K โดยสมการ

$$(1) \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}K$$

ให้ F เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2}K$$

มีโดเมน I

$$\text{ดังนั้น} \quad f(a) = f(b) = 0$$

เพราะว่า f และ f' ต่อเนื่องบน I และมีอนุพันธ์ทุกจุดข้างใน I ดังนั้น F ต่อ

เนื่องบน I และมีอนุพันธ์ทุกจุดข้างใน I ดังนั้นโดย 8.1.4 ทฤษฎีบทของโรล จะมีจำนวน z ระหว่าง a และ b ซึ่ง $F'(z)=0$

แต่ $F'(x)=-(b-x)f''(x)+(b-x)K$

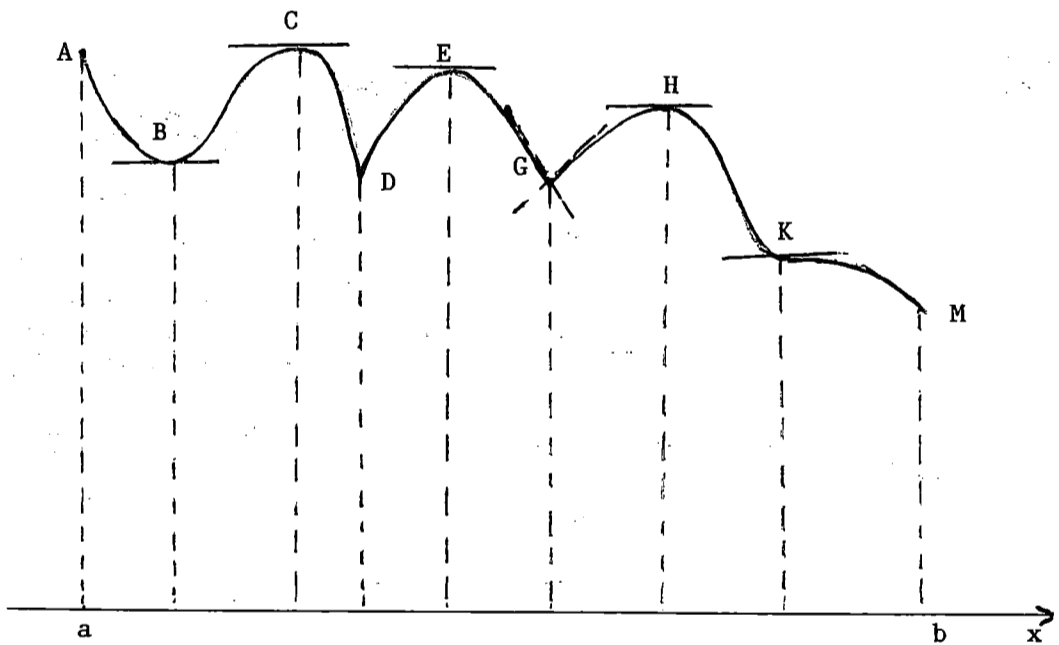
เพราะฉะนั้น $F'(z)=-(b-z)f''(z)+(b-z)K=0$

นั่นคือ $K=f''(z)$ นำไปแทนใน(1) จะมีสมการ(8.6.1)

สำหรับการขยายทฤษฎีบทค่ากลางเราจะนำไปช่วยพิสูจน์ 8.10.2 ทฤษฎีบทหัวข้อ 8.10 เพื่อศึกษาการว่า

8.7 ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องมีกราฟดังรูป 8.7.1



รูป 8.7.1

โดเมน f เป็นช่วงปิด $[a, b]$ A เป็นจุดสูงสุดของกราฟ และ M เป็นจุดต่ำสุด
 พิกัดที่สองของ A คือ $f(a)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บนช่วงปิด $[a, b]$ พิกัดที่สองของ M
 คือ $f(b)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน $[a, b]$

จุด C, E, H เป็นจุดซึ่งสูงกว่าจุดอื่นที่อยู่บริเวณใกล้เคียง พิกัดที่สองของจุด C, E
 และ H เรียกว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ของฟังก์ชัน f

จุด B, D และ G เป็นจุดที่ต่ำกว่าจุดอื่นในบริเวณใกล้เคียงกัน พิกัดที่สองของจุด B, D
 และ G เรียกว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ของ f

8.7.1 บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า

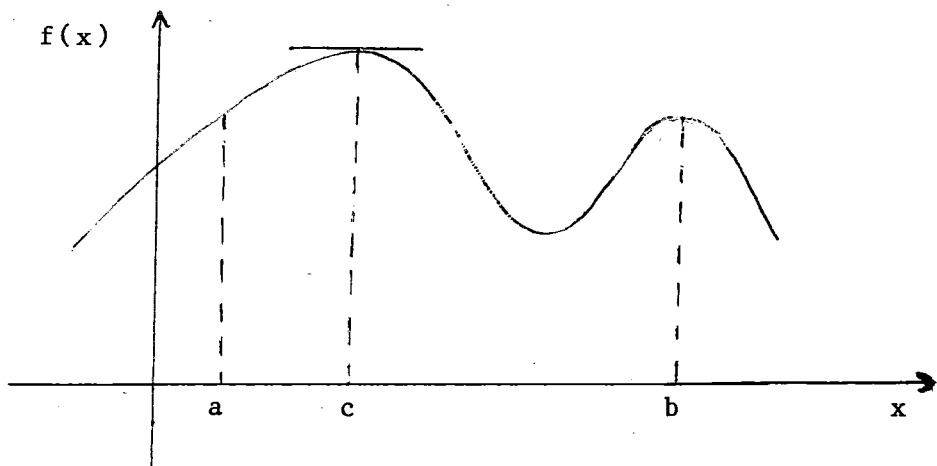
- (i) $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บนช่วง ซึ่งมี c เป็นจุดข้างใน
- (ii) $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ถ้า $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บนช่วง ซึ่งมี c เป็นจุดข้างใน
- (iii) $f(c)$ เรียกว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) ถ้าสอดคล้องข้อ (i) หรือ (ii)

ข้อสังเกต ค่าสูงสุดของฟังก์ชันบนช่วงไม่จำเป็นต้องเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ตัวอย่าง
 เช่น กราฟรูป 8.7.1 $f(a)$ เป็นค่าสูงสุดบน $[a, b]$ และ $f(b)$ เป็นค่าต่ำสุดบน
 $[a, b]$ แต่ $f(a)$ ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์บน $[a, b]$ และ $f(b)$ ไม่เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
 บน $[a, b]$ เพราะว่าไม่มีช่วงในโดเมนของ f ซึ่งมี a และ b เป็นจุดข้างใน

รูป 8.7.2 $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บนช่วง $[a, b]$ และเนื่องจาก c เป็นจุด
 ข้างในของ $[a, b]$ ดังนั้น $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ด้วย

โดย 8.1.3 ทฤษฎีบท และ 8.7.1 บทนิยามจะมีทฤษฎีบทดังนี้

8.7.2 ทฤษฎีบท ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มี



รูป 8.7.2

นั่นคือ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ แล้ว c เป็นจำนวนวิกฤตของ f
 จำนวนวิกฤตบางจุดอาจจะไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์
 ตัวอย่างเช่น

$f(x) = x^3$ มี 0 เป็นจำนวนวิกฤต เพราะว่า $f'(x) = 3x^2$ และ $f'(0) = 0$
 แต่ $f(x) < f(0)$ สำหรับ $x < 0$

$f(x) > f(0)$ สำหรับ $x > 0$

ดังนั้น $f(0)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

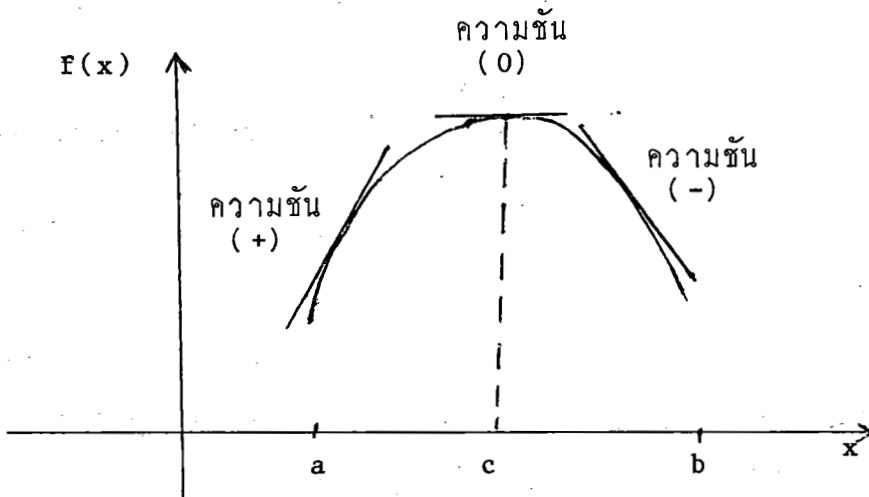
ดังนั้นโดย 8.7.2 ทฤษฎีบท เพื่อจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ เราก็ต้องเริ่มจากหาจำนวน
 วิกฤต แล้วนำจำนวนวิกฤตมาทดสอบค่าสุดขีดสัมพัทธ์

8.7.3 ทฤษฎีบท (ทดสอบอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับค่าสุดขีด)

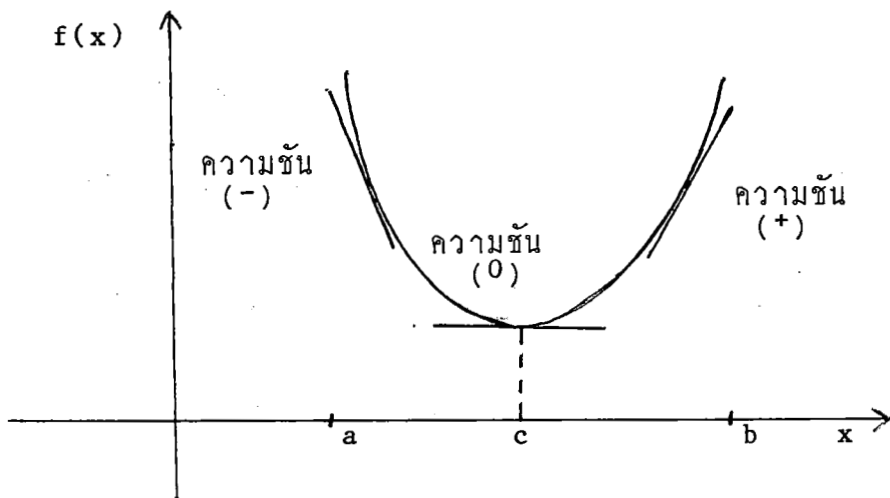
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) และ c เป็นจำนวนวิกฤตในช่วง
 (a, b) และให้ f' นิยามบนช่วง (a, b) อาจจะยกเว้นที่ c

(i) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ใน (a, c) และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ใน
 (c, b) แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (รูป 8.7.3)

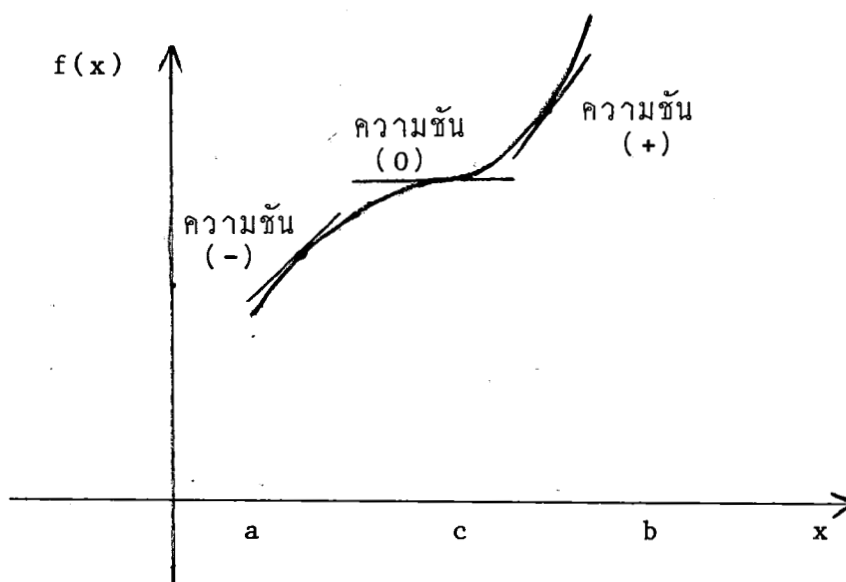
- (ii) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ใน (a, c) และถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ใน (c, b) แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (รูป 8.7.4)
- (iii) ถ้า $f'(x)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน สำหรับทุก x ใน (a, c) และ (c, b) แล้ว $f(c)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดของ f (รูป 8.7.5)



รูป 8.7.3



รูป 8.7.4



รูป 8.7.5

พิสูจน์ (i) เพราะว่า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ใน (a, c) ดังนั้นโดย 8.3.3
 ทฤษฎีบท f เพิ่มขึ้นบน $(a, c]$ ดังนั้นโดย 8.3.1 บทนิยาม

$$f(x) < f(c) \quad \text{สำหรับทุก } x \text{ ใน } (a, c)$$

เพราะว่า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ใน (c, b) ดังนั้นโดย 8.3.1 ทฤษฎีบท f
 ลดลงบน $[c, b)$ ดังนั้นโดย 8.3.1 บทนิยาม

$$f(c) > f(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \text{ ใน } (c, b)$$

ดังนั้น $a < c < b$ และ $f(c) > f(x)$ สำหรับทุก x ใน (a, b) เพราะฉะนั้น $f(c)$
 เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ

สำหรับข้อ(ii) ก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน ส่วนข้อ(iii) ให้เป็นแบบฝึกหัด #

สรุปวิธีหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน f

1. หาจำนวนวิกฤตของ f โดย

(i) หารากของสมการ $f'(x) = 0$ และ

(ii) หาจำนวนซึ่ง $f'(x)$ ไม่มี

2. นำจำนวนวิกฤตทั้งหมดมาทดสอบบนพื้นที่อันดับหนึ่ง

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 210x + 151 \quad \text{บนช่วงปิด } [-8, 8]$$

เฉลย เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้นต่อเนื่องทุกจุดบน $\mathbb{R}$ เพราะฉะนั้นโดย

8.1.2 ทฤษฎีบท บนช่วงปิด f จะมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

จำนวนซึ่งให้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดอาจจะเป็นจุดปลายช่วงก็ได้ ซึ่งในกรณีแบบนี้อาจไม่เป็นจำนวนวิกฤต

จำนวนซึ่งให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด อาจจะเป็นจุดในช่วง กรณีแบบนี้จะให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ดังนั้นเราจะหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันบนช่วง $[-8, 8]$ และค่าฟังก์ชันที่ปลายช่วง $f(-8)$, $f(8)$ ค่าที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุด และค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดของ f บนช่วง $[-8, 8]$

หาค่าสุดขีดสัมพัทธ์

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 210 = (3x - 21)(2x + 10)$$

ดังนั้น จำนวนวิกฤตของ f คือ 7 และ -5 (เป็นค่าที่ $f'(x) = 0$)

พิจารณาช่วง $x < -5$, $-5 < x < 7$, $x > 7$

$$\text{สำหรับ } x < -5, \quad f'(x) = (3x - 21)(2x + 10) > 0 \quad +$$

$$\text{สำหรับ } -5 < x < 7, \quad f'(x) = (3x - 21)(2x + 10) < 0 \quad -$$

$$\text{สำหรับ } x > 7, \quad f'(x) = (3x - 21)(2x + 10) > 0 \quad +$$

ดังนั้นโดยการทดสอบบนพื้นที่อันดับหนึ่ง

$f(-5)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$f(7)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

หาค่าจุดปลาย

$$f(-8) = 2(-8)^3 - 6(-8)^2 - 210(-8) + 151 = 423$$

$$f(8) = 2(8)^3 - 6(8)^2 - 210(8) + 151 = -889$$

เปรียบเทียบกับ

$$f(-5) = 2(-5)^3 - 6(-5)^2 - 210(-5) + 151 = 801$$

$$f(7) = 2(7)^3 - 6(7)^2 - 210(7) + 151 = -927$$

ดังนั้น $f(7) = -927$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บนช่วง $[-8, 8]$

$f(-5) = 801$ เป็นค่าสูงสุดของ f บนช่วง $[-8, 8]$ #

แบบฝึกหัด 8.7

ข้อ 1-ข้อ 7 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบนโดเมนถ้ามี

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

2. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

3. $f(x) = 3x - x^2$

4. $h(x) = 3x^4 - 4x^3$

5. $G(x) = -x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x + 3$

6. $f(t) = 21t^4 - 64t^3 - 96t^2 - 370t + 1$

ข้อ 7-ข้อ 9 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ และเขียนกราฟแสดงค่าสุดขีด

[แนะนำ : ใช้ 8.3.3 ทัศนูปภพเขียนกราฟ]

$$7. \quad f(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$8. \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$9. \quad f(x) = x \sqrt{9-x^2}.$$

8.8 ทดสอบอนุพันธ์อันดับสองสำหรับค่าสุดขีด

เราจะใช้การทดสอบอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับค่าสุดขีด พิสูจน์ทฤษฎีบทการทดสอบอนุพันธ์อันดับสองสำหรับค่าสุดขีด

8.8.1 ทฤษฎีบท(การทดสอบอนุพันธ์อันดับสองสำหรับค่าสุดขีด)

ให้ f และ f'' มีทุกจุดในช่วง I และ c เป็นจุดข้างใน I และ $f'(c) = 0$

(i) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

(ii) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

พิสูจน์ (i) โดยสมมุติฐาน

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

ดังนั้นโดย 4.4.6 ทฤษฎีบท จะมีช่วงเปิด $(a, b) \subseteq I$ และ $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$(1) \quad \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

สำหรับทุก $x \neq c$ ใน (a, b)

เมื่อ $a < x < c$, $x - c < 0$ ดังนั้นใน (1) $f'(x) - f'(c) > 0$ เพราะว่า $f'(c) = 0$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ใน (a, c)

โดยทำนองเดียวกัน ถ้า $c < x < b, x - c > 0$ ดังนั้นใน(1) $f'(x) - f'(c) < 0$
 เพราะว่า $f'(c) = 0$ เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ใน (c, b)
 เพราะฉะนั้นโดยการทดสอบอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
 สำหรับข้อ(ii) ก็พิสูจน์โดยทำนองเดียวกัน #

ข้อสังเกต ในการพิสูจน์ เมื่อกำหนด $f''(c) < 0$ จะมีช่วง (a, b) ซึ่งบรรจุ c
 และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ใน (a, c) และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ใน (c, b)
 นั่นคือ ถ้า $f''(c) < 0$ จะได้ f' เป็นฟังก์ชันลดจากค่าบวกเป็นค่าลบในขณะที่ x ผ่าน c
 (รูป 8.7.3)

โดยทำนองเดียวกัน ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว f' จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มจากค่าลบเป็นค่าบวก
 ในขณะที่ x ผ่าน c (รูป 8.7.4)

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อ

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

ผลเฉลย $f'(x) = 6x - 8 = 2(3x - 4)$

$$f''(x) = 6$$

จำนวนวิกฤตของ f คือ $\frac{4}{3}$

เพราะว่า $f''(\frac{4}{3}) = 6$ ดังนั้น

$$f(\frac{4}{3}) = 3(\frac{4}{3})^2 - 8(\frac{4}{3}) + 3 = -\frac{7}{3}$$

เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และเป็นค่าต่ำสุด #

แบบฝึกหัด 8.8

ข้อ 1-ข้อ 5 ให้อ่อนพันธุ์อันดับสองหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ถ้าอ่อนพันธุ์อันดับสองที่จำนวนวิกฤตเป็นศูนย์ ให้ใช้การทดสอบอ่อนพันธุ์อันดับหนึ่ง

1. $F(x) = 8x^3 - 39x^2 + 63x + 6$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

3. $h(x) = 3x^4 - 28x^3 + 48x^2 + 192x - 24$

4. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

5. $F(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$

6. ให้ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ จงพิสูจน์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f มากกว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f พร้อมเขียนกราฟ.

8.9 โจทย์ประยุกต์ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

การแก้ปัญหาโจทย์ประยุกต์เกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด โดยทั่วไปมีขั้นตอนดังนี้

1. อ่านโจทย์ตัดสินใจว่า ปริมาณใดที่เราต้องการหาค่าสูงสุด(หรือค่าต่ำสุด) กำหนดสัญลักษณ์แทนปริมาณนั้น แล้วเขียนเป็นฟังก์ชันของ 1 ตัวแปรบางทีอาจจะมี 2 สมการ 3 ตัวแปร เราต้องขจัดให้เหลือ 1 ตัวแปร เพื่อที่จะเหลือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุด(หรือค่าต่ำสุด) กับตัวแปรอิสระ 1 ตัว
2. หาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันใน(1)
3. นำจำนวนวิกฤตมาทดสอบค่าสุดขีดสัมพัทธ์

4. หาค่าสูงสุด(หรือค่าต่ำสุด)ของฟังก์ชันโดยเปรียบเทียบค่าสุดขีดแต่ละอันกับค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายช่วงโคเมน

ตัวอย่าง 1. กระจกพื้มีพื้นที่ที่จะพื้ 50 ตารางนิ้ว มีระยะห่างจากขอบบนและขอบล่างด้านละ 4 นิ้ว และมีระยะห่างจากขอบด้านข้างด้านละ 2 นิ้ว จงหาว่ากระจกมีด้านกว้างด้านยาวยาวด้านละเท่าใดจึงจะใช้พื้นที่กระจกน้อยที่สุด

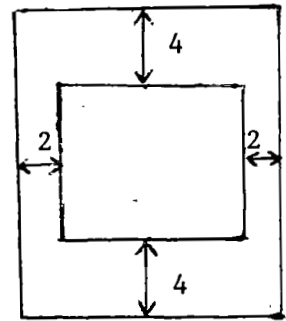
พิสูจน์ รูป 8.9.1 ให้ x เป็นความยาวด้านกว้าง

y เป็นความยาวด้านยาว

และ A เป็นพื้นที่กระจก

เพราะฉะนั้น

รูป 8.9.1



$$(1) \quad A = xy$$

เราต้องการหา A ที่เป็นค่าต่ำสุด

ใน (1) A เขียนอยู่ในรูป 2 ตัวแปร x และ y เราจะต้องหาสมการที่จะเชื่อม x และ y เพื่อจัด x หรือ y ตัวใดตัวหนึ่งในสมการ (1)

พื้นที่กระจกที่จะพื้เท่ากับ $(x-4)(y-8)$

ดังนั้น

$$(x-4)(y-8)=50$$

หรือ
$$y = 8 + \frac{50}{x-4}$$

เพราะฉะนั้น
$$A = f(x) = x\left(8 + \frac{50}{x-4}\right), \quad x > 4$$

หาจำนวนวิกฤตโดยแก้สมการ

$$f'(x) = 8 + \frac{(x-4)50-50x}{(x-4)^2}$$

$$= 8 - \frac{200}{(x-4)^2}$$

เพราะฉะนั้น $x=9$ และ -1 เป็นจำนวนวิกฤต สำหรับ $x=-1$ ไม่อยู่ในโดเมน ดังนั้น เหลือจำนวนวิกฤตที่จะนำมาทดสอบค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด คือ $x=9$

ทดสอบอนุพันธ์อันดับสอง

$$f''(x) = \frac{200(2)(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{400}{(x-4)^3}$$

เพราะฉะนั้น $f''(9) = \frac{400}{(9-4)^3} > 0$

ดังนั้น $f(9) = 9\left(8 + \frac{50}{9-4}\right) = 162$ เป็นค่าต่ำสุด

เมื่อ $x=9$ จะได้ $y = 8 + \frac{50}{9-4} = 18$

ดังนั้นใช้พื้นที่กระดานน้อยที่สุดสำหรับการพิมพ์คือ กว้าง 9 นิ้ว และยาว 18 นิ้ว #

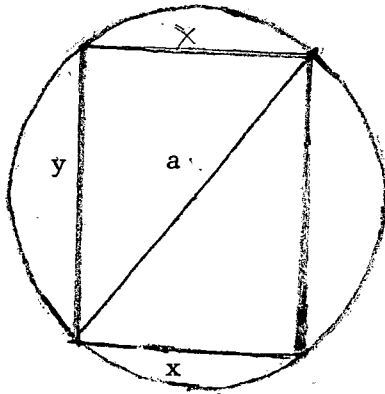
ตัวอย่าง 2. คานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ตัดจากซุงมีภาคตัดขวางเป็นวงกลม เส้นผ่าศูนย์กลางยาว a หน่วย ถ้าความแข็งแรงของคานเป็นสัดส่วนตรงกับความกว้างและกำลังสองของความหนา จงหาขนาดของคานที่แข็งแรงที่สุด

เฉลย รูป 8.9.2

ให้ x เป็นความกว้างของคาน

y เป็นความยาวของคาน

และ s เป็นความแข็งแรงของคาน



รูป 8.9.2

เราต้องการหา s ที่มากที่สุด นั่นคือจะหา x และ y ที่ทำให้ s มากที่สุดจากเงื่อนไข

$$(1) \quad S = kxy^2$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวสัดส่วน
เนื่องจาก

$$(2) \quad y^2 = a^2 - x^2$$

นำไปแทนใน(1)

$$S = kx(a^2 - x^2)$$

$$(3) \quad = k(a^2x - x^3)$$

หาจำนวนวิกฤตของ s โดยแก้สมการ

$$\frac{dS}{dx} = k(a^2 - 3x^2) = 0$$

ได้ $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนวิกฤตของ S เพียงจำนวนเดียว

นำ $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ มาทดสอบค่าสุดขีด

$$\frac{d^2S}{dx^2} \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right) = -6k \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} < 0$$

ดังนั้น $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ เป็นความกว้างของคานที่ทำให้คานแข็งแรงที่สุด

นำ x แทนใน (2) หาค่า y

$$y^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

นั่นคือ $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

ดังนั้นคานกว้าง $\frac{a}{\sqrt{3}}$ และหนา $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ จะทำให้คานแข็งแรงที่สุด #

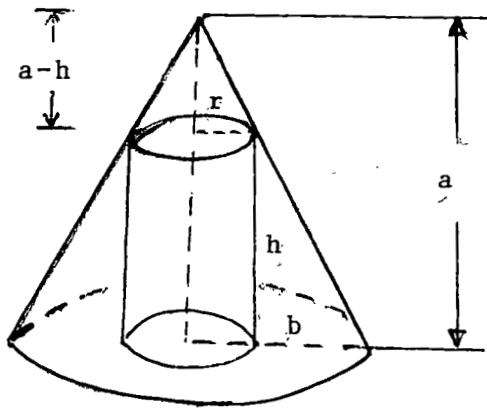
ตัวอย่าง 3. หาขนาดของทรงกระบอกกลมตรง (right circular cylinder) ซึ่งมีปริมาตรมากที่สุดที่บรรจุในกรวยกลมตรง (right circular cone)

เฉลย รูป 8.9.3

ให้ a เป็นความสูงของกรวยกลมตรง

b เป็นรัศมีฐานของกรวยกลมตรง

h เป็นความสูงของทรงกระบอกกลมตรงที่บรรจุในกรวย



รูป 8.9.3

r เป็นรัศมีฐานทรงกระบอกกลมตรงที่บรรจุกรวยกลมตรง
 V เป็นปริมาตรทรงกระบอกกลมตรงที่บรรจุกรวยกลมตรง

เพราะฉะนั้น V, r, h เป็นตัวแปร a และ b เป็นค่าคงตัว
 ปริมาตรทรงกระบอกกรวยกลมตรงคือ

$$(1) \quad V = \pi r^2 h$$

โดยสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{r}{a-h} = \frac{b}{a}$$

$$(2) \text{ หรือ } r = b \frac{a-h}{a}$$

หาอนุพันธ์(1) เทียบกับ h

$$(3) \quad D_h V = \pi r^2 + 2\pi r h D_h r$$

$$\text{ให้} \quad D_h V = \pi r^2 + 2\pi r h D_h r = 0$$

$$(4) \quad \text{จะได้} \quad D_h r = -\frac{r}{2h}$$

โดย(2)

$$(5) \quad D_h r = -\frac{b}{a}$$

จาก(4) และ(5)

$$(6) \quad r = \frac{2bh}{a}$$

โดย(6) และ(2) จะได้

$$h = \frac{a}{3}, \quad r = \frac{2b}{3}$$

เนื่องจากค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจะต้องมาจากจำนวนวิกฤต เพราะฉะนั้น $h = \frac{a}{3}$
และ $r = \frac{2b}{3}$ จะเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

แต่ทรงกระบอกที่บรรจุกรวยและมีปริมาตรน้อยที่สุดคือ ทรงกระบอกที่ $r=b$ และ $r=0$
ดังนั้นเมื่อ $h = \frac{a}{3}$ และ $r = \frac{2b}{3}$ จะเป็นค่าที่ให้ปริมาตรทรงกระบอกมากที่สุดที่บรรจุใน
กรวย

นั่นคือ ปริมาตรทรงกระบอกที่บรรจุกรวยมีปริมาตรมากที่สุดคือ สูง $\frac{1}{3}$ ของความสูง
ของกรวย และรัศมีฐานทรงกระบอก $\frac{2}{3}$ ของรัศมีฐานของกรวย

แบบฝึกหัด 8.9

1. จงหาจำนวน 2 จำนวน ซึ่งผลบวกเป็น 8 และผลคูณของจำนวนหนึ่งกับกำลังสามของอีกจำนวนหนึ่งมากที่สุด
2. จำนวนใดที่มีค่ามากกว่ากำลังสองของจำนวนนั้นมากที่สุด
3. สนามเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีพื้นที่ 200 ตารางหน่วย มีด้านหนึ่งติดแม่น้ำ ถ้าต้องการล้อมรั้วสนามโดยด้านติดแม่น้ำไม่ใช้รั้ว ขนาดของสนามเป็นอย่างไร จึงจะใช้รั้วยาวน้อยที่สุด
4. สนามสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถูกแบ่งเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 รูป (รูป 8.9.4) ถ้าพื้นที่รวมของสนาม 600 ตารางฟุต จงหาขนาดของสนามที่จะใช้รั้วยาวน้อยที่สุด



รูป 8.9.4

5. จงหาปริมาตรมากที่สุดของกล่อง ที่ทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ 24×24 ตารางนิ้ว โดยตัดสี่มุมของกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาดเท่ากันออก แล้วพับขึ้นเป็นฝากล่อง (กล่องไม่มีฝาปิดด้านบน)
6. จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $(3, -4)$ มากที่สุด
7. จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดบนเส้นโค้ง $y = \frac{x+1}{9-x}$ สำหรับช่วง
 - a. $1 \leq x \leq 4$
 - b. $4 \leq x \leq 6$
8. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มากที่สุดที่บรรจุในวงกลมรัศมี r
9. จงหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุด ที่มีมุมบนอยู่บนแกน x และมุมล่างอยู่บนเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2 - 27$

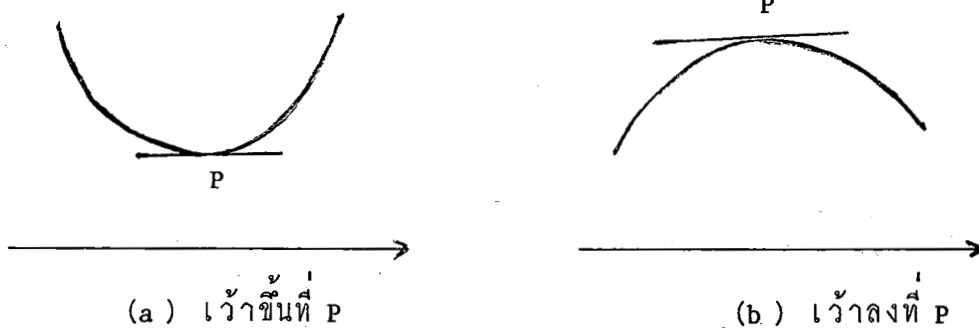
10. ลวดยาว 16 นิ้วถูกตัดเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่งตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส อีกส่วนตัดเป็นวงกลม จงหาว่าจะตัดอย่างไร จึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่มีค่าน้อยที่สุด
11. หน้าต่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านบนเป็นรูปครึ่งวงกลม มีรัศมีเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านกว้าง ถ้าความยาวของกรอบหน้าต่าง 16 ฟุต หน้าต่างจะมีพื้นที่มากที่สุดเท่าใด
12. หน้าต่างมีด้านล่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านบนเป็นครึ่งวงกลม มีพื้นที่ A จงหาความยาวของกรอบหน้าต่างที่มีค่าน้อยที่สุด
13. เมือง A อยู่ที่ $(0, 6)$ และเมือง B อยู่ที่ $(21, 8)$ ป้อนน้ำจากจุด P บนแกน x ไปยังเมืองทั้งสอง จุด P จะอยู่ตำแหน่งใดระยะทาง $AP+PB$ จึงจะน้อยที่สุด
14. จงหาปริมาตรมากที่สุดของกรวยกลมที่บรรจุในทรงกลมรัศมี r
15. เทียนอกน้ำแก้วรูปทรงกระบอก มีผิวโลหะขนาดความจุ V ลูกบาศก์นิ้ว ถ้าโลหะแพงเป็น 3 เท่าของแก้ว จงหาอัตราส่วนของรัศมีและส่วนสูงของเทียนอกน้ำที่จะทำให้ราคาถูกที่สุด
16. เกาะเล็กๆแห่งหนึ่ง อยู่ห่างจากฝั่ง 2 ไมล์และมีเมืองอยู่บนชายฝั่งห่างจากจุดบนฝั่งที่ใกล้เกาะที่สุดเป็นระยะ 10 ไมล์ ชายคนหนึ่งพายเรือได้เร็ว 3 ไมล์ ชั่วโมง และเดินเร็ว 4 ไมล์/ชั่วโมง จงหาจุดบนฝั่งที่เขาจะพายเรือไปจอดแล้วเดินไปยังเมืองโดยใช้เวลาน้อยที่สุด
17. โรงไฟฟ้าตั้งอยู่ริมฝั่งแม่น้ำ มีความกว้าง 100 เมตร มีโรงงานตั้งอยู่อีกฝั่งหนึ่งของแม่น้ำ โดยตั้งเยื้องไปห่างจากจุดตรงกันข้ามเป็นระยะ 300 เมตร ต้องการจะต่อสายไฟฟ้าจากโรงไฟฟ้าไปยังโรงงาน ถ้าสายไฟฟ้าที่ขึงในแม่น้ำราคาเมตรละ 700 บาท ที่ขึงบนบกราคาเมตรละ 50 บาท จงหาจุดที่จะโยงสายไฟจากโรงไฟฟ้ามายังฝั่งตรงกันข้าม เพื่อให้ได้สายไฟทั้งหมดราคาต่ำสุด
18. รวงส่งน้ำหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไม่มีฝาปิด พื้นที่หน้าตัดเท่ากับ A ต้องฉาบปูนภายในกันน้ำซึม จงหาว่ารวงส่งน้ำ มีขนาดกว้างและลึกเท่าไรจึงจะเปลืองคอนกรีตน้อยที่สุด
19. ความสว่างของแสงที่จุดหนึ่ง เป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของระยะทางระหว่างจุด

กับแหล่งกำเนิด และเป็นสัดส่วนตรงกับความเข้มของแสงที่แหล่งกำเนิด ถ้ามีแหล่งกำเนิดแสงสองแห่งอยู่ห่างกัน s และมีความเข้ม I_1 และ I_2 ตามลำดับ จงหาจุดระหว่างแหล่งกำเนิดที่ผลบวกของความสว่างมีค่าน้อยที่สุด

20. อุโมงรถไฟหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและมีหลังคาเป็นรูปครึ่งวงกลม พื้นที่หน้าตัดส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยมเท่ากับ A ถ้าราคาของการสร้างหลังคาต่อตารางเมตรราคาแพงเป็นสองเท่าของพื้นและฝาผนัง จงหาสัดส่วนที่เหมาะสมของอุโมงที่จะทำให้ราคาก่อสร้างน้อยที่สุด

8.10 การเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

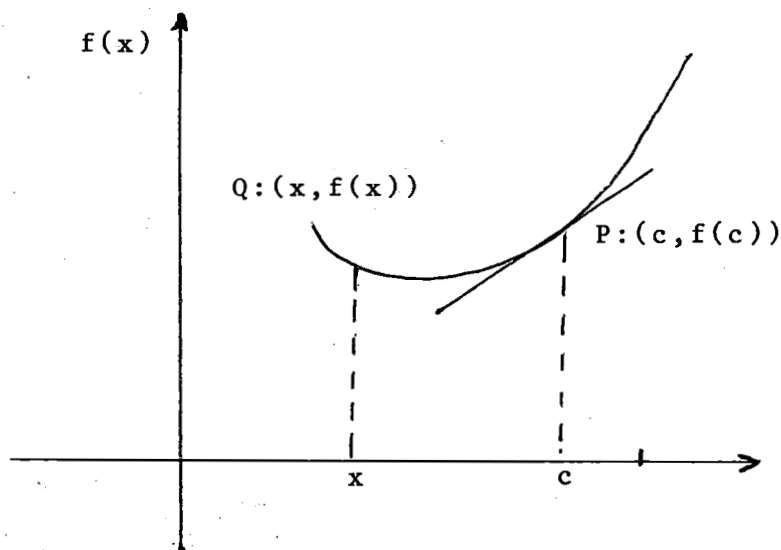
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ P เป็นจุดบนกราฟของ f ถ้าจุดใดๆ P ทั้งหมดอยู่เหนือเส้นสัมผัสกราฟ f ที่จุด P เราจะกล่าวว่ากราฟเว้าขึ้น (concave upward) ที่จุด P (รูป 8.10.1 (a))



รูป 8.10.1

ถ้าจุดใดจุด P ทั้งหมดอยู่ต่ำกว่าเส้นสัมผัสที่ P เราจะกล่าวว่ากราฟเว้าลงที่จุด P (รูป 8.10.1 (b))

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) และ c เป็นจุดข้างใน (a, b) (รูป 8.10.2)



รูป 8.10.2

สมการเส้นสัมผัสกราฟ f ที่ $P: (c, f(c))$ คือ

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

หรือ

$$(1) \quad y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

ให้ x เป็นจุดใดๆ ที่ต่างจาก c ใน (a, b) จะสมนัยกับจุด $Q: (x, f(x))$ บนกราฟ ถ้าลากเส้นตรงแนวนิ่งผ่าน x ตัดเส้นสัมผัส (1) ที่จุด T แล้วเส้นโค้งจะอยู่เหนือเส้นสัมผัส ถ้า Q อยู่เหนือ T

เพราะว่าพิกัด y ของ Q คือ $f(x)$ และจาก (1) พิกัด y ของ T คือ $f(c) + f'(c)(x - c)$ ดังนั้นจุด Q อยู่เหนือ T ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$$

โดยทำนองเดียวกัน จุด Q อยู่ใต้ T ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x-c)$$

เราสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

8.10.1 ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันมีอนุพันธ์บนช่วง I และ c เป็นจุดข้างใน I

- (i) กราฟของ f เวก้าขึ้นที่จุด $P:(c, f(c))$ ถ้ามีช่วงเปิด $(a, b) \subseteq I$ และ $c \in (a, b)$ มีคุณสมบัติสำหรับทุก x ใน (a, b) และ $x \neq c$

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x-c)$$

- (ii) กราฟของ f เวก้าลงที่จุด P ถ้ามีช่วงเปิด $(a, b) \subseteq I$ ซึ่ง $c \in I$ และ สำหรับทุก x ใน (a, b) และ $x \neq c$

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x-c)$$

ถ้า f มีอนุพันธ์บนช่วง I เราจะกล่าวว่ากราฟของ f เวก้าขึ้นบนช่วง I ถ้ากราฟ เวก้าขึ้นทุกจุดข้างใน I เราจะกล่าวว่ากราฟของ f เวก้าลงบนช่วง I ถ้ากราฟ f เวก้าลงทุกจุดข้างใน

8.10.2 ทฤษฎีบท ให้ f มีอนุพันธ์บนช่วง I และให้ f' มีทุกจุดข้างใน I

- (i) ถ้า $f''(x) > 0$ ทุกจุด x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I แล้วกราฟของ f จะเวก้าขึ้นบน I
 (ii) ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุกจุด x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I แล้วกราฟของ f จะ เวก้าลงบน I

พิสูจน์ (i) สมมุติ $f''(x) > 0$ สำหรับทุกจุด x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I และ c เป็นจุดข้างใน I โดย 8.6.1 ทฤษฎีบท

สำหรับ x ซึ่งเป็นจุดข้างใน I และ $x \neq c$ จะมี z อยู่ระหว่าง c และ x ซึ่ง

$$(1) \quad f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2}f''(z)$$

เพราะว่า z เป็นจุดข้างใน I เพราะฉะนั้น $f''(z) > 0$ ดังนั้น

$$\frac{1}{2}(x-c)^2 f''(z) > 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \neq c$$

เพราะฉะนั้นจาก (1)

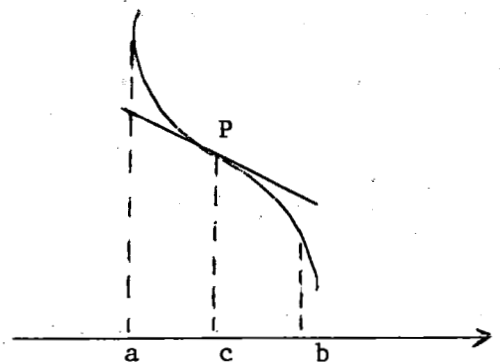
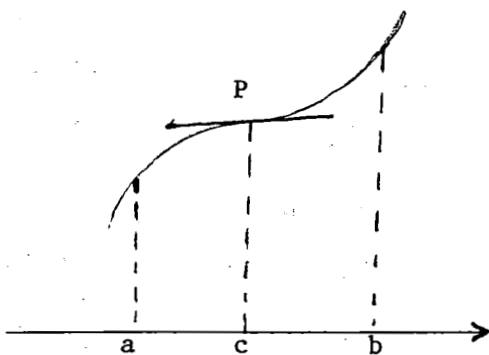
$$f(x) > f(c) + (x-c)f'(c) \quad \text{สำหรับทุกจุดข้างใน } x \text{ ของ } I \text{ และ } x \neq c$$

ดังนั้นโดย 8.10.1 กราฟของ f เว้าขึ้นที่ $P:(c, f(c))$ แต่ c เป็นจุดใดๆที่เป็นจุดข้างใน I เพราะฉะนั้นกราฟของ f เว้าขึ้นบน I

สำหรับข้อ(ii) ก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน

#

ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีเส้นสัมผัสที่จุด P และที่จุดใกล้เคียง P ทั้งหมดทางด้านหนึ่งของ P อยู่เหนือเส้นสัมผัสที่ P และที่จุดใกล้เคียง P ทั้งหมดอีกทางด้านหนึ่งของ P อยู่ใต้เส้นสัมผัสที่ P เราจะกล่าวว่า P เป็นจุดเปลี่ยนเว้า (point of inflection) (รูป 8.10.3)



รูป 8.10.3 จุดเปลี่ยนเว้า

แน่นอนเส้นโค้งจะตัดเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนเว้า

8.10.3 บทนิยาม ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f มีเส้นสัมผัสที่จุด $P: (c, f(c))$ เราจะกล่าวว่าจุด $P: (c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f ถ้ามีช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และกราฟ f เวกขึ้น (เว้าลง) บน (a, c) และเว้าลง (เว้าขึ้น) บน (c, b)

ทฤษฎีบทต่อไปจะช่วยในการหาจุดเปลี่ยนเว้าของกราฟ

8.10.4 ทฤษฎีบท ให้ f มีอนุพันธ์บนช่วง I และ c เป็นจุดข้างใน I และ f'' ต่อเนื่องที่ c ถ้า $P: (c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f แล้ว $f''(c) = 0$

พิสูจน์ เพราะว่า $f''(c)$ มี จึงเป็นจำนวนบวก ลบ หรือไม่มีศูนย์

เราจะพิสูจน์ว่า $f''(c)$ ไม่เป็นบวกหรือลบ

สมมุติ $f''(c) > 0$ เพราะว่า f'' ต่อเนื่องที่ c โดยแบบฝึกหัด 4.6 ข้อ 14 จะมีช่วงเปิด $(a, b) \subseteq I$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f''(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (c, a)$

โดย 8.10.2 ทฤษฎีบท f จะเว้าขึ้นบนช่วง (a, b) ซึ่งขัดแย้งที่ว่า $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า ดังนั้น $f''(c)$ ไม่เป็นบวก

โดยทำนองเดียวกัน $f''(c)$ ไม่เป็นลบ เพราะฉะนั้น $f''(c) = 0$ #

$f''(c) = 0$, $(c, f(c))$ อาจจะไม่เป็นจุดเปลี่ยนเว้าก็ได้ดังตัวอย่างเช่น

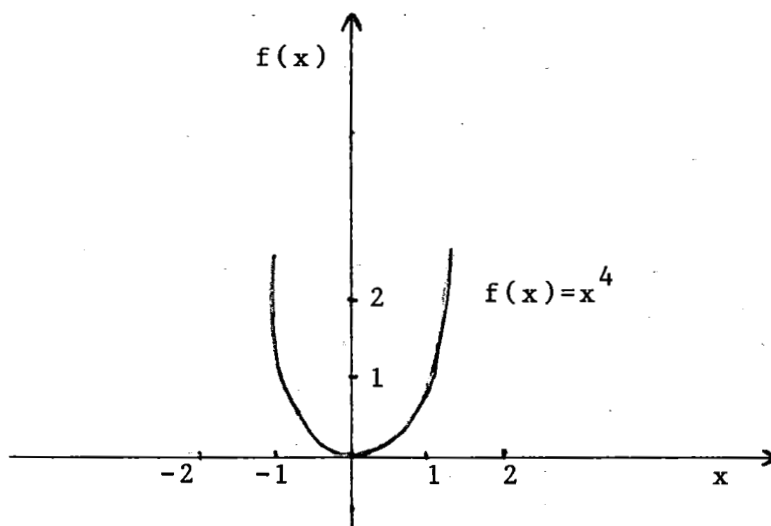
$f(x) = x^4$, $f''(x) = x^2$ และ $f''(0) = 0$ แต่กราฟของ f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า (รูป 8.10.4)

บางครั้ง $f''(c)$ ไม่มี แต่ f มีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $(c, f(c))$ ตัวอย่างเช่น

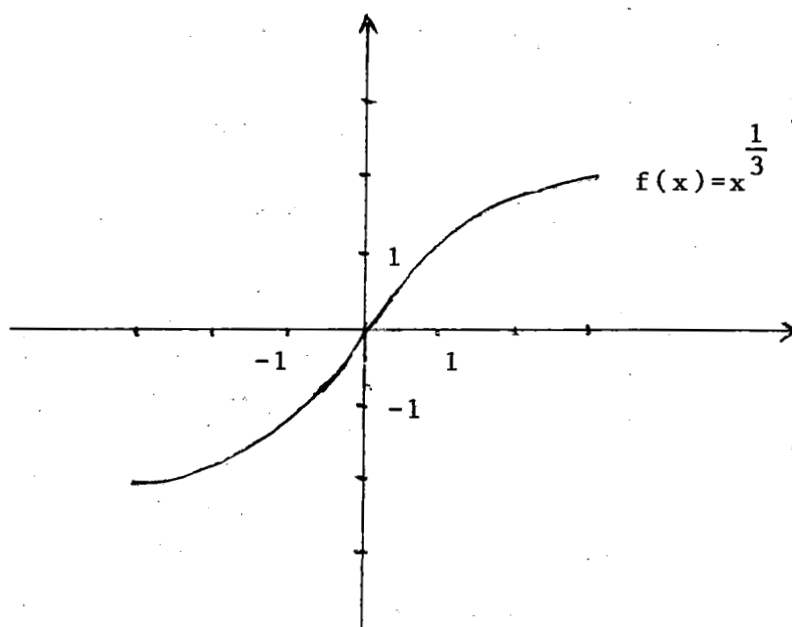
ตัวอย่างเช่น

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ ดังนั้น $f''(0)$ ไม่มี แต่ $(0, 0)$ เป็น

จุดเปลี่ยนเว้า (รูป 8.10.5)



§1 8.10.4



§1 8.10.5

ตัวอย่าง 1. ให้ $y = x^3 - 3x^2 + 2$ จงหาช่วงซึ่งกราฟเฝ้าขึ้นและช่วงซึ่งกราฟเฝ้าลง

เฉลย $y' = 3x^2 - 6x$

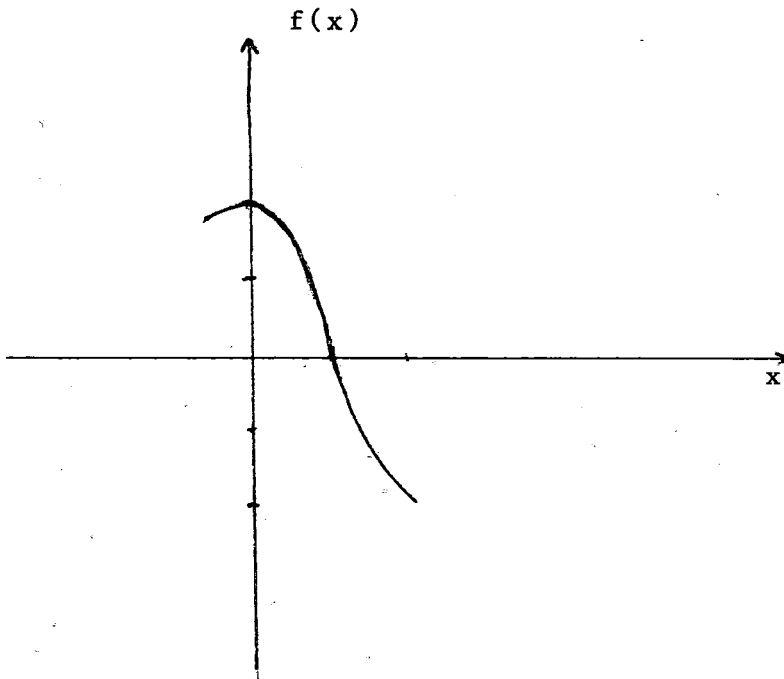
$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

y'' เป็นลบ สำหรับ $x < 1$

y' เป็นศูนย์ สำหรับ $x = 1$

y'' เป็นบวก สำหรับ $x > 1$

ดังนั้นกราฟเฝ้าลงทางซ้ายของ $x = 1$ เฝ้าขึ้นทางขวาของ $x = 1$ จุด $(1, 0)$ เป็นจุดเปลี่ยนเฝ้า (รูป 8.10.6)



รูป 8.10.6

แบบฝึกหัด 8.10

ข้อ 1-ข้อ 6 จงหาช่วงซึ่งกราฟเว้าขึ้น เว่าลง หาจุดเปลี่ยนเว้า(ถ้ามี)

1. $f(x) = 4x - x^2$

2. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

3. $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$

4. $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$

5. $H(x) = x^3 |x|$

6. $f(x) = \frac{3}{2+x^2}$

8.11 ลิมิต $x \rightarrow \infty$ และ เส้นกำกับ(Asymptotes)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(100) = 0.01, f(10,000) = 0.0001, f(1,000,000) = 0.000001$$

จะเห็นว่าเราสามารถทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ศูนย์โดยให้ x มีค่ามาก กรณีแบบนี้เรา
กล่าวว่า ลิมิตของ f เท่ากับศูนย์เมื่อ x เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต และเขียนแทนด้วย
สัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

8.11.1 บทนิยาม เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ f เท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์

และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ หรือ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

ถ้าโดเมน f ไม่มีขอบเขตบน และ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีจำนวน M ซึ่ง
 $x > M$ และ $x \in D_f \implies |f(x) - L| < \epsilon$

8.11.2 บทนิยาม เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ f เท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ลบอนันต์
 และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

ถ้าโดเมนของ f ไม่มีขอบเขตล่าง และสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีจำนวน M ซึ่ง
 $x < M$ และ $x \in D_f \implies |f(x) - L| < \epsilon$

ตัวอย่าง 1. จงพิสูจน์ ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวก $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เพราะฉะนั้นสำหรับ $x > 0$

$$\left| \frac{1}{x^p} - 0 \right| < \epsilon \iff \frac{1}{x^p} < \epsilon \iff 0 < \frac{1}{x^p} < \epsilon$$

$$\text{แต่ } x > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{p}}} > 0 \implies x^p > \frac{1}{\epsilon} > 0 \implies 0 < \frac{1}{x^p} < \epsilon$$

ดังนั้น ถ้าเราเลือก $M = \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{p}}}$ ก็จะได้ว่า

$$x > M \implies \left| \frac{1}{x^p} - 0 \right| < \epsilon$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$

#

ทฤษฎีบทลิมิต 4.4.1 ทฤษฎีบทจะจริงสำหรับลิมิตเมื่อ $x \rightarrow \infty$ หรือ $x \rightarrow -\infty$
การพิสูจน์ก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 2. จงหา $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-5x+x^2}{8+3x+2x^2}$

เฉลย ให้ $x \neq 0$ หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-5x+x^2}{8+3x+2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x} + 1}{\frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 2} = \frac{1}{2}$$

พิจารณา $\frac{1}{x-2}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางขวา
เมื่อ $x > 2$, $\frac{1}{x-2}$ จะเป็นบวกและ $\frac{1}{x-2}$ จะเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต ถ้าเราให้
เข้าใกล้ 2 มากพอ เราจะเขียนแทนความหมายนี้ด้วย

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

8.11.3 บทนิยาม เราจะกล่าวว่า f เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ x เข้าใกล้ c
ทางขวาและเขียนแทน $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$
ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก M จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $(c, c+\delta)$ อยู่ในโดเมนของ f
และ

$$0 < x - c < \delta \implies f(x) > M$$

ดังนั้นเมื่อเราเขียน $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ ก็มีความหมายว่า f ไม่มีลิมิตทางขวาที่ c
เพราะ f มีค่าเพิ่มไม่มีขอบเขตเมื่อ $x \rightarrow c^+$

โดยทำนองเดียวกัน เราก็สามารถให้บทนิยาม

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

8.11.4 บทนิยาม เราจะกล่าวว่า f เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตเมื่อ x เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ถ้าโดเมนของ f ไม่มีขอบเขตบน และสำหรับแต่ละจำนวนบวก M จะมีจำนวนบวก N ซึ่ง

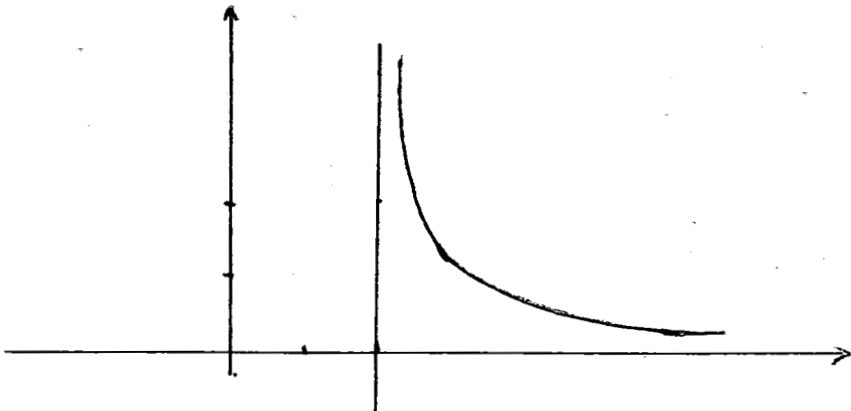
$$x > N \quad \text{และ} \quad x \in D_f \implies f(x) > M$$

$$\text{บทนิยาม} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

ก็เขียนได้ทำนองเดียวกัน

$$\text{ให้ } f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad x > 2 \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

กราฟของ f สำหรับ $x > 2$ เขียนได้ดังรูป 8.11.1



รูป 8.11.1

เมื่อ $x \rightarrow 2^+$ จุด $P:(x, f(x))$ บนกราฟของ f สูงขึ้นโดยไม่มีขอบเขต และเข้าใกล้เส้นแนวดิ่ง $x=2$ เส้นตรง $x=2$ เรียกว่า เส้นกำกับแนวดิ่ง (vertical asymptote) ของกราฟของ f

8.11.5 บทนิยาม เส้นตรง $x=c$ เรียกว่าเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของฟังก์ชัน ถ้าข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$$

8.11.6 บทนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ หรือ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

เส้นตรง $y=b$ เรียกว่า เส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} = 0$

แกน x เป็นเส้นกำกับแนวนอนของ f

8.11.7 บทนิยาม เส้นตรง $y=ax+b$ เป็นเส้นกำกับของฟังก์ชัน f ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

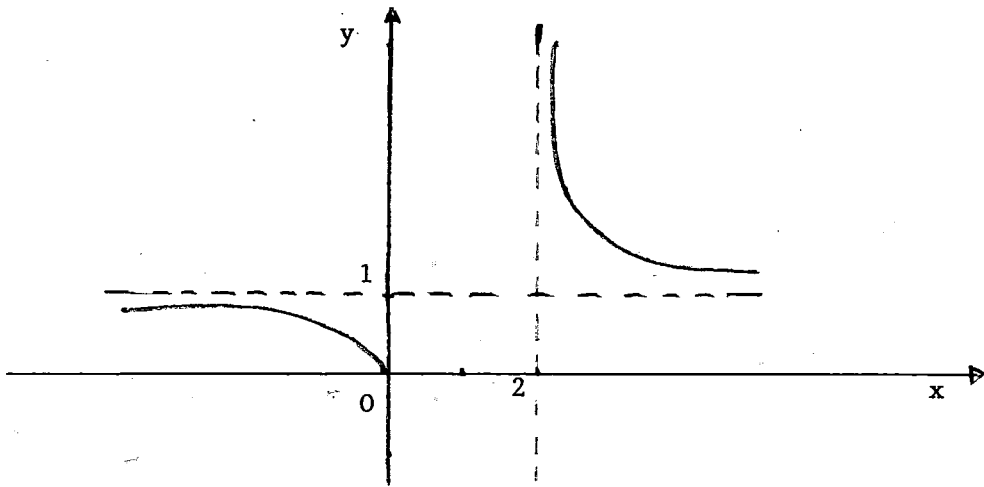
หรือ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

ตัวอย่าง 3. หาเส้นกำกับแนวดิ่งและเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f ถ้า

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

เฉลย เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \infty$ ดังนั้นเส้นตรง $x=2$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่ง
ของกราฟของ f (รูป 8.11.2)



รูป 8.11.2

หารทั้งเศษและส่วนด้วย $x \neq 0, x \neq 2$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}}} = 1$$

และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}}} = 1$

ดังนั้น $y=1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน

ตัวอย่าง 4. จงหาเส้นกำกับซึ่งไม่อยู่ในแนวนอนของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{4x^3 + 7x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$$

เฉลย $f(x) = 4x^3 + 7x^2 + 4x + 4 = 4(x+7) - \frac{3}{x^2 + 1}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} [(4x+7) - \frac{3}{x^2 + 1} - (4x+7)] = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{3}{x^2 + 1} = 0$

ดังนั้นโดย 8.11.7บทนิยาม เส้นตรง $y=4x+7$ เป็นเส้นกำกับของ f #

แบบฝึกหัด 8.11

ข้อ 1-ข้อ 5 จงหาลิมิต

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{x-1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x+x^2}{7+4x-5x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n}$ สำหรับ $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ และ $n \in \mathbb{N}$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+5} - \sqrt{2x^2-3})$$

[แนะ : คูณและหารด้วย $\sqrt{2x^2+5} + \sqrt{2x^2-3}$]

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2-1}}$$

$$6. \quad \text{จงเขียนนิยามของ } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \quad (\text{แนะ ดู 8.11.3 บทนิยาม})$$

$$7. \quad \text{จงพิสูจน์ ถ้า } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = M \quad \text{แล้ว}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = L - M$$

ข้อ8-ข้อ9 จงหาลิมิต

$$8. \quad \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{4+t}{4-t}$$

$$9. \quad \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{4+t}{4-t}$$

$$10. \quad \text{จงเขียนนิยาม } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$11. \quad \text{จงหา } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$$

ข้อ12-ข้อ16 จงหาเส้นกำกับแนวนอนและเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟและเขียนกราฟ

$$12. \quad f(x) = \frac{5-x^2}{9-x^2}$$

$$13. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$14. \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$15.. \quad f(x) = \frac{25x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$16. \quad f(x) = \frac{3x^2 - 16}{2x^2 - 7x - 4}$$

ข้อ 17-ข้อ 20 จงหาเส้นกำกับของกราฟทั้งหมด

$$17. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$18. \quad y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

$$19. \quad y = x + \frac{1}{x^2}$$

$$20. \quad f(x) = \frac{3x^2 + 14x - 3}{x + 5}$$

8.12 การเขียนกราฟ

การเขียนกราฟเราจะเริ่มโดยการทดสอบการสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนพิกัด หรือ จุดกำเนิด ถ้าสะดวกที่จะหาส่วนตัดก็ควรหาส่วนตัด x และส่วนตัด y หาโดเมนและเรนจ์ ของฟังก์ชัน หาจำนวนวิกฤตเพื่อนำมาทดสอบค่าสุดขีดสัมพัทธ์และพิจารณาเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน โดยใช้จำนวนวิกฤตเป็นหลัก ทดสอบอนุพันธ์อันดับสองเพื่อหาช่วงที่กราฟเว้าขึ้น หรือเว้าลง และหาจุดเปลี่ยนเว้า และบางครั้งอาจจะต้องหาเส้นกำกับ เพื่อช่วยให้เขียนกราฟได้เร็วขึ้น

ตัวอย่าง 1. จงวิเคราะห์และเขียนกราฟ $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

เฉลย สมการ $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} = 0$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนจริง ดังนั้นกราฟของ f ไม่มีส่วนตัด x และเพราะว่า $x=0$ ไม่อยู่ในโดเมน f กราฟ f จึงไม่มีส่วนตัด y เพราะว่ $f(-x) = -f(x)$ ดังนั้น เป็นฟังก์ชันคี่ และกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

สำหรับ $x > 0$, $f(x) > 0$

สำหรับ $x < 0$, $f(x) < 0$

ดังนั้น กราฟของ f จะอยู่ในจุดกุดภาคที่ 1 และจุดกุดภาคที่ 3

เนื่องจากกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด เราจะวิเคราะห์กราฟเฉพาะในจุดกุดภาคที่ 1

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

จำนวนวิกฤตของ f คือ ± 1

พิจารณาเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้จำนวนวิกฤตเป็นหลัก

สำหรับ $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$

สำหรับ $x > 1$, $f'(x) > 0$

ดังนั้น f ลดลงบนช่วง $(0, 1)$ และเพิ่มขึ้นบนช่วง $(1, \infty)$

ดังนั้น $f(1) = 2$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

จาก

$$f''(x) = \frac{2x^3 - (x^2 - 1)2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

สำหรับ $x > 0$, $f''(x) > 0$ ดังนั้นกราฟของ f เว้าขึ้นบนช่วง $(0, \infty)$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ ดังนั้นแกน y เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟ f ไม่มีเส้นกำกับแนวนอน แต่

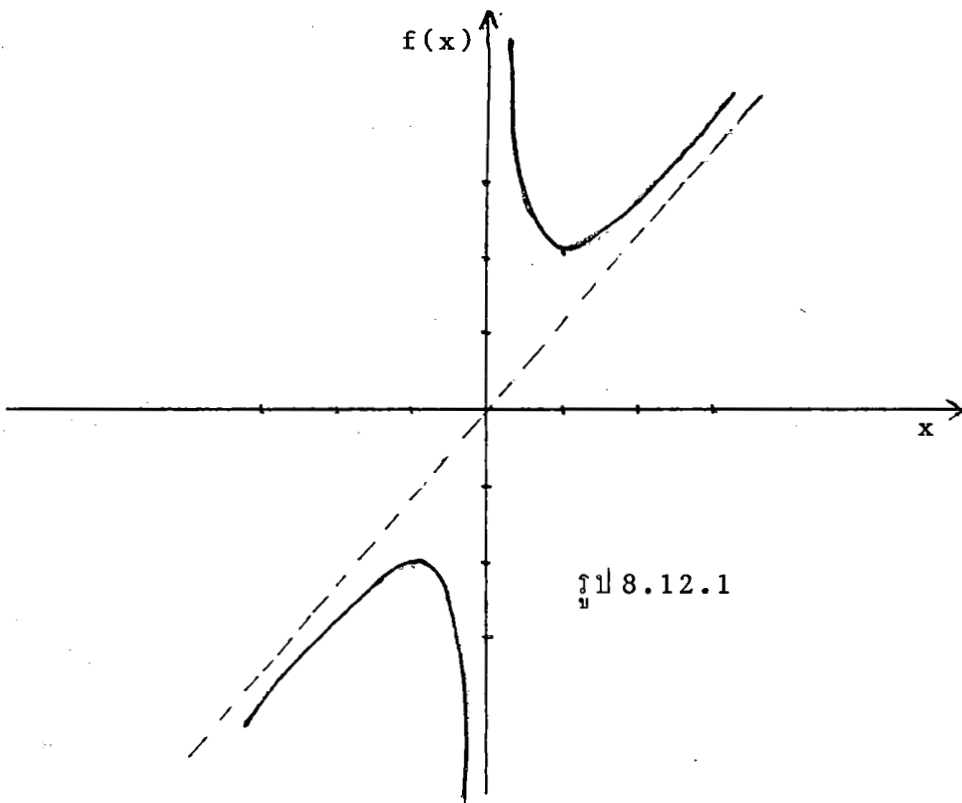
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - x \right] + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ดังนั้นเส้นตรง $y=x$ เป็นเส้นกำกับ

เขียนจุด $(1, 2)$ ซึ่งเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และเขียนอีก 2-3 จุด ในจุดตัดภาคที่ 1 คือ $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (4, \frac{9}{2})$ หรือจะเขียนมากกว่านี้

โดยข้อมูลที่วิเคราะห์มา เราสามารถเขียนกราฟของ f ในจุดตัดภาคที่ 1 ได้ สำหรับส่วนที่เหลือในจุดตัดภาคที่ 2 สามารถเขียนได้จากการสมมาตร ดังรูป 8.12.1

#



ตัวอย่าง 2. วิเคราะห์และเขียนกราฟของ f เมื่อ $f(x) = |1 - x^2|$

เฉลย เขียนฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

เพราะว่า $f(x) = f(-x)$ ดังนั้นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ เรนจ์ของ f คือ $[0, \infty)$ ดังนั้นกราฟสามารถขยายไปได้ไกลไม่มีขอบเขตทั้งทางขวาและทางซ้าย และไม่มีกราฟอยู่ใต้แกน x กราฟจะอยู่ในจุดตกภาคที่ 1 และจุดตกภาคที่ 2

ส่วนตัด x คือ $x = \pm 1$

ส่วนตัด y คือ $y = 1$

เนื่องจากกราฟสมมาตร เราจะวิเคราะห์กราฟในจุดตกภาคที่ 1

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq 1 \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

จำนวนวิกฤตของ f คือ $-1, 0, 1$

พิจารณาเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้จำนวนวิกฤตเป็นหลัก

$$0 < x < 1, \quad f'(x) < 0$$

$$x > 1, \quad f'(x) > 0$$

ดังนั้น f ลดลงบนช่วง $[0, 1]$ และเพิ่มขึ้นบนช่วง $[1, \infty)$ เพราะฉะนั้น $f(1) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

จาก

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < -1 \text{ หรือ } x > 1 \\ -2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

เนื่องจากไม่มีจุดซึ่ง $f''(x) = 0$ แต่มีจุด $x = -1$ และ 1 เป็นจุดที่ไม่มีอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นเราจะใช้ 1 และ -1 เป็นหลักในการพิจารณาการเว้าขึ้นและเว้าลง

สำหรับ

$$0 < x < 1, \quad f''(x) < 0$$

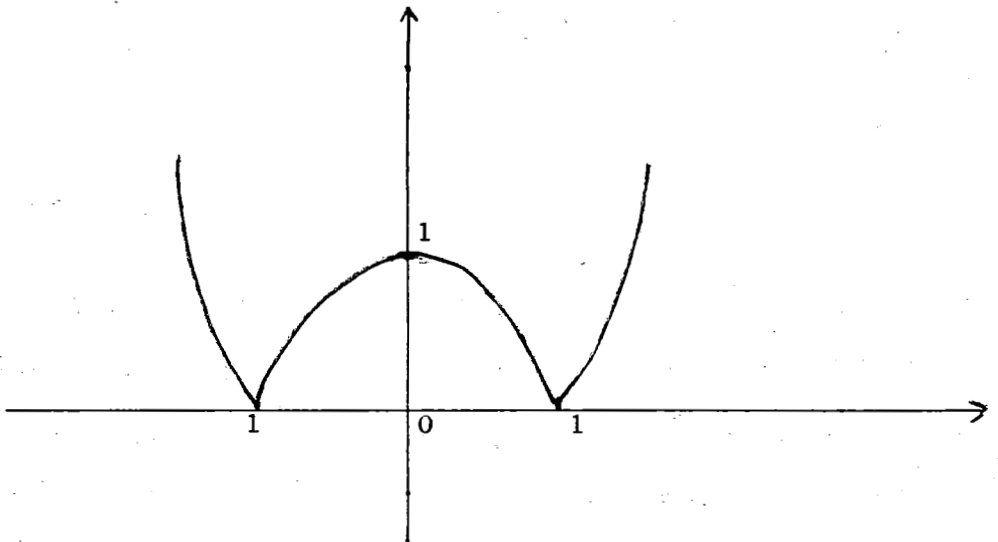
$$x > 1, \quad f''(x) > 0$$

ดังนั้นกราฟจะลดลงบนช่วง $[0, 1]$ และเพิ่มขึ้นบนช่วง $[1, \infty)$ เพราะฉะนั้นจุด $(1, 0)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

เขียนจุด $(0, 1)$ และ $(1, 0)$ ซึ่งเป็นส่วนตัดกราฟ จุด $(1, 0)$ ซึ่งเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ลงบนกราฟ และจุดอื่นๆอีก 2-3 จุด คือ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ หรือมากกว่านี้

โดยข้อมูลทั้งหมดที่วิเคราะห์มา เราจะได้กราฟในจุดดัดงอที่ 1 สำหรับส่วนที่เหลือก็สามารถเขียนได้โดยการสมมาตร ดังรูป 8.13.2

#



รูป 8.12.2

ตัวอย่าง 3. จงวิเคราะห์และเขียนกราฟ $y = x^3 - 3x^2 + 1$

เฉลย โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ เรนจ์ของ f คือ $\mathbb{R}$ ดังนั้นกราฟสามารถขยายไปได้ไกล

โดยไม่มีขอบเขตทั้ง 2 ข้าง

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

จำนวนวิกฤตคือ 0, 2

สำหรับ $x < 0$, $f'(x) > 0$

สำหรับ $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$

สำหรับ $x > 2$, $f'(x) > 0$

ดังนั้น f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0]$ และบนช่วง $[2, -\infty)$ ลดลงบนช่วง $[0, 2]$

$f(0) = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$f(2) = -3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$$

หาจุดเปลี่ยนเว้า

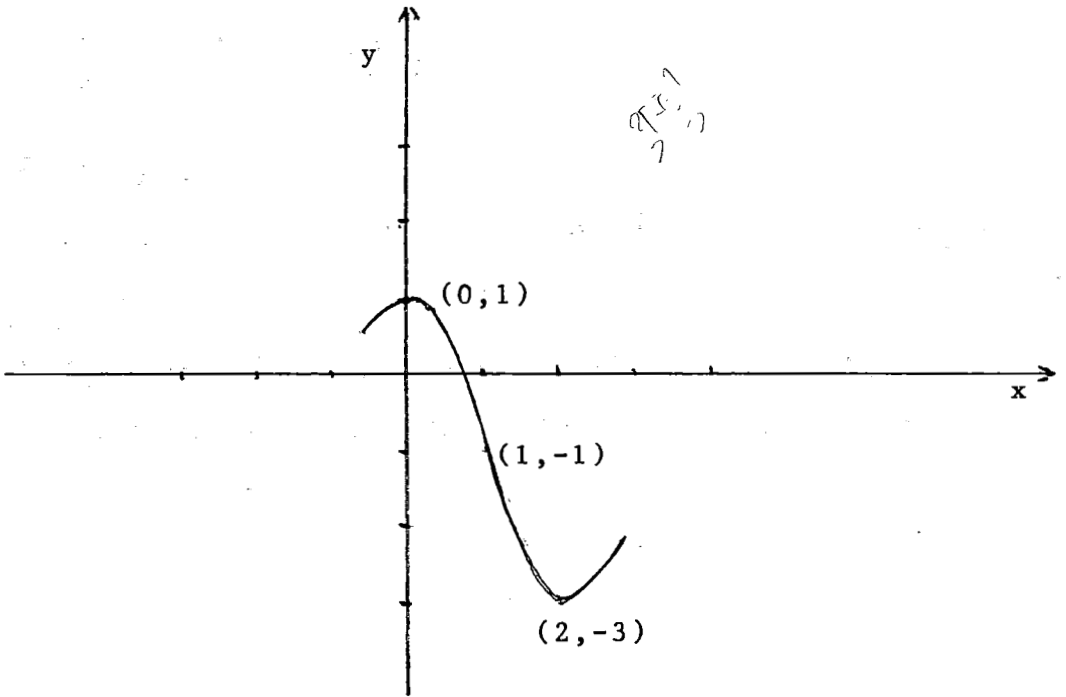
สำหรับ $x < 1$, $y'' < 0$ กราฟเว้าลง

สำหรับ $1 < x < 2$, $y'' > 0$ กราฟเว้าขึ้น

สำหรับ $x > 2$, $y'' > 0$ กราฟเว้าขึ้น

เขียนจุด $(0, 1)$, $(2, -3)$ ซึ่งเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ และจุด $(1, -1)$ ซึ่งเป็นจุดเปลี่ยนเว้าลงบนกราฟ และจุดอื่นอีก 2-3 จุด

โดยข้อมูลทั้งหมดที่วิเคราะห์ ก็จะเขียนกราฟได้ดังรูป 8.12.3



รูป 8.12.3

#

แบบฝึกหัด 8.12

ข้อ 1-ข้อ 5 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของฟังก์ชัน โดยหา

- ช่วงซึ่งฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลง
- ช่วงซึ่งกราฟเว้าขึ้นหรือลดลง
- ค่าสุดขีดสัมพัทธ์
- จุดเปลี่ยนเว้า
- เส้นกำกับ

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

2. $f(x) = \frac{x^4 - 18x^2 + 20}{20}$

3. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 3$

4. $F(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$

5. $H(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

6. เขียนกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

a. f ต่อเนื่องทุกจุด

b. $f(-3) = 1$

c. $f'(x) < 0$ สำหรับ $x < -3$

$f'(x) > 0$ สำหรับ $x > -3$

$f''(x) < 0$ สำหรับ $x \neq 3$

7. เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

a. f ต่อเนื่องทุกจุด

b. $f(-4) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 2$

c. $f'(-4) = 0$, $f'(3) = 0$,

สำหรับ $x < -4$, $f'(x) > 0$

สำหรับ $-4 < x < 3$, $f'(x) > 0$

สำหรับ $x > 3$, $f'(x) < 0$

d. $f''(-4) = 0$, $f''(0) = 0$

สำหรับ $x < -4$, $f''(x) < 0$

สำหรับ $-4 < x < 0$, $f''(x) > 0$

สำหรับ $x > 0$, $f''(x) < 0$

8. ให้ $h(x) = x^2|x|$ จงหา

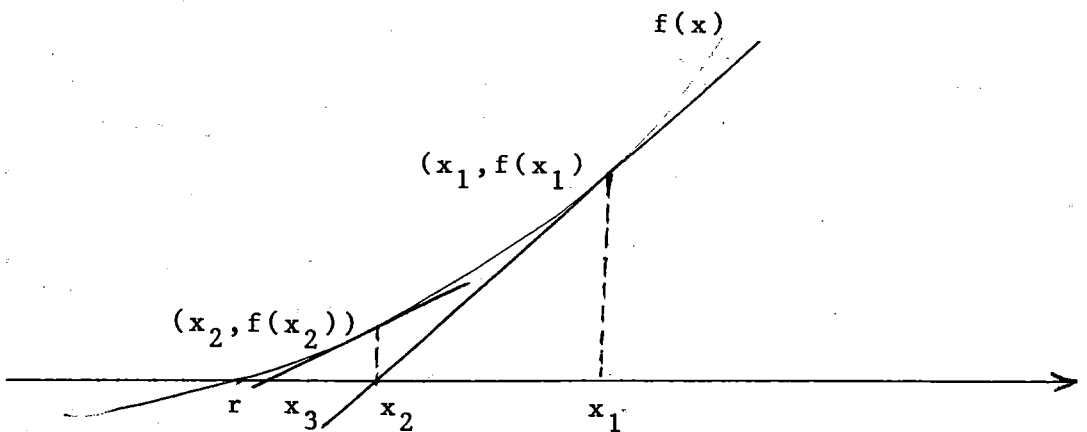
- h' และโดเมน
- h'' และโดเมน
- หาค่าสุดขีดและจุดเปลี่ยนเว้าของ h
- เขียนกราฟของ h

8.13 การหารากของสมการโดยวิธีของนิวตัน

การหารากของสมการ $f(x) = 0$ ถ้า $f(x)$ เป็นสมการเชิงเส้น หรือฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง เราจะมีสูตรสำหรับการหาราก แต่สมการพีชคณิตอื่นๆ หรือสมการที่ไม่เป็นพีชคณิต เราไม่มีสูตรที่แน่นอนสำหรับการหาราก วิธีการหนึ่งที่ใช้ประมาณรากของสมการแบบนี้ได้อย่างดี คือวิธีการของนิวตัน

ให้ f เป็นฟังก์ชัน เพราะฉะนั้นรากของสมการ $f(x) = 0$ คือ ส่วนตัด x ของกราฟ $y = f(x)$

ให้ r แทนรากที่ไม่รู้ของ $f(x) = 0$ ถ้าเราหาค่าประมาณ x_1 ของ r โดยกราฟ $y = f(x)$ หรือโดยวิธีอื่นๆ แล้วค่าประมาณที่ดีของ r คือ ผลตัด x_2 ของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่ $(x_1, f(x_1))$ กับแกน (รูป 8.13.1)



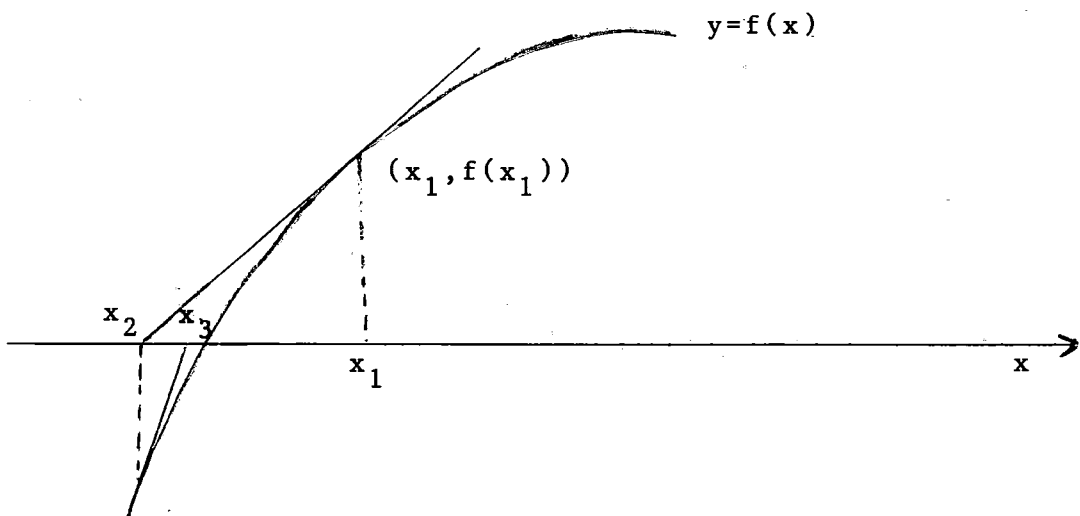
รูป 8.13.1

เพราะว่า x_2 เป็นค่าประมาณของ r ค่าประมาณที่ดีกว่าของ r คือ ผลตัด x_3 ของเส้นสัมผัสกราฟ $y=f(x)$ ที่ $(x_2, f(x_2))$ กับแกน x (รูป 8.13.1)

โดยวิธีการนี้อย่างต่อเนื่อง เราสามารถหาค่าประมาณของ r มีตำแหน่งทศนิยมได้ตามต้องการ วิธีการแบบนี้เรียกว่า **วิธีการของนิวตัน**

ถ้า $f'(x)$ มี และ $f'(x) \neq 0$ ตลอดช่วงที่ใหญ่พอเพื่อบรรจุ x_1 และ r และ $f''(x) > 0$ หรือ $f''(x) < 0$ ทุกค่า x ในช่วง แล้วการประมาณครั้งที่ n, x_n สามารถทำให้เข้าใกล้ r โดยให้ n ใหญ่พอ

โดย 8.10.2 ทฤษฎีบท เมื่อ $f''(x) > 0$ กราฟจะเว้าขึ้นบนช่วง (รูป 8.13.1) และเมื่อ $f''(x) < 0$ กราฟจะเว้าลงบนช่วง (รูป 8.13.2)



รูป 8.13.2

ให้ x_1 เป็นค่าประมาณของ r ซึ่งเป็นรากของสมการ $f(x)=0$ ดังนั้นเส้นสัมผัสกราฟของ $y=f(x)$ ที่ $(x_1, f(x_1))$ คือ

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

มีส่วนตัด x คือ x_2 วิธีหา x_2 แทน $y=0$ ในสมการ (1) แล้วแก้สมการหา x

$$(1) \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

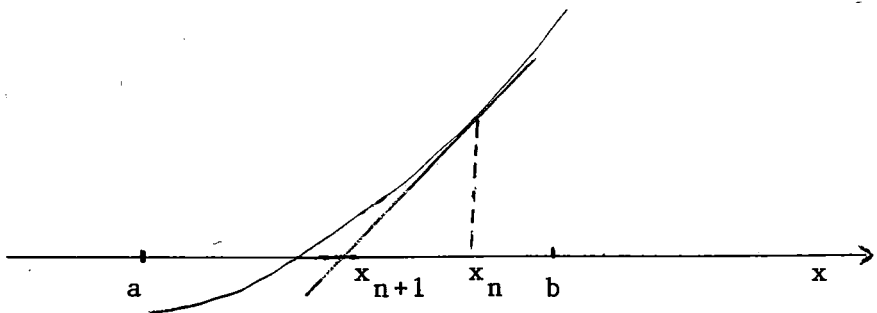
โดยทำนองเดียวกันประมาณ x_3 คือส่วนตัด x ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่ $(x_2, f(x_2))$

$$(2) \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

ประมาณครั้งที่ n คือ x_n (รูป 8.13.8)

$$(3) \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1



รูป 8.13.3

ข้อสังเกต ใน(3) ถ้า $x_n = x_{n-1}$ สำหรับบางค่า n แล้ว $f(x_{n-1}) = 0$ และคั้งนั้น $x_{n-1} = x_n$ เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$

ตัวอย่าง 1. จงหารากของสมการ $x^3 - x - 7 = 0$

เฉลย ให้ $f(x) = x^3 - x - 7$ เพราะว่า $f(2) = -2$ และ $f(3) = 17$ กราฟของ f จะตัดขวางแกน x ที่จุด $(r, 0)$ อยู่ระหว่าง 2 และ 3 และ r เป็นรากของสมการ

$$x^3 - x - 7 = 0$$

เราคาดหวังว่า r จะอยู่ใกล้ 2 มากกว่า 3

ประมาณค่าแรกด้วย $x_1 = 2$

เพราะว่า $f'(x) = 3x^2 - 1$

$$f'(x_1) = f'(2) = 12 - 1 = 11$$

ประมาณ x_2 โดย

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{24}{11} \approx 2.18182$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{24}{11}\right) = \left(\frac{24}{11}\right)^3 - \left(\frac{24}{11}\right) - 7 \approx 10.3862 - 2.18182 - 7 = 1.20438$$

$$f'(x_2) = 3\left(\frac{24}{11}\right)^2 - 1 = \frac{1607}{121} \approx 13.281$$

คั้งนั้น

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{2.182 - \frac{1.20403}{13.281}}{1} \approx 2.091$$

$$f(x_3) = f(2.091) = (2.091)^3 - (2.091) - 7 \approx 9.142 - 2.091 - 7 = .0514$$

$$f'(x_3) = f'(2.091) = 3(2.091)^2 - 1 \approx 12.1168$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.091 - \frac{0.0514}{12.1168}$$

$$\approx 2.091 - .00424 = 2.08676$$

$$f(x_4) = f(2.08676) = 9.0869 - 2.08676 = 0.00014$$

$$f'(x_4) = f'(2.0868) = (3(2.08676)^2) - 1 \approx 12.0637$$

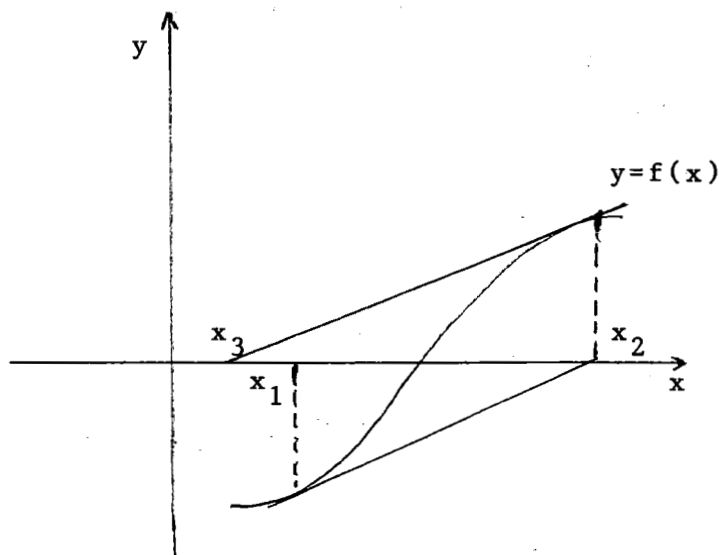
$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 2.08676 - \frac{.00014}{12.0637}$$

$$\approx 2.08676 - .0000116 = 2.08674$$

เมื่อกระทำต่อไปเรื่อยๆ จะเห็นว่าเริ่มจาก x_4 เป็นต้นไป จำนวนเลขหลังจุดทศนิยม 4 ตัว จะเหมือนกันคือ .0867

ดังนั้นค่าประมาณของ r มีทศนิยมถูกต้อง 3 ตำแหน่งคือ 2.087 #

อย่างไรก็ตามมีบางกรณีที่ใช้วิธีการของนิวตันจะไม่ได้จุดที่เป็นค่าประมาณของรากสมการ ถ้าหากเราใช้ค่าประมาณเริ่มต้นห่างจากรากจริงมากเกินไป ดังรูป 8.13.4



รูป 8.13.4

ตัวอย่าง 2. จงหารากที่เป็นลบของสมการ $x^4 + x^3 - 1 = 0$ โดยต้องการทศนิยมถูกต้อง 4 ตำแหน่ง

เฉลย ให้ $f(x) = x^4 + x^3 - 1$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องทุกจุด และมีจำนวนวิกฤต 2 จำนวนคือ $-\frac{3}{4}$ และ 0 มีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $(0, -1)$ และ $f(-\frac{3}{4})$ เป็นค่าสูงสุดของ f เพียงจุดเดียว

สำหรับ $x < -\frac{3}{4}$, $f'(x) < 0$ กราฟ f ลดลง

สำหรับ $x > -\frac{3}{4}$, $f'(x) > 0$ กราฟ f เพิ่มขึ้น

เพราะว่า $f(-2) = 7$, $f(0) = -1$ และ $f(1) = 1$ ดังนั้นสมการ $f(x) = 0$ มีรากที่เป็นบวก 1 รากและรากที่เป็นลบ 1 ราก

เราต้องการหารากที่เป็นลบ

เพราะว่า $f(-2) = 7$ และ $f(-1) = -1$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง r จะอยู่ระหว่าง -2 และ -1 เราคาดว่าอยู่ใกล้ -1 มากกว่า -2

โดยการทดลองเราหา $f(-1.4) = 0.0976$ และ $f(-1.3) = -0.3409$ ดังนั้น r จะอยู่ระหว่าง -1.4 และ -1.3

โดยวิธีการของนิวตัน เลือก $x_1 = -1.4$ เป็นค่าประมาณค่าแรกของ r
ดังนั้นค่าประมาณค่าที่สองคือ

$$x_2 = -1.4 - \frac{f(-1.4)}{f'(-1.4)} = -1.3808$$

และค่าประมาณค่าที่ 3 ของ r คือ

$$x_3 = -1.38 - \frac{f(-1.38)}{f'(-1.38)} = -1.380278$$

$$x_4 = -1.38 - \frac{f(-1.38)}{f'(-1.38)} = -1.380278$$

จะเห็นว่าหลังจุดทศนิยมของ x_4 และ x_3 เหมือนกัน ดังนั้นค่าประมาณของ x ทศนิยมถูกต้อง 4 ตำแหน่งคือ -1.3803 #

แบบฝึกหัด 8.13

ข้อ 1-ข้อ 4 ใช้วิธีการของนิวตัน หาตัวแทนของจำนวนตรรกยะ ต้องการทศนิยม ถูกต้อง 3 ตำแหน่ง

1. $\sqrt{7}$

2. $^3\sqrt{2}$

3. $^4\sqrt{5}$

4. $\frac{1}{^3\sqrt{71}}$

ข้อ 5-ข้อ 7 หารากของสมการ โดยวิธีการของนิวตัน ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง ตรวจสอบคำตอบโดยใช้สูตรสมการกำลังสอง

5. $x^2 - 4x + 1 = 0$

6. $x^2 + 2x - 2 = 0$

7. $2x^2 - 4x + 1 = 0$

8. จงหารากของสมการ $x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ ต้องการทศนิยมถูกต้อง 2 ตำแหน่ง

9. จงหารากทั้งหมดของสมการ $x^3 - 3x - 1 = 0$ ต้องการทศนิยมถูกต้อง 2 ตำแหน่ง

10. ใช้วิธีการของนิวตัน ประมาณพิกัดของจุด ซึ่งเป็นผลตัดของกราฟ $y = \frac{1}{x}$ และ

$y = x^2 - 4x$

11. จงพิสูจน์ $f(x) = \frac{1}{10}x^5 + x^3 - 6x^2 + 1$ มีจุดเปลี่ยนเว้าจุดเดียว และประมาณพิกัด x ต้องการทศนิยมถูกต้อง 4 ตำแหน่ง.

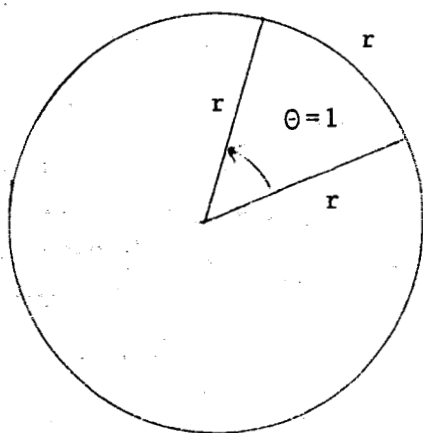
บทที่ 9

ฟังก์ชันอดิศัย

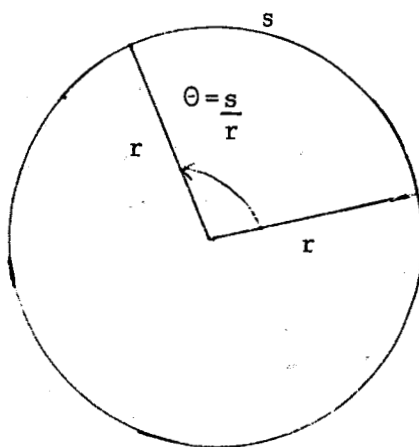
ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เราเรียกว่า **ฟังก์ชันอดิศัย** ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง

9.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

9.1.1 บทนิยาม มุม 1 เรเดียน คือมุมที่จุดศูนย์กลางวงกลม ที่มีความยาวของส่วนโค้งของส่วนโค้งเท่ากับรัศมี (รูป 9.1.1 (a))



(a)



(b)

รูป 9.1.1

ดังนั้นมุม θ เรเดียนเป็นมุมที่มีจุดยอดที่จุดศูนย์กลางของวงกลม เท่ากับอัตราส่วนของความยาวของส่วนตัดส่วนโค้งกับรัศมี (รูป 8.1.1 (b))

$$\text{นั่นคือ } \theta = \frac{s}{r}$$

เมื่อ s เป็นความยาวของส่วนตัดส่วนโค้ง และ r เป็นรัศมีเมื่อใช้หน่วยความยาวเดียวกัน ดังนั้น θ ก็คือจำนวนจริง

เพราะว่าอัตราส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมกับรัศมีเท่ากับ 2π ดังนั้น

$$\pi \text{ เรเดียนจะเท่ากับ } 180^\circ$$

เพราะฉะนั้น ถ้า d และ θ เป็นมุมเดียวกัน โดย d เป็นจำนวนจริง และ θ เป็นจำนวนเรเดียน แล้ว

$$\frac{d}{180} = \frac{\theta}{\pi} \quad (9.1.1)$$

$$\text{ดังนั้น } 1 \text{ เรเดียน} = 52.3^\circ$$

ตัวอย่าง 1. (i) แสดง 160° เป็นเรเดียน

$$(ii) \text{ แสดง } \frac{3\pi}{4} \text{ เรเดียนเป็นองศา}$$

เฉลย (i) โดยแทน $d=160^\circ$ ใน (9.1.1)

$$\frac{160}{180} = \frac{\theta}{\pi}$$

$$\text{หรือ } \theta = \frac{8}{9} \pi$$

ดังนั้นมุม 160° จะเท่ากับมุม $\frac{8\pi}{9}$ เรเดียน

(ii) แทน $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ใน (9.1.1)

$$\frac{d}{180} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{3}{4}$$

$$d = 135$$

ดังนั้น มุม $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียนเท่ากับมุม 135° #

9.1.2 บทนิยาม ถ้า x เป็นจำนวนจริง ค่าของฟังก์ชันตรีโกณของ x นิยามโดย

$$\sin x = \sin \alpha, \quad \cos x = \cos \alpha, \quad \tan x = \tan \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha, \quad \sec x = \sec \alpha, \quad \csc x = \csc \alpha$$

เมื่อ α คือมุมซึ่งเมื่อวัดเป็นเรเดียนจะเท่ากับจำนวนจริง x

9.1.3 บทนิยาม เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็นคาบ และมีคาบ p ก็ต่อเมื่อ

$$f(x+p) = f(x)$$

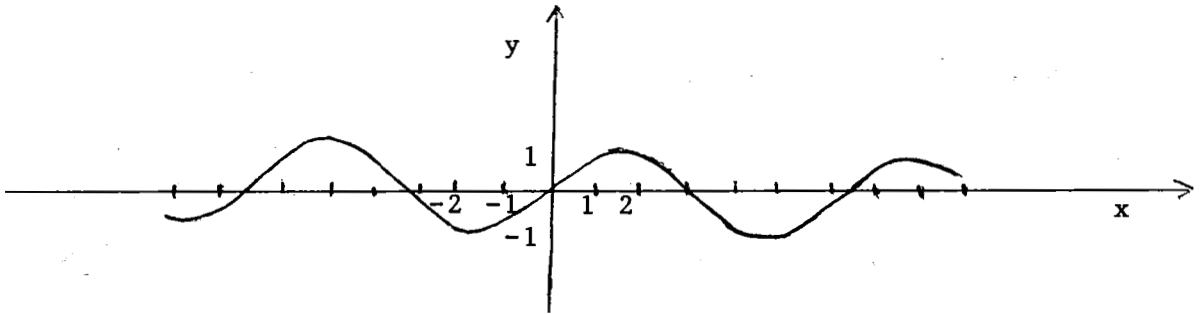
สำหรับทุก x ในโดเมนของ f และ $x+p$ อยู่ในโดเมน f

ถ้า p เป็นจำนวนจริงมากกว่าศูนย์ที่น้อยที่สุดซึ่ง $f(x+p) = f(x)$ แล้ว p เรียกว่าคาบเป็นรากฐานของ f

ฟังก์ชัน sine และ ฟังก์ชัน cosine มีคาบ 2π เพราะว่า $\sin(x+2\pi) = \sin x$ และ $\cos(x+2\pi) = \cos x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

โดยทำนองเดียวกัน ฟังก์ชัน secant และ ฟังก์ชัน cosecant มีคาบ 2π

ฟังก์ชัน tangent และฟังก์ชัน cotangent มี π เป็นคาบเป็นรากฐานของฟังก์ชัน เพราะว่า $\tan(x+\pi) = \tan x$ และ $\cot(x+\pi) = \cot x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

รูป 9.1.2 $y = \sin x$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง x เราหาค่า y ที่สมนัยกับจำนวนจริง x โดยค่า y เป็นค่า sine ของมุมซึ่งวัดเป็นเรเดียนเท่ากับ x

ตัวอย่างเช่น ถ้า $x=1$, y เท่ากับ sine ของ 1 เรเดียน

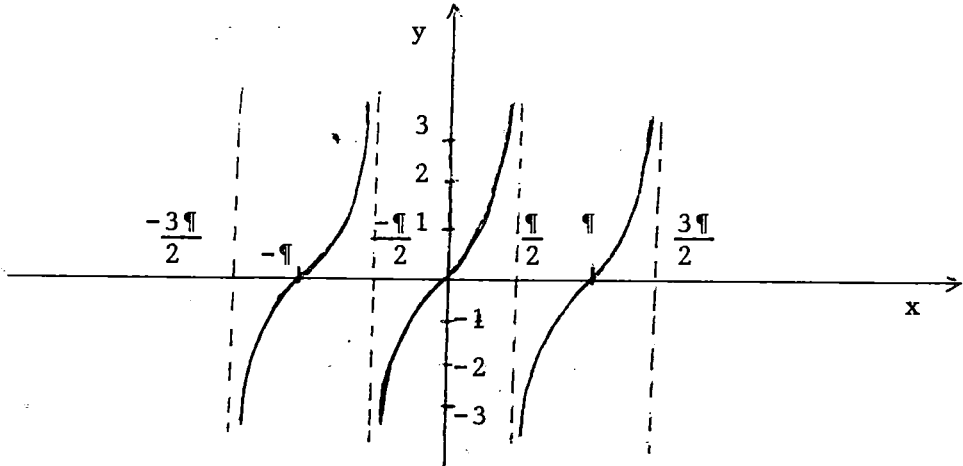
ถ้า $x=\frac{\pi}{2}$, y เท่ากับ sine ของ $\frac{\pi}{2}=1.5708$ เรเดียน

เพราะว่า $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ดังนั้นกราฟจะเหมือนเดิมทุกระยะ $2\pi=6.28$ เรเดียน และขยายไปได้ไกลทั้งทางซ้ายและขวาอย่างไม่มีขอบเขต

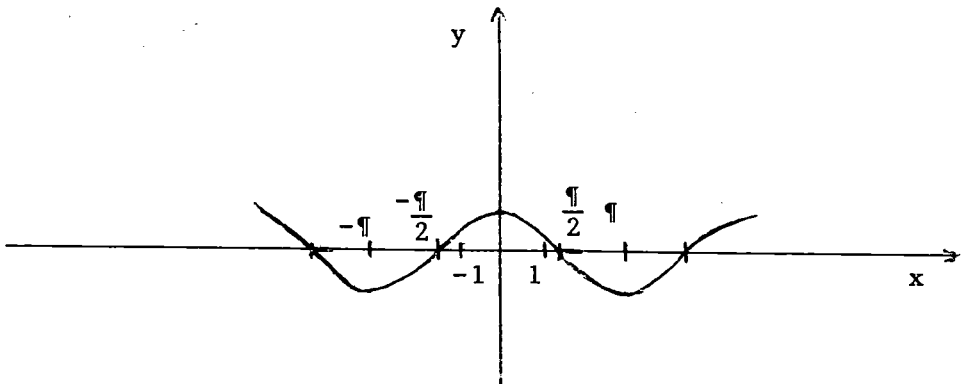
กราฟ $y=\tan x$ แสดงได้ดังรูป 9.1.3 ผลัดกัน x และกราฟที่จุด $(n\pi, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ และมีเส้นกำกับ $x=\frac{1}{2}(2n+1)\pi$ มี π เป็นคาบเป็นรากฐานของฟังก์ชัน tangent

โดยทำนองเดียวกัน กราฟของฟังก์ชันตรีโกณอีก 4 ฟังก์ชัน ก็สามารถแสดงได้โดยวิธีเดียวกัน

เนื่องจาก $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ดังนั้นการเขียนกราฟ $y = \cos x$ เราอาจใช้วิธีเขียนกราฟ $y = \sin x$ แล้วเลื่อนแกน y ไปทางขวาของแกน y เดิม $\frac{\pi}{2}$ จะได้กราฟ $y = \cos x$ (รูป 9.1.4)



§ 9.1.3 $y = \tan x$

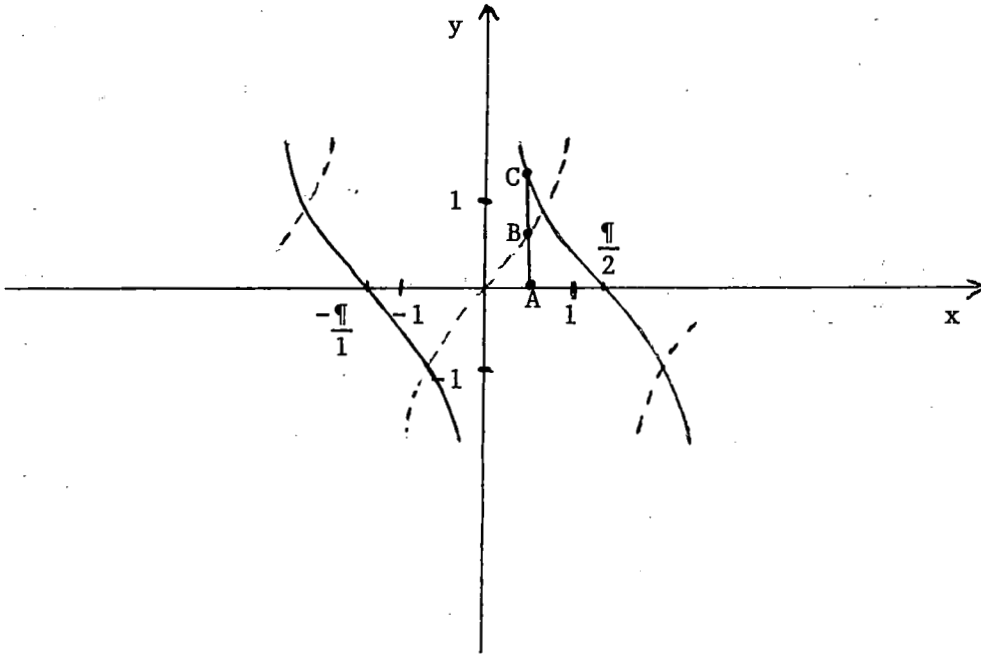


§ 9.1.4 $y = \cos x$

สำหรับกราฟของ $y = \cot x$ เราอาจใช้วิธีเขียนกราฟของ $y = \frac{1}{\tan x}$ โดยหาส่วนตัดของ

$\tan x$ จากการประมาณค่าของ $\tan x$ จากกราฟ $y = \tan x$ ก็จะได้กราฟดังรูป

9.1.5



รูป 9.1.5

วิธีการนี้เราจะเริ่มโดยเลือกจุด A ใดๆบนแกน x (รูป 9.1.5) ยกเว้น $x = \frac{n\pi}{2}$ เมื่อ

n เป็นจำนวนเต็ม แล้วลากเส้นแนวตั้งผ่านจุด A ตัดกราฟ $y = \tan x$ ที่จุด B ประมาณระยะทางระบุทิศทาง $\overline{AB}$ ตามรูป 9.1.5

$$\overline{AB} = \frac{2}{5}$$

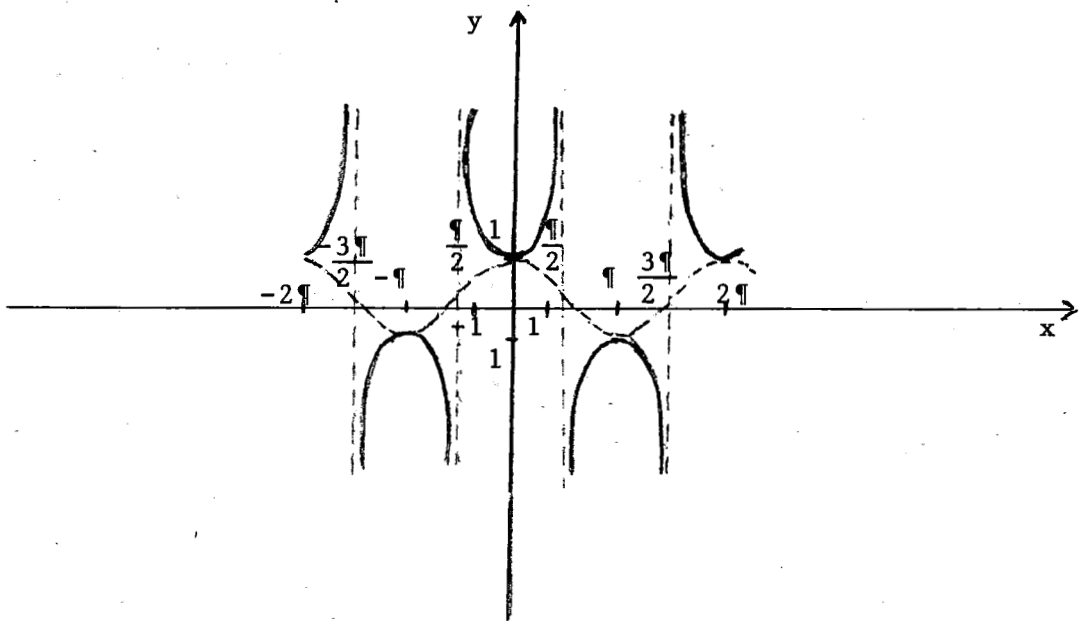
เพราะว่า $\overline{AB} = \tan x$

ดังนั้น $\overline{AC} = \frac{5}{2}$

หลังจากหาจำนวนของจุดโดยวิธีนี้ได้พอสมควรแล้ว ลากเส้นโค้งผ่านจุดเหล่านี้ จะได้

กราฟ $y = \cot x$

ข้อสังเกต เพราะว่าส่วนกลับของ 1 คือ 1 ส่วนกลับของ -1 คือ -1 ดังนั้นกราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ ตัดกันบนเส้นแนวนอน $y = 1$ และ $y = -1$ เนื่องจาก $y = \tan x$ ตัดขวางแกน x ที่จุดกำเนิด ดังนั้นกราฟของ $y = \cot x$ มีแกน y เป็นเส้นกำกับ โดยใช้วิธีเดียวกันนี้ เราสามารถเขียนกราฟ $y = \sec x$ เพราะว่า $y = \sec x$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y = \frac{1}{\cos x}$ (รูป 9.1.6)



รูป 9.1.6

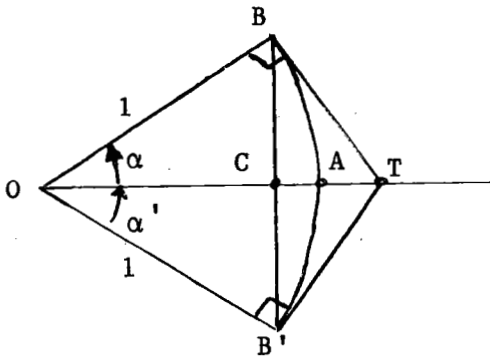
และกราฟของ $y = \csc x$ จะเหมือนกับกราฟของ $y = \frac{1}{\sin x}$

9.2 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เราจะศึกษาลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อนำไปหาสูตรอนุพันธ์

9.2.1 ทฤษฎีบท ถ้า θ เป็นจำนวนจริงแล้ว $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

พิสูจน์



รูป 9.2.1

รูป 9.2.1 α และ α' เป็นมุมวัดเป็นเรเดียน คือ θ

$\widehat{BAB'}$ เป็นส่วนโค้งของวงกลม 1 หน่วยมีจุดศูนย์กลางที่ O

ส่วนเส้น TB และ TB' เป็นเส้นสัมผัสวงกลมหนึ่งหน่วยที่ B และ B' ตามลำดับ
ให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ สมมติ

$$(1) \quad |BB'| < |\widehat{BAB'}| < |BT| + |B'T|$$

เมื่อ $|BB'|$ เป็นความยาวคอร์ด BB'

$|\widehat{BAB'}|$ เป็นความยาวของส่วนโค้ง $\widehat{BAB'}$

$|BT|$ และ $|B'T|$ เป็นความยาวส่วนเส้นของเส้นสัมผัสจาก T ถึงกราฟ
จากการสมมาตร

$$|BB'| = 2|BC|$$

$$|\widehat{BAB'}| = 2|BA|$$

$$|BT| = |B'T|$$

ดังนั้นโดยทอไร(1) ด้วย 2 จะมี

$$(2) \quad |BC| < |\widehat{BA}| < |BT|$$

เพราะว่า $\widehat{BA}$ เป็นส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

$$|BC| = \sin \theta$$

$$|\widehat{BA}| = 1 \cdot \theta \quad (\text{โดย 9.1.1 บทนิยาม})$$

$$\text{และ } |BT| = \tan \theta$$

เพราะฉะนั้น(2) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

หรือ

$$(3) \quad 1 < \frac{1}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

โดยส่วนกลับของ(3)

$$(4) \quad 1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

เพราะว่า OCB เป็นสามเหลี่ยม

$$|OC| > |OB| - |BC|$$

แต่ $|OC| = \cos \theta$ และ $|OB| = 1$ เพราะฉะนั้น

$$\cos \theta > 1 - |BC| > 1 - |\overline{BA}| = 1 - \theta$$

เปรียบเทียบกับ (4) เพราะฉะนั้น

$$(5) \quad 1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > 1 - \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} (1 - \theta) = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$(6) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

ถ้า $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ เขียน $\theta = -\theta'$ เพราะฉะนั้น $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $\sin(-\theta') = -\sin \theta'$ ดังนั้น

$$(7) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta' \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-\theta')}{-\theta'} = \lim_{\theta' \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta'}{\theta'} = 1$$

ดังนั้นจาก (6) และ (7) สรุปได้ว่า

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \#$$

9.2.2 ทฤษฎีบท ถ้า θ เป็นจำนวนจริงแล้ว $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$

พิสูจน์ จาก 9.2.1 ทฤษฎีบท

$$(1) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin\theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} (\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 0 \cdot 1 = 0$$

โดย 4.4.1 ทฤษฎีบท

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \sin^2\theta) = 1 - \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin^2\theta = 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

จากตรีโกณมิติ

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \sin^2\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$(2) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\theta = 1$$

เนื่องจาก

$$(3) \quad \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta(1 + \cos\theta)} = \frac{\sin^2\theta}{\theta(1 + \cos\theta)}$$

เพราะฉะนั้นโดย (1), (2), (3) และ 9.2.1 ทฤษฎีบท

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \right)$$

$$= \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right] \cdot \frac{\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta}{\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 + \cos \theta)} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

#

แบบฝึกหัด 9.2

จงหาค่าลิมิต

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)}{x \cos x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\csc x - \cot x)}{\sin x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\csc x - 1}$

7. $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\sin 2\theta \cot \theta)$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2}$

9.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เราจะพิสูจน์สูตร

$$D_x \sin x = \cos x$$

และ $D_x \cos x = -\sin x$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยบทนิยามของอนุพันธ์และ 9.2.1 และ 9.2.2 ทฤษฎีบท

$$\begin{aligned} D_x \sin x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\sin x \cdot \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \\ &= -\sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= (-\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

ดังนั้น $D_x \sin x = \cos x$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x โดยกฎลูกโซ่

$$D_x \sin u = \cos u D_x u \quad (9.3.1)$$

โดยสูตร (9.3.1) จะมีสูตรสำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน cosine

เพราะว่า $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ ดังนั้น

$$D_x \cos u = D_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) D_x \left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u (-D_x u) = -\sin u D_x u$$

นั่นคือ

$$D_x \cos u = -\sin u D_x u \quad (9.3.2)$$

สำหรับฟังก์ชัน tangent ถ้า $u \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} D_x \tan u &= D_x \left(\frac{\sin u}{\cos u} \right) \\ &= \frac{\cos u D_x \sin u - \sin u D_x \cos u}{\cos^2 u} \\ &= \frac{\cos^2 u D_x u + \sin^2 u D_x u}{\cos^2 u} \\ &= \frac{1}{\cos^2 u} D_x u \\ &= \sec^2 u D_x u \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$D_x \tan u = \sec^2 u D_x u \quad (9.3.3)$$

สำหรับ $u \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

สูตรอนุพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือคือ

$$D_x \cot u = -\csc^2 u D_x u, \quad u \neq n\pi \quad (9.3.4)$$

$$D_x \sec u = \sec u \tan u D_x u, \quad u \neq \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (9.3.5)$$

$$D_x \csc u = -\csc u \cot u D_x u, \quad u \neq n\pi \quad (9.3.6)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

สำหรับการพิสูจน์จะให้เป็นแบบฝึกหัด

เพราะว่า $D_x \sin x = \cos x$ และ $\cos x$ มีทุกจำนวนจริง x ดังนั้นโดย 5.3.2
ทฤษฎีบท ฟังก์ชัน sine ต่อเนื่องทุกจุดบน $\mathbf{R}$ และโดยทำนองเดียวกัน ฟังก์ชัน cosine
ต่อเนื่องทุกจุดบน $\mathbf{R}$

สำหรับฟังก์ชัน tangent เพราะว่ามี $D_x \tan x = \sec^2 x$ และ $\sec x$ มีทุกจุด x ใน $\mathbf{R}$
ยกเว้น $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นฟังก์ชัน tangent ต่อเนื่องทุกจุด
 x ยกเว้น $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$

ตัวอย่าง 1. จงหา $D_x \sin(5x^3 - 4)$

$$\text{ผลเฉลย} \quad D_x \sin(5x^3 - 4) = \cos(5x^3 - 4) D_x (5x^3 - 4) = \cos(5x^3 - 4) 15x^2 \quad \#$$

ตัวอย่าง 2. จงหา $D_x \cos^2(\sqrt{x+1})$

$$\begin{aligned} \text{ผลเฉลย} \quad D_x \cos^2(\sqrt{x+1}) &= 2\cos\sqrt{x+1} D_x \cos\sqrt{x+1} \\ &= 2\cos\sqrt{x+1} (-\sin\sqrt{x+1}) \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-2\cos\sqrt{x+1} \sin\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-\cos\sqrt{x+1} \sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3. จงหา $D_x \tan^3 5x$

$$\begin{aligned} \text{ผลเฉลย} \quad D_x \tan^3 5x &= 3\tan^2 5x D_x \tan 5x \\ &= (3\tan^2 5x)(\sec^2 5x) D_x 5x \end{aligned}$$

$$=(3\tan^2 5x)(\sec^2 5x) \cdot 5 = 15\tan^2 5x \sec^2 5x \quad \#$$

ตัวอย่าง 4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \frac{x}{1-\tan x}$

ผลเฉลย $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\tan x)D_x x - xD_x(1-\tan x)}{(1-\tan x)^2}$

$$= \frac{(1-\tan x) - x \sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{1-\tan x - x \sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \quad \#$$

แบบฝึกหัด 9.3

ข้อ 1-ข้อ 8 จงหาอนุพันธ์

1. $y = \sec \sqrt{x}$

2. $y = \sec x \tan x$

3. $y = \csc^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x}\right)$

4. $w = e^{\cot z}$

5. $y = \cot^2 \sqrt{x}$

6. $y = \sin^4 2x + \cos^3 x$

7. $y = \sqrt{x - \csc^2 x}$

8. $y = \frac{x-1}{\cot^2 x}$

ข้อ9-ข้อ10 จงหาค่าสุดขีดและจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชัน f หาช่วงซึ่งกราฟเว้าขึ้น และช่วงซึ่งกราฟเว้าลง พร้อมเขียนกราฟ

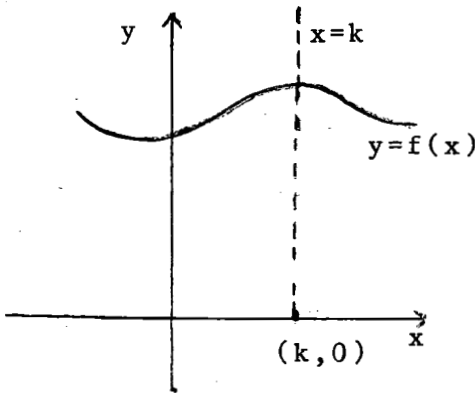
9. $f(x) = \sin x - \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

10. $f(x) = \sin x + \cos x$, $-\pi < x < \pi$.

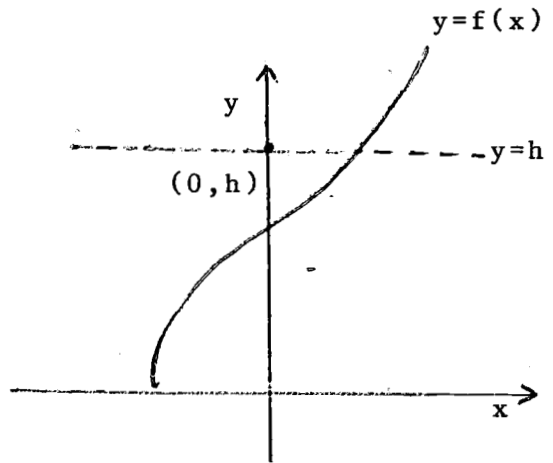
9.4 ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชัน f เป็นการสมนัยระหว่าง 2 เซตของโคโดเมน D และเรนจ์ R โดยแต่ละ x ของโคโดเมนจะสมนัยกับ 1 จำนวน ของเรนจ์

ความหมายทางเรขาคณิตของฟังก์ชัน เส้นแนวดิ่ง $x=k$ เมื่อ $k \in D$ ตัดกราฟของ f เพียงจุดเดียวเท่านั้น (รูป 9.4.1)



รูป 9.4.1



รูป 9.4.2

บางครั้งจำนวน y ในเรนจ์ R สมนัยกับสมาชิก x ในโคโดเมน D เพียงจำนวนเดียวนั้นคือ กราฟของ $y=f(x)$ จะตัดเส้นแนวนอน $y=h$ เมื่อ $h \in R$ เพียงจุดเดียว (รูป 9.4.2) สถานะกราฟแบบนี้เราสามารถนิยามฟังก์ชันใหม่ได้ โดยให้ฟังก์ชันใหม่เป็นเซต

ของคู่อันดับ (y, x) เมื่อ (x, y) เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y=f(x)$ โดเมนฟังก์ชันใหม่จะเป็น R และเรนจ์ของฟังก์ชันใหม่เป็น D

9.4.1 บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งแต่ละ y ในเรนจ์ของ f สมนัยกับ x ในโดเมนของ f เพียงจำนวนเดียว แล้วเรานิยาม f^{-1} โดย

$$x=f^{-1}(y) \text{ เมื่อ } y=f(x)$$

เรียกว่า **ฟังก์ชันผกผัน(inverse function)** ของ f โดเมนของ f^{-1} คือเรนจ์ของ f และเรนจ์ของ f^{-1} คือโดเมนของ f

จาก 2 สมการใน 9.4.1 บทนิยาม ถ้าเราต้องการหาค่า x จะได้

$$x=f^{-1}(f(x))$$

ถ้าต้องการหาค่า y จะได้

$$y=f(f^{-1}(y))$$

9.4.2 ทฤษฎีบท ถ้าฟังก์ชัน f นิยามโดย $y=f(x)$ มีฟังก์ชันผกผัน f^{-1} แล้ว f^{-1} มีฟังก์ชันผกผัน f และ

$$x=f^{-1}(f(x)) \text{ สำหรับ } x \in D_f$$

$$y=f(f^{-1}(y)) \text{ สำหรับ } y \in D_{f^{-1}} = R_f$$

มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันผกผันที่เราจะนำไปใช้อ้างต่อไป แต่การพิสูจน์ค่อนข้างยาก จึงไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ ณ ที่นี้ สำหรับผู้สนใจหาอ่านได้จากบรรณานุกรม[2]

9.4.3 ทฤษฎีบท ถ้า f ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f มีฟังก์ชันผกผัน ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบนช่วง $[f(a), f(b)]$

สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องและลดลงก็จะได้ทฤษฎีบททำนองเดียวกันคือ

9.4.4 ทฤษฎีบท ถ้า f ต่อเนื่องและลดลงบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f มีฟังก์ชันผกผัน ต่อเนื่องและลดลงบนช่วง $[f(a), f(b)]$

ผลจาก 9.4.3 และ 9.4.4 ทฤษฎีบทจะมีบทแทรกดังนี้

9.4.5 บทแทรก ถ้า f ต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บน $[a, b]$ แล้ว f มีฟังก์ชันผกผัน ต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บนช่วง $[f(a), f(b)]$

ผลจาก 9.4.5 บทแทรก ให้ทฤษฎีบทที่สำคัญคือ

9.4.6 ทฤษฎีบท ให้ f ต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บนช่วง $[a, b]$ และ $y = f(x)$ ถ้า $D_x f(x)$ มีและไม่เป็นศูนย์สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ แล้ว ค่าอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันผกผัน $D_y f^{-1}(y)$ เมื่อ y อยู่ในช่วง $[f(a), f(b)]$ คือ

$$D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{D_x f(x)} \quad \text{หรือ} \quad D_y x = \frac{1}{D_x y}$$

พิสูจน์ ให้ f ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบน $[a, b]$ เพราะฉะนั้นโดย 9.4.3 ทฤษฎีบท f มี ฟังก์ชันผกผันต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบนช่วงปิด $[f(a), f(b)]$

ให้ x เป็นจุดใดๆใน $[a, b]$ และ x เป็นส่วนที่เปลี่ยนไปของ x โดย $x + \Delta x$ อยู่ใน $[a, b]$ จะสมนัยกับการเปลี่ยนไปของ y คือ

$$(1) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

เพราะว่า $y=f(x)$ ดังนั้น $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ อยู่ใน $[f(a), f(b)]$ เพราะฉะนั้น

$$f^{-1}(y)=x$$

$$f^{-1}(y+\Delta y)=f^{-1}(f(x+\Delta x))=x+\Delta x=f^{-1}(y)+\Delta x$$

ดังนั้น

$$(2) \quad \Delta x = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)$$

โดย (1) และ (2)

$$(3) \quad \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ f^{-1} ต่อเนื่องบน $[f(a), f(b)]$

$$(4) \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \Delta y \rightarrow 0$$

ดังนั้นโดยการใส่ลิมิตใน $\Delta y \rightarrow 0$ ใน (3)

$$D_y f^{-1}(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$$

$$= \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{D_x f(x)}$$

#

ตัวอย่าง 1. ให้ $f(x) = x\sqrt{x+1}$, $x > 0$ จงหา $D_y f^{-1}(y)$ ที่ $y=6$

ผลเฉลย $D_x f(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x+1}}$

เพราะว่า $y=6$ ก็คือเมื่อ $x=3$

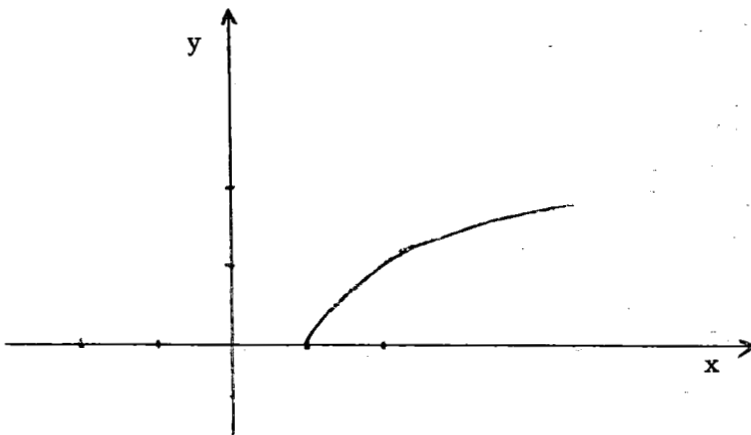
และ $D_x f(3) = \frac{2(3)+1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{7}{4}$

โดย 9.4.6 ทฤษฎีบท $D_y f^{-1}(6) = \frac{1}{D_x f(3)} = \frac{4}{7}$ #

พิจารณาฟังก์ชัน f นิยามโดย $f(x) = \sqrt{x-1}$, $D_f = [1, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

ถ้าเราเขียน $y = \sqrt{x-1}$ สมการ f^{-1} สามารถหาได้โดยแก้สมการหา x ในเทอมของ y

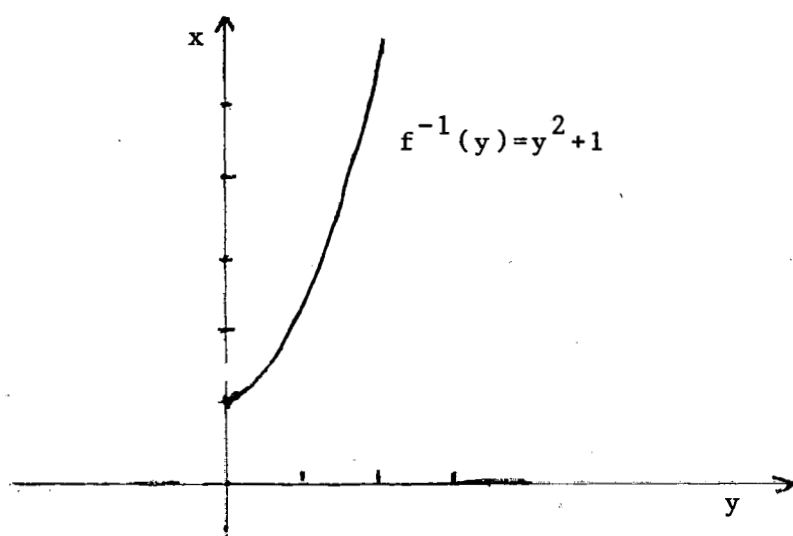
$f^{-1}(y) = y^2 + 1$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ และ $R_{f^{-1}} = [1, \infty)$



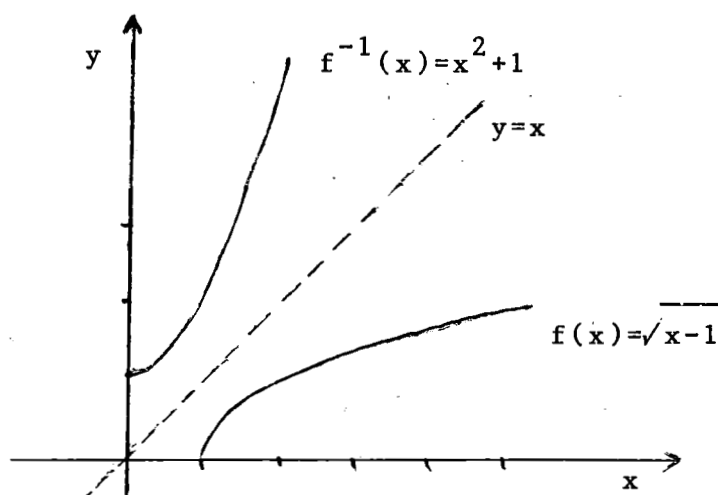
รูป 9.4.3 $f(x) = \sqrt{x-1}$

รูป 9.4.3 แสดงกราฟ f และ f^{-1} โดยแกน x เป็นแกนของตัวแปรอิสระของ x และแกน y เป็นแกนของตัวแปรอิสระของ f^{-1}

เนื่องจากเราคำนึงเกี่ยวกับการใช้แกนแนวนอนเป็นแกนตัวแปรอิสระ เราอาจจะใช้แกน y บวกเป็นแกนแนวนอนชี้ไปทางขวา และแกน x บวกเป็นแกนแนวตั้งชี้ขึ้นข้างบน และกราฟของ $f^{-1}(y) = y^2 + 1$, $y \geq 0$ แสดงได้ดังรูป 9.4.4



รูป 9.4.4



รูป 9.4.5

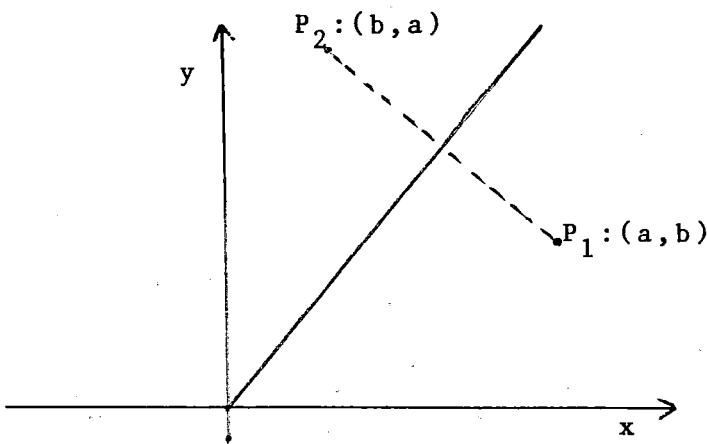
จะง่ายกว่าถ้าเราใช้วิธีให้แกนพิกัดคงเดิม และเปลี่ยนตัวแปร x และ y ใน $x=f^{-1}(y)$ ได้ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้น x จะเป็นตัวแปรอิสระใน 2 ฟังก์ชัน f และ f^{-1}

นั่นคือ $f(x)=\sqrt{x-1}$ และ $f^{-1}(x)=x^2+1, x \geq 0$ แสดงกราฟดังรูป 9.4.5

เมื่อให้ส่วนเส้นที่เชื่อมจุด $P_1:(a,b)$ และ $P_2:(b,a)$ ถูกแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้น $y=x$ (รูป 9.4.6) เรากล่าวว่า จุด P_1 และ P_2 เป็นการสะท้อน(reflection) ของกันและกัน เมื่อเทียบกับเส้น $y=x$

ถ้าเราเปลี่ยน x และ y ในสมการ $y=f(x)$ กราฟของสมการ $x=f(y)$ เรียกว่า **การสะท้อนของกราฟ $y=f(x)$ เทียบกับเส้น $y=x$**

เพราะว่ามีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุด (x,y) บน $y=f(x)$ และจุด (y,x) บน $x=f(y)$ ดังนั้นจุดเหล่านี้จะเป็นการสะท้อนของกันและกันเมื่อเทียบกับเส้นตรง $y=x$



รูป 9.4.6

เนื่องจากสมการ $x=f(y)$ สมมูลกับสมการ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้นกราฟของ $y=f^{-1}(x)$ จึงเป็นการสะท้อนของกราฟ $y=f(x)$ เมื่อเทียบกับเส้นตรง $y=x$

ดังนั้นการเขียนกราฟของ f^{-1} เราอาจจะใช้วิธีเขียนกราฟของ f แล้วหากราฟสะท้อนของ f เทียบกับเส้นตรง $y=x$ จะได้กราฟของ f^{-1} ดังรูป (9.4.5)

แบบฝึกหัด 9.4

ข้อ 1-ข้อ 5 จงหาฟังก์ชันผกผันของ f และทดสอบคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ และหาโดเมนและเรนจ์ของ } f^{-1}$$

1. $f(x) = 2x - 1$

2. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

3. $f(x) = \frac{1}{x-5}$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

5. $f(x) = \frac{1}{2-3x}$

ข้อ 6-ข้อ 7 จงหาฟังก์ชันผกผันของ f ; f^{-1} และหาอนุพันธ์ $f^{-1}(y)$ เทียบกับ y

6. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$

7. $f(x) = (x-2)^3$, $x \neq 2$

ข้อ 8-ข้อ 9 เขียนกราฟของ $y = f^{-1}(x)$ โดยการสะท้อนของ $y = f(x)$ รอบเส้นตรง $y = x$

8. $f(x) = 3x^2 + x - 10$, $x \geq 0$

9. $f(x) = \sqrt{x^3 + x}$ $1 \leq x \leq 4$

10. จงพิสูจน์ ฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = -x + c$ มีฟังก์ชันผกผันเป็นตัวเอง และเขียนกราฟของ $y = f(x)$.

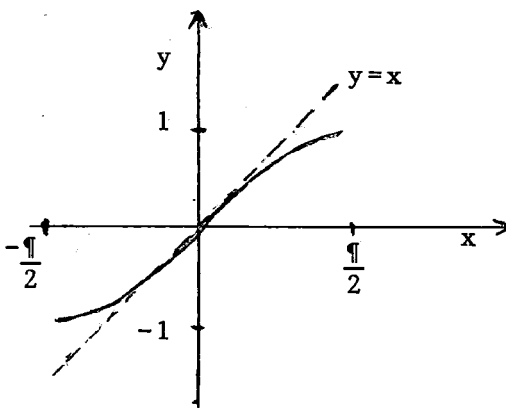
9.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

เนื่องจากฟังก์ชัน $\sin$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนโดเมน $\mathbf{R}$ ดังนั้นจึงไม่มีฟังก์ชันผกผันบนโดเมน $\mathbf{R}$ แต่มีบางช่วงบน $\mathbf{R}$ ซึ่งฟังก์ชัน $\sin$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชัน $\sin$ ผกผันบนช่วงนี้

ส่วนสำคัญ (principal part) ของฟังก์ชัน $\sin$ คือฟังก์ชัน $\sin$ ที่มีโดเมนบนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ เขียนแทนด้วย Sine นิยามโดย

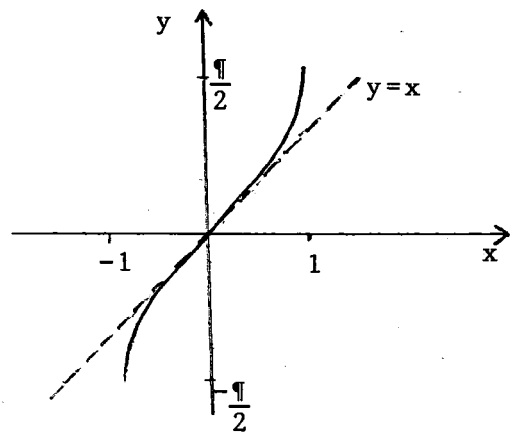
$$\text{Sinx} = \sin x \quad \text{สำหรับทุก } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

เพราะว่าฟังก์ชัน $\sin$ ค่อก่อนและเพิ่มขึ้นตลอดช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ดังนั้น Sine ค่อก่อนและเพิ่มขึ้นตลอดช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (รูป 9.5.1(a))



(a) $y = \text{Sin} x$

รูป 9.5.1



(b) $y = \text{Sin}^{-1} x$

ดังนั้น Sine ก็จะทำให้ sine มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย $\sin^{-1}$ หรือ Arcsin อ่านว่า ฟังก์ชัน sine ผกผัน ซึ่งต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นตลอดช่วง $[-1, 1]$ (รูป 9.5.1(b)) เพราะว่า

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \sin y$$

โดเมนของฟังก์ชัน Sine ผกผัน คือ $[-1, 1]$ และ เรนจ์ คือ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

กราฟของฟังก์ชัน Sine ผกผัน เขียนแสดงได้ดังรูป 9.5.1 (b) เป็นการสะท้อนกลับของกราฟ $y = \sin x$ รอบเส้นตรง $y = x$

วิธีหาอนุพันธ์ของ $y = \sin^{-1} x$ เราเริ่มจากสมการ

$$x = \sin y$$

แล้วหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \sin y = \frac{d}{dy} (\sin y) = \cos y$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

สำหรับ $-1 < x < 1$

เพราะว่า $D_x y = \frac{1}{D_y x}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

ถ้า $y = \sin^{-1} u$ และ u เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ของ x แล้วโดยกฎลูกโซ่

$$D_x \sin^{-1} u = \frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad -1 < u < 1 \quad (9.5.1)$$

ตัวอย่าง 1. จงหา $D_x \sin^{-1}(4x-3)$

เฉลย ให้ $u(x)=4x-3$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} D_x \sin^{-1}(4x-3) &= \frac{D_x (4x-3)}{\sqrt{1-(4x-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2-9+24x}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{-16x^2+24x-8}} \quad \# \end{aligned}$$

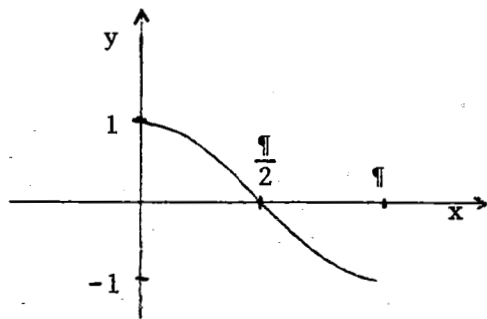
โดยทำนองเดียวกัน ฟังก์ชัน Cosine คือ ส่วนสำคัญของฟังก์ชัน cosine นิยามโดย

$$\cos x = \cos x \quad \text{สำหรับ } 0 \leq x \leq \pi$$

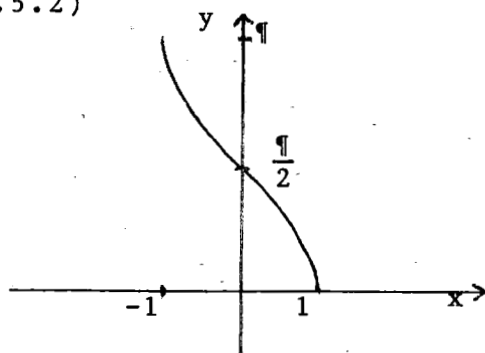
เพราะว่า ฟังก์ชัน Cosine เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ต่อเนื่องและลดลงบนช่วง $[0, \pi]$ ดังนั้นจึงมีฟังก์ชันผกผัน เรียกว่า ฟังก์ชัน Cosine ผกผัน เขียนแทนด้วย $\cos^{-1}$ หรือ $\arccos$ นิยามโดย

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } x = \cos y$$

มีโดเมนเป็น $[-1, 1]$ เรนจ์คือ $[0, \pi]$ (รูป 9.5.2)



(a) $y = \cos x$



(b) $y = \cos^{-1} x$

การหาอนุพันธ์ของ $y = \cos^{-1}x$ เราเริ่มด้วยสมการ

$$x = \cos y$$

โดยหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \cos y = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin y$$

$$= -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

ถ้า $y = \cos^{-1}u$ และ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x แล้วโดยกฎลูกโซ่

$$D_x \cos^{-1}u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u, \quad -1 < u < 1 \quad (9.5.2)$$

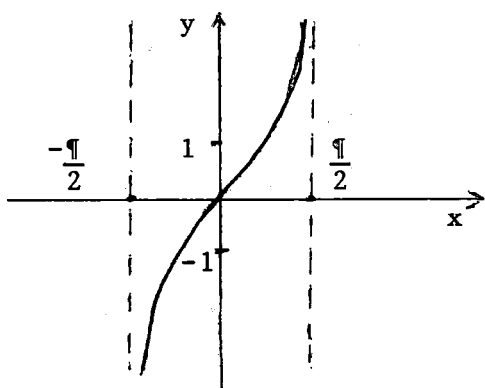
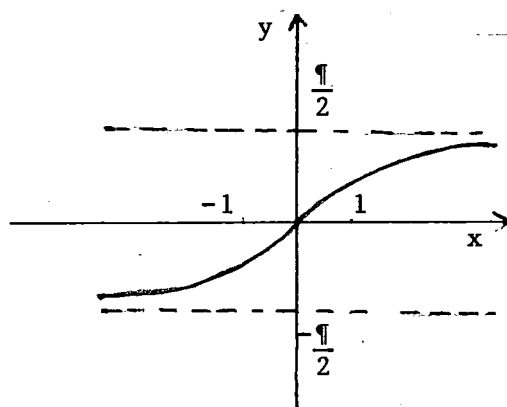
ส่วนสำคัญของฟังก์ชัน tangent นิยามโดย

$$\tan x = \tan x \quad \text{ถ้า} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้นฟังก์ชัน Tangent คือเนื่องและเพิ่มขึ้นตลอดช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (รูป 9.5.3)

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน Tangent มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย $\tan^{-1}$ หรือ

Arctan. อ่านว่า ฟังก์ชัน Tangent ผกผัน นิยามโดย

(a) $y = \text{Tan } x$ (b) $y = \text{Tan}^{-1} x$

รูป 9.5.3

$$y = \text{Tan}^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \text{Tan } y$$

กราฟของ $y = \text{Tan}^{-1} x$ แสดงดังรูป 9.5.3 (b) โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง และเรนจ์เป็นช่วงเปิด $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

การหาอนุพันธ์ $y = \text{Tan}^{-1} x$ เริ่มจากสมการ

$$x = \text{Tan } y$$

โดยหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \text{Tan } y = \frac{d}{dx} \text{tan } y = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y$$

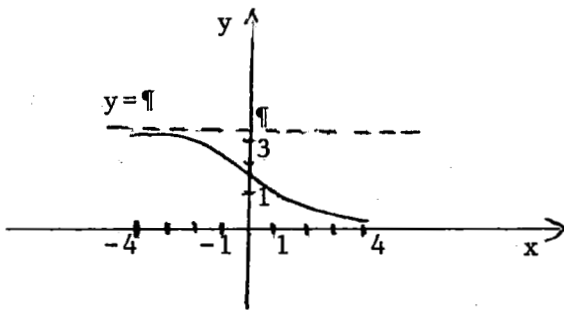
$$= 1 + \tan^2 y = 1 + x^2, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

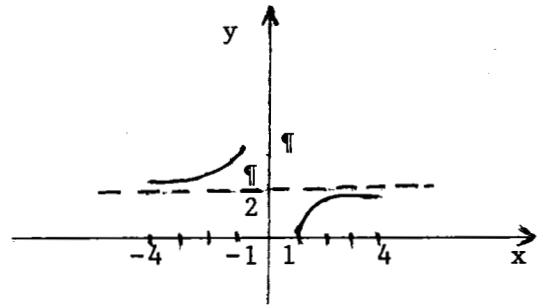
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x โดยกฎลูกโซ่

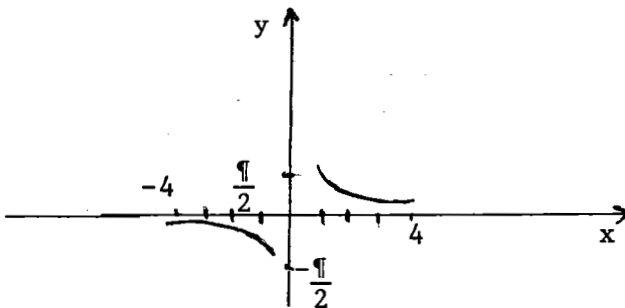
$$D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u \quad (9.5.3)$$



(a) $y = \text{Cot}^{-1} x$



(b) $y = \text{Sec}^{-1} x$



(c) $y = \text{Csc}^{-1} x$

สำหรับ 3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือ เราก็คทำได้โดยทำนองเดียวกัน (รูป 9.5.4)

ฟังก์ชันCotangent เป็นส่วนสำคัญของฟังก์ชันcotangent มีโดเมนเป็น $(0, \pi)$

มีฟังก์ชันCotangentผกผัน คือ $\cot^{-1}$ มีเรนจ์เป็น $(0, \pi)$

ฟังก์ชันSecant เป็นส่วนสำคัญของฟังก์ชันsecant มีโดเมนเป็น $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ และ
มีฟังก์ชันSecantผกผัน คือ $\sec^{-1}$ มีเรนจ์เป็น $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

ฟังก์ชันCosecant เป็นส่วนสำคัญของฟังก์ชันcosecant มีโดเมนเป็น
 $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ ฟังก์ชันCosecantผกผัน คือ $\csc^{-1}$ มีเรนจ์เป็น
 $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ สูตรการหาอนุพันธ์ของ $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$ และ $\csc^{-1}$

จะเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

$$D_x \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u \quad (9.5.4)$$

$$D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} D_x u, \quad |u| > 1 \quad (9.5.5)$$

$$D_x \csc^{-1} u = -\frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} D_x u, \quad |u| > 1 \quad (9.5.6)$$

เพราะว่าฟังก์ชันsecant ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ดังนั้น
 $y = \sec^{-1} u$ เพิ่มขึ้นบนช่วง $|u| > 1$ ดังนั้นอนุพันธ์จะเป็นบวก เราจึงเขียน

$$|u| \sqrt{u^2 - 1} \quad \text{ใน (9.5.5) แทน } u \sqrt{u^2 - 1}$$

ตัวอย่าง 2. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ

a. $y = \tan^{-1}(\sec x)$

$$b. \quad y = \frac{1}{\csc^{-1}(4x)}$$

$$c. \quad y = \sin(\cot^{-1} 3x)$$

เฉลย a. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\tan^{-1}(\sec x))$

$$= \frac{1}{1 + (\sec x)^2} \frac{d}{dx} \sec x$$

$$= \frac{\sec x \tan x}{1 + (\sec x)^2}$$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\csc^{-1}(4x)}$

$$= \frac{1}{(\csc^{-1}(4x))^2} \frac{d}{dx} \csc^{-1}(4x)$$

$$= \frac{-1}{(\csc^{-1}(4x))^2} \cdot \frac{-1}{|4x| \sqrt{(4x)^2 - 1}} \frac{d}{dx} (4x)$$

$$= \frac{4}{(\csc^{-1}(4x))^2 |4x| \sqrt{16x^2 - 1}}$$

c. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(\cot^{-1} 3x) = \cos(\cot^{-1} 3x) \frac{d}{dx} \cot^{-1} 3x$

$$= \cos(\cot^{-1} 3x) \cdot \frac{(-1)}{1 + (3x)^2} \frac{d}{dx} (3x) = \cos(\cot^{-1} 3x) \cdot \frac{(-3)}{1 + 9x^2} \quad \#$$

แบบฝึกหัด 9.5

ข้อ 1-ข้อ 10 จงหาอนุพันธ์

1. $y = \sin^{-1} x^3$

$$2. \quad y = \sin^{-1} \sqrt{x}$$

$$3. \quad y = \cos^{-1} \frac{1}{x}$$

$$4. \quad s = \tan^{-1} e^t$$

$$5. \quad y = \cot^{-1} \sqrt{2-x}$$

$$6. \quad y = x \sin^{-1} x$$

$$7. \quad y = \sqrt{\cos^{-1} x}$$

$$8. \quad y = \sin(\sec^{-1} x)$$

$$9. \quad y = \tan^{-1}(\csc x)$$

$$10. \quad y = (\tan^{-1} x)^2$$

$$11. \quad \text{จงพิสูจน์} \quad D_x \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} D_x u$$

$$12. \quad \text{จงพิสูจน์} \quad D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2-1}} D_x u$$

13. ภาพขนาดใหญ่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสูง 6 ฟุต แขนงไว้บนกำแพง ด้านล่างของภาพสูงกว่าระดับสายตา 2 ฟุต ผู้ชมภาพควรอยู่ห่างจากกำแพงเป็นระยะเท่าใด สายตาจึงจะรับภาพเป็นมุมใหญ่ที่สุด(มุมวัดจากขอบล่างถึงขอบบนของภาพ)
14. ชายคนหนึ่งยืนบนท่าเรือ ดึงเชือกผูกเรือเข้าฝั่งด้วยความเร็ว 5 ฟุต/วินาที ปลายเชือกข้างที่อยู่ติดกับเรืออยู่ต่ำกว่าแขน 8 ฟุต จงหาว่ามุมที่เชือกทำกับแนวระดับจะเปลี่ยนไปด้วยความเร็วเท่าใด ขณะที่เชือกผูกเรือยาว 17 ฟุต.

9.6 ฟังก์ชันชี้กำลัง (Exponential function)

ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic function)

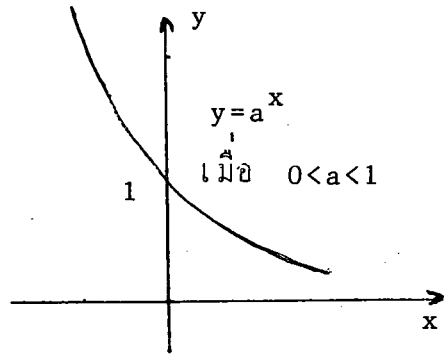
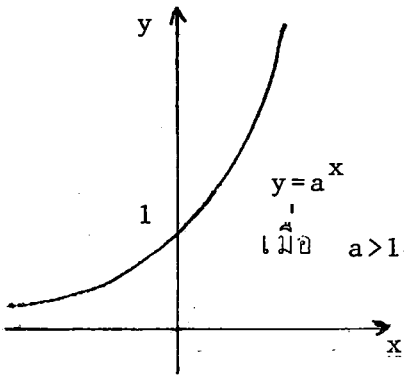
เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก ฟังก์ชัน $y=a^x$ เมื่อ $- \infty < x < \infty$ เรียกว่า ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จำนวน a เรียกว่า ฐานของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันชี้กำลังเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดในโดเมน กล่าวคือ

$$\lim_{x \rightarrow t} a^x = a^t$$

เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใดๆ

กราฟของฟังก์ชันชี้กำลังเป็นดังรูป 9.6.1



รูป 9.6.1

มีจำนวนจำนวนหนึ่งในฟังก์ชันที่เรากล่าวถึงบ่อยเขียนแทนด้วย e กำหนดโดย

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

เราสามารถแสดงได้ว่าค่าลิมิตนี้มีและมีความประมาณ

$$e \approx 2.718281828459045---$$

แต่ค่าที่ใช้โดยทั่วไปคือ 2.71828 จำนวน e เป็นจำนวนอตรรกยะในแบบที่เรียกว่าจำนวนอดิศัย (transcendental number)

เมื่อให้ e เป็นฐานของฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชัน $y=e^x$ บางครั้งเขียนแทนด้วย $\exp(x)$

ฟังก์ชันชี้กำลังมีคุณสมบัติดังนี้

9.6.1 ทฤษฎีบท : ถ้า a และ b เป็นจำนวนบวกและ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$$1. \quad a^0 = 1$$

$$2. \quad a^1 = a$$

$$3. \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$4. \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$5. \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$6. \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$7. \quad a^x b^x = (ab)^x$$

จากรูป 9.6.1 จะเห็นว่าฟังก์ชันชี้กำลังเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลงเพียงอย่างเดียว ดังนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฉะนั้นฟังก์ชันชี้กำลังมีฟังก์ชันผกผันเรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึม

9.6.2 บทนิยาม : ถ้า a เป็นจำนวนบวกต่างจาก 1 ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a คือ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันชี้กำลังฐาน a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\log_a x$$

โดยมีกฎการสมนัยดังนี้

$$y = \log_a x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a^y = x$$

ค่าของฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a ก็คือลอการิทึมฐาน a ส่วนมากเราจะใช้ $a=10$ ดังนั้น

ลอการิทึมฐาน 10 จึงเป็นที่รู้จักกันในนามลอการิทึมสามัญ(common logarithms) และโดยทั่วไปเมื่อเขียน $\log$ จะหมายถึง $\log_{10}$

9.6.3 ทฤษฎีบท : ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกและ n เป็นจำนวนจริงใดๆแล้ว

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$4. \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5. \log_a x^n = n \log_a x$$

6. ถ้า b เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

ลอการิทึมฐาน e เราเรียกว่าลอการิทึมธรรมชาติ(natural logarithm) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\ln$ เพราะฉะนั้น $\ln$ ก็คือ $\log_e$

โดยนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมและ 9.6.3 ทฤษฎีบทเราจะมีสูตรสำหรับฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติดังนี้

$$(1) \quad y = \ln x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = e^y$$

$$(2) \quad \ln e = 1$$

$$(3) \quad \ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e}$$

$$(4) \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$(5) \quad \ln e^x = x$$

$$(6) \quad e^{\ln x} = x \quad ; x > 0$$

$$(7) \quad a^x = e^{x \ln a}$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

จาก $y = \ln x$

$$D_x \ln x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right]$$

ให้ $s = \frac{x}{h}$ เมื่อ $h \rightarrow 0$ จะได้ $s \rightarrow \infty$ ดังนั้น

$$D_x \ln x = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right]$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

ดังนั้นจึงมีสูตร

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

และจาก $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ดังนั้น

$$D_x \log_a x = \frac{1}{\ln a} D_x \ln x = \frac{1}{x \ln a}$$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้โดยกฎลูกโซ่

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

$$D_x \log_a u = \frac{1}{u \ln a} D_x u$$

ตัวอย่าง 1: จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$(1) \quad y = \ln \sqrt{3x}$$

$$(2) \quad y = (\ln \sqrt{x})^2$$

$$(3) \quad y = \log(x^2 - x)$$

ผลเฉลย: (1) $D_x y = D_x \ln \sqrt{3x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3x}} D_x \sqrt{3x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot \frac{1}{2} (3x)^{-\frac{1}{2}} D_x (3x)$$

$$= \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$= \frac{1}{2x}$$

(2) $D_x y = D_x (\ln \sqrt{x})^2$

$$= 2 (\ln \sqrt{x}) D_x \ln \sqrt{x}$$

$$= 2 (\ln \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x}$$

$$= 2 (\ln \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} (x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(\ln \sqrt{x})}{x}$$

(3) $D_x y = D_x \log(x^2 - x)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(x^2-x)\ln 10} D_x(x^2-x) \\
 &= \frac{1}{(x^2-x)\ln 10} (2x-1) \quad \#
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2: จงหาอนุพันธ์ของ $y=10^{x^2-3}$

เฉลย :

$$\begin{aligned}
 D_x y &= 10^{x^2-3} \ln 10 D_x(x^2-3) \\
 &= 2x(\ln 10) 10^{x^2-3} \quad \#
 \end{aligned}$$

ในบทที่ 6 เรามีสูตร $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$ เมื่อ u เป็นจำนวนตรรกยะและ n เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x เราสามารถใช้คุณสมบัติลอการิทึมขยายไปยัง n ซึ่งเป็นจำนวนจริงใดๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

9.6.4 ทฤษฎีบท: ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x มีค่าบวก n เป็นจำนวนจริงคงตัว แล้ว

$$D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$$

พิสูจน์ ให้ $y=u^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนอตรรกยะ
ใส่ลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้าง

$$\ln y = u \ln u$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{1}{y} D_x y = \frac{n}{u} D_x u$$

เพราะฉะนั้น $D_x y = \frac{ny}{u} D_x u$

$$= nu^{n-1} D_x u \quad \#$$

การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันกำลัง

ให้ $y=a^x$ ดังนั้น $\log_a y=x$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างโดยเทียบกับ x จะได้

$$D_x \log_a y = D_x x$$

โดย 9.6.3 ทฤษฎีบท

$$\frac{1}{y \ln a} D_x y = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$D_x y = y \ln a$$

หรือเราจะมีสมการ

$$D_x a^x = a^x \ln a \quad (9.6.1)$$

ถ้า $a=e$ จะได้

$$D_x e^x = e^x \ln e = e^x \quad (9.6.2)$$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x โดยกฎลูกโซ่

$$D_x a^u = a^u \ln a D_x u \quad (9.6.3)$$

$$D_x e^u = e^u D_x u \quad (9.6.4)$$

ตัวอย่าง 3: จงหาอนุพันธ์ของ $y=10^{x^2-3}$

เฉลย: $D_x y = 10^{x^2-3} \cdot \ln 10 \cdot D_x (x^2-3) = 2x(\ln 10) 10^{x^2-3}$ #

แบบฝึกหัด 9.6

ข้อ 1- ข้อ 10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. $y=6^{x^3}$

$$2. \quad y = x^{3x^3 - 4x}$$

$$3. \quad y = 8^{\sqrt{x-1}}$$

$$4. \quad y = \log_{10} e^x$$

$$5. \quad y = 3x^x$$

$$6. \quad y = 3^x \ln(x+3)$$

$$7. \quad y = \sqrt{\log_{10} x}$$

$$8. \quad y = \log_4 (x^2 + 4)$$

$$9. \quad y = \log_2 \frac{(x^2 - 9)}{x^2 + 9}$$

$$10. \quad y = \log_{10} (\log_{10} x)$$

11. ให้ $y = u^v$ เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x และ u เป็นค่าบวก โดยใส่ลอการิทึมทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่า

$$D_x u^v = v u^{v-1} D_x u + u^v \ln u D_x v.$$

9.7 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

9.7.1 บทนิยาม ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก sine นิยามโดย

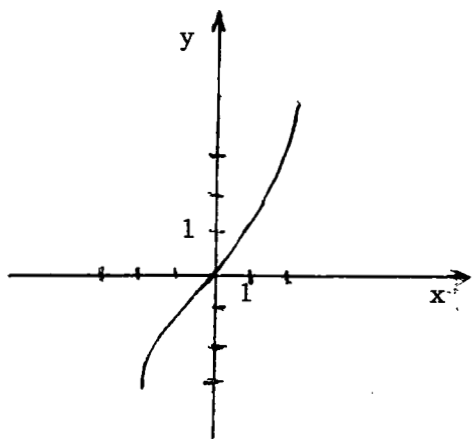
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

มีโดเมนและเรนจ์เป็นจำนวนจริงทั้งหมด

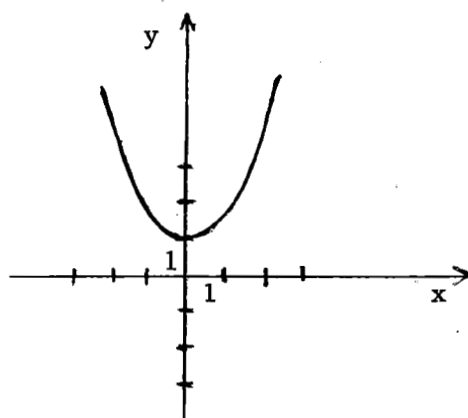
ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก cosine นิยามโดย

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

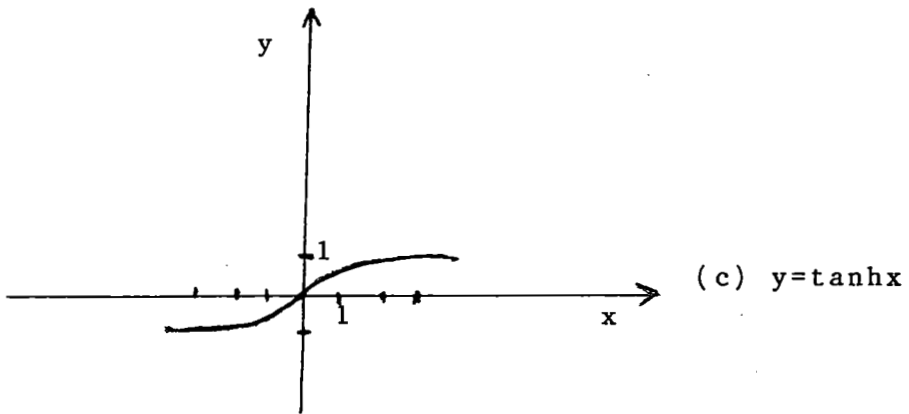
มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่มากกว่า 1 (รูป 9.7.1)



(a) $y = \sinh x$



(b) $y = \cosh x$



รูป 9.7.1

9.7.2 บทนิยาม ไฮเพอร์โบลิก tangent

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ไฮเพอร์โบลิก cotangent

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

ไฮเพอร์โบลิก secant

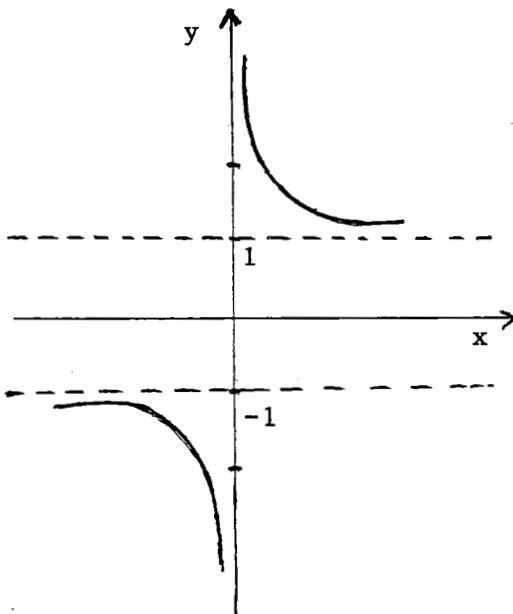
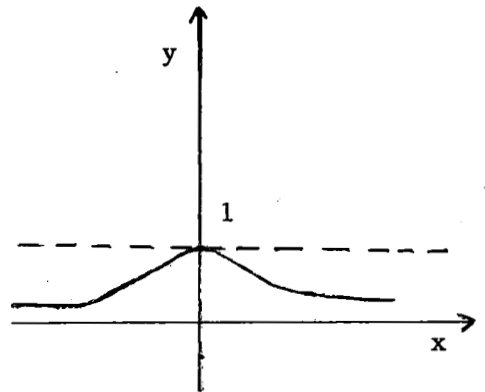
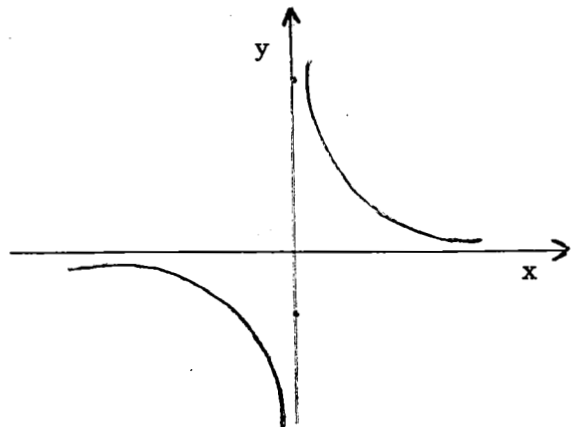
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ไฮเพอร์โบลิก cosecant

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

กราฟของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก tangent แสดงได้ดังรูป 9.7.1(c)

กราฟของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก cotangent ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก secant ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก cosecant แสดงได้ดังรูป 9.7.2

(c) $y = \coth x$ (b) $y = \operatorname{sech} x$ (c) $y = \operatorname{csch} x$ 

ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก จะคล้ายกับเอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างเช่น

$$-\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1 \quad (9.7.1)$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (9.7.2)$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (9.7.3)$$

(9.7.1) และ (9.7.2) สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากดังนี้

$$\begin{aligned} -\sinh^2 x + \cosh^2 x &= -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})}{4} + \frac{(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2 x &= 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1. จงพิสูจน์ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

พิสูจน์ $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \frac{(e^y + e^{-y})}{2} + \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \frac{(e^y - e^{-y})}{2}$

$$= \frac{2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \cosh(x+y) \quad \#$$

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกมีดังนี้

$$D_x \sinh x = \cosh x \quad (9.7.4)$$

$$D_x \cosh x = \sinh x \quad (9.7.5)$$

$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad (9.7.6)$$

$$D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (9.7.7)$$

$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (9.7.8)$$

$$D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \quad (9.7.9)$$

สูตรเหล่านี้สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ 9.7.1, 9.7.2 บทนิยาม และความสัมพันธ์เอกลักษณ์ (9.7.1), (9.7.2) และ (9.7.3) ตัวอย่างเช่น

$$D_x \sinh x = D_x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D_x \tanh x = D_x \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

#

แบบฝึกหัด 9.7

ข้อ 1-ข้อ 8 จงพิสูจน์เอกลักษณ์

1. a. $\sinh(-x) = -\sinh x$
b. $\cosh(-x) = \cosh x$
c. $\tanh(-x) = -\tanh x$
2. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
3. $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
4. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
5. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
6. $\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$
7. $e^x = \cosh x + \sinh x$
8. $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

ข้อ 9-ข้อ 12 จงพิสูจน์สูตรการหาอนุพันธ์

9. $D_x \cosh x = \sinh x$
10. $D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
11. $D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
12. $D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

ข้อ 13-ข้อ 19 จงหาอนุพันธ์

13. $y = \sinh 3x$
14. $y = e^x \tanh 2x$
15. $y = \tanh x \operatorname{sech} x$

$$16. \quad y = \frac{\cosh x}{x}$$

$$17. \quad y = \operatorname{sech}(4x^2 - x)$$

$$18. \quad y = \cosh e^{2x}$$

$$19. \quad y = \sqrt{\coth x}$$

$$20. \quad y = \ln(\coth x)$$

$$21. \quad y = x \cosh(x^2 + 3)$$

$$22. \quad y = \tanh^2 x$$

23. จงหาเส้นกำกับของเส้นโค้ง $y = \coth x$ และเขียนกราฟ

24. จงหาค่าสุดขีด และจุดเปลี่ยนเว้าของ $y = \operatorname{sech} x$ และหาช่วงซึ่งกราฟเว้าขึ้นและเว้าลง พร้อมเขียนกราฟ.

9.8 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

เนื่องจาก

$$D_x \sinh x = D_x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

และ $e^x > 0$ สำหรับทุก x ใน $\mathbf{R}$ เพราะฉะนั้น $D_x \sinh x > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก $\sinh$ ต่อเนื่องทุกจุดและเพิ่มขึ้น เพราะฉะนั้นฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก $\sinh$ มีฟังก์ชันผกผันต่อเนื่องและเพิ่มขึ้น (โดย 9.4.3 ทฤษฎีบท)

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก $\sinh$ ผกผัน นิยามโดย

$$y = \sinh^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \sinh y$$

พิจารณากราฟ $y = \cosh x$ (รูป 9.8.1) จะเห็นว่าเส้นแนวนอน $y = k, k > 1$ จะตัดกราฟ 2 จุด ดังนั้น $y = \cosh x$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงไม่มีฟังก์ชันผกผัน แต่ถ้าเราจำกัดโดเมนให้เป็นเซตที่ $x \geq 0$ ฟังก์ชัน $y = \cosh x, x \geq 0$ ก็จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นฟังก์ชัน $y = \cosh x$ บนโดเมน $x \geq 0$ จะมีฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก cosine ผกผัน นิยามโดย

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \cosh y \quad \text{และ} \quad y \geq 0$$

โดยทำนองเดียวกัน $\tanh x, \coth$ และ csch ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผันเขียนแทนด้วย $\tanh^{-1}, \coth^{-1}$ และ csch^{-1} แต่ sech ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นเราจึงจำกัดโดเมนของ sech และนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก sech ผกผันโดย

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \operatorname{sech} y \quad \text{และ} \quad y \geq 0$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

ให้ $y = \sinh^{-1} u$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x แล้ว

$$u = \sinh y \quad \text{และ} \quad D_y u = \cosh y$$

$$\text{ดังนั้น} \quad D_u y = \frac{1}{D_y u} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

และ

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} D_x u$$

ดังนั้น

$$D_x(\sinh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u \quad (9.3.1)$$

โดยทำนองเดียวกัน

$$D_x(\cosh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \quad (9.3.2)$$

$$D_x(\tanh^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad -1 < u < 1 \quad (9.3.3)$$

$$D_x(\coth^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad (u^2 > 1) \quad (9.3.4)$$

แบบฝึกหัด 9.8

ข้อ 1-ข้อ 8 จงหาอนุพันธ์

1. $y = \sinh^{-1} 2x$
2. $y = \cosh^{-1} x^3$
3. $y = \cosh^{-1}(\tan x)(4x^3 \sinh x^4)$
4. $y = x \sinh^{-1} 2x$
5. $y = \sqrt{1 + \tanh^{-1} x}$
6. $y = \tanh^{-1} e^x$
7. $y = \tanh^{-1} x^2$
8. $y = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{2x} \right)$

9. เขียนกราฟของ $y = \tanh^{-1} x$ [แนะ : เขียนกราฟ $x = \tanh y$]

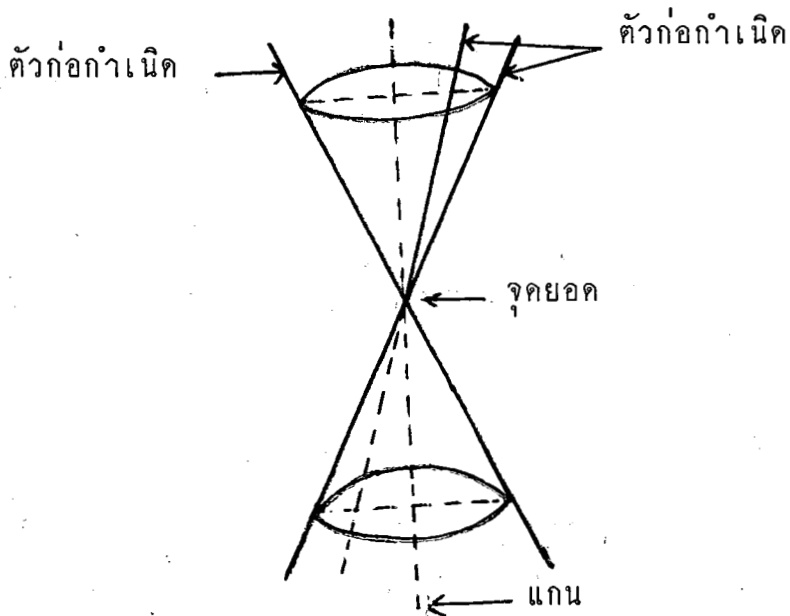
10. เขียนกราฟของ $y = \operatorname{csch}^{-1} x$.

บทที่ 10

ภาคตัดกรวย

10.1 บทนำ

รูป 10.1.1 เป็นกรวยกลมตรง(right circular cone) 2 อันมีจุดยอด(vertex)ติดกัน กรวยแต่ละอันสามารถขยายไปได้ไกลอย่างไม่มีขอบเขต



รูป 10.1.1 กรวยกลมตรง

เส้นตรงทั้งหมด ซึ่งอยู่บนกรวยเรียกว่า **ตัวก่อกำเนิด(generator)** ของกรวย ดังนั้น
ตัวก่อกำเนิดทั้งหมดจะผ่านจุดยอด

ภาคตัดกรวย คือเส้นโค้งที่เกิดจากระนาบตัดกรวยกลมตรง

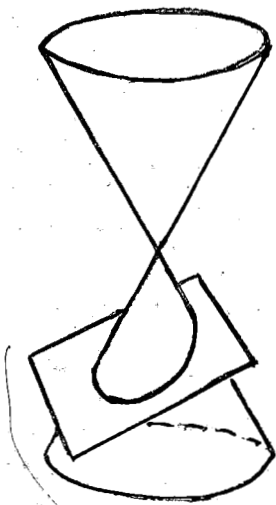
ภาคตัดกรวยมี 3 แบบ

แบบที่ 1. เกิดจากตัดระนาบไม่ขนานกับตัวก่อกำเนิดทั้งหมด

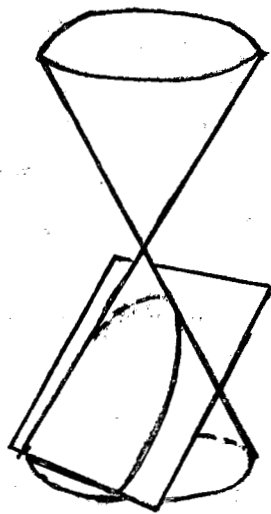
ดังนั้นระนาบจะตัดตัวก่อกำเนิดทั้งหมด เส้นโค้งซึ่งเป็นผลตัดของระนาบ เรียกว่า

วงรี(ellipse) (รูป 10.1.2 (a))

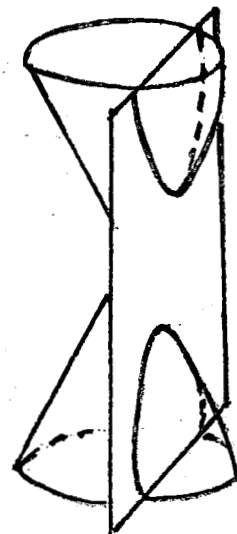
รูป 10.1.2



(a) วงรี



(b) พาราโบลา



(c) ไฮเพอร์โบลา

วงกลมเป็นลิมิตของวงรีจึงจัดอยู่ในแบบที่ 1 เพราะเกิดจากระนาบตัดผ่านจุดยอดของกรวย และไม่ขนานกับตัวก่อกำเนิดใดๆ

แบบที่ 2. เกิดจากการตัดระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิด 1 ตัว

เส้นโค้งซึ่งเป็นผลตัดของระนาบ เรียกว่า **พาราโบลา**(รูป 10.1.2 (b))

เส้นตรงจัดอยู่ในแบบที่ 2 เพราะว่าเกิดจากระนาบตัดผ่านจุดยอดของกรวย และ

บรรจุก่อกำเนิด 1 ตัว ดังนั้นเส้นตรงจึงเกิดจากการเสื่อมคลายของพาราโบลา

ถ้าจุดยอดของกรวยอยู่ห่างจากจุดตัดมาก ส่วนที่จะตัดก็จะคล้ายทรงกระบอกกลมตรง ดังนั้น เส้นโค้งซึ่งเป็นผลตัดจุดนี้ จะเป็นเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกัน ดังนั้นเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกัน เป็นลิมิตของพาราโบลา จึงจัดอยู่ในแบบที่ 2

แบบที่ 3. ตัดระนาบขนานกับ 2 ตัวก่อกำเนิด

เส้นโค้งซึ่งเป็นผลตัดของระนาบ เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา(hyperbola)

(รูป 10.1.2 (c))

ไฮเพอร์โบลาเสื่อมกลายเป็นเส้นตรง 2 เส้นตัดกันเมื่อตัดระนาบผ่านจุดยอดของกรวย และบรรจุก่อกำเนิด 2 ตัว

10.2 บทนิยามภาคตัดกรวย

10.2.1 บทนิยาม ภาคตัดกรวย(conic) คือเซตของจุดซึ่งมีอัตราส่วนของระยะทางไม่ระบุทิศทาง จากจุดคงตัวต่อระยะทางไม่ระบุทิศทางจากเส้นคงตัว คงตัว

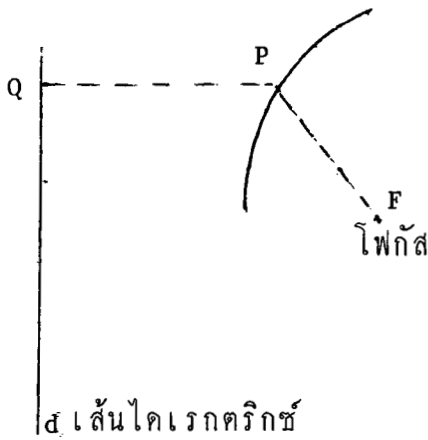
กำหนด F เป็นจุดคงตัว เรียกว่า โฟกัส(focus)ของภาคตัดกรวย และเส้นคงตัว d เรียกว่า เส้นไดเรกทริกซ์(directrix)

กำหนด e เป็นอัตราส่วนคงตัว เรียกว่า ค่าเยื้องศูนย์(eccentricity)ของภาคตัดกรวย

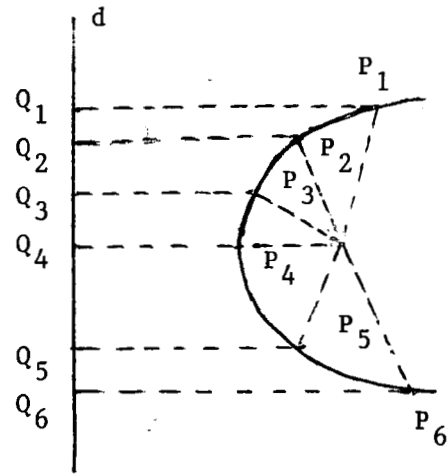
นั่นคือ ถ้า P เป็นจุด และ Q เป็นโปรเจกชันของ P บน d (รูป 10.2.1) แล้ว P อยู่บนภาคตัดกรวยก็ต่อเมื่อ

$$|FP| = e|QP|$$

รูป 10.2.2 ระยะทางไม่ระบุทิศทางของจุด $P_1, P_2, \dots, P_6$ จาก F เป็น $\frac{1}{2}$ ของระยะทางไม่ระบุทิศทางจาก d นั่นคือ



รูป 10.2.1



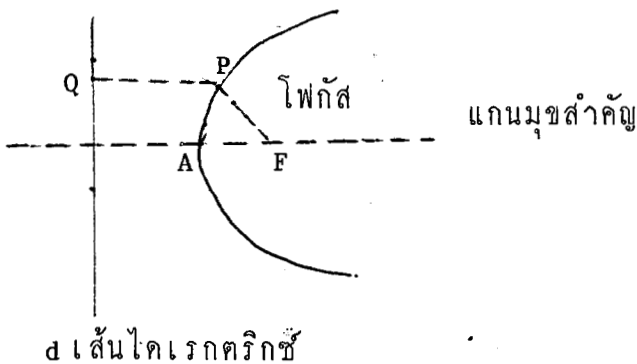
รูป 10.2.2

$$|FP_1| = \frac{1}{2}|Q_1P_1|, |FP_2| = |Q_2P_2|, \dots, |FP_5| = |QP_5|$$

เส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสและตั้งฉากไคเรกทริกซ์ เรียกว่า **แกนमुखสำคัญ (Principal axis)** ของภาคตัดกรวย

จุดซึ่งเป็นผลตัดกรวยกับแกนमुखสำคัญ เรียกว่า **จุดยอด (vertices)** ของภาคตัดกรวย

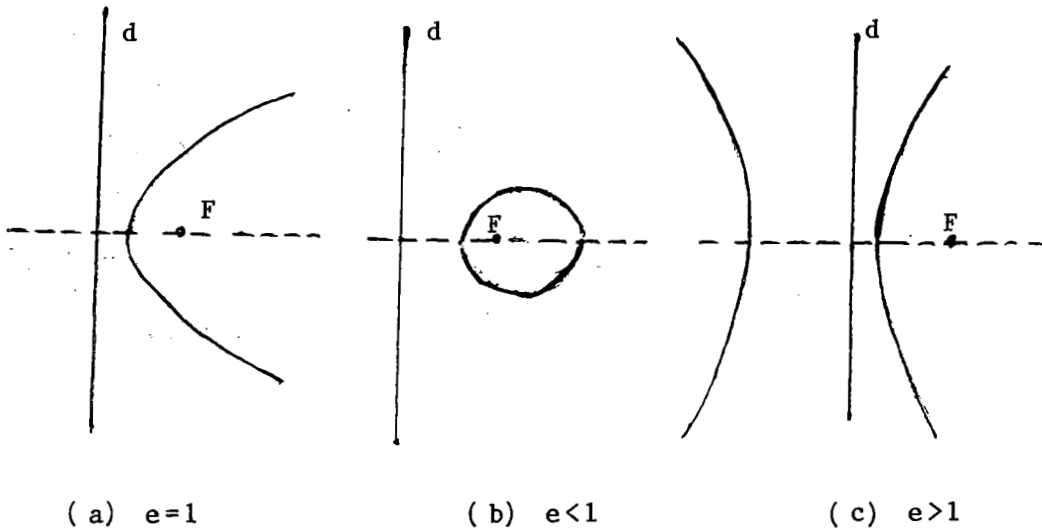
รูป 10.2.3 F เป็นโฟกัส, d เป็นเส้นไคเรกทริกซ์ และ A เป็นจุดยอด



รูป 10.2.3

- 10.2.2 บทนิยาม เมื่อ $e=1$ ภาคตัดกรวย เรียกว่า พาราโบลา
 เมื่อ $e<1$ ภาคตัดกรวย เรียกว่า วงรี
 เมื่อ $e>1$ ภาคตัดกรวย เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา

(รูป 10.2.4)



รูป 10.2.4

รูป 10.2.4 ภาคตัดกรวยจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนमुखสำคัญ พาราามีจุดยอดจุดเดียว วงรีและไฮเพอร์โบลามีจุดยอด 2 จุด ซึ่งเราจะแสดงวิธีพิสูจน์ดังต่อไปนี้

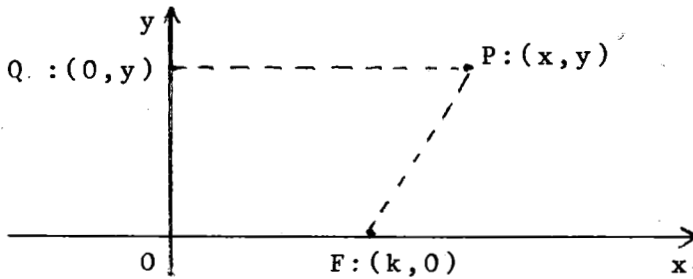
10.2.3 ทฤษฎีบท ภาคตัดกรวยสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนमुखสำคัญ

ถ้าภาคตัดกรวยเป็นพาราโบลา จะมีจุดยอดจุดเดียว

ถ้าภาคตัดกรวยเป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลาจะมีจุดยอด 2 จุด

พิสูจน์ ให้เส้นโคเรกตริกซ์ของภาคตัดกรวยเป็นแกน y และโพกัสของภาคตัดกรวยอยู่บนแกน x เพราะฉะนั้นสมการโคเรกตริกซ์ คือ $x=0$ และโพกัส คือ $F: (k, 0)$ เมื่อ $k \neq 0$

เป็นระยะทางจากจุดกำเนิดถึงโฟกัส (รูป 10.2.5)



รูป 10.2.5

ให้ $P:(x, y)$ เป็นจุดใดๆบนภาคตัดกรวย โพรเจกชันบนแกน y คือ $Q:(0, y)$
โดย 10.2.1 บทนิยาม

$$(1) \quad |FP| = e |QP|$$

เมื่อ $e > 0$ เป็นค่าเยื้องศูนย์กลางของภาคตัดกรวย

แต่

$$|FP| = \sqrt{(x-k)^2 + y^2} \quad \text{และ} \quad |QP| = |x|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \sqrt{(x-k)^2 + y^2} = e |x|$$

หรือ

$$(2) \quad (1-e^2)x^2 + y^2 - 2kx + k^2 = 0$$

พิกัดของจุด $P:(x, y)$ จะสอดคล้องสมการ เพราะว่าแกน x ผ่านโฟกัส และตั้งฉากกับเส้นไคเรกทริกซ์ ดังนั้นแกน x จะเป็นแกนमुखสำคัญของภาคตัดกรวย

เพราะ y ใน (2) มีระดับชั้น (degree) คู่ ภาคตัดกรวยจึงสมมาตรกับแกนमुखสำคัญ

วิธีหาพิกัด x ของจุดยอดของภาคตัดกรวย เราแทน $y=0$ ในสมการ (2)

$$(3) \quad (1-e^2)x^2 - 2kx + k^2 = 0$$

ถ้า $e=1$ ภาคตัดกรวยเป็นพาราโบลา สมการ(3)จะเป็น

$$-2kx + k^2 = 0$$

มีรากเพียงรากเดียว ดังนั้นพาราโบลามีจุดยอดเพียงจุดเดียว

ถ้า $e \neq 1$ ภาคตัดกรวยเป็นวงรี หรือไฮเพอร์โบลา สมการ(3) จะเป็นสมการกำลังสองใน x มีดิสมิแนนต์ คือ :

$$4k^2 - 4(1-e^2)k^2$$

หรือ

$$(4) \quad 4e^2k^2$$

เพราะว่า $e > 0$ และ $k \neq 0$ (4) จะเป็นจำนวนบวก ดังนั้นสมการ(3) จะมี 2 รากที่ต่างกัน และเป็นพิกัด x ของจุดยอดของกรวย เพราะฉะนั้นวงรีและไฮเพอร์โบลาจะมีจุดยอด 2 จุด

#

10.3 ภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง(Central Conics)($e \neq 1$)

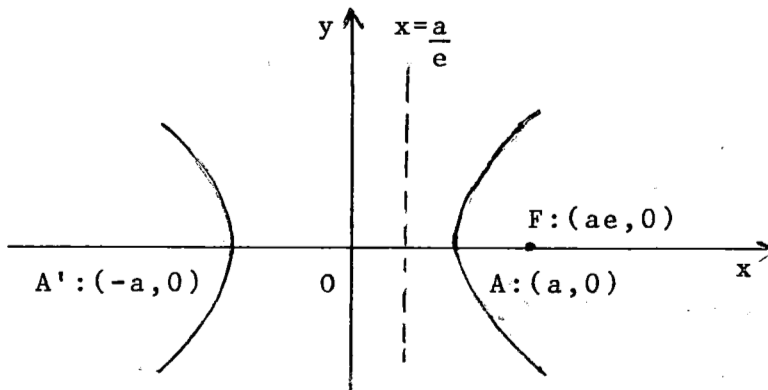
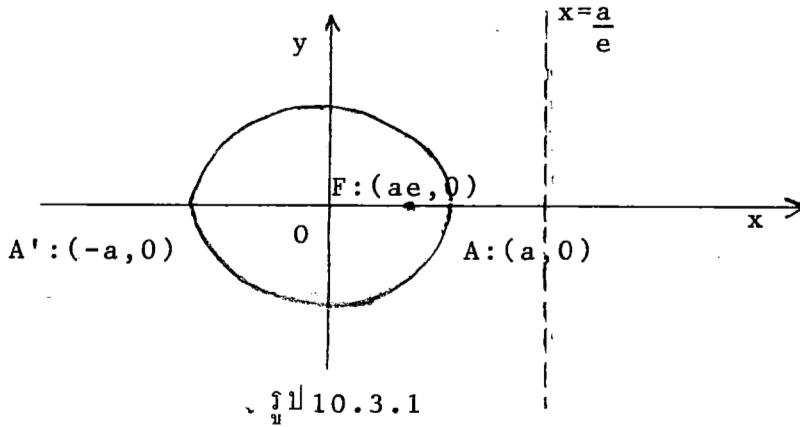
ภาคตัดกรวยที่มี $e \neq 1$ จะเป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา และจะมี 2 จุดยอด จุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอด เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง(center)** ของภาคตัดกรวย

เนื่องจากพาราโบลามีจุดยอดเพียงจุดเดียว ดังนั้นจึงไม่มีจุดศูนย์กลาง วงรีและไฮเพอร์โบลา เรียกว่า **ภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง**

จะกล่าวว่าภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง มีตำแหน่งมาตรฐาน(standard position) เมื่อจุดศูนย์กลางเป็นจุดกำเนิด และแกนमुखสำคัญเป็นแกน x (รูป 10.3.1 และ 10.3.2)

สมการภาคตัดกรวยมีศูนย์กลางมีตำแหน่งมาตรฐาน เรียกว่า **สมการมาตรฐาน(standard equation)** ของภาคตัดกรวย

รูป 10.3.1 จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดยอดคือ A' และ A



A' อยู่ทางซ้ายของ A

$\overline{OA} = a$ เป็นจำนวนบวก

พิกัดของ A คือ $(a, 0)$ พิกัดของ A' คือ $(-a, 0)$

10.3.1 ทฤษฎีบท ถ้าพิกัดของจุดยอดของภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง คือ $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$ เมื่อ a เป็นจำนวนบวก แล้วพิกัดของโฟกัสคือ $(ae, 0)$ และสมการไคเรกตริกซ์ คือ $x = \frac{a}{e}$

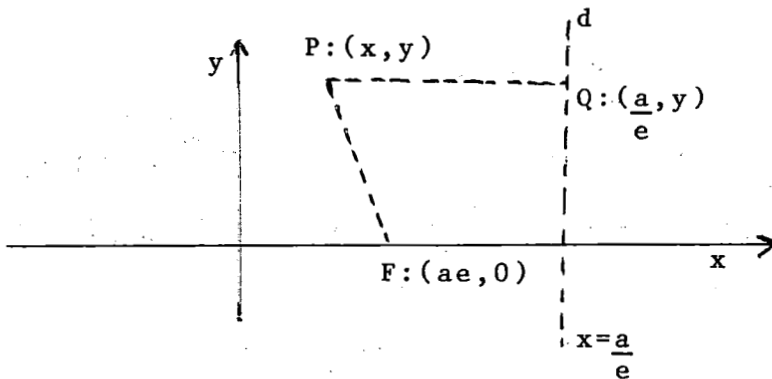
การพิสูจน์ไม่ยากจะเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

10.3.2 ทฤษฎีบท สมการมาตรฐานของภาคตัดกรวยมีศูนย์กลางที่มีโฟกัสที่ $(ae, 0)$ และไคเรกตริกซ์ $x = \frac{a}{e}$ คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \quad (10.33.11)$$

เมื่อ $a > 0$

พิสูจน์ ให้ $P:(x, y)$ เป็นจุดใดๆบนภาคตัดกรวย(รูป 10.3.3)



รูป 10.3.3

ให้ Q เป็นโปรเจกชันของ P บนไคเรกตริกซ์ เพราะฉะนั้นพิกัดของ Q คือ $(\frac{a}{e}, y)$ โดย 10.2.1 บทนิยาม P อยู่บนภาคตัดกรวย ก็ต่อเมื่อ $|FP| = e|QP|$

แต่ $|FP| = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$

และ $|QP| = \left| x - \frac{a}{e} \right|$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{a}{e} \right|$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(1-e^2)^2 x^2 + y^2 = a^2 (1-e^2)$$

หรือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

#

สมการ (10.3.1) มี x และ y เป็นระดับชั้น (degree) คู่

ดังนั้นภาคตัดกรวยมีกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนพิกัดทั้งสอง

โดยเหตุผลของการสมมาตร วงรีหรือไฮเพอร์โบลาจะมีโฟกัสที่สองคือ $F: (-ae, 0)$

และโคเรกตริกซ์เส้นที่สอง คือ $x = -\frac{a}{e}$ (รูป 10.4.1)

10.3.3 ทฤษฎีบท ภาคตัดกรวยมีจุดศูนย์กลาง

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

มี 2 โฟกัส $F: (ae, 0)$ และ $F': (-ae, 0)$ สมัยกับเส้นโคเรกตริกซ์ $x = \frac{a}{e}$ และ $x = -\frac{a}{e}$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจาก 10.3.2 ทฤษฎีบท

สำหรับโพกัสแต่ละอัน กับเส้นโคเรกตริกซ์ที่สมนัย เราสามารถนำไปสร้างภาคตัดกรวยทั้งหมดได้

แบบฝึกหัด 10.3

- เตรียมกระดาษแผ่นใหญ่ 1 แผ่น เขียนเส้นโคเรกตริกซ์แนวตั้ง d ลงบนกระดาษตรงกึ่งกลางกระดาษ ห่างจาก d ไปทางขวาประมาณ 2 นิ้วให้เป็นจุดโพกัส F
 - เขียนจุดประมาณ 10 จุดบนกระดาษ โดยแต่ละจุดมีระยะห่างจาก F และ d เท่ากัน เขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุด 10 จุด และบอกชื่อภาคตัดกรวย และหาค่าเยื้องศูนย์กลาง
 - เขียนจุดประมาณ 10 จุดลงบนกระดาษ โดยแต่ละจุดมี $\frac{1}{2}$ ของระยะห่างจาก F เท่ากับระยะห่างจาก d เขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุด 10 จุด บอกชื่อภาคตัดกรวย และหาค่าเยื้องศูนย์กลาง
 - เขียนจุดประมาณ 15 จุดบนกระดาษ โดยแต่ละจุดมี 2 เท่าของระยะห่างจาก F เท่ากับระยะห่างจาก d ประมาณครึ่งหนึ่งของจุดทั้งหมดอยู่ทางซ้ายของ d เขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุดทั้งหมด บอกชื่อภาคตัดกรวย และหาค่าเยื้องศูนย์กลาง
- ในสมการ (10.3.1) กำหนด a, e ให้ จงเขียนกราฟ กราฟเป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา
 - $a=5, e=\frac{3}{5}$
 - $a=2, e=2$
- ภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

เป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา จงหาจุดยอด, ค่าเยื้องศูนย์กลาง, โพกัส และโคเรกตริกซ์ พร้อมเขียนกราฟ [แนะ : จากสมการ (10.3.1) $a^2=36$ และ $a^2(1-e^2)=9$]

4. จงพิสูจน์ 10.3.1 ทฤษฎีบท [แนะนำ : หาสมการของภาคตัดกรวย ซึ่งมีโฟกัสเป็น $(k, 0)$ ไคเรกตริกซ์ คือ $x=d$ และ ค่าเยื้องศูนย์กลาง คือ e ($k>0, d>0, e \neq 1$) จากความจริง $(\pm a, 0)$ สอดคล้องสมการภาคตัดกรวย หาก k และ d ในเทอมของ a และ e]
5. จงพิสูจน์ 10.3.3 [แนะนำ : สมการภาคตัดกรวยมีโฟกัส $(-ae, 0)$ สมนัยกับเส้นไคเรกตริกซ์ $x = -\frac{a}{e}$ และหาค่าเยื้องศูนย์กลาง $e \neq 1$] .

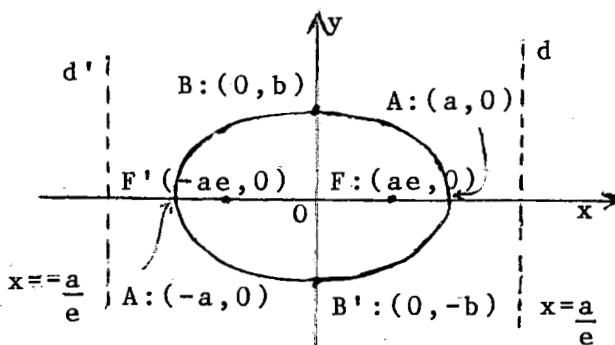
10.4 วงรี(The Ellipse) ($e < 1$)

สำหรับวงรี $e < 1$ จะได้ $a^2(1-e^2)$ เป็นบวก และ $\sqrt{a^2(1-e^2)}$ เป็นจำนวนจริง ให้ $b = a\sqrt{1-e^2}$ แทนใน (10.3.1) จะได้ทฤษฎีบทดังนี้

10.4.1 ทฤษฎีบท สมการมาตรฐานวงรี ที่มีโฟกัสที่ $F:(ae, 0)$ และ $F':(-ae, 0)$ ไคเรกตริกซ์ $x = \frac{a}{e}$ และ $x = -\frac{a}{e}$ คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10.4.1)$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนบวก และ $b^2 = a^2(1-e^2)$

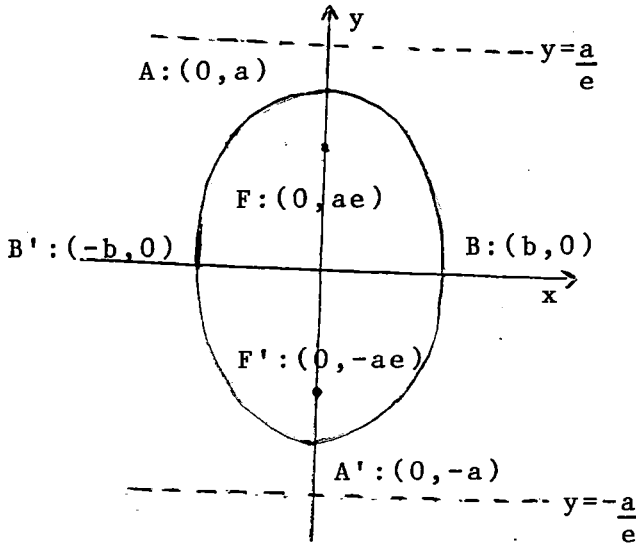


รูป 10.4.1

ส่วนเส้น AA' ของแกนหลักสำคัญของวงรี ที่อยู่ระหว่าง $(-a,0)$ และ $(a,0)$ เรียกว่า **แกนเอก(major axis)**ของวงรี(รูป 10.4.1) มีความยาว $2a$

ส่วนเส้น BB' ของแกน y ซึ่งตัดกับวงรี เรียกว่า **แกนโท(minor axis)**ของวงรี(รูป 10.4.1) มีความยาว $2b$

ถ้าสมการมาตรฐานของวงรี มีแกน y เป็นแกนหลักสำคัญของวงรี(รูป 10.4.2) เราจะทฤษฎีบทดังนี้



รูป 10.4.2

10.4.2 ทฤษฎีบท ถ้าโฟกัสของวงรีคือ $(0, \pm ae)$ และไคเรกตริกซ์คือ $y = \pm \frac{a}{e}$ แล้วสมการมาตรฐานของวงรีคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(10.4.2)

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนบวก และ $b^2 = a^2(1-e^2)$

เพราะว่าวงรี $0 < e < 1$ ดังนั้น $1-e^2$ เป็นจำนวนน้อยกว่า 1 จาก $b^2 = a^2(1-e^2)$ จึงสรุปได้ว่าในสมการมาตรฐานของวงรี

$$a^2 > b^2 \quad \text{เสมอ}$$

ดังนั้นไม่ยากที่จะบอกว่าโฟกัสอยู่บนแกน x หรือ แกน y ตัวอย่างเช่น

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

เราจะเห็นว่า $16 > 9$ เพราะฉะนั้น 16 จะต้องเป็น a^2 และ 9 ต้องเป็น b^2 ดังนั้นโดย 10.4.1 ทฤษฎีบทโฟกัสจะอยู่บนแกน x

ถ้าสมการมาตรฐานคือ

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{9} = 1$$

จะมี $b^2 = 4$ และ $a^2 = 9$ ดังนั้นโดย 10.4.2 ทฤษฎีบทโฟกัสจะอยู่บนแกน y

ตัวอย่าง 2. จงหาจุดยอด, โฟกัส, ไคเรกทริกซ์, ค่าเยื้องศูนย์กลาง และความยาวของแกนเอก และแกนโทของวงรี

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

เฉลย เพราะว่า $a^2 > b^2$ เราจะมี $a^2 = 16$ และ $b^2 = 4$

ดังนั้นโดย 10.4.1 ทฤษฎีบท จุดยอดคือ $(\pm 4, 0)$ ความยาวแกนเอกคือ 8 ความยาวแกนโทคือ 4

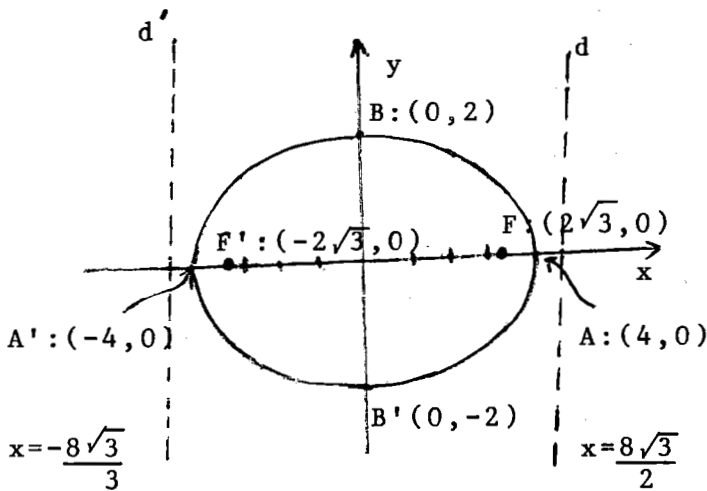
เนื่องจาก $b^2 = a^2(1 - e^2)$ แทน b^2 และ a^2 ลงในสมการ จะได้

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $ae = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

และ $\frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

เพราะฉะนั้นพิกัดของโฟกัสคือ $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ และสมการไคเรกตริกซ์คือ $x = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}$
(รูป 10.4.3) #



รูป 10.4.3

แบบฝึกหัด 10.4

ข้อ 1-ข้อ 5 เขียนกราฟของแต่ละข้อ หาพิกัดของจุดยอด, ค่าเยื้องศูนย์กลาง, พิกัดของโฟกัส และความยาวแกนเอกและแกนโทของวงรี

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$2. \quad \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$$3. \quad 25x^2 + 4y^2 = 100$$

$$4. \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$5. \quad 4x^2 + y^2 = 38$$

ข้อ6-ข้อ10 จงหาสมการมาตรฐานของวงรีจากข้อมูลที่ให้

$$6. \quad \text{โฟกัสที่จุด } (-3, 0) \text{ จุดยอดที่ } (6, 0)$$

$$7. \quad \text{โฟกัสที่จุด } (6, 0) \text{ ค่าเยื้องศูนย์กลาง } \frac{2}{3}$$

$$8. \quad \text{โฟกัสที่จุด } (0, 3) \text{ ความยาวแกนโท } 8$$

$$9. \quad \text{โฟกัสที่จุด } (0, -2) \text{ ไคเรกตริกซ์ } y = -6$$

$$10. \quad \text{จุดยอดที่ } (5, 0) \text{ และกราฟผ่านจุด } (2, 3)$$

ข้อ11-ข้อ13 จากสมการที่กำหนดให้ จงเขียนกราฟของวงรี, หาค่าเยื้องศูนย์กลาง, พิกัดจุดศูนย์กลาง, โฟกัส และสมการของไคเรกตริกซ์

$$11. \quad \frac{(x+2)^2}{10} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$

$$12. \quad \frac{(x+6)^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$13. \quad \frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

$$14. \quad \text{ใช้ 10.2.1 และ 2.6.4 หาสมการของวงรีที่มีโฟกัสที่ } (2, 2) \text{ และเส้นไคเรกตริกซ์ } 2x - 3y + 6 = 0 \text{ ค่าเยื้องศูนย์กลาง } \frac{2}{3}$$

$$15. \quad \text{จงพิสูจน์ว่า สมการเส้นสัมผัสวงรี}$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\text{ที่จุด } P_1 : (x_1, y_1) \text{ บนวงรีคือ } b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$$

16. จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดโฟกัสที่ $(0, 2)$ และ $(0, -2)$ และผ่านจุด $(2, 2)$
 17. จงหาจุดโฟกัสของวงรี ซึ่งมีสมการ

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10} = 1$$

กราฟมีไคเรกตริกซ์หรือไม่ ?

18. วงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี มีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดใดจุดหนึ่ง ถ้าระยะที่น้อยที่สุดและมากที่สุดจากโลกถึงดวงอาทิตย์ เป็นระยะ 91,446,000 ไมล์ และ 94,560,000 ไมล์ ตามลำดับ จงหาค่าเยื้องศูนย์กลาง.

10.5 ไฮเพอร์โบลา(The Hyperbola) ($e > 1$)

สำหรับไฮเพอร์โบลา เนื่องจาก $e > 1$ ดังนั้น $a^2(e^2 - 1)$ เป็นบวก เพราะฉะนั้น $\sqrt{a^2(e^2 - 1)}$ เป็นจำนวนจริง

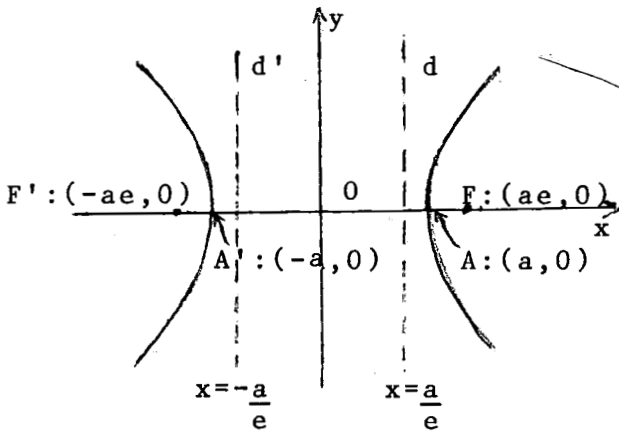
ให้ $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ แทน b ลงในสมการ (10.3.1) จะมีสมการดังนี้

10.5.1 ทฤษฎีบท สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีโฟกัสที่ $F: (ae, 0)$ และ $F': (-ae, 0)$ สมนัยกับไคเรกตริกซ์ $x = \frac{a}{e}$ และ $x = -\frac{a}{e}$ คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10.5.1)$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

ส่วนเส้น AA' ของแกนมุขสำคัญ ซึ่งอยู่ระหว่างจุดยอด $(\pm a, 0)$ เรียกว่า **แกนตามขวาง(transverse axis)** ของไฮเพอร์โบลา (รูป 10.5.1) มีความยาว $2a$



รูป 10.5.1

เพราะว่าสมการมาตรฐานมี x และ y มีกำลังเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นไฮเพอร์โบลาจึงสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนพิกัด ส่วนเส้นที่มีจุดยอดที่ $(0, \pm b)$ เรียกว่า แกนสังยุค (conjugate axis) ของไฮเพอร์โบลา มีความยาว $2b$

จากสมการ (10.5.1)

$$(1) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

ถ้า $x^2 < a^2$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ เป็นจำนวนจินตภาพ เพราะฉะนั้น y เป็นจำนวนจินตภาพ เมื่อ $|x| < a$ ดังนั้นไฮเพอร์โบลาจึงไม่มีระหว่างเส้น $x = a$ และ $x = -a$

y เป็นจำนวนจริงใน (1) ถ้า $|x| \geq a$ ดังนั้นไฮเพอร์โบลาไม่เป็นเส้นโค้งปิด แต่ประกอบด้วย 2 ส่วน

ส่วนหนึ่งผ่านจุดยอด $A: (a, 0)$ ขยายไปได้ไกลทางขวาของ A อย่างไม่มีขอบเขต

อีกส่วนผ่านจุดยอด $A': (-a, 0)$ ขยายไปได้ไกลทางซ้ายของ A' อย่างไม่มีขอบเขต

(รูป 10.5.2) ถ้าเราให้แกน y เป็นแกนमुखสำคัญ เราจะมีทฤษฎีบทดังนี้

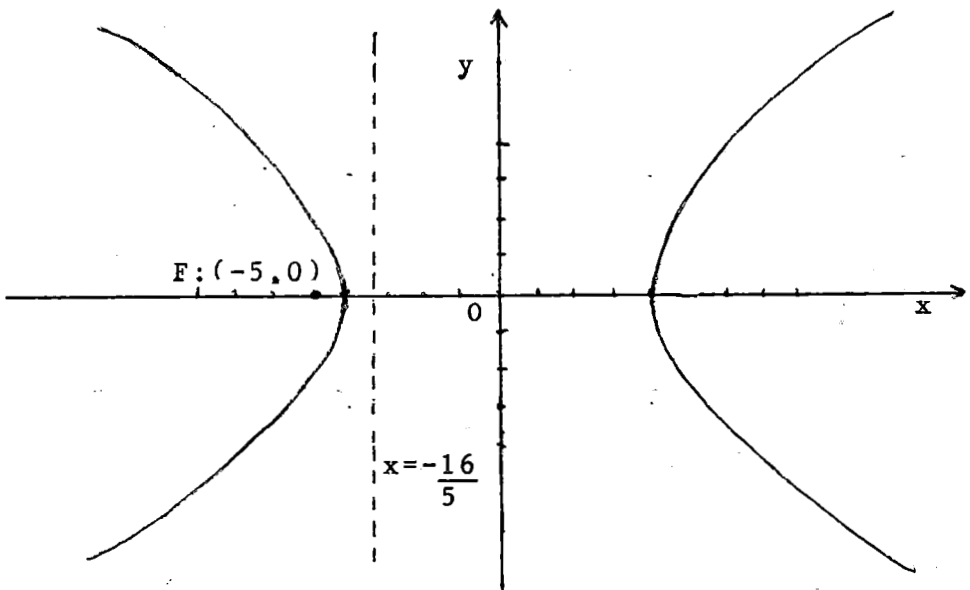
10.5.2 ทฤษฎีบท สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีโฟกัสที่ $(0, \pm ae)$ และ ไคเรกตริกซ์ $y = \pm \frac{a}{e}$ คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (10.5.2)$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนบวก และ $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

ตัวอย่าง 1. หาสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวย ซึ่งมีโฟกัส $(-5, 0)$ และ ไคเรกตริกซ์ $x = -\frac{16}{5}$

เฉลย เพราะว่าแกน x ผ่านโฟกัส และตั้งฉากกับไคเรกตริกซ์ ดังนั้นแกน x จึงเป็น แกนमुखสำคัญ (รูป 10.5.2)



รูป 10.5.2

$(-5, 0)$ เป็นจุดโฟกัส $x = -\frac{16}{5}$ เป็นโคเรกตริกซ์ ดังนั้นโดย 10.5.1 ทฤษฎีบท

$$ae = -5$$

$$\frac{a}{e} = -\frac{16}{5}$$

เพราะฉะนั้น $a^2 = 16$ หรือ $a = 4$ เพราะฉะนั้น $e = -\frac{5}{4}$

นำ a และ e แทนในสมการ

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\text{จะได้ } b^2 = 16\left(\frac{25}{16} - 1\right) = 9 \quad \text{หรือ} \quad b = 3$$

เพราะฉะนั้นสมการ (10.5.1) คือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ #

เรามีทฤษฎีบทหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาดังนี้

10.5.3 ทฤษฎีบท เส้น $\frac{x-y}{a} = 0$ และ $\frac{x+y}{a} = 0$ เป็นเส้นกำกับของ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

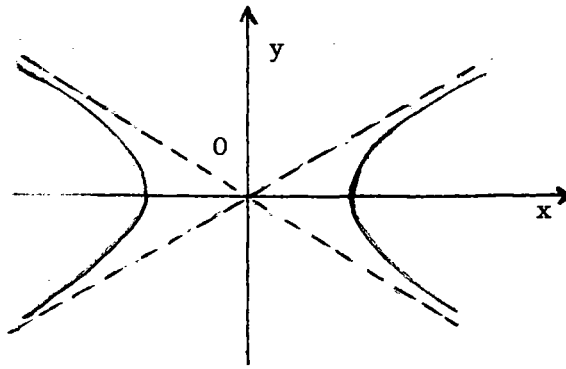
พิสูจน์ (ดูรูป 10.5.3) สมการส่วนบนของไฮเพอร์โบลาคือ

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

และสมการของส่วนเส้น $\frac{x-y}{a} = 0$ สามารถเขียนได้ดังนี้ $y = \frac{bx}{a}$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{bx}{a} \right] &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)]}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0 \end{aligned}$$



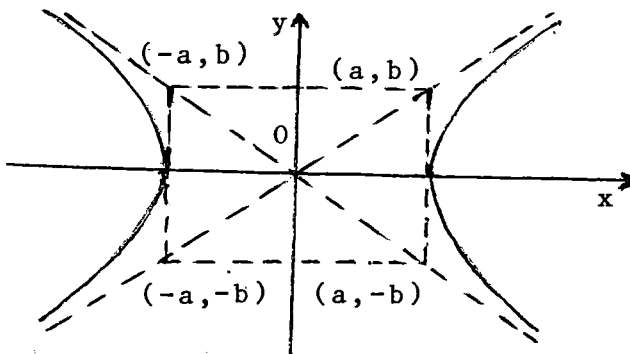
รูป 10.5.3

ดังนั้นโดย 8.11.7 บทนิยาม $y = \frac{bx}{a}$ หรือ $bx - ay = 0$ เป็นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

โดยทำนองเดียวกัน (หรือโดยสมมาตร) $bx + ay = 0$ เป็นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา #

เส้นกำกับจะเป็นแนวช่วยในการเขียนกราฟไฮเพอร์โบลาได้อย่างรวดเร็ว

เมื่อเรามีสมการมาตรฐาน (10.5.1) การเขียนกราฟอันดับแรก เขียนสี่เหลี่ยมมุมฉาก (fundamental rectangle) ซึ่งมีมุมที่จุด (a, b) , $(-a, b)$, $(-a, -b)$ และ $(a, -b)$ (รูป 10.5.4)



รูป 10.5.4

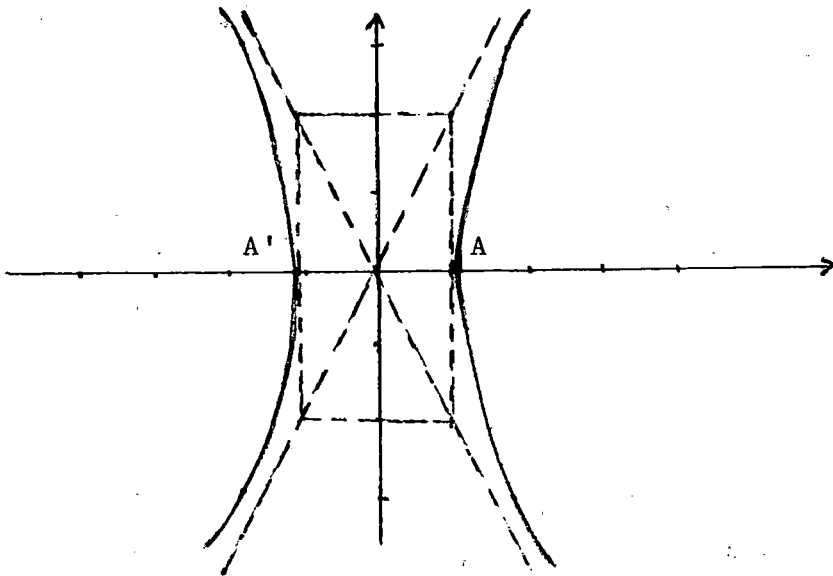
เส้นแท่งมุมสี่เหลี่ยมหลักมูลยาวออกไปเป็นเส้นกำกับ

จุดยอดของไฮเพอร์โบลาเป็นจุดซึ่งเป็นผลตัดของแกน x และสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูล

โดยข้อมูลเพียงนี้ เมื่อเรากำหนดจุดอีก 1 หรือ 2 จุด ก็จะเขียนกราฟไฮเพอร์โบลาได้อย่างรวดเร็ว โดยเขียนเส้นโค้งผ่านจุดยอด และผ่านจุดที่กำหนด ด้านซึ่งเป็นแนวตั้งของสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูล สัมผัสกราฟที่จุดยอด เมื่อกราฟยาวออกไปก็เขียนกราฟให้เข้าใกล้เส้นกำกับ

ไฮเพอร์โบลาซึ่งเส้นกำกับตั้งฉากกัน เรียกว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (equilateral hyperbola)** สี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูลของไฮเพอร์โบลามุมฉาก จะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้านขวาง และแกนตั้งยุคเท่ากัน

ตัวอย่าง 2. จงหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $4x^2 - y^2 = 4$ และเขียนกราฟ



รูป 10.5.5

เฉลย เขียนสมการใหม่ $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

โดย 10.5.3 ทฤษฎีบท เส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา คือ

$$x - \frac{y}{2} = 0 \quad \text{และ} \quad x + \frac{y}{2} = 0$$

การเขียนกราฟ อันดับแรก เขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูลมีมุม $(\pm 1, \pm 2)$

เขียนเส้นกำกับให้เป็นเส้นเดียวกับเส้นทแยงมุมแต่ยาวออกไป

โดยการแทนค่า เราจะได้เส้นโค้งผ่านจุด $(\pm \frac{\sqrt{13}}{2}, \pm 3) = (\pm 1.8, \pm 3)$

เขียนกราฟไฮเพอร์โบลาผ่านจุดดังกล่าว สัมผัสด้านข้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูลที่จุดยอด A และ A' และเข้าใกล้เส้นกำกับ เมื่อยาวออกไปทั้งทางซ้ายและทางขวา

#

แบบฝึกหัด 10.5

ข้อ 1-ข้อ 5 จากสมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ จงหาค่าเยื้องศูนย์กลาง, พิกัดของจุดยอด, โฟกัส, สมการไคเรกตริกซ์, ความยาวตามขวาง, ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับ แล้วสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูล เขียนเส้นกำกับ และเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา

$$1. \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{26} = 1$$

$$2. \quad 6x^2 - 15y^2 = 90$$

$$3. \quad 4y^2 - 9x^2 = 36$$

$$4. \quad 25x^2 - 16y^2 = 400$$

$$5. \quad 9x^2 - 4y^2 = 36$$

ข้อ 6-ข้อ 11 จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงเขียนสมการมาตรฐานไฮเพอร์โบลา พร้อมเขียนกราฟ

$$6. \quad \text{โฟกัสที่จุด } (5, 0) \text{ จุดยอด } (4, 0)$$

$$7. \quad \text{โฟกัสจุดหนึ่งที่ } (-5, 0) \text{ ไคเรกตริกซ์ } b = -\frac{16}{5}$$

$$8. \quad \text{มีแกน } y \text{ เป็นแกนमुखสำคัญ ค่าเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ } \sqrt{\frac{6}{2}} \text{ และเส้นโค้งผ่านจุด } (2, 4)$$

$$9. \quad \text{จุดยอดจุดหนึ่งคือ } (0, -3) \text{ ค่าเยื้องศูนย์กลาง } \frac{3}{2}$$

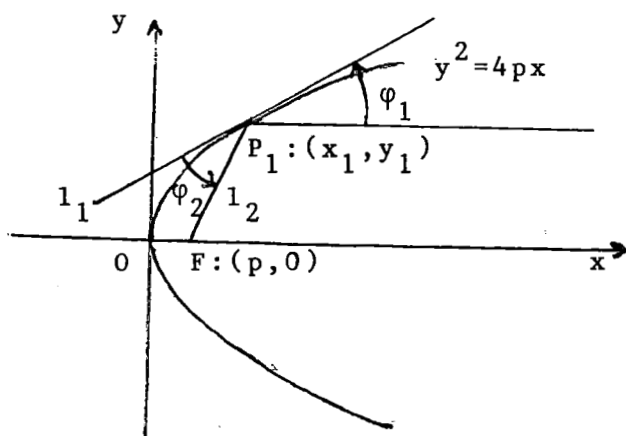
10. โฟกัสคือ $(2\sqrt{5}, 0)$ และเส้นกำกับคือ $2x \pm 4y = 0$
 11. มีเส้นกำกับ $x \pm 2y = 0$ และจุดยอด $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$
 12. จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นนอร์มัลของไฮเพอร์โบลา

$$16x^2 - 9y^2 - 31 = 0 \quad \text{ที่จุด } (4, 5)$$

13. จงหาสมการเส้นสัมผัสไฮเพอร์โบลา $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ ซึ่งมีส่วนตัด x เป็น 1 พร้อมเขียนกราฟ.

10.6 คุณสมบัติการสะท้อน

ถ้าหมุนพาราโบลารอบแกนमुखสำคัญก็จะเป็นโพรง ลำแสงจากโฟกัสพุ่งปะทะเปลือกภายในโพรง แล้วสะท้อนออกไปขนานกับแกนमुखสำคัญ (รูป 10.6.1)



รูป 10.6.1

คุณสมบัติการสะท้อนของพาราโบลารวมขึ้นอยู่กับทฤษฎีบททางเรขาคณิต ซึ่งเราจะพิสูจน์ต่อไป

10.6.1 ทฤษฎีบท ถ้า F เป็นโฟกัสของพาราโบลา เส้นสัมผัสพาราโบลาที่จุด P_1 จะทำมุมกับเส้น FP_1 และเส้นที่ผ่าน P_1 ขนานกับแกนमुखสำคัญ เท่ากัน

พิสูจน์ ทฤษฎีบทเป็นจริงอย่างเห็นได้ชัดเจน เมื่อ P_1 อยู่ที่จุดยอดของพาราโบลา ให้ $P_1 : (x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆของพาราโบลาที่ต่างจากจุดยอด แล้ว

$$(1) \quad y_1^2 = 4px_1$$

และโฟกัสคือ $F : (p, 0)$ (รูป 10.6.1)

ให้ l_1 เป็นเส้นสัมผัสพาราโบลาที่จุด P_1

โดยการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยายของ (1) ความชันของ l_1 คือ $m_1 = \frac{2p}{y_1}$

ถ้า l_2 เป็นเส้นผ่าน F และ P_1 ความชัน l_2 คือ $m_2 = \frac{y_1}{(x_1 - p)}$
เพราะฉะนั้นในรูป 10.6.1

$$\begin{aligned} \tan \varphi_2 &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{y_1}{(x_1 - p)} - \frac{2p}{y_1}}{1 + \frac{2p}{y_1} \cdot \frac{y_1}{(x_1 - p)}} \\ &= \frac{\frac{y_1^2 - 2px_1 + 2p^2}{y_1(x_1 - p + 2p)}}{\frac{1 + 2py_1}{(x_1 - p)y_1}} \\ &= \frac{y_1^2 - 2px_1 + 2p^2}{y_1(x_1 - p + 2p)} = \frac{4px_2 - 2px_1 + 2p^2}{y_1(x_1 + p)} \\ &= \frac{2p(x_1 + p)}{y_1(x_1 + p)} = \frac{2p}{y_1} = m_1 = \tan \varphi_1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\varphi_1 = \varphi_2$ #

มีกฎทางฟิสิกส์กล่าวว่า เมื่อลำแสงพุ่งสะท้อนกลับมุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อนกลับ

โดยกฎนี้ และ 10.6.1 ทฤษฎีบท จะได้ว่าลำแสงจากโฟกัสของพาราโบลาจะสะท้อนกลับขนานกับแกนमुखสำคัญ

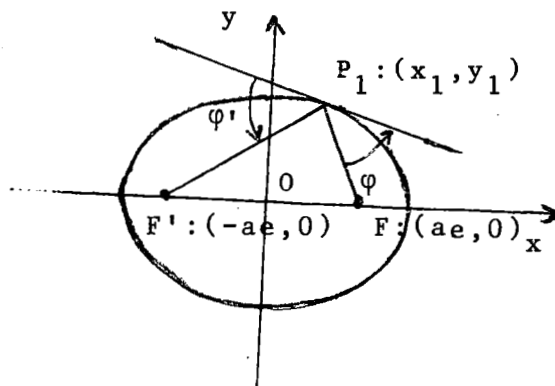
ถ้าหมุนวงรีรอบแกนमुखสำคัญก็จะเป็นโพรง เสียงจากโฟกัสอันหนึ่งกระทบเปลือกภายในของโพรงจะสะท้อนมาที่โฟกัสอันหนึ่ง ความรู้นี้ใช้อธิบายถึงวิธีที่ บุคคลหนึ่งยืนอยู่ ณ ตำแหน่งหนึ่ง ได้ยินเสียงคนที่อยู่ไกลพูดแต่คนที่อยู่ระหว่าง 2 คนดังกล่าวไม่ได้ยินเสียง เราจะพิสูจน์คุณสมบัติของวงรี ซึ่งเป็นพื้นฐานของเรื่องนี้

10.6.2 ทฤษฎีบท ถ้า F และ F' เป็นโฟกัสของวงรี และ P_1 เป็นจุดใดๆของวงรี แล้ว เส้น FP_1 และ $F'P_1$ ทำมุมกับเส้นสัมผัสวงรีที่ P_1 เท่ากัน

พิสูจน์ ให้ $P_1:(x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆบนครึ่งบนของวงรี $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ แล้ว

$$(1) \quad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$

ให้ φ เป็นมุมจาก FP_1 ถึงเส้นสัมผัส และให้ φ' เป็นมุมจากเส้นสัมผัสถึงเส้น $F'P_1$ (รูป 10.6.2)



รูป 10.6.2

เราจะพิสูจน์ว่า $\varphi = \varphi'$

โดยหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยายของวงรีเทียบกับ x จะได้

$$\text{ความชันที่ } P_1:(x_1, y_1) \text{ คือ } \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

$$\text{ความชันเส้น } FP_1 \text{ คือ } \frac{y_1}{x_1 - ae}$$

เพราะฉะนั้นโดย 2.8.1 ทฤษฎีบท

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{-b^2 x_1 - y_1}{\frac{a^2 y_1}{x_1 - ae}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{y_1}{x_1 - ae}\right) \left(\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\right)}{1} \\ &= -\frac{(b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - b^2 a e x_1)}{(a^2 - b^2) x_1 y_1 - a^3 e y_1} \end{aligned}$$

แต่ $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$ และ (โดย 10.4.1) $a^2 - b^2 = a^2 e^2$ นำไปแทน
สมการข้างบน

$$\begin{aligned} \tan \phi &= -\frac{(a^2 b^2 - b^2 a e x_1)}{a^2 e^2 x_1 y_1 - a^2 e y_1} \\ &= \frac{b^2 (a^2 - a e x_1)}{a e y_1 (a^2 - a e x_1)} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{b^2}{aey_1}$$

โดยทำนองเดียวกัน เพราะว่าความชันของเส้น $F'P_1$ คือ $\frac{y_1}{x_1+ae}$ เราจะมี

$$\begin{aligned} \tan \varphi' &= \frac{\frac{y_1}{x_1+ae} + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1+ae} \right) \left(-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right)} \\ &= \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 + aeb^2 x_1}{(a^2 - b^2)x_1 y_1 + a^2 ey_1} \\ &= \frac{a^2 b^2 + aeb^2 x_1}{a^2 e^2 x_1 y_1 + a^3 ey_1} \\ &= \frac{b^2 (a^2 + aex_1)}{aey_1 (a^2 + aex_1)} \\ &= \frac{b^2}{aey_1} \end{aligned}$$

หรือ

$$(3) \quad \tan \varphi' = \frac{b^2}{aey_1}$$

จาก (2.) และ (3.) $\tan \varphi = \tan \varphi'$

เพราะว่า φ และ φ' เป็นมุมแหลม ดังนั้น $\varphi = \varphi'$ #

เราได้พิสูจน์ว่า $\varphi = \varphi'$ ภายใต้สมมุติฐาน $P_1 : (x_1, y_1)$ อยู่บนครึ่งบนของวงรี แต่
เพราะว่าวงรีสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x ดังนั้น $\varphi = \varphi'$ ไม่ว่า P_1 อยู่ในจุดตกภาคใดๆ #

แบบฝึกหัด 10.6

ข้อ 1-ข้อ 3 จงหาสมการเส้นสัมผัสและสมการนอร์แมลของภาคตัดกรวยที่จุดที่กำหนดให้

1. $y^2 = -15x$, $(-3, -3\sqrt{5})$

2. $2x^2 + 6y^2 - 24 = 0$, $(-3, -1)$

3. $y^2 = 20x$ $(2, -2\sqrt{10})$

4. จงหาเส้นสัมผัสวงรี $(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 8$ ที่จุด $(5, 5)$

[แนะนำ : ใช้การเลื่อนทางขนาน]

5. ให้ $-\frac{2\sqrt{7}}{7}$ เป็นความชันเส้นสัมผัสพาราโบลา $x^2 = 14y$ ที่จุดหนึ่ง จงหาพิกัดของ
จุดสัมผัสจุดนั้น

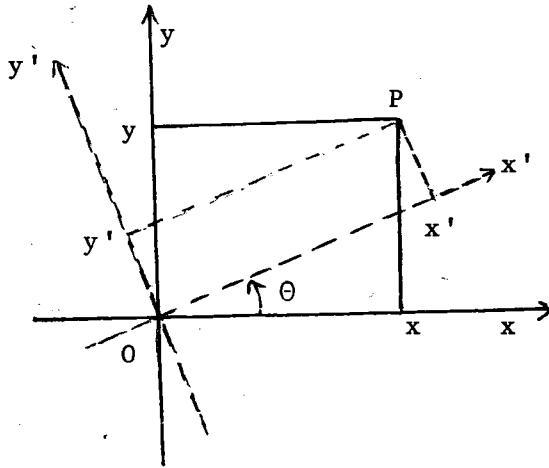
5. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงรี $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ ซึ่งขนานกับเส้น $3x - 3\sqrt{2}y - 7 = 0$

6. จงหาสมการเส้นสัมผัสพาราโบลา $x^2 - 4y = -4y$ ที่จุด $(\frac{3}{2}, 1)$

10.7 การหมุนแกนพิกัด

พิจารณาแกนพิกัด ox และ oy (รูป 10.7.1) ถ้า ox' และ oy' เป็นเส้นตรงตั้ง
ฉากกัน ผ่านจุดกำเนิดเดิม เป็นแกนพิกัดใหม่ แล้วทุกจุด P บนระนาบยกเว้นจุด O จะมี 2
พิกัด โดยพิกัดหนึ่งเทียบกับแกนพิกัด ox และ oy อีกพิกัดเทียบกับแกนพิกัด ox' และ oy'

ความสัมพันธ์ระหว่างแกนพิกัดใหม่และแกนพิกัดเดิมเขียนเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้



รูป 10.7.1

10.7.1 ทฤษฎีบท ให้แกนพิกัดฉากใหม่มีจุดกำเนิดเหมือนกับแกนพิกัดเดิม และ P เป็นจุดที่มีพิกัด (x, y) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม และ (x', y') เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่แล้ว

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

(10.7.1)

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมจาก Ox ถึง Ox'

พิสูจน์ รูป 10.7.2 ให้ P เป็นจุดใดๆที่ไม่ใช่จุดกำเนิด และให้ θ เป็นมุมจากแกนพิกัด x ถึง x' ให้ φ เป็นมุมจากแกนพิกัด x' ถึง OP เพราะฉะนั้น

$$\frac{x}{|OP|} = \cos(\varphi + \theta)$$

หรือ $x = |OP| \cos(\varphi + \theta) = |OP| (\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta)$

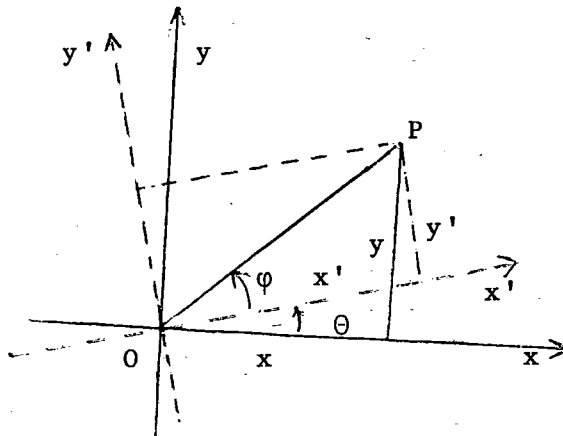
แต่ $\sin \varphi = \frac{y'}{|OP|}$, $\cos \varphi = \frac{x'}{|OP|}$

โดยการแทนค่าจะมี

$$(2) \quad x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

โดยทำนองเดียวกัน

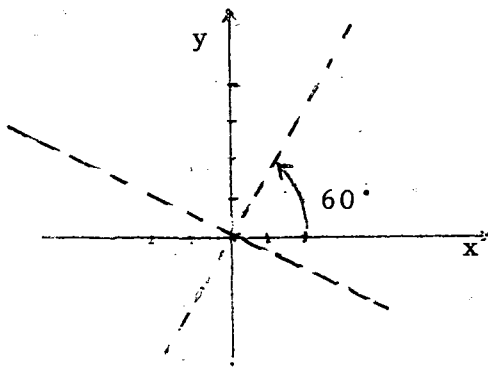
$$\begin{aligned} y &= |OP| \sin(\varphi + \theta) = |OP| (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \\ &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \quad \#$$



รูป 10.7.2

ตัวอย่าง 1. จงหาพิกัดใหม่ของจุด $P: (-4, 6)$ หลังจากแปลงโดยการหมุนไปเป็นมุม

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (\text{รูป 10.7.3})$$



รูป 10.7.3

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

ผลเฉลย โดยการแทน

$$x = -4, y = 6$$

$$\sin \theta = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ในสมการ (10.7.1)

$$-4 = \frac{1x'}{2} - \frac{\sqrt{3}y'}{2}$$

$$6 = \frac{\sqrt{3}x'}{2} + \frac{1y'}{2}$$

โดยการแก้สมการ

$$x' = -2 + 3\sqrt{3}$$

$$y' = 3 + 2\sqrt{3}$$

ดังนั้นพิกัด P เทียบกับแกนพิกัดฉากใหม่คือ $(-2 + 3\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ #

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการใหม่ของวงกลม $x^2 + y^2 = 36$ หลังจากหมุนไปเป็นมุม $\theta = \frac{\pi}{3}$

ผลเฉลย โดยการแทน $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ลงในสมการ (10.7.1) จะได้

$$x = \frac{1x'}{2} - \frac{\sqrt{3}y'}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}x'}{2} + \frac{1y'}{2}$$

โดยนำไปแทนค่าในสมการที่กำหนดให้

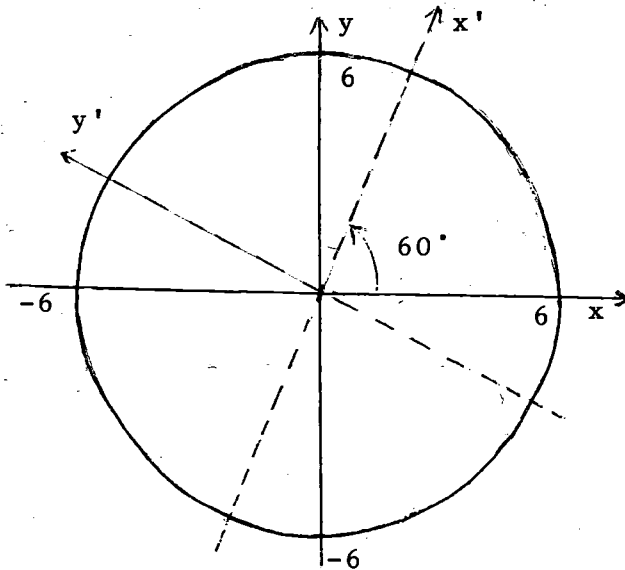
$$\left(\frac{1x'}{2} - \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} + \frac{1y'}{2}\right)^2 = 36$$

$$x'^2 + y'^2 = 36$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลม มีตำแหน่งมาตรฐานเทียบกับแกนพิกัดฉากใหม่ ox' และ oy'

(รูป 10.7.4)

#



รูป 10.7.4

สมการระดับชั้น 2 ใน x และ y แบบทั่วไปคือ

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เมื่อ A, B และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เรามีทฤษฎีบทที่จะแปลงสมการ (1) ให้พจน์ xy หายไปเมื่อ $B \neq 0$ ได้ดังนี้

10.7.2 ทฤษฎีบท สมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $B \neq 0$ จะแปลงเป็นสมการ $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ ได้ โดยการหมุนผ่านมุม θ ซึ่ง

$$\cot 2\theta = \frac{(A-C)}{B}$$

พิสูจน์ โดยการแทนค่าสมการของการแปลง

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

ใน (1) จะมี

$$\begin{aligned} & A(x'^2 \cos^2 \theta - 2x'y' \cos \theta \sin \theta + y'^2 \sin^2 \theta) \\ & + B(x'^2 \cos \theta \sin \theta + x'y' \cos^2 \theta - x'y' \sin^2 \theta - y'^2 \sin \theta \cos \theta) \\ & + C(x'^2 \sin^2 \theta + 2x'y' \sin \theta \cos \theta + y'^2 \cos^2 \theta) \\ & + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0 \end{aligned}$$

รวมเทอม

$$(2) \quad A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

เมื่อ

$$A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$$

$$B' = B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2(A - C) \sin \theta \cos \theta$$

$$(3) \quad C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

$$D' = D \cos \theta + E \sin \theta$$

$$E' = -D \sin \theta + E \cos \theta$$

$$F' = F$$

นำ $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ และ $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ แทนใน (3) จะมี

$$B' = B \cos 2\theta - (A - C) \sin 2\theta$$

หรือ

$$\cot 2\theta = \frac{(A - C)}{B}$$

#

ตัวอย่าง 3. จงแปลงพิกัดโดยการหมุนเพื่อไม่ให้มีเทอม $x'y'$ จากสมการ

$$8x^2 + 5xy - 4y^2 + 2 = 0$$

เฉลย จากสมการ $A=8$, $B=5$ และ $C=-4$

เลือก θ เพื่อ $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{8+4}{5} = \frac{12}{5}$

หา $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

เนื่องจาก $\cot 2\theta = \frac{12}{5}$ ดังนั้น 2θ น้อยกว่า 90°

ในจุดตัดภาคที่ 1 เขียนรูป 10.7.5 ประกอบ

จากรูป 10.7.5

$$\cos 2\theta = \frac{12}{13}$$

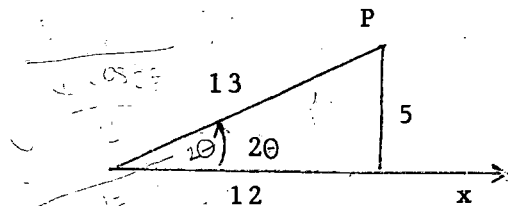
จากสมการ

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

โดยการแทนค่าจะได้

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$



รูป 10.7.5

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

ดังนั้นสมการของการหมุนคือ

$$x = \frac{5}{\sqrt{26}} x' - \frac{1}{\sqrt{26}} y'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{26}} x' + \frac{5}{\sqrt{26}} y'$$

นำไปแทนค่าในสมการที่กำหนดให้

$$8 \left[\frac{5}{\sqrt{26}} x' - \frac{1}{\sqrt{26}} y' \right]^2 + 5 \left[\frac{5}{\sqrt{26}} x' - \frac{1}{\sqrt{26}} y' \right] \left[\frac{1}{\sqrt{26}} x' + \frac{5}{\sqrt{26}} y' \right] - 4 \left[\frac{1}{\sqrt{26}} x' + \frac{5}{\sqrt{26}} y' \right]^2 + 2 = 0$$

รวมเทอม

$$\frac{1}{26} [(200+25)-4]x'^2 + (-80-5+125-40)x'y' + (8-25-100)y'^2 + 2 = 0$$

$$\text{หรือ } \frac{1}{26} (221x'^2 - 117y'^2) + 2 = 0$$

$$\text{หรือ } 221x'^2 - 117y'^2 + 52 = 0$$

$$\text{หรือ } 17x'^2 - 9y'^2 + 4 = 0 \quad \#$$

แบบฝึกหัด 10.7

ข้อ 1- ข้อ 4 จงเขียนกราฟแสดงแกนพิกัดใหม่และแกนพิกัดเดิม

1. จงหาพิกัดใหม่ของ $(3, -1)$, $(-2, 2)$ และ $(0, 2)$ หลังจากหมุนแกนไป $\theta = \frac{\pi}{4}$
2. จงสมการของเส้น $x - 3y - 4 = 0$ หลังจากหมุนไป $\theta = \frac{\pi}{6}$
3. จงหาสมการใหม่ของกราฟ $xy = 1$ หลังจากแปลงโดยการหมุนไป $\theta = \frac{\pi}{4}$
4. จงหาสมการใหม่ของเส้นโค้ง

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 36 = 0$$

หลังจากแปลงโดยการหมุนไป $\theta = 45^\circ$

ข้อ 5- ข้อ 8 จงแปลงพิกัดใหม่โดยการหมุนให้เทอม $x'y'$ หายไป

$$5. \quad 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 90x + 5y + 25 = 0$$

$$6. \quad x^2 + 12xy + 6y^2 - 2x + 5y + 1 = 0$$

$$7. \quad 27x^2 + 5xy + 15y^2 - 2 = 0$$

$$8. \quad 2x^2 + 9xy + 14y^2 + 5 = 0$$

10.8 กราฟของสมการระดับชั้น 2

ในหัวข้อ 10.7 เราได้แสดงวิธีการหมุนแกนพิกัด เพื่อให้สมการระดับชั้น 2 ใน x และ y อยู่ในแบบ

$$(1) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

นั่นคือไม่มีเทอม xy

เพราะระดับชั้นของสมการไม่เปลี่ยนโดยการหมุน ดังนั้นสมการ (1) จะมีระดับชั้น 2 ดังนั้น A และ C ใน (1) ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เราจะพิจารณา 2 กรณีคือ

กรณี 1 A และ C ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

โดยกำลังสองบริบูรณ์เราสามารถเขียน(1)ได้เป็น

$$(2) \quad A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

ถ้าเราแทน $x' = x + \frac{D}{2A}$, $y' = y + \frac{E}{2C}$

ซึ่งเป็นสมการแปลงจุดกำเนิดไปอยู่ที่จุด $O' : \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ (โดย 2.12.1 ทฤษฎีบท) จะมี

$$(3) \quad Ax'^2 + Cy'^2 = F'$$

เมื่อ $F' = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$

ถ้า A, C และ F' มีเครื่องหมายเหมือนกัน เราสามารถเขียนให้อยู่ในแบบ (10.4.1) หรือ (10.4.2) กราฟจะเป็นวงรีหรือวงกลมซึ่งเป็นลิมิตของวงรี

ถ้า A และ C มีเครื่องหมายเหมือนกัน และต่างจาก F (3) จะไม่มีกราฟ

ถ้า A และ C มีเครื่องหมายเหมือนกันและ $F' = 0$ กราฟจะเป็นจุด ซึ่งเป็นลิมิตของวงรี บางทีเรียกว่า **จุดวงรี(point-ellipse)**

ถ้า A และ C มีเครื่องหมายตรงกันข้าม และ $F' \neq 0$ สมการ(3)สามารถเขียนให้อยู่ในแบบ(10.5.1) หรือ (10.5.2) กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

ถ้า A และ C มีเครื่องหมายตรงกันข้าม และ $F' = 0$ สมการ(3)สามารถแปลงแยกเป็น 2 ส่วนประกอบของสมการเชิงเส้น และกราฟเป็น 2 เส้นตัดกัน บางทีเรียกว่า **ไฮเพอร์โบลาเสื่อมคลาย(a degenerate hyperbola)**

กรณี 2 ถ้า A หรือ C จำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นศูนย์เพียงจำนวนเดียว

สมมติ $A = 0$ และ $C \neq 0$

ดังนั้นสมการ(1)สามารถเขียนได้เป็น

$$(4) \quad C(y^2 + \frac{E}{C}y) + Dx + F = 0$$

โดยกำลังสองบริบูรณ์ในวงเล็บ

$$(5) \quad C(y + \frac{E}{2C})^2 + Dx + F - \frac{E^2}{4C} = 0$$

ถ้า $D \neq 0$ (5) สามารถเขียนได้เป็น

$$(6) \quad C(y + \frac{E}{2C})^2 + D(x + \frac{F - \frac{E^2}{4C}}{D}) = 0$$

โดยการแทน $y' = y + \frac{E}{2C}$

$$x' = x + \frac{4CF - E^2}{4CD}$$

ใน (6)

ซึ่งสมมูลกับการแปลงให้จุดกำเนิดไปอยู่ที่ $(\frac{-4CF - E^2}{4CD}, \frac{-E}{2C})$

และมีสมการ

$$(7) \quad Cy'^2 + Dx' = 0$$

กราฟของ (7) เป็นพาราโบลา (โดย 2.10.2 ทฤษฎีบท)

ถ้า $D = 0$ (5) สามารถเขียนได้เป็น

$$(8) \quad C(y + \frac{E}{2C})^2 + F - \frac{E^2}{4C} = 0$$

ถ้าเราแทน $y' = y + \frac{E}{2C}$ ใน (8) ซึ่งสมมูลกับการแปลงให้จุดกำเนิดไปอยู่ที่

$(0, -\frac{E}{2C})$ และสมการ (8) ก็จะถูกแปลงเป็น

$$(9) \quad Cy'^2 + K = 0$$

$$\text{เมื่อ } K = F - \frac{E^2}{4C}$$

ถ้า C และ K มีเครื่องหมายเหมือนกันจะไม่มีกราฟ

ถ้า C และ K มีเครื่องหมายตรงกันข้าม สมการ (9) สามารถแยกเป็น 2 ส่วนประกอบของสมการเชิงเส้น ซึ่งกราฟเป็น 2 เส้นขนานกัน บางทีเรียกว่า พาราโบลาเสื่อม
คล้าย (degenerate parabola)

ถ้า $K=0$ กราฟของ (9) จะเป็น 2 เส้นทับกัน บางทีเรียกว่า พาราโบลาเสื่อมคล้าย
 สำหรับ $A \neq 0$ และ $C=0$ เราจะได้ผลลัพธ์ทำนองเดียวกัน

ดังนั้นการแปลงโดยการเลื่อนทางขนาน และการหมุนแกนพิกัด ไม่มีผลต่อกราฟ

สรุป: กราฟของสมการระดับชั้น 2 ใน x และ y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

มีกราฟเป็นภาคตัดกรวย หรือลิมิตของภาคตัดกรวย หรือภาคตัดกรวยเสื่อมคล้าย (degenerate conic)

เขียนเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

10.8.1 ทฤษฎีบท กราฟของสมการระดับชั้น 2 ในระบบพิกัดฉาก เป็นภาคตัดกรวย หรือลิมิตของภาคตัดกรวย หรือภาคตัดกรวยเสื่อมคล้าย อย่างใดอย่างหนึ่งเสมอ

ตัวอย่าง 1. ลดทอนสมการ $5x^2 - 3xy + y^2 + 65x - 25y + 203 = 0$ เป็นแบบมาตรฐาน
 แล้วเขียนกราฟแสดง 3 พิกัดฉาก

ผลเฉลย เลือกมุม θ เพื่อ $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{5-1}{-3} = -\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้น $\cos 2\theta = -\frac{4}{5}$ (จากรูป 10.8.1)

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ดังนั้นสมการของการหมุนคือ

$$x = \frac{1}{10} \sqrt{10} (x' - 3y')$$

$$y = \frac{1}{10} \sqrt{10} (3x' + y')$$

แทนค่าสมการของการหมุนลงในสมการที่กำหนดให้ จะมี

$$\frac{1}{10} [5(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) - 3(3x'^2 - 8x'y' - 3y'^2) + (9x'^2 + 6x'y' + y'^2)]$$

$$+ \frac{1}{10} [65(x' - 3y') - 25(3x' + y')] + 203 = 0$$

$$\text{รวมเทอม } y'^2 + 11y'^2 - 2\sqrt{10}x' - 44\sqrt{10}y' + 406 = 0$$

โดยกำลังสองบริบูรณ์ เราสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$(1) \quad (x' - \sqrt{10})^2 + 11(y' - 2\sqrt{10})^2 = 44$$

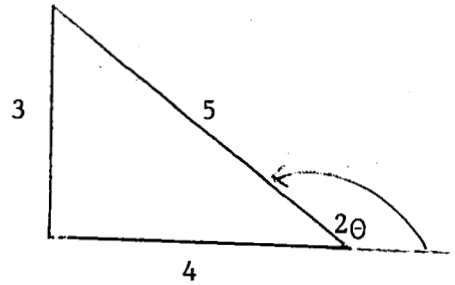
ถ้าเราแทน

$$x'' = x' - \sqrt{10}$$

(2)

$$y'' = y' - 2\sqrt{10}$$

ในสมการ(1) จะมี



รูป 10.8.1

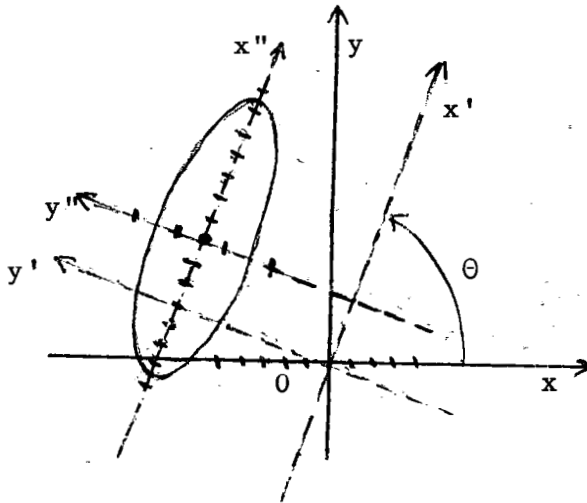
$$(3) \quad \frac{x''^2}{44} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

การแทน(2) เป็นการเลื่อนท่างขนานกับจุดกำเนิดใหม่ที่ $(\sqrt{10}, 2\sqrt{10})$

กราฟของ(3) เป็นวงรีในแบบมาตรฐานเทียบกับแกน x'' และ y''

วิธีเขียนกราฟ

เขียนแกน x และแกน y (รูป 10.8.2)



รูป 10.8.2

เขียนแกน x' และแกน y' ผ่านจุดกำเนิดเดียวกัน แต่ทำมุม $\theta = \arctan 3$ แสดงจุด $(\sqrt{10}, 2\sqrt{10})$ เทียบกับแกน x' และแกน y' แล้วเขียนแกน x'' และแกน y'' ผ่านจุดนี้ และขนานกับแกน x' และแกน y' ตามลำดับ แล้วเขียนวงรีในแบบมาตรฐานบนแกน x'' และแกน y'' #

แบบฝึกหัด 10.8

ลดทอนสมการที่กำหนดให้เป็นแบบมาตรฐานและเขียนกราฟ แสดงพิกัดแบบตัวอย่าง 1

$$1. \quad 62x^2 + 168xy + 13y^2 + 380x - 90y - 575 = 0$$

$$2. \quad 5x^2 - 6xy - 3y^2 + 168x + 2xy + 612 = 0$$

$$3. \quad x^2 + 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}x - 6 = 0$$

$$4. \quad 6x^2 + 3xy + 2y^2 + 81x + 17y + 236 = 0$$

$$5. \quad 7x^3 + 12xy + 2y^2 + 140x + 76y + 548 = 0.$$

10.9 คิสคริมีแนนต์ (Discriminant)

$$B^2 - 4AC$$

เป็นแบบที่นำมาจากสัมประสิทธิ์ของสมการระดับชั้น 2

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เรียกว่า คิสคริมีแนนต์ของสมการ

ในหัวข้อ 10.4 เราได้แสดงวิธีการแปลงโดยการหมุนสมการ (1) ให้อยู่ในแบบ

$$(2) \quad A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

ซึ่ง

$$A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$$

$$(3) \quad B' = B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2(A - C) \sin \theta \cos \theta$$

$$C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

และพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

เราจึงกล่าวว่า $B^2 - 4AC$ เป็นตัวไม่แปรเปลี่ยน (invariant) ภายใต้การแปลงโดยการหมุน
จาก (3)

$$\begin{aligned} B'^2 - 4A'C' &= [B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(A-C)\sin\theta\cos\theta]^2 \\ &\quad - 4(A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta)(A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta) \\ &= B^2(\cos^4\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta) \\ &\quad - 4AB(\sin\theta\cos^3\theta - \sin^3\theta\cos\theta - \sin\theta\cos^3\theta + \sin^3\theta\cos\theta) \\ &\quad + 4BC(\sin\theta\cos^3\theta - \sin^3\theta\cos\theta - \sin\theta\cos^3\theta + \sin^3\theta\cos\theta) \\ &\quad + 4A^2(\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta) \\ &\quad - 4AC(2\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ &\quad + 4C^2(\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta) \\ &= B^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 4AC(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = B^2 - 4AC \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

เราจะพิจารณากราฟจากค่าพิสัยครีนิแนนต์
เนื่องจาก

$$(4) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ถูกแปลงโดยการหมุนเพื่อให้เทอม xy หายไป ได้ดังนี้

$$(5) \quad A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

นั่นคือ $B=0$ ดังนั้น

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = -4A'C'$$

จากหัวข้อ 10.5 ได้แสดงแล้วว่ากราฟเป็นไฮเพอร์โบลาหรือวงรีขึ้นอยู่กับ A' และ C' ดังนั้นจึงขึ้นอยู่กับ

$$-4A'C' > 0 \quad \text{หรือ} \quad -4A'C' < 0$$

และกราฟเป็นพาราโบลา ถ้า A' และ C' ตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นกราฟเป็นพาราโบลา ถ้า

$$-4A'C' = 0$$

เพราะว่ากราฟของ (4) เหมือนกับกราฟของ (5) และ

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

เราจึงสรุปได้ว่า กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา พาราโบลา หรือวงรี ถ้าดีสคริมิแนนต์

$$B^2 - 4AC$$

เป็นบวก ศูนย์ หรือ ลบ

เราเขียนเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

10.9.1 ทฤษฎีบท สมการระดับชั้น 2 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เป็น

(i) ไฮเพอร์โบลา(หรือ 2 เส้นตัดกัน) ถ้า

$$B^2 - 4AC > 0$$

(ii) พาราโบลา(หรือ 2 เส้นขนานกัน หรือเส้นตรง หรือเซตว่าง) ถ้า

$$B^2 - 4AC = 0$$

(iii) วงรี(หรือจุด หรือเซตว่าง) ถ้า

$$B^2 - 4AC < 0$$

ตัวอย่างเช่น กราฟของสมการ

$$6x^2 + 3xy + 2y^2 + 81x + 17y + 236 = 0$$

เป็นวงรี เพราะว่า $B^2 - 4AC = (3)^2 - 4(6)(2) = -39$

กราฟของสมการ

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 85x + 30y + 175 = 0$$

เป็นพาราโบลา เพราะว่า $B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(16)(9) = 0$

กราฟของสมการ

$$7x^2 + 12xy + 2y^2 + 140x + 76y + 548 = 0$$

เป็นไฮเพอร์โบลา เพราะว่า $B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(7)(2) = 88$

แบบฝึกหัด 10.9

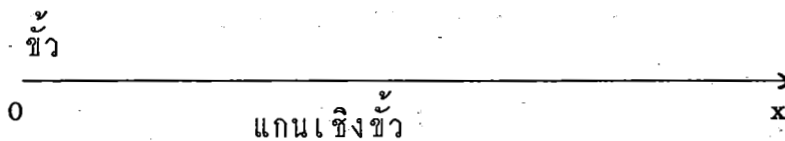
จงใช้วิธีหาค่า discriminant ตรวจสอบว่าสมการระดับชั้น 2 ในแบบฝึกหัด 10.7 ข้อ 5-ข้อ 8. เป็นภาคตัดกรวยแบบใด.

บทที่ 11

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

11.1 พิกัดเชิงขั้วของจุด

ให้ o เป็นจุดคงตัว เรียกว่า **ขั้ว (pole)** หรือจุดกำเนิด และให้เส้นตรง Ox เป็นเส้นคงตัว เรียกว่า **แกนเชิงขั้ว (polar axis)** แกนเชิงขั้วเป็นเส้นตรงแนวนอน เริ่มจากขั้วไปทางขวาได้ไกลไม่มีขอบเขต (รูป 11.1.1)



รูป 11.1.1

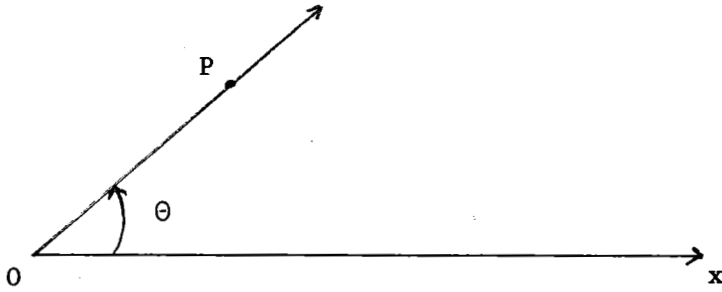
กำหนด P เป็นจุดใดๆในระนาบ และเขียนเส้นตรงเริ่มที่ o และผ่าน P

ให้ θ เป็นมุม xOP มีแกนเชิงขั้วเป็นด้านเริ่มต้น และเส้นตรงจาก o ผ่าน P เป็นด้านสิ้นสุด (รูป 11.1.2)

แทนระยะทางไม่ระบุทิศทางระหว่าง o และ P ด้วย r นั่นคือ

$$|OP| = r$$

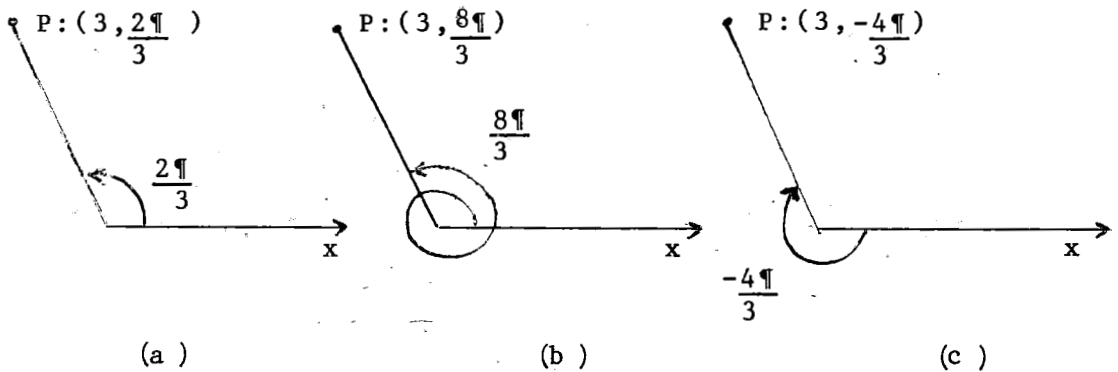
(r, θ) เรียกว่า **พิกัดเชิงขั้ว** ของ P



รูป 11.1.2

ตัวอย่างเช่น จุด P มีพิกัดเชิงขั้ว $(3, \frac{2\pi}{3})$

เราสร้างมุมกว้าง $\frac{2\pi}{3}$ โดยวัดจากแกนเชิงขั้วเป็นด้านเริ่มต้น (รูป 11.1.3) ดังนั้นจุด P จะอยู่บนด้านสิ้นสุด ห่างจากจุดกำเนิด 3 หน่วย



รูป 11.1.3

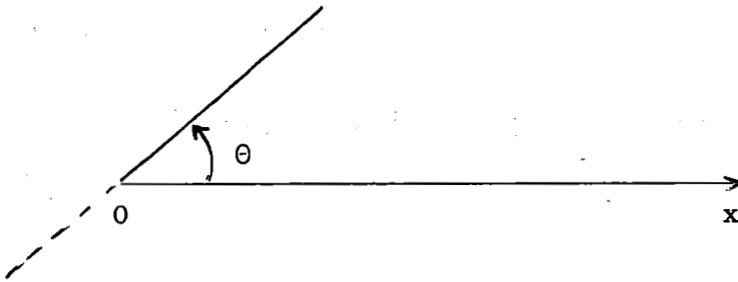
มีหลายพิกัดเชิงขั้วที่แสดงตำแหน่งของจุด P เช่น $(3, \frac{8\pi}{3})$, $(3, -\frac{4\pi}{3})$

(รูป 11.1.3 (b) และ (c))

ดังนั้นเมื่อกำหนดจุดให้จุดหนึ่ง จะมีพิกัดเชิงขั้วจำนวนอนันต์ ที่แสดงตำแหน่งของจุด พิกัดเชิงขั้วจะต่างกับพิกัดคาร์ทีเซียน คือจะไม่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งกับจุด

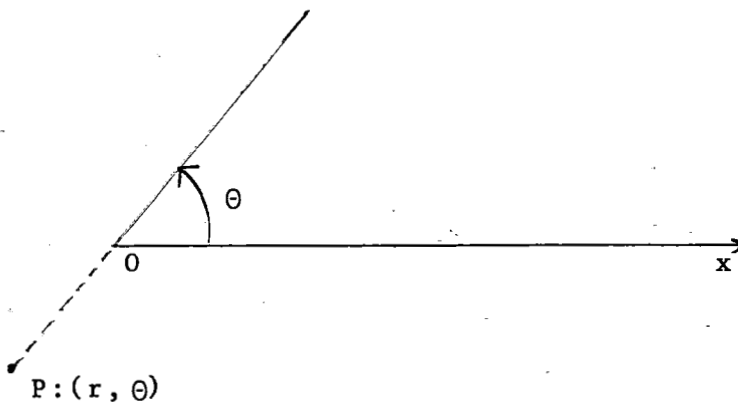
สำหรับกรณีพิภักเชิงขั้วที่ r เป็นลบ เรานิยามดังนี้

ส่วนยืดยาวด้านสิ้นสุดของ θ เปรียบเทียบถึง เส้นตรงซึ่งลากจากหัวไปทิศทางตรงกันข้ามกับด้านสิ้นสุดของ θ (รูป 11.1.4) เขียนเป็นจุดแสดงส่วนยืดยาวด้านสิ้นสุดของ θ



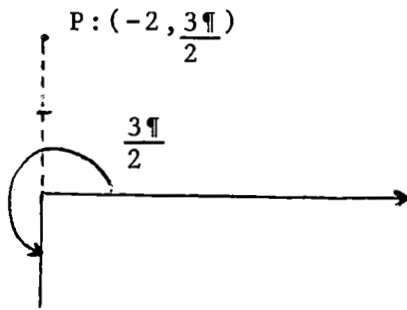
รูป 11.1.4

กำหนด P เป็นจุดในระนาบ สร้างมุม θ เมื่อ P อยู่บนส่วนยืดยาวด้านสิ้นสุดของ θ (รูป 11.1.5)



รูป 11.1.5

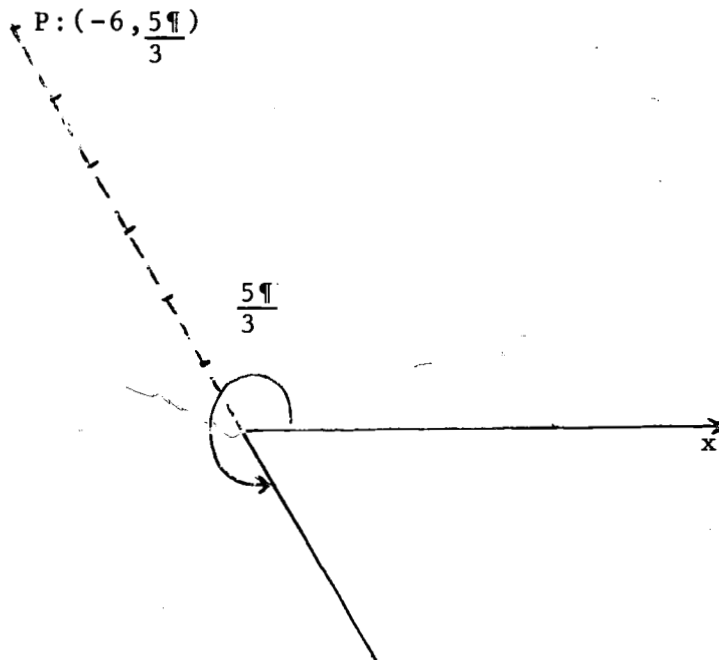
ให้ $r = -|OP|$ แล้วเรานิยามให้ (r, θ) เป็นพิกัดเชิงขั้วของ P
 ตัวอย่างเช่น จุด P มีพิกัดเชิงขั้ว $(-2, \frac{3\pi}{2})$
 เราสร้างมุมกว้าง $\frac{3\pi}{2}$ ซึ่งมี $0x$ เป็นด้านเริ่มต้น (รูป 11.1.6)



รูป 11.1.6

เพราะว่า r เป็นลบ ดังนั้นจะอยู่บนส่วนยืดขยายของด้านสิ้นสุดของ $\frac{3\pi}{2}$ ห่างจากขั้ว 2 หน่วย

จุด $(-6, \frac{5\pi}{3})$ (รูป 11.1.7) มีพิกัดเชิงขั้ว $(-6, \frac{2\pi}{3})$ ด้วย



รูป 11.1.7

ข้อสังเกต จากรูป 11.1.6 ถ้าแกนแนวนอนและแกนแนวตั้ง เป็นแกนพิกัดในระบบพิกัดฉาก พิกัดขของ P จะเป็นบวก 2 เพราะว่าทิศทางจาก O ไป P พุ่งขึ้นในระบบพิกัดเชิงขั้วการพุ่งขึ้นหรือพุ่งลงไม่กำหนดเครื่องหมาย r

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อไรก็ตามที่ P อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมที่กำหนดให้ r จะเป็นบวก และเมื่อไรก็ตามที่ P อยู่บนส่วนขยายบนด้านสิ้นสุดของมุมที่กำหนดให้ r จะเป็นลบ

โดยทั่วไปในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้าตัวเลขในพิกัดที่สองไม่บอกเป็นองศา เราจะหมายความว่าพิกัดที่สองเป็นเรเดียน

ตัวอย่างเช่น $(-4, 5)$ แทนจุดซึ่งมี $r = -4$ และ $\theta = 5$ เรเดียน

สรุป การแสดงจุด $P: (r, \theta)$ อันดับแรกสร้างมุมที่ขั้ว โดยให้แกนเชิงขั้วเป็นด้านเริ่มต้น ถ้า r เป็นบวก P อยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ นที่ $|OP| = r$

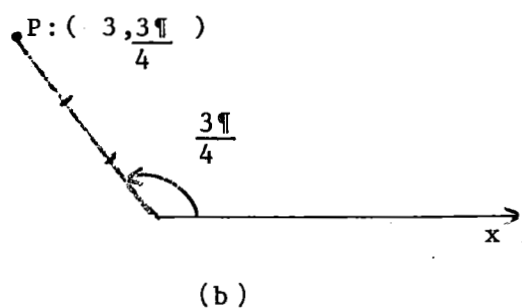
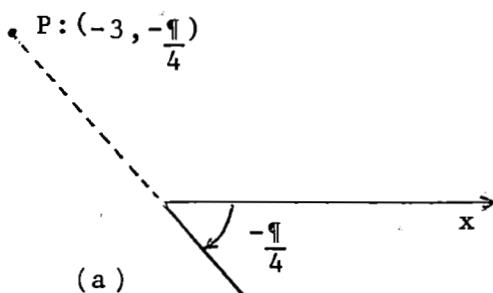
ถ้า r เป็นลบ P จะอยู่บนส่วนยืดยาวของด้านสิ้นสุดของ θ นที่ $|OP| = r$

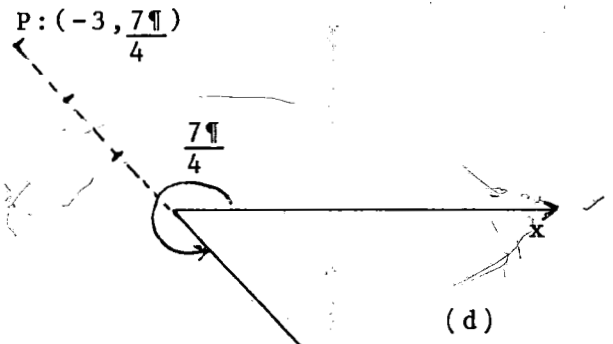
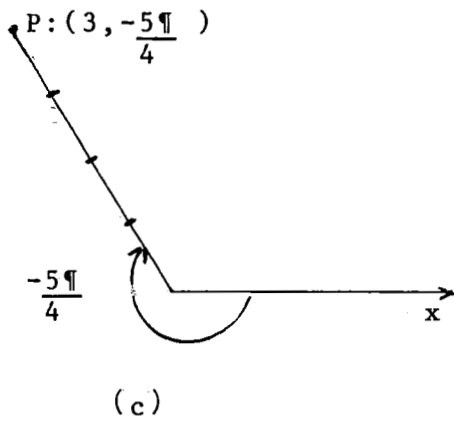
ตัวอย่าง 1. จงแสดงว่าจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วเป็น $(-3, -\frac{\pi}{4})$ และหาพิกัดเชิงขั้วอีก 3 พิกัดซึ่งแทนจุดเดียวกัน

เฉลย เขียนมุม $-\frac{\pi}{4}$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา โดยมีแกนเชิงขั้วเป็นด้านเริ่มต้น (รูป 11.1.8(a))

แสดงจุด P บนส่วนยืดยาวของด้านสิ้นสุดของ $-\frac{\pi}{4}$ และห่างจากขั้ว 3 หน่วย พิกัดเชิงขั้วที่แสดงจุดเดียวกันนี้คือ

$$(3, \frac{3\pi}{4}), (3, -\frac{5\pi}{4}), (-3, \frac{7\pi}{4})$$

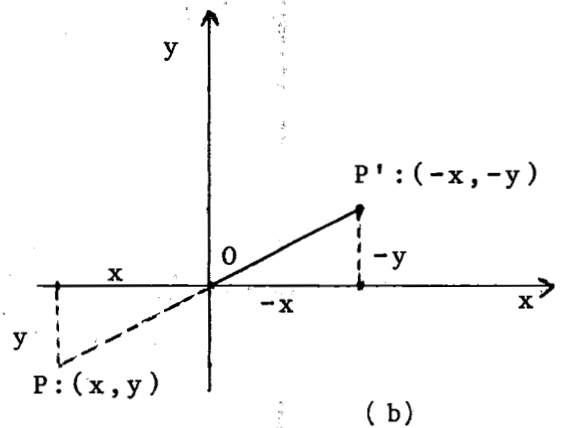
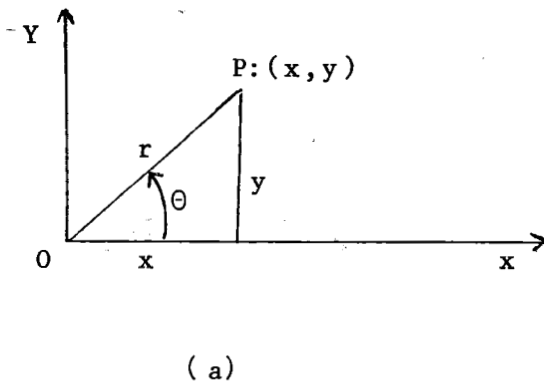




รูป 11.1.8

ต่อไปเราจะนำระบบพิกัดฉากมาสัมพันธ์กับระบบเชิงขั้ว

ให้ขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก และให้แกนเชิงขั้วทับกับแกน (รูป 11.1.9 (a)) แล้วถ้า P เป็นจุดใดๆในระนาบ มีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y)



รูป 11.1.9

ถ้า P อยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ (รูป 11.1.9 (a)) r เป็นบวก และ $r = |OP|$ แล้ว

$$\cos \theta = \frac{x}{|OP|} = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{|OP|} = \frac{y}{r}$$

หรือ

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

ถ้า P อยู่บนส่วนที่ยืดขยายด้านสิ้นสุดของ θ , r จะเป็นลบและ $r = -|OP|$

ให้ P' เป็นจุดซึ่งสมนัยกับ P เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด (รูป 11.1.9 (b)) เพราะว่า
พิกัดฉากของ P คือ (x, y) ดังนั้น พิกัดฉากของ P' คือ $(-x, -y)$ และ

$$|OP| = |OP'|$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos \theta = \frac{-x}{|OP'|} = \frac{-x}{|OP|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{-y}{|OP'|} = \frac{-y}{|OP|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

หรือ $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$

ซึ่งเหมือนกับสูตร (1) ดังนั้นสูตร (1) จะเป็นจริงทุกกรณี

สูตร (1) จะช่วยให้การหาพิกัดฉากเมื่อรู้พิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่างเช่น

$$P: (8, \frac{\pi}{6}) \text{ มีพิกัดฉากคือ}$$

$$x = 8 \cos \frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$y = 8 \sin \frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

ดังนั้นพิกัดฉากของ P คือ $(4\sqrt{3}, 4)$

ถ้าเรายกกำลังสองสูตร (1) และนำมาบวกกัน แล้วจะมี

$$x^2 + y^2 = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

(2) หรือ $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

ถ้าเราหาหารสูตรที่สองของ (1) โดยสูตรที่หนึ่ง จะมี

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \quad \text{หรือ} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

เมื่อ $\arctan$ หมายความว่า $\theta = \arctan u$ ก็ต่อเมื่อ $u = \tan \theta$

ถ้าเราแทนสูตร (2) ใน (1) จะมี

$$\sin \theta = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว และพิกัดฉาก ที่กล่าวมาแล้วสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

11.1.1 ทฤษฎีบท ถ้าจุดกำเนิดและแกนบวกของระบบพิกัดฉากเป็นขั้ว และแกนเชิงขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้วตามลำดับ แล้ว พิกัดเชิงขั้ว (x, y) และพิกัดฉาก (r, θ) ของ P สัมพันธ์กันโดย

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

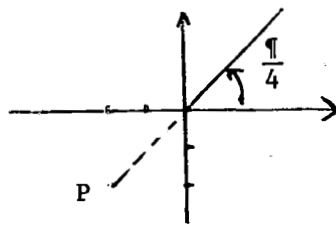
และ $\sin\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$

เครื่องหมายเป็นบวก ถ้า P อยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ และเป็นลบ ถ้า P อยู่บนส่วนยืดยาวด้านสิ้นสุดของ θ

ตัวอย่าง 2. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด P ซึ่งมีพิกัดฉากเป็น $(-2, -2)$

เฉลย โดย 1.11.1 ทฤษฎีบท

$$r = \pm \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \pm 2\sqrt{2}$$



รูป 11.1.10

และ $\theta = \arctan 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{4}$ จะเป็นค่า θ ค่าหนึ่ง

จากรูป 11.1.10 ถ้า $\theta = \frac{\pi}{4}$ P จะอยู่บนส่วนยืดยาวของด้านสิ้นสุดของ θ และ

$r = -2\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้นพิกัดเชิงขั้วของ P คือ $(-2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

พิกัดอื่นที่แสดงจุด P เหมือนกัน เช่น $(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$

#

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการเชิงขั้วของวงรีในแบบมาตรฐาน

เฉลย สมการวงรีในระบบพิกัดฉากในแบบมาตรฐานคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

โดยการแทน $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (จาก 11.1.1 ทฤษฎีบท) จะมี

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1$$

$$r^2(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) = a^2 b^2 \quad \#$$

ตัวอย่าง 4. จงแปลงสมการทั่วไปของเส้นตรงในระบบพิกัดฉาก เป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว

เฉลย สมการทั่วไปของเส้นตรงในระบบพิกัดฉากคือ $Ax + By + C = 0$

แทน $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ในสมการ

เพราะฉะนั้น

$$A r \cos \theta + B r \sin \theta + C = 0$$

$$r(A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0$$

#

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของสมการ $r = \frac{3}{1 - \cos \theta}$

เฉลย เขียนสมการใหม่ $r - r \cos \theta = 3$

แทน $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $x = r \cos \theta$ (จาก 11.1.1 ทฤษฎีบท) ในสมการ จะมี

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 3$$

หรือ $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = 3 + x$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 + y^2 = 9 + 6x + x^2$$

$$y^2 = 6x + 9$$

กราฟเป็นพาราโบลาสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x

#

แบบฝึกหัด 11.1

1. แสดงจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วคือ $(2, \pi), (5, 2\pi), (3, \frac{11\pi}{6}), (3, -\frac{\pi}{3}), (4, -\frac{3\pi}{4})$
 $(0, 0), (0, \frac{2\pi}{3}), (4, -\frac{3\pi}{4})$
2. จงแสดงจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วคือ $(-4, \frac{\pi}{4}), (4, -\frac{3\pi}{4}), (-3, \frac{2\pi}{3}), (3, -\frac{\pi}{3}), (-5, 0)$
 $(-5, -\frac{2\pi}{3}), (4, -\pi), (-4, \pi)$
3. จงแสดงจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดให้ และหาอีก 4 จุด ซึ่งเป็นพิกัดเชิงขั้วแสดงจุดเดียวกัน โดยมี r เป็นบวก 2 พิกัด และ r เป็นลบ 2 พิกัด
 - a. $(3, \frac{\pi}{3})$
 - b. $(5, -\frac{\pi}{12})$
 - c. $(-2, \frac{5\pi}{4})$
 - d. $(-7, -\frac{3\pi}{2})$
4. จงหาพิกัดฉากของจุดในข้อ 3
5. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด ซึ่งมีพิกัดฉากคือ
 - a. $(1, 2)$
 - b. $(-2\sqrt{3}, -2)$
 - c. $(-3, 4)$
 - d. $(1, 3)$

ข้อ 6-ข้อ 9 จงเขียนกราฟของสมการ และหาสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

6. $x - 2y - 3 = 0$
7. $x = 4$
8. $y = -5$
9. $x^2 + y^2 = 16$

ข้อ 10-ข้อ 15 จงหาสมการในระบบพิกัดฉาก จากสมการเชิงขั้วที่กำหนดให้

10. $r = -3$
11. $r = 2\cos\theta$
12. $r = a(1 - \cos\theta)$
13. $\theta = \frac{\pi}{4}$

14. $r = 2a \sin \theta \tan \theta$

15. $r \sin \theta - 4 = 0$

11.2 กราฟของสมการเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของสมการเชิงขั้ว เรา อาจใช้วิธีกำหนดจุดให้มากพอ แล้วเขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุดเหล่านั้น

ตัวอย่าง 1. จงเขียนกราฟของสมการเชิงขั้ว $r = 2 \cos \theta$

เฉลย ถ้าเราแทน θ ด้วย 0 ในสมการ จะได้ $r = 2$ ดังนั้นจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้ว $(2, 0)$

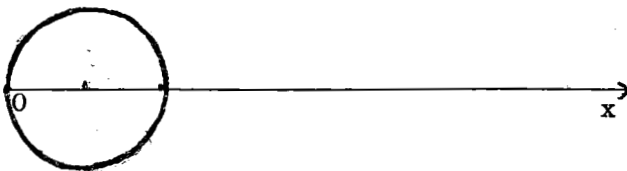
จะอยู่บนกราฟของสมการ $r = 2 \cos \theta$

ถ้าแทน θ ด้วย $\frac{\pi}{6}$ จะได้ $r = \sqrt{3}$ ดังนั้นจุด $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ จะเป็นจุดอยู่บนกราฟ โดยวิธีนี้ เรากำหนด θ เพิ่มจาก 0 ถึง π และหาค่า r ดังตาราง

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2

แสดงจุดตามตาราง แล้วเขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุดทั้งหมด โดยเริ่มตั้งแต่ $\theta = 0$ ถึง $\theta = \pi$

ตามลำดับ (รูป 11.2.1) กราฟเป็นวงกลมผ่านขั้ว และสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว ดังรูป 11.2.1 #



รูป 11.2.1

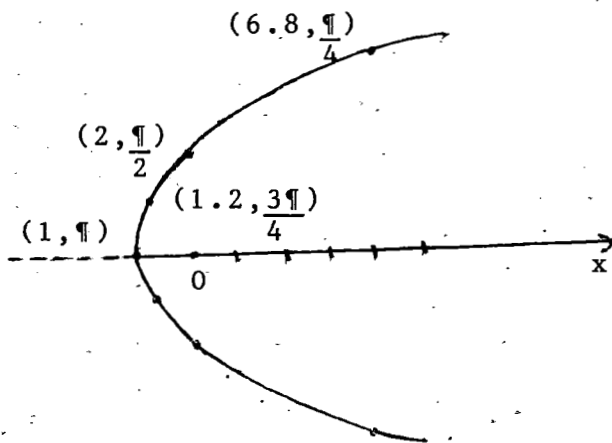
ตัวอย่าง 2. เขียนกราฟของสมการเชิงขั้ว

(1)
$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

เฉลย แบบเดียวกับตัวอย่าง 1 สร้างตารางประมาณค่าโดยกำหนด θ และหาค่า r ที่สมนัยกัน

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
r	-	6.8	2	1.2	1	1.2	2	6.8

กราฟของสมการ (1) จะเป็นพาราโบลา มีโฟกัสที่ขั้วดังรูป 11.2.2



รูป 11.2.2

ข้อสังเกต $(-2, \frac{3\pi}{2})$ ไม่สอดคล้องสมการ (1) แต่จุด $P: (-2, \frac{3\pi}{2})$ อยู่บนเส้นโค้ง

เพราะว่าเป็นพิกัดเชิงขั้วของจุด $(2, \frac{\pi}{2})$ ซึ่งสอดคล้องสมการ (1) ดังนั้นจุด $(-2, \frac{3\pi}{2})$ อยู่บนกราฟถึงแม้ว่าพิกัด $(-2, \frac{3\pi}{2})$ จะไม่สอดคล้องสมการ

ดังนั้นสรุปได้ว่า ถึงแม้พิกัดเชิงขั้วจะไม่สอดคล้องสมการก็ไม่ได้หมายความว่า จุดไม่อยู่บนกราฟของสมการ

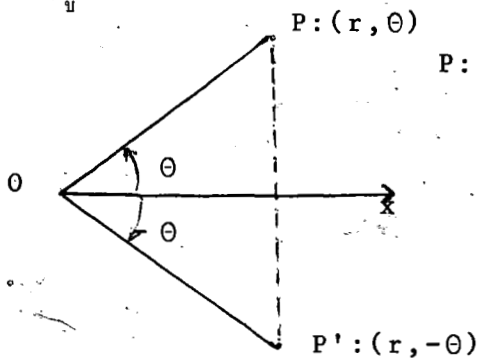
11.2.1 บทนิยาม กราฟของสมการเชิงขั้ว เป็นเซตของจุด ซึ่งมีคุณสมบัติ ต้องมีอย่างน้อย 1 พิกัดเชิงขั้วที่สอดคล้องสมการ

บางสิ่งบางอย่างที่ช่วยในการเขียนกราฟคือ

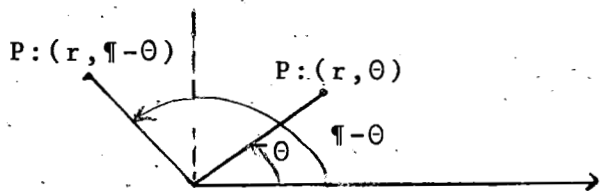
1. เงื่อนไขจำเป็นสำหรับการสมมาตร

(i) จุด $P: (r, \theta)$ และ $P': (r, -\theta)$ สมัยกันเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว

(รูป 11.2.3)



รูป 11.2.3



รูป 11.2.4

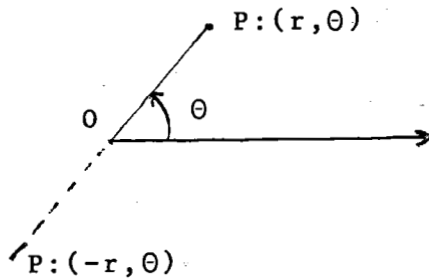
เพราะฉะนั้น ถ้าสมการเชิงขั้วไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อ θ แทนด้วย $-\theta$ ทั้งหมด กราฟจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว

(ii) จุด $P: (r, \theta)$ และ $P': (r, \pi - \theta)$ สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน $\frac{\pi}{2}$

(รูป 11.2.4)

ดังนั้น ถ้าสมการเชิงขั้วไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ทั้งหมด กราฟจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน $\frac{\pi}{2}$

- (iii) จุด $P:(r, \theta)$ และ $P':(-r, \theta)$ สมมาตรเมื่อเทียบกับขั้ว
(รูป 11.2.5)



รูป 11.2.5

ถ้าสมการเชิงขั้วไม่เปลี่ยนเมื่อแทน r ด้วย $-r$ ทั้งหมด กราฟจะสมมาตรเมื่อเทียบกับขั้ว

ตัวอย่างเช่น พาราโบลา $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ สมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว
(รูป 11.2.2) เพราะว่าเมื่อแทน θ ด้วย $-\theta$

$$r = \frac{2}{1 - \cos(-\theta)} = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

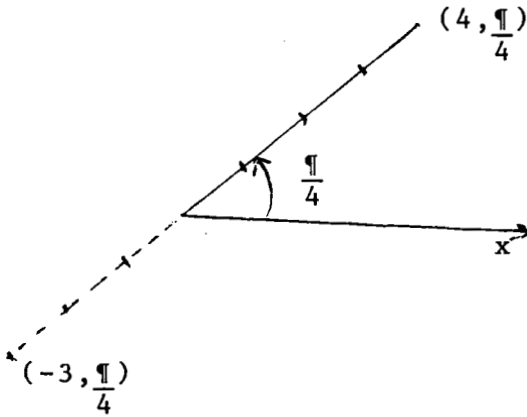
ข้อสังเกต ถึงแม้ว่ากราฟจะสมมาตรเมื่อเทียบกับ แกนเชิงขั้ว แกน $\frac{\pi}{2}$ หรือ ขั้ว
คุณสมบัติทั้ง 3 ข้อ ที่กล่าวมาทั้งหมดอาจจะไม่จริง นั่นคือคุณสมบัติทั้ง 3 ข้อ เป็นเงื่อนไข
จำเป็นแต่ไม่เป็นเงื่อนไขเพียงพอ

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $r = 4 \sin 2\theta$ สมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้วและแกน $\frac{\pi}{2}$ และ
ขั้ว (รูป 11.2.9) แต่คุณสมบัติทั้ง 3 ข้อที่กล่าวมาแล้วไม่จริง

2. เส้นสัมผัสที่ขั้ว

สมการเชิงขั้วของเส้นตรงซึ่งผ่านขั้ว คือ $\theta = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เส้นนี้ผ่านขั้ว
(0, k) เป็นพิกัดเชิงขั้วของขั้ว และ (0, k) สอดคล้องสมการ $\theta = k$

ตัวอย่างเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$ เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านขั้ว มีมุมเอียง $\frac{\pi}{4}$ (รูป 11.2.6)



รูป 11.2.6

มีจุด $(4, \frac{\pi}{4})$, $(-3, \frac{\pi}{4})$ และ $(0, \frac{\pi}{4})$ อยู่บนเส้นนี้

ในหัวข้อ 11.4 เมื่อเส้นโค้งเชิงขั้วผ่านขั้ว สมการเชิงขั้วของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขั้วอาจจะหาได้โดยการแทน $r=0$ ในสมการเชิงขั้ว ถ้ารากจริงของ θ คือ $\theta_1, \theta_2, \dots$ แล้ว $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \theta = \theta_3, \dots$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขั้ว

ตัวอย่างเช่น เส้นโค้งเลมนิสเคต (lemniscate) $r^2 = 8 \cos 2\theta$

เมื่อแทน $r=0$ จะได้ $\cos 2\theta = 0$ ดังนั้น $2\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{3\pi}{4}$

พิกัด $(0, \frac{\pi}{4})$ และ $(0, \frac{3\pi}{4})$ สอดคล้องสมการ และเส้นโค้งเลมนิสเคตผ่านขั้ว ครึ่ง (รูป 11.2.8) ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสที่ขั้วคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ และ $\theta = \frac{3\pi}{4}$

บางครั้งการแปลงสมการเชิงขั้วเป็นสมการพิกัดฉากแบบที่เราคุ้นเคยอยู่แล้ว อาจจะง่ายต่อการเขียนกราฟ เนื่องจากกราฟทั้ง 2 ระบบเหมือนกัน

ตัวอย่างเช่น กราฟของสมการเชิงขั้ว

$$r^2 \sin 2\theta = 1$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$r^2 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

แทน $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\sin \theta = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ลงในสมการ จะได้ $xy = 1$ ซึ่งเป็นกราฟที่เราคุ้นเคยดีแล้ว กราฟของสมการนี้เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า กราฟของสมการเชิงขั้ว $r^2 \sin 2\theta = 1$ เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ตัวอย่าง 3. จงเขียนกราฟของสมการ $r = 4 \cos \theta + 2$

เฉลย อันดับแรก ทดสอบการสมมาตร และถ้าเส้นโค้งผ่านขั้วเราจะหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขั้ว

โดยการแทน θ ด้วย $-\theta$ สมการจะเป็น $r = 4 \cos(-\theta) + 2$

เพราะว่า $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ดังนั้น $r = 4 \cos \theta + 2$ ซึ่งเหมือนสมการเดิม ดังนั้นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว

การทดสอบข้อ (ii) และข้อ (iii) ไม่ได้ผล ดังนั้นเรายังไม่รู้ว่ากราฟสมมาตรหรือไม่เมื่อเทียบกับแกน $\frac{\pi}{2}$ และขั้ว

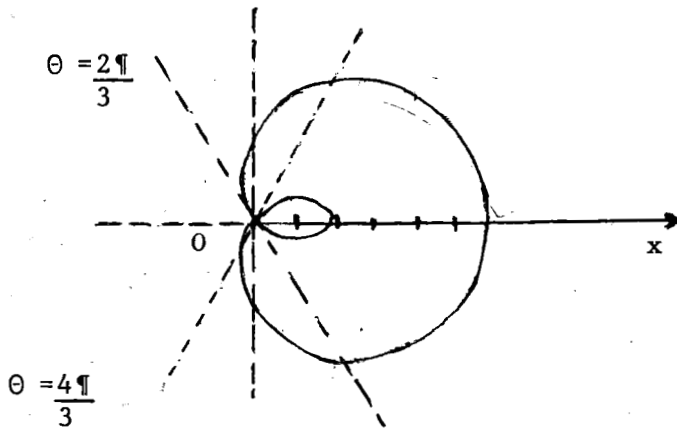
ถ้าเราแทน r ด้วย 0 สมการจะเป็น $4 \cos \theta + 2 = 0$ จะมีรากจริงคือ

$$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \text{ และ } \theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มใดๆ}$$

มีเส้นสัมผัสกราฟที่ขั้ว 2 เส้นที่ต่างกันคือ

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ และ } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

หลังจากเขียนเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขั้ว (รูป 11.2.7)



รูป 11.2.7 เส้นโค้งลิมาซอง (limaçon)

เขียนตารางคำนวณค่าอย่างประมาณ และเขียนเส้นโค้งครึ่งหนึ่งของทั้งหมด กราฟที่เหลือเราสามารถเขียนได้อย่างรวดเร็ว เพราะกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
r	6	5.5	4	2	1	0	-0.8	-1.5	-1.9	-2

#

ตัวอย่าง 4. เขียนกราฟของ $r^2 = 8 \cos 2\theta$

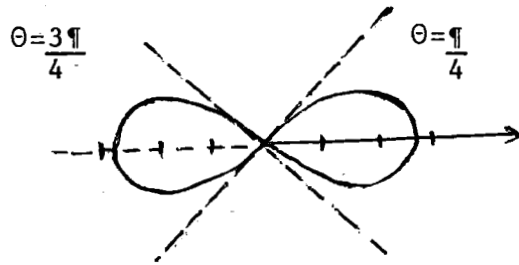
เฉลย ถ้าเราแทน θ ด้วย $-\theta$ จะมีสมการ $r^2 = 8 \cos(-2\theta) = 8 \cos 2\theta$

ดังนั้นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว

เพราะ $8 \cos 2(\pi - \theta) = 8 \cos(-2\theta) = 8 \cos 2\theta$ ดังนั้นสมการ $r^2 = 8 \cos 2\theta$

ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ดังนั้นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน $\frac{\pi}{2}$

สมการไม่เปลี่ยนเมื่อแทน r ด้วย $-r$ ดังนั้นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด
 เมื่อแทน $r=0$ ในสมการ จะมีสมการ $\cos 2\theta = 0$
 ดังนั้นเส้นสัมผัสเชิงขั้วคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ และ $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (รูป 11.2.8)



รูป 11.2.8 เส้นโค้งเลมนิสเคต

เขียน $r = \pm 2\sqrt{2\cos 2\theta}$ แล้วสร้างตารางคำนวณหาค่าโดยประมาณ

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$
r	± 2.8	± 2.6	± 2	0	จำนวนจินตภาพ

กราฟแสดงได้ดังรูป 11.2.8 เรียกว่า เส้นโค้งเลมนิสเคต

ตัวอย่าง 5. จงเขียนกราฟของ $r = 4\sin 2\theta$

เฉลย การทดสอบการสมมาตรทั้งหมดไม่ได้ผล ดังนั้นเราไม่รู้ว่ากราฟสมมาตรหรือไม่
 เมื่อเทียบกับแกนเชิงขั้ว แกน $\frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{3\pi}{2}$

หาเส้นสัมผัสที่ขั้ว แทน $r=0$ ในสมการ จะมี $\sin 2\theta = 0$

เพราะฉะนั้น $\theta = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$ เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขั้ว

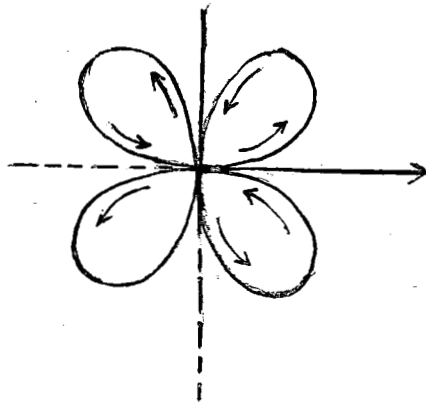
เขียนตารางกำหนดค่า θ จาก 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ โดยให้แต่ละช่วงห่างกัน $\frac{\pi}{2}$ แล้วคำนวณค่า r

ที่สมนัยกับ θ

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	4	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	0	2.8	4	2.8	0	-2.8	-4	-2.8	0

เส้นโค้งนี้ เรียกว่า เส้นโค้งกุหลาบสี่กลีบ (four-leaved rose)

แสดงดังรูป 11.2.9 เริ่มที่ $(0,0)$ หัวลูกศรแสดงการลากอย่างต่อเนื่องผ่านจุด $P:(r,\theta)$ เมื่อ θ เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง 2π



รูป 10.2.9 เส้นโค้งกุหลาบสี่กลีบ

#

ตัวอย่าง 6. เขียนกราฟของ $r = \theta$

เฉลย เส้นโค้งไขว้แกนเชิงขั้วหรือส่วนยี่ดขยายเมื่อ $\theta = n\pi$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

เส้นโค้งไขว้แกน $\frac{\pi}{2}$ หรือส่วนยี่ดขยายเมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มคือ

ถ้า $r=0$ แล้ว $\theta=0$ ดังนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขั้ว คือแกนเชิงขั้ว

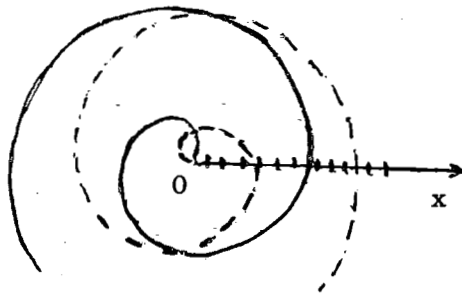
เมื่อ

$$\theta=1, \quad r=1$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}, \quad r=\frac{\pi}{2}$$

$$\theta=-\pi, \quad r=-\pi$$

เส้นโค้งนี้เรียกว่า เส้นโค้งเวียนก้นหอยของอาร์คิมิดีสแสดงดังรูป 11.2.10
เส้นโค้งจุดจะสมนัยกับค่าลบของ θ



รูป 11.2.10 - เส้นโค้งเวียนก้นหอยของอาร์คิมิดีส
(Spiral of Archimedes)

แบบฝึกหัด 11.2

จงเขียนกราฟของสมการเชิงขั้ว

1. a. $\theta = \frac{\pi}{4}$

b. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

c. $\theta = 3$

d. $r = 1$

2. a. $r = -2$

b. $\theta(\theta - 1) = 0$

c. $\theta^2 - 4 = 0$

d. $(r - 2)(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$

3. $r \cos \theta = 4$ [แนะนำ : แปลงให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก]

4. $r \sin \theta + 6 = 0$

$$5. \quad r^2 \sin 2\theta = 0 \text{ [แทน : } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \text{]}$$

$$6. \quad r = 4\sin\theta$$

$$7. \quad r = \frac{4}{1-\cos\theta}$$

$$8. \quad r = \frac{3}{1+\sin\theta}$$

$$9. \quad r = 2 - 2\sin\theta \quad (\text{เส้นโค้งรูปหัวใจ (cardioid)})$$

$$10. \quad r = 3 + 3\cos\theta \quad (\text{เส้นโค้งรูปหัวใจ})$$

$$11. \quad r = 3 - 3\cos\theta \quad (\text{เส้นโค้งรูปหัวใจ})$$

$$12. \quad r = 3 + 3\sin\theta \quad (\text{เส้นโค้งรูปหัวใจ})$$

$$13. \quad r^2 = 9\sin 2\theta \quad (\text{เส้นโค้งlemniscate})$$

$$14. \quad r = 5\cos 3\theta \quad (\text{เส้นโค้งกุหลาบ 3 กลีบ})$$

$$15. \quad r = 6\sin 2\theta \quad (\text{เส้นโค้งกุหลาบ 4 กลีบ})$$

$$16. \quad r = \frac{\theta}{3} \quad (\text{เส้นโค้งเวียนก้นหอยของอาร์คิมิดีส})$$

$$17. \quad r = 3\sin 5\theta \quad (\text{เส้นโค้งกุหลาบ 5 กลีบ})$$

$$18. \quad r = 4 - 2\cos\theta \quad (\text{เส้นโค้งลิมาของ})$$

$$19. \quad r = e^\theta \quad (\text{เส้นโค้งเวียนก้นหอยแบบลอการิทึม})$$

(logarithmic spiral)

$$20. \quad r = \frac{2}{\theta} \quad (\text{เส้นโค้งเวียนก้นหอยแบบส่วนกลับ})$$

(reciprocal spiral)

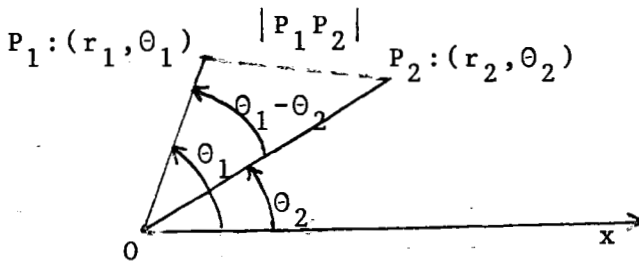
$$21. \quad r = -\frac{3}{\theta} \quad (\text{เส้นโค้งเวียนก้นหอยแบบส่วนกลับ})$$

11.3 เส้นตรง วงกลม และภาคตัดกรวย

11.3.1 ทฤษฎีบท ระยะทางไม่วะบุทิศทางการระหว่าง 2 จุด $P_1: (r_1, \theta_1)$ และ $P_2: (r_2, \theta_2)$ คือ

$$|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

พิสูจน์ ถ้า P_1 และ P_2 และจุดกำเนิดไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (รูป 11.3.1)



รูป 11.3.1

โดยกฎของโคซายน์

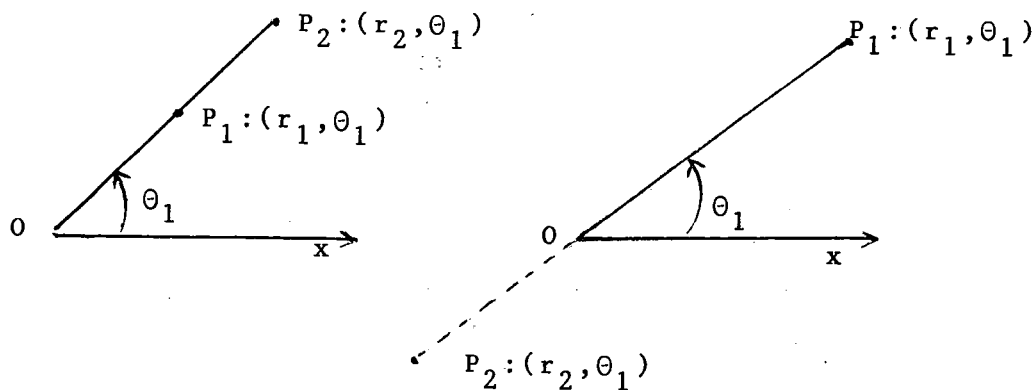
$$(1) \quad |P_1P_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

ถ้า P_1 และ P_2 และจุดกำเนิดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (รูป 11.3.2)

ระยะทางไม่วะบุทิศทางการระหว่างจุด P_1 และ P_2 คือ

$$(2) \quad |P_1P_2| = |r_1 - r_2|$$

แต่สูตร (1) ให้ผลเป็นสูตร (2) เมื่อ $\theta_1 = \theta_2$ ดังนั้นสูตร (1) จึงเป็นจริงทุกกรณี #

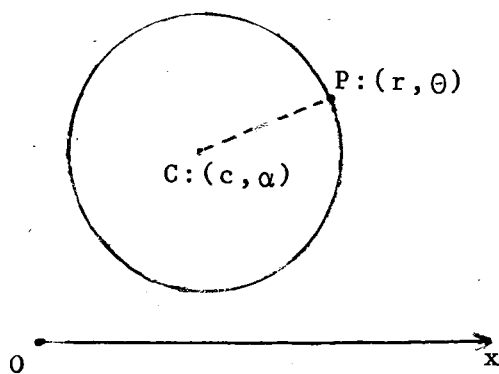


รูป 11.3.2

11.3.2 ทฤษฎีบท สมการเชิงตัวของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $C:(c, \alpha)$ รัศมี a คือ

$$r^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha) + (c^2 - a^2) = 0$$

พิสูจน์



รูป 11.3.3

ให้ $P:(r, \theta)$ เป็นจุดบนวงกลม(รูป 11.3.3) เพราะฉะนั้น $|PC| = a$ ก็คือเมื่อ

$$\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha)} = a$$

นั่นคือ สมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $C: (c, \alpha)$ รัศมี a คือ

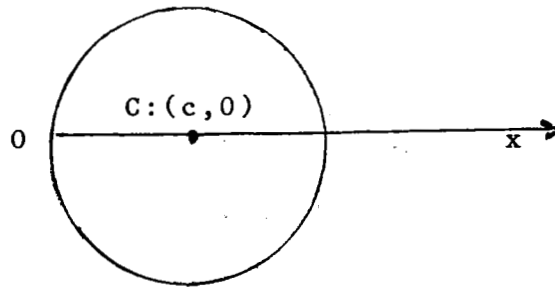
$$\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha)} = a$$

หรือ $r^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha) + (c^2 - a^2) = 0$ #

ดังนั้นโดย 11.3.2 ทฤษฎีบท วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ C และรัศมี a จะมีสมการเชิงขั้ว คือ

$$r = \pm a$$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $C: (c, 0)$ บนแกนเชิงขั้ว (หรือส่วนยี่สิบขยาย) และผ่านขั้ว (รูป 11.3.4) มีสมการเชิงขั้วคือ



รูป 11.3.4

$$r^2 - 2rc \cos \theta = 0$$

หรือ $r = 2c \cos \theta$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C: (c, \frac{\pi}{2})$ บนแกน $\frac{\pi}{2}$ (หรือส่วนยี่สิบขยาย) และผ่านขั้วคือ

$$r = 2c \sin \theta$$

การหาสมการเชิงขั้วของเส้นตรงเราสามารถหาได้จากสมการพิกัดฉาก โดยการแปลงเป็นสมการเชิงขั้ว ถ้าเส้นตรงเป็นเส้นแนวนอน หรือเส้นแนวอน เราสามารถหาได้โดยง่ายดังนี้

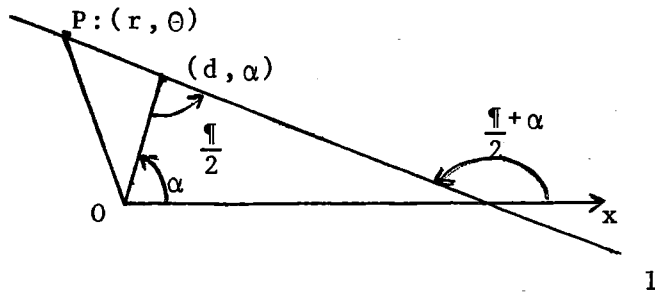
เพราะว่าเส้นแนวดิ่งและเส้นแนวนอนมีสมการในระบบพิกัดฉาก

$$x=k \text{ และ } y=k \text{ ตามลำดับ}$$

แปลงเป็นสมการเชิงขั้วคือ

$$(3) \quad r \cos \theta = k \quad \text{และ} \quad r \sin \theta = k$$

สมมติว่าเราจะหาสมการเชิงขั้วโดยตรงโดยไม่แปลงจากสมการในระบบพิกัดฉากให้ 1 เป็นเส้นใดๆซึ่งไม่ผ่านขั้ว (รูป 11.3.5)



รูป 11.3.5

ถ้า (d, α) เป็นพิกัดเชิงขั้วของโปรเจกชันของ O บน 1 แล้วจุด $P:(r, \theta)$ อยู่บน 1 ก็ต่อเมื่อ

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{d}{r}$$

หรือ $r \cos(\theta - \alpha) = d$

สรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

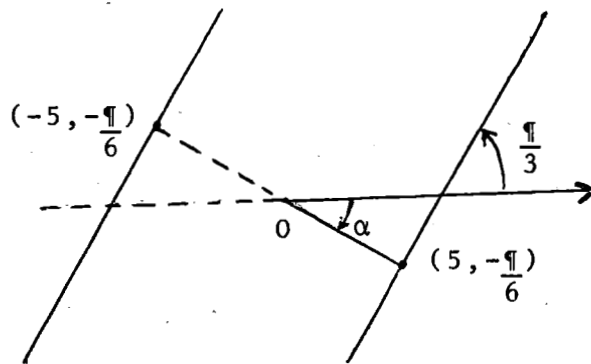
11.3.3 ทฤษฎีบท สมการเชิงขั้วของเส้นตรงซึ่งไม่ผ่านขั้วคือ

$$r \cos(\theta - \alpha) = d$$

เมื่อ (d, α) เป็นพิกัดเชิงขั้วของโพรเจกชันของขั้วบนเส้นตรง 1

ข้อสังเกต $|d|$ เป็นระยะทางระหว่างขั้วและเส้น และเพราะว่า α เราสามารถเลือกให้อยู่ในช่วง $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $0 \leq \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi$ ความเอียงของเส้นคือ $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (รูป 11.3.5)

ตัวอย่าง 1. โดยไม่ใช้ระบบพิกัดฉาก จงหาสมการเชิงขั้วของเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งห่างจากขั้ว 5 หน่วย และมีความเอียง $\frac{\pi}{3}$ (รูป 11.3.6)



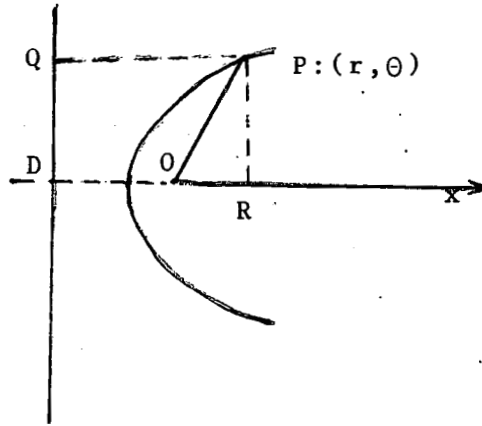
รูป 11.3.6

เฉลย เพราะ $|d|=5$, $d=\pm 5$ เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{3}$ แล้ว $\alpha = -\frac{\pi}{6}$
ดังนั้นสมการของ 2 เส้นคือ

$$r(\cos\theta + \frac{1}{6}) \pm 5 = 0 \quad \#$$

สำหรับสมการภาคตัดกรวย เรากำหนดจุดโฟกัสอยู่ที่ขั้วและไคเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

ให้ไคเรกตริกซ์อยู่ทางซ้ายของโฟกัส และให้ D เป็นจุดซึ่งเป็นผลตัดของเส้นไคเรกตริกซ์และส่วนยืดยาวของแกนเชิงขั้ว (รูป 11.3.7)



รูป 11.3.7

ระยะทางไม่ระบุทิศทางระหว่างโฟกัสและไคเรกตริกซ์คือ d เพราะฉะนั้น $|DO| = d$

ให้ $P:(r, \theta)$ เป็นจุดใดๆของภาคตัดกรวย และให้ Q เป็นโปรเจกชันของ P บนไคเรกตริกซ์

ให้ R เป็นโปรเจกชันของ P บนแกนเชิงขั้ว (หรือส่วนยืดยาว)

โดยบทนิยามของภาคตัดกรวย P อยู่บนภาคตัดกรวย ก็ต่อเมื่อ

$$(4) \quad |OP| = e|OQ|$$

เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง

สมมติ P อยู่ทางด้านขวาของไคเรกตริกซ์ และอยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ แล้ว $r > 0$ และ

$$(5) \quad |OP| = r$$

เพราะว่า $\overline{OR} > 0$ ถ้า R อยู่บนแกนเชิงชี้ และ $\overline{OR} < 0$ ถ้า R อยู่บนส่วนยี่ดซ้ายของแกนเชิงชี้ ดังนั้น $|PR| = d + \overline{OR}$

เพราะว่า $\overline{OR} = r \cos \theta$ ดังนั้น $|QP| = |DR| = d + r \cos \theta$ หรือ

$$(6) \quad |QP| = d + r \cos \theta$$

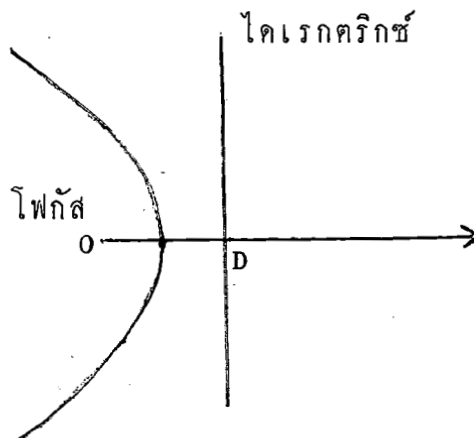
โดยการแทน (5) และ (6) ใน (4) จะมี $r = e(d + r \cos \theta)$ หรือ

$$(7) \quad r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

กราฟของ (7) เป็นพาราโบลาถ้า $e = 1$ และเป็นวงรีถ้า $0 < e < 1$ เส้นโค้งอยู่ทางขวาของไดเรกทริกซ์ และ r เป็นบวก

สำหรับ $e > 1$ กราฟของ (7) เป็นส่วนหนึ่งของไฮเพอร์โบลา

แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าเราให้ r เป็นลบ และกระทำแบบเดียวกับ r เป็นบวก กราฟของ (7) เมื่อ $e > 1$ จะเป็นไฮเพอร์โบลาทั้งหมด (ดูตัวอย่าง 2)



รูป 11.3.8

โดยทำนองเดียวกัน ถ้าไคเรกตริกซ์อยู่ทางขวาของโพกัส(รูป 11.3.8) สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวยคือ

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

ทั้งหมดที่กล่าวมานี้เราสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

11.3.4 ทฤษฎีบท สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวยที่มีโพกัสอยู่ที่ขั้ว และไคเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วคือ

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \quad (11.3.1)$$

เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง และ d เป็นระยะทางไม่ระบุทิศทางระหว่างโพกัสและไคเรกตริกซ์ เครื่องหมายเป็นบวกเมื่อไคเรกตริกซ์อยู่ทางขวาโพกัส เครื่องหมายเป็นลบเมื่อไคเรกตริกซ์อยู่ทางซ้ายโพกัส

ถ้าให้เส้นไคเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วเราจะมีทฤษฎีบทแบบเดียวกันคือ

11.3.4 ทฤษฎีบท สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย ซึ่งมีโพกัสที่ขั้ว และไคเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้ว คือ

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta} \quad (11.3.2)$$

เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง และ d เป็นระยะทางไม่ระบุทิศทางระหว่างโพกัสและไคเรกตริกซ์ เครื่องหมายบวกเมื่อไคเรกตริกซ์อยู่เหนือแกนเชิงขั้ว เครื่องหมายลบเมื่อไคเรกตริกซ์อยู่ใต้แกนเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 2. จงหาจุดโฟกัส โคเรกตริกซ์ และเขียนกราฟของสมการ

$$r = \frac{30}{5-10\cos\theta}$$

เฉลย หารทั้งเส้นและส่วนด้วย 5

$$r = \frac{6}{1-2\cos\theta}$$

เปรียบเทียบกับ ((11.3.1) จะได้ $e=2$ และ $d=3$

เพราะฉะนั้นกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีโฟกัสที่ขั้ว และโคเรกตริกซ์ห่างจากขั้วไปทาง

ซ้าย 3 หน่วย (รูป 11.3.9)

เส้นโคเรกตริกซ์มีสมการ $r\cos\theta = -3$

หาจุดที่กราฟตัดแกนเชิงขั้ว ให้ $\theta=0$ และ $\theta=\pi$

$$\theta=0 \text{ ได้ } r = \frac{6}{1-2} = -6$$

$$\theta=\pi \text{ ได้ } r = \frac{6}{1+2} = 2$$

กราฟตัดแกนเชิงขั้วที่สองจุดคือ $(-6, 0)$ และ $(2, \pi)$ สองจุดนี้เป็นจุดยอดจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ $(-4, 0)$ ดังนั้นจุดโฟกัสอีกจุดคือ $(-8, 0)$

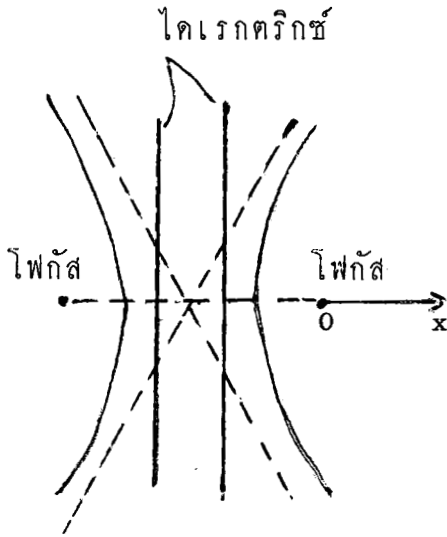
และเส้นโคเรกตริกซ์อีกเส้นตัดแกนเชิงขั้วที่ $(-5, 0)$ มีสมการ $r\cos\theta = -5$ จากสมการ

$$r = \frac{6}{1-2\cos\theta}$$

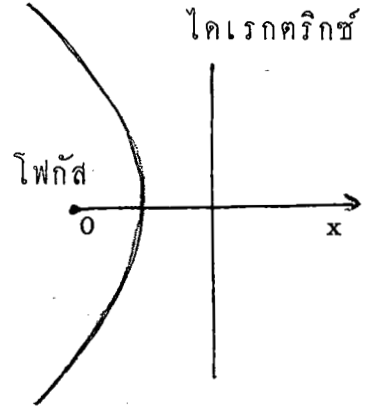
ถ้าตัวส่วนใกล้ศูนย์ จะได้ว่า r มีค่ามากอย่างไม่มีขอบเขต

ถ้าให้ $1-2\cos\theta=0$ จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ เส้นกำกับของกราฟ

จะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ เขียนกราฟได้ดังรูป 11.3.9



รูป 11.3.9



รูป 11.3.10

ตัวอย่าง 3. จงหาจุดโฟกัส ไฮเพอร์โบลา และเขียนกราฟของสมการเชิงขั้ว

$$r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$$

เฉลย เปรียบเทียบกับสมการ (11.3.1) $e=1$ และ $d=2$

ดังนั้น กราฟเป็นพาราโบลา โฟกัสอยู่ที่ขั้ว ไฮเพอร์โบลาอยู่ทางขวาของขั้ว ห่างจากขั้ว 2 หน่วย เส้นไฮเพอร์โบลาที่มีสมการ $r \cos \theta = 2$

หาจุดที่กราฟตัดแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = 0$ จะได้ $r = \frac{2}{1+1} = 1$ เพราะฉะนั้นจุดยอดอยู่ที่ $(1, 0)$ เขียนกราฟได้ดังรูป

11.3.10 #

แบบฝึกหัด 11.3

1. เขียนกราฟเชิงขั้วของเส้น
 - a. ขนานกับแกนเชิงขั้ว และอยู่เหนือแกนเชิงขั้ว 3 หน่วย
 - b. ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และห่างจากแกนเชิงขั้วไปทางซ้าย 4 หน่วย
 - c. ผ่านขั้วและเอียง $\frac{2\pi}{3}$
 - d. แกน $\frac{\pi}{2}$ และส่วนยัดขยายของมัน
2. ใช้พิภคณาคหาสมการเชิงขั้วของเส้น ซึ่งผ่านจุด $(8, \frac{5\pi}{4})$ และขนานกับแกนเชิงขั้ว
3. จงหาสมการเชิงขั้วของวงกลม
 - a. จุดศูนย์กลางที่ $(-6, 0)$ รัศมี 6
 - b. จุดศูนย์กลางที่ $(-2, \pi)$ รัศมี 2
 - c. จุดศูนย์กลางที่ $(3, -\frac{\pi}{2})$ รัศมี 3
 - d. จุดศูนย์กลางที่ $(-5, \frac{3\pi}{2})$ รัศมี 5
4. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม
 - a. $r = -5$
 - b. $r = -10 \sin \theta$
 - c. $r = \cos \theta$
 - d. $r = 4 \sin \theta$
5. จงหาสมการเชิงขั้วของวงกลม ซึ่งผ่านขั้วและจุดศูนย์กลางที่ $(5, -\frac{\pi}{3})$
6. จงหาสมการเชิงขั้วของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(4, \frac{\pi}{4})$ รัศมี 5
7. จงหาสมการเชิงขั้วของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, \frac{\pi}{3})$ และผ่านจุด $(-2, \frac{2\pi}{3})$
8. โดยไม่ใช้พิภคณา จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

$$r^2 - 6r \sin \theta - 16 = 0 \quad [\text{แนะ: } \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta]$$

ข้อ 9-ข้อ 16 จงบอกชื่อภาคตัดกรวยของสมการ ถ้าเป็นพาราโบลา จงหาจุดยอดและโคเรกตริกซ์ ถ้าเป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา จงหาจุดยอด จุดศูนย์กลาง โฟกัส และ

โคเรกตริกซ์ และจากข้อมูลที่ได้จึงเขียนกราฟ

$$9. \quad r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

$$10. \quad r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$$

$$11. \quad r = \frac{7}{3 + \sin \theta}$$

$$12. \quad r = \frac{2\theta}{7 + 5\cos \theta}$$

$$13. \quad r = \frac{2}{1 + \sin \theta}$$

$$14. \quad r = \frac{6}{3 + 4\cos \theta}$$

$$15. \quad r = \frac{12}{6 - 9\sin \theta}$$

$$16. \quad r = \frac{1}{1 - 3\cos \theta}$$

17. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของระยะทางระหว่างขั้วและเส้นโค้ง

$$r = 5\sin \theta + 5\cos \theta + 8 \quad \text{พร้อมเขียนกราฟ}$$

18. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดยอด และจุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยมีศูนย์กลาง

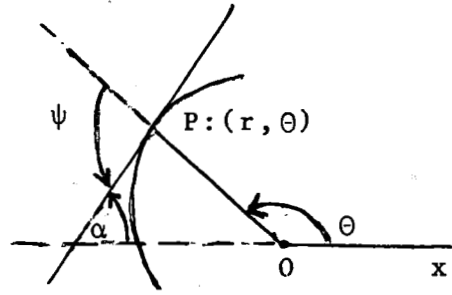
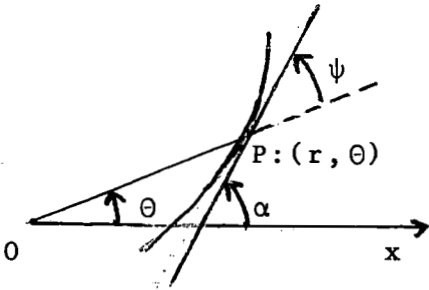
$$r = \frac{ed}{1 - e\cos \theta}$$

$$e > 0 \quad \text{และ} \quad e \neq 1.$$

11.4 มุมจากรัศมีเวกเตอร์ถึงเส้นสัมผัส

ในระบบพิกัดฉาก ความชันเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่หาอนุพันธ์ได้ จะเป็นค่าอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน ณ จุดสัมผัส แต่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว $\frac{dr}{d\theta}$ ไม่เป็นความชันเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $r = f(\theta)$

ให้ ψ เป็นมุมจากรัศมีเวกเตอร์ OP ถึงเส้นสัมผัสที่ P (รูป 11.4.1)



รูป 11.4.1

เราสามารถหาความเอียง α ของเส้นสัมผัส จากสมการ

$$(1) \quad \alpha = (\theta - \psi) - n\pi$$

พิจารณาสมการเชิงขั้วซึ่งมีสมการ คือ

$$r = f(\theta)$$

เมื่อ r เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ θ

ถ้าเรานำระบบพิกัดฉากและระบบเชิงขั้วมาสัมพันธ์กันโดย มีจุดกำเนิดเป็นขั้ว มีแกน x บวกเป็นแกนเชิงขั้ว แล้วโดย 11.1.1 ทฤษฎีบท จะมีสมการ

$$(2) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

โดยหาอนุพันธ์เทียบกับ θ จะมี

$$(3) \quad \frac{dx}{d\theta} = -r \sin \theta + \cos \theta \frac{dr}{d\theta}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta + \sin \theta \frac{dr}{d\theta}$$

จาก (1) $\psi = (\alpha - \theta) + n\pi$ ดังนั้น

$$(5) \quad \tan \psi = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta}$$

แต่

$$(6) \quad \tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

ถ้า $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ และ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ดังนั้น

$$\tan \psi = \frac{\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}} = \frac{x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta}}{x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta}}$$

จาก (2), (3) และ (4)

$$x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} = r^2$$

และ $x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta} = r \frac{dr}{d\theta}$

เพราะฉะนั้น ถ้า $r \neq 0$

$$\tan \psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

ทั้งหมดที่กล่าวมาเราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

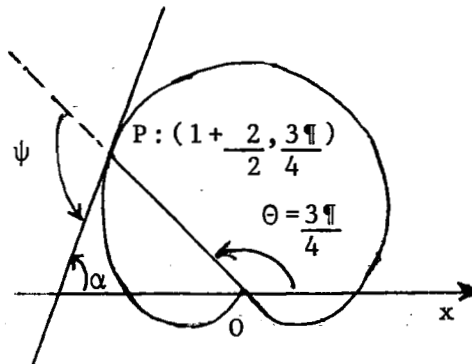
11.4.1 ทฤษฎีบท ให้ $P: (r, \theta), r \neq 0$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง ซึ่งมีสมการเชิงขั้วคือ $r = f(\theta)$ และให้ ψ เป็นมุมจากรัศมีเวกเตอร์ OP ถึงเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ P ถ้า $f'(\theta)$ มีและไม่เท่ากับศูนย์แล้ว

$$\tan \psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาความชันเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = 1 + \cos \theta$ (รูป 11.4.1) ที่จุด $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4})$

เฉลย เราจะหา $\tan \alpha$ ซึ่งเป็นความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4})$ เพราะฉะนั้น $\alpha = (\theta + \psi) - \pi$ และ $\tan[(\theta + \psi) - \pi] = \tan(\theta + \psi)$ ดังนั้น

$$\tan \alpha = \tan(\theta + \psi) = \frac{\tan \theta + \tan \psi}{1 - \tan \theta \tan \psi}$$



รูป 11.4.1 เส้นโค้งรูปหัวใจ $r = 1 + \sin \theta$

$$\tan \psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

เพราะว่า $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ และ $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\tan \psi = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -(1 + \sqrt{2})$$

และเนื่องจาก $\tan \theta = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$

$$\tan \alpha = \frac{-1 - (1 + \sqrt{2})}{1 - (1 + \sqrt{2})} = 1 + \sqrt{2}$$

#

11.4.2 ทฤษฎีบท ให้ $r = f(\theta)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ θ เป็นสมการเชิงขั้วที่ผ่านขั้วครั้งหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งครั้ง

ถ้า $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ เป็นค่าจริงของ θ ซึ่งสอดคล้องสมการ $r = f(\theta) = 0$ เมื่อ $r = 0$ แล้ว $\tan \theta_1, \tan \theta_2, \tan \theta_3, \dots$

(เมื่อทั้งหมดมี) เป็นความชันของเส้นสัมผัส ซึ่งไม่อยู่ในแนวตั้งของเส้นโค้งที่ขั้ว

ถ้า $(0, \frac{n\pi}{2})$ สอดคล้องสมการของเส้นโค้งสำหรับบางจำนวนเต็มคี่ n แล้วเส้นโค้งจะมีเส้นสัมผัสแนวตั้งที่ขั้ว

พิสูจน์ ให้ α เป็นความเอียงของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ ที่ขั้ว

จาก (6), (3) และ (4)

$$(7) \quad \tan \alpha = \frac{r \cos \theta + \sin \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \right)}{-r \sin \theta + \cos \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \right)} = \frac{r + \tan \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \right)}{\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta}$$

$$= \frac{r + \tan\theta \left(\frac{dr}{d\theta} \right)}{\frac{dr - r \tan\theta}{d\theta}}$$

ภายใต้เงื่อนไข $\cos\theta \neq 0$

เราแทน $r=0$ ใน (7) และถ้า $\frac{dr}{d\theta} \neq 0$ เมื่อ $r=0$ แล้ว $\tan\alpha = \tan\theta$
 เพราะฉะนั้นจะได้การพิสูจน์ส่วนแรก

การพิสูจน์ว่าเส้นโค้งมีเส้นสัมผัสแนวตั้งที่ชั่วเมื่อ $(0, \frac{\pi}{2})$ สอดคล้องสมการเส้นโค้ง
 การพิสูจน์จะคล้ายกับส่วนแรกจึงเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด #

แบบฝึกหัด 11.4

จงพิสูจน์ 11.4.2 ทฤษฎีบทส่วนที่เหลือ [และ: ถ้า $\sin\theta \neq 0$

$$\cot\theta = \frac{\frac{dx}{dy}}{\frac{dy}{d\theta}} = \frac{-r + \cot\theta \left(\frac{dr}{d\theta} \right)}{r \cot\theta + \frac{dr}{d\theta}}$$

พิสูจน์ให้ได้ว่า ถ้า $(0, \frac{\pi}{2})$ สอดคล้องสมการ $r=f(\theta)$ แล้ว $\cot\alpha = \cot\theta = 0$ และ
 เส้นโค้งมีเส้นสัมผัสแนวตั้งที่ชั่ว]

11.5 ผลัดของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน จุดทั้งหมดของผลัดของเส้นโค้ง เราสามารถหาได้จากการ
 แก่สมการของเส้นโค้งพร้อมกัน แต่ในระบบพิกัดเชิงขั้วบางครั้งไม่เป็นเช่นนั้น

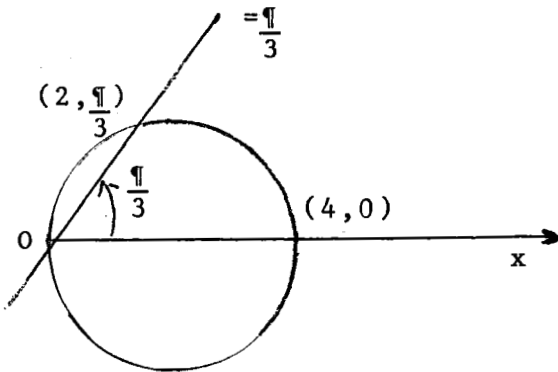
ให้ P เป็นจุดใดๆในระบบพิกัดเชิงขั้ว P จะมีหลายคู่พิกัดเชิงขั้ว และ 1 คู่อาจจะสอดคล้องสมการเชิงขั้วของเส้นโค้งเส้นหนึ่ง และจุดที่ต่างจากนี้อาจจะสอดคล้องสมการเชิงขั้วของอีกเส้นโค้ง

ถึงแม้ว่า P จะเป็นจุดของผลัดของ 2 เส้นโค้ง อาจจะไม่มีการพิกัดของ P คู่ใดเลยที่สอดคล้อง

คล้อง 2 สมการเชิงขั้ว

ตัวอย่างเช่น (รูป 11.5.1) วงกลม $r=4\cos\theta$ ตัดกับเส้น $\theta=\frac{\pi}{3}$ 2 จุด คือ ที่ขั้ว และที่จุด $(2, \frac{\pi}{3})$ แต่จุด $(2, \frac{\pi}{3})$ เท่านั้นที่เป็นผลเฉลยร่วมของ 2 สมการ ทั้งนี้เพราะว่า พิกัดของขั้วที่สอดคล้องสมการของเส้นคือ $(0, \frac{\pi}{3})$ และพิกัดของขั้วที่สอดคล้องสมการวงกลมคือ $(0, \frac{\pi}{2})$

ดังนั้นการหาผลตัดของ 2 เส้น เมื่อกำหนดสมการพิกัดเชิงขั้วมาให้ เราต้องแก้สมการเส้นโค้งไปพร้อมๆกัน และพิจารณากราฟอย่างระมัดระวังไปพร้อมๆกัน เพราะบางทีมีผลตัดที่ไม่ปรากฏเป็นผลเฉลยร่วมของ 2 สมการ เราอาจจะพิจารณาที่ขั้วเป็นพิเศษ โดยให้ $r=0$ แล้วพิจารณาว่า 2 เส้นโค้งผ่านขั้วหรือไม่



รูป 11.5.1

ตัวอย่าง 1. จงหาผลตัดของ 2 เส้นโค้งรูปหัวใจ

$$r=1+\cos\theta$$

และ $r=1-\sin\theta$ (รูป 11.5.2)

ผลเฉลย ขจัด r ระหว่าง 2 สมการ จะได้ $\cos\theta=-\sin\theta$ หรือ $\tan\theta=-1$

ดังนั้น $\theta = \frac{3\pi}{4}$ หรือ $\frac{7\pi}{4}$

เมื่อ $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ในสมการที่ 1 , $r = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$

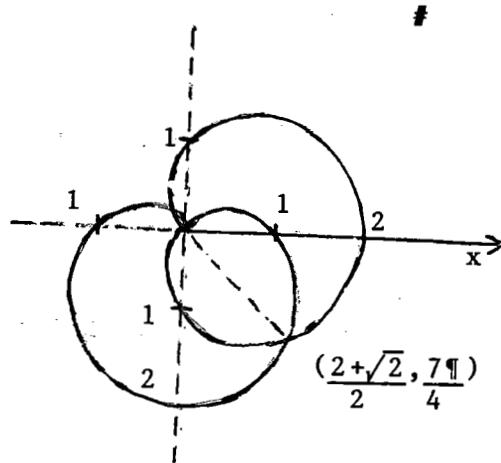
และถ้า $\theta = \frac{7\pi}{4}$ แล้ว $r = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$

เพราะฉะนั้น 2 จุดของผลตัดคือ $(\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}), \frac{3\pi}{4})$ และ $(\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}), \frac{7\pi}{4})$

อย่างไรก็ตาม กราฟที่แสดง ขั้วจะเป็นจุดซึ่งเป็นผลตัดของ 2 เส้นโค้งรูปหัวใจ เหตุที่ขั้วไม่ปรากฏเป็นผลเฉลยในการแก้สมการ เพราะว่า

$r=0$ ใน $r=1+\cos\theta$ เมื่อ $\theta=\pi$

$r=0$ ใน $r=1-\sin\theta$ เมื่อ $\theta=\frac{\pi}{2}$



รูป 11.5.2

แบบฝึกหัด 11.5

ข้อ 1-ข้อ 5 จงหา $\tan\psi$ และ $\tan\alpha$ บนเส้นโค้งที่กำหนดให้ และเขียนกราฟ แสดง ψ และ α ดังรูป 11.4.1

1. $r=6\sin 2\theta$, $(3\sqrt{3}, \frac{1}{3})$
2. $r=\frac{12}{2-\cos\theta}$, $(\frac{24}{5}, \frac{2\pi}{3})$
3. $r=2+4\sin$, $(2-2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3})$
4. $r=4+\cos$, $(4-2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$
5. $r=\frac{1}{2}$, $(\frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{4})$

ข้อ6- ข้อ8 จงหาสมการเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่ชี้

6. $r^2=9\sin 2\theta$
7. $r=2-2\sin\theta$
8. $r=5\sin 3\theta$

ข้อ9- ข้อ10 เขียนกราฟของเส้นโค้ง และหาพิกัดของจุดซึ่งเป็นผลตัด

9. $r=3\sqrt{3}\cos\theta$, $r=3\sin\theta$
10. $r=1+\sin\theta$, $r=-2\sin\theta$
11. ถ้ากราฟของ $r=f_1(\theta)$ และ $r=f_2(\theta)$ มีผลตัดที่จุด P และถ้า ϕ แทนมุมจากเส้นโค้งเส้นที่หนึ่งไปยังเส้นโค้งเส้นที่ 2 จงพิสูจน์

$$\tan\phi = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_1 \tan\phi_2} , \quad \phi \neq \frac{\pi}{2}$$

12. ใช้แบบฝึกหัดข้อ11 หาเส้นสัมผัสที่มีมุม ϕ จากเส้นโค้ง $r^2=4\cos 2\theta$ ถึงเส้นโค้ง $r=2\sqrt{2}\sin\theta$ ที่จุด $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$.

บทที่ 12

สมการอิงตัวแปรเสริม

12.1 เส้นโค้งระนาบ(Plane Curves)

บางครั้ง 1 สมการ 2 ตัวแปร สามารถใช้เขียนกราฟได้เหมือนเส้นโค้งระนาบ แต่ความหมายเส้นโค้งระนาบจะกว้างกว่า เราจะนำไปสู่บทนิยามเส้นโค้งระนาบด้วยสมการอิงตัวแปรเสริม(parametric equation)

ตัวอย่าง 1. พิจารณาเส้นโค้ง

$$(1) \quad x=t, \quad y=t^2 \quad -\infty < t < \infty$$

ถ้าเรากำหนดค่าจำนวนจริง t สมการ(1) จะกำหนดพิกัด (x, y) ของจุดในระนาบคาร์ทีเซียน ในขณะที่ t เปลี่ยนไปจะสมนัยกับจุด $P: (x, y)$ ซึ่งอยู่บนกราฟ

ตัวอย่างเช่น ถ้า $t=0$ จะสมนัยกับจุดบนกราฟมีพิกัดคาร์ทีเซียน $(0, 0)$

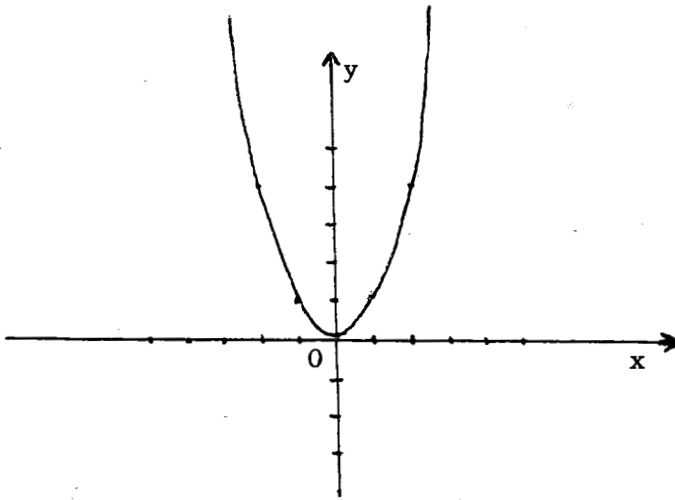
ถ้า $t=1$ จะสมนัยกับจุด $(1, 1)$

ถ้า $t=2$ จะสมนัยกับจุด $(2, 4)$

เราเขียนตารางแสดงค่าของ t และพิกัดคาร์ทีเซียนที่สมนัยดังนี้

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

ถ้าเราแสดงจุดซึ่งมีพิกัดตามตารางบนระนาบ จุดเหล่านั้นจะวางอยู่บนพาราโบลา
(รูป 12.1.1) #



รูป 12.1.1 $x=t, y=t^2, -\infty < t < \infty$

สมการ (1) เรียกว่า สมการอิงตัวแปรเสริม เราอาจจะหาสมการคาร์ทีเซียน (สมการใน x และ y) ของพาราโบลา โดยขจัดตัวแปรเสริม จากสมการ (1) โดยนำ $x=t$ ของสมการที่ 1 ไปแทนในสมการที่ 2 จะได้ $y=x^2$ ซึ่งเป็นสมการพาราโบลา มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดยอด แกน x เป็นแกนमुखสำคัญ กราฟหงายขึ้น (รูป 12.1.1)

ตัวอย่าง 2. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

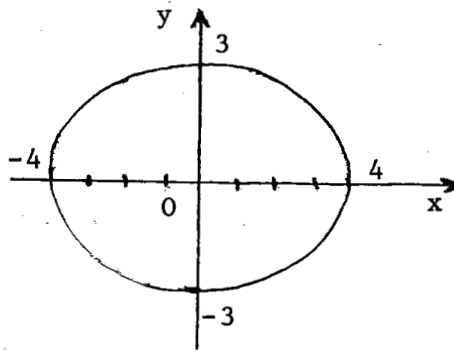
$$x=4\cos t, y=3\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

เฉลย เมื่อ $t=0, x=4$ และ $y=0$ ดังนั้นจุด $P:(4,0)$ จะสมนัยกับ $t=0$ ในขณะที่

ที่ t เพิ่มจาก 0 ถึง π จุด $P:(x,y)$ จะเป็นส่วนหนึ่งของกราฟในจุดตกภาคที่ 1 และ จุดตกภาคที่ 2 เขียนตารางประมาณค่าได้ดังนี้

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	4	3.5	2.8	2	0	-2	-2.8	-3.5	-4
y	0	1.5	2.1	2.6	3	2.6	2.1	1.5	0

เพราะว่ากราฟของฟังก์ชัน cosine สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x ดังนั้นเราเพียงแต่ สะท้อนส่วนบนของกราฟรอบแกน x ก็จะได้กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม ดังรูป 12.1.2



รูป 12.1.2

การหาสมการคาร์ทีเซียน เขียน $\cos t = \frac{x}{4}$ และ $\sin t = \frac{y}{3}$ แล้วนำไปแทนใน

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ จะได้สมการ

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

เป็นสมการมาตรฐานของวงรี (รูป 12.1.2)

ตัวอย่าง 3. เขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

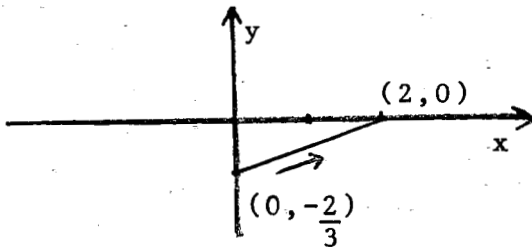
$$x=6t+2, y=2t, \quad -\frac{1}{3} \leq t \leq 0$$

เฉลย เมื่อ $t=0$ จะสมนัยกับจุด $P:(2,0)$ บนกราฟ เมื่อ $t=-\frac{1}{3}$ จะสมนัยกับจุด $P:(0,-\frac{2}{3})$ โดยการขจัดตัวแปรเสริมระหว่างสมการที่กำหนดให้ จะได้สมการคาร์ทีเซียนคือ

$$x=3y+2$$

หรือ $x-3y-2=0$

กราฟของคาร์ทีเซียนเป็นเส้นตรงผ่านจุด $(2,0)$ และ $(0,-\frac{2}{3})$ แต่กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมเป็นส่วนเส้น ซึ่งมีจุดปลายที่ $(0,-\frac{2}{3})$ และ $(2,0)$ เพราะว่าเราจำกัดค่า t บนช่วง $[-\frac{1}{3}, 0]$ #



รูป 12.1.3

12.1.1 บทนิยาม ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันมีโดเมนร่วม D แล้ว

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad t \in D$$

เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม มี t เป็นตัวแปรเสริม

กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมคือ เซตของจุด

$$\{ P:(x,y)/x=f(t), y=g(t), t \in D \}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของกราฟคาร์ทีเซียน $x^2 + y^2 - 6y = 0$

เฉลย กราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางที่ $(0, 3)$ รัศมี 3

โดยกำลังสองบริบูรณ์ เราสามารถเขียนสมการในเทอม

$$x^2 + (y-3)^2 = 9$$

หรือ
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1$$

เปรียบเทียบกับสมการกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

ให้ $\frac{x}{3} = \sin \theta$ และ $\frac{y-3}{3} = \cos \theta$ แล้วสมการอิงตัวแปรเสริมของกราฟคือ

$$x = 3 \sin \theta, \quad y = 3 \cos \theta + 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ขณะนี้เราพร้อมที่จะให้นิยามเส้นโค้งระนาบ

12.1.2 บทนิยาม เส้นโค้งระนาบ เป็นกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมคู่หนึ่ง

$$(2) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I$$

เมื่อ f และ g ต่อเนื่องบนช่วง I สมการ (2) เป็นตัวแทนตัวแทนตัวแปรเสริม (parametric representation) ของเส้นโค้ง ถ้า I เป็นช่วงปิด $I = [a, b]$ เส้นโค้งเรียกว่า ส่วนโค้ง (arc) ถ้า t ที่ต่างกันในช่วงเปิด (a, b) สันนิษฐานกับจุดที่ต่างกันบนส่วนโค้ง ส่วนโค้งจะเรียกว่า ส่วนโค้งเชิงเดี่ยว (simple arc)

ดังนั้น พาราโบลา วงรี ส่วนเส้น และวงกลมในตัวอย่าง 1 ถึง 4 เป็นเส้นโค้งระนาบ (หรือกล่าวสั้นๆว่า เส้นโค้ง (curves)) วงรี ส่วนเส้น และวงกลม เป็นส่วนโค้ง แต่พาราโบลาในตัวอย่าง 1 ไม่เป็นส่วนโค้งเพราะ t ไม่อยู่ในช่วงปิด

สมการเส้นโค้งของเส้นโค้งใน 12.2.2 บทนิยาม ประกอบด้วย การส่งต่อเนื่องของช่วง I ไปทั่วถึงเส้นโค้ง ในการส่งนี้เส้นโค้งเป็นภาพต่อเนื่องของช่วง t

เพราะว่าจำนวนในช่วง I เป็นอันดับ ดังนั้นจุดของเส้นโค้งเชิงเดียวอาจจะเป็นอันดับ กล่าวคือจุด $P_1: (f(t_1), g(t_1))$ นำจุด $P_2: (f(t_2), g(t_2))$ ก็ต่อเมื่อ $t_1 < t_2$

เรานิยามทิศทางบวก (positive direction) บนเส้นเชิงเดียว ให้มีทิศทางไปกับการเพิ่มของ t

เส้นโค้งมีตัวแทนตัวแปรเสริมได้จำนวนอนันต์

ตัวอย่างเช่น

$$x=4\cos\theta, \quad y=3\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

เป็นครึ่งขวาของวงรี $9x^2+16y^2=144$ (รูป 12.1.2) ตัวแทนตัวแปรเสริมของเส้นโค้งเดียวกันนี้คือ

$$x=4\cos(2\varphi+1), \quad y=3\sin(2\varphi+1), \quad -\frac{1}{4}(\pi+2) \leq \varphi \leq \frac{1}{4}(\pi-2)$$

และ

$$x=\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y=\frac{6t}{1+t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

จากตัวแทนตัวแปรเสริมของส่วนโค้งเชิงเดียว c

$$(3) \quad x=f(t), \quad y=g(t), \quad a \leq t \leq b$$

เราสามารถหาตัวแทนตัวแปรเสริมนี้ได้อีกโดย

ให้ $\tau=\varphi(t)$ เมื่อ φ ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบนช่วง $[a, b]$, $\varphi(a)=\alpha$ และ $\varphi(b)=\beta$ แล้ว φ มีฟังก์ชันผกผัน φ^{-1} (9.4.3 ทฤษฎีบท) ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบน $[\alpha, \beta]$

ถ้า $f \circ \varphi^{-1} = \Phi$ และ $g \circ \varphi^{-1} = \Gamma$ แล้ว

$$(4) \quad x=\Phi(\tau), \quad y=\Gamma(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

เป็นตัวแทนตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง c

เรากล่าวว่าตัวแทนตัวแปรเสริมใหม่ (4) ได้จากตัวแทนตัวแปรเสริม(3) โดยการเปลี่ยนตัวแปรเสริม $t = \varphi^{-1}(\tau)$

เพราะว่า φ^{-1} , f และ g ต่อเนื่อง เพราะฉะนั้น Φ และ Γ (แกมมา(gamma)) ต่อเนื่อง และเพราะว่า φ^{-1} เพิ่มขึ้น ดังนั้นทิศทางบวกไม่เปลี่ยนแปลงโดยการเปลี่ยนตัวแปรเสริม

ตัวอย่างเช่น ครึ่งวงรีด้านขวา วงรี $9x^2 + 16y^2 = 144$ รวมจุดปลาย เป็นเส้นโค้งเชิงเดียว C (รูป 12.1.2)

ตัวแทนตัวแปรเสริมของ C คือ

$$x = f(t) = \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y = g(t) = \frac{6t}{1+t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

เราสามารถใช้วิธีการทั่วไปหาตัวแทนตัวแปรเสริมอื่นของ φ

นิยาม φ โดย $\tau = \varphi(t) = e^t$ เพราะฉะนั้น φ ต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นบน $[-1, 1]$ ดังนั้น φ มีผกผัน φ^{-1} นิยามโดย

$$t = \varphi^{-1}(\tau) = \ln \tau$$

และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเพิ่มขึ้นบนช่วง $[\varphi(-1), \varphi(1)] = [e^{-1}, e]$

ถ้า $\Phi = f \circ \varphi^{-1}$ และ $\Gamma = g \circ \varphi^{-1}$ แล้ว

$$x = \Phi(\tau) = \frac{4(1 - \ln^2 \tau)}{1 + \ln^2 \tau}, \quad e^{-1} \leq \tau \leq e$$

$$y = \Gamma(\tau) = \frac{6 \ln \tau}{1 + \ln^2 \tau}$$

เป็นตัวแทนตัวแปรเสริมของ C

ถ้า $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปตัวแทนตัวแปรเสริมอย่างง่ายคือ ให้ $x=t$ สมการตัวแทนตัวแปรเสริมของกราฟคือ

$$x=t, \quad y=f(t), \quad t \in I$$

โดยทำนองเดียวกัน ในพิกัดเชิงขั้ว ถ้า $r=f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง θ (θ -interval) I สมการอิงตัวแปรเสริมของกราฟที่ซึ่ง θ เป็นตัวแปรเสริมคือ

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

เมื่อ $\theta \in I$

แบบฝึกหัด 12.1

ข้อ 1-ข้อ 8 กำหนดตัวแทนตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง

- จงเขียนกราฟโดยกำหนดตัวแปรเสริม
- หาสมการคาร์ทีเซียนโดยการขจัดตัวแปรเสริม
- เส้นโค้งเป็นส่วนโค้ง หรือส่วนโค้งเชิงเดียว

- $x=3+4t, \quad y=2+5t, \quad t \in \mathbb{R}$
- $x=t+2, \quad y=\sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 3$
- $x=t^2, \quad y=t^3, \quad -1 \leq t \leq 2$
- $x=4\cos t, \quad y=3\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- $x=3\sin\theta, \quad y=5\cos\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- $x=2\sec\theta, \quad y=\tan\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$7. \quad x=9\sin^4\theta, \quad y=9\cos^4\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$8. \quad x=4\cos\frac{\theta}{2}, \quad y=4\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ข้อ 9-ข้อ 12 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของสมการ

$$9. \quad x = \frac{5}{2}(\sqrt{y^2+4} + 2), \quad y \in \mathbb{R}$$

$$10. \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

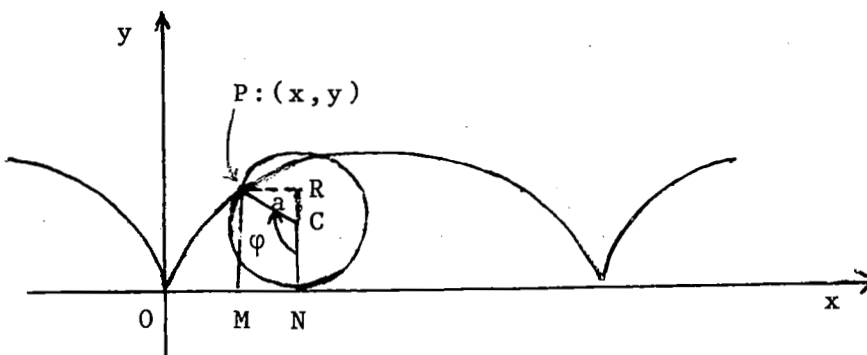
$$11. \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$12. \quad x + 3y^2 - 4 = 0.$$

12.2 ไชคลอยด์(The Cycloid)

เส้นโค้งที่ลากผ่านจุดบนวงกลม ขณะที่วงกลมกลิ้งไปบนเส้นตรงโดยไม่ลื่น เรียกว่า **ไชคลอยด์**

การหาสมการตัวแปรเสริมของไชคลอยด์ เรากำหนดเส้นตรงคงที่มาเส้นหนึ่ง เป็นที่วงกลมกลิ้ง ให้เป็นแกน x และจุดกำเนิดอยู่ที่ซึ่งเราลากเส้นโค้งผ่านจุดมาสัมผัสกับแกน x (รูป 12.2.1)



รูป 12.2.1 ไชคลอยด์

และจุดศูนย์กลางของการกลิ้งวงกลมคือ C และรัศมี a ให้ $P:(x,y)$ เป็นตำแหน่งใดๆ ของจุดที่ลากเส้นโค้งผ่าน และตัวแปรเสริม φ เป็นมุมที่ซึ่งส่วนเส้น CP หมุนจากตำแหน่ง เมื่อ P อยู่ที่จุดกำเนิด เราสมมุติว่าวงกลมกลิ้งไปทางขวาบนแกน x , φ วัดเป็นเรเดียน ทิศทางบวกตามเข็มนาฬิกา แล้ว $\varphi \geq 0$ และ $\overline{PN} \geq 0$ เมื่อ $\overline{PN}$ หมายถึงความยาวของส่วน โค้งของวงกลมจาก P ถึง N ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เพราะว่าวงกลมกลิ้งโดยไม่ลื่นไปตามแกน x เพราะฉะนั้น

$$\overline{ON} = \overline{PN} = a\varphi$$

$$\overline{CR} = -a\cos\varphi$$

และ $\overline{PR} = a\sin\varphi$

ดังนั้น $x = \overline{OM} = \overline{ON} - \overline{MN} = a\varphi - \overline{PR} = a\varphi - a\sin\varphi = a(\varphi - \sin\varphi)$

และ $y = \overline{MP} = \overline{NR} = \overline{NC} + \overline{CR} = a - a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi)$

เพราะฉะนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมของไซคลอยด์คือ

$$(1) \quad x = a(\varphi - \sin\varphi) \quad , \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

สมการคาร์ทีเซียนของไซคลอยด์อาจจะหาได้โดยกำจัดตัวแปรเสริม φ ระหว่างสมการใน

(1)

แบบฝึกหัด 12.2

- เขียนกราฟของไซคลอยด์ $x = 4(\varphi - \sin\varphi)$, $y = 4(1 - \cos\varphi)$
- ถ้าแผ่นกลมรัศมี a กลิ้งไปบนเส้นตรงโดยไม่ลื่น ถ้า P เป็นจุดคงตัวบนแผ่นกลม มีระยะทาง b จากจุดศูนย์กลาง $0 < b \leq a$ จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งที่ลากผ่าน P เส้นโค้งนี้เรียกว่า **trochoid**

ข้อสังเกต ถ้า $b=a$ trochoid จะเป็นไซคลอยด์

3. ให้วงกลมรัศมี b กลิ้งโดยไม่ลื่น ภายในวงกลมคงตัวรัศมี $a, a > b$ จุดบนเส้นรอบวงของการกลิ้ง เป็นเส้นโค้ง เรียกว่า ไฮโพไซคลอยด์ จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของไฮโพไซคลอยด์ [แนะ : ตำแหน่งจุดกำเนิดของพิกัดคาร์ทีเซียนอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมใหญ่และคงตัว และให้ $A: (a, 0)$ เป็นตำแหน่งของจุด P ที่ลากเส้นผ่าน ให้ B แทนการเคลื่อนที่จุดของภาวะสัมผัส (tangency) ของ 2 วงกลม และให้ φ เป็นมุม AOB วัดเป็นเรเดียน เป็นตัวแปรเสริม]
4. จงพิสูจน์ ถ้า $b = \frac{a}{4}$ ในแบบฝึกหัดข้อ 3 สมการตัวแปรเสริมของไฮโพไซคลอยด์อย่างง่ายคือ

$$x = a \cos^3 \varphi, \quad y = a \sin^3 \varphi$$

เรียกว่า **hypocycloid of four cusps**

เขียนกราฟและแสดงว่าสมการคาร์ทีเซียนคือ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

5. เส้นโค้งลากผ่านจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี b ในขณะที่กลิ้งโดยไม่ลื่นบนข้างนอกวงกลมคงตัวรัศมี a เรียกว่า **เอพิไซคลอยด์** จงพิสูจน์ว่าสมการตัวแปรเสริมคือ

$$x = (a+b) \cos \varphi - b \cos \frac{a+b}{b} \varphi, \quad y = (a+b) \sin \varphi - b \sin \frac{a+b}{b} \varphi$$

[แนะ: ดูข้อ 3]

6. ถ้า $b=a$ สมการในข้อ 5 คือ

$$(2) \quad x = 2a \cos \varphi - a \cos 2\varphi, \quad y = 2a \sin \varphi - a \sin 2\varphi$$

จงพิสูจน์ว่า เอพิไซคลอยด์นี้เป็นเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = 2a(1 - \cos \theta)$ เมื่อหัวของระบบพิกัดเชิงขั้วอยู่ที่จุด $(a, 0)$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และแกนเชิงขั้วมีทิศทางเดียวกับแกน x บวก [แนะ: หาสมการคาร์ทีเซียนของเอพิไซคลอยด์ โดยจัดตัวแปรเสริม φ

ระหว่างสมการใน (2) แล้วแสดงว่าสมการที่เชื่อมระหว่างระบบเชิงขั้วและระบบคาร์ทีเซียนคือ

$$x = r \cos \theta + a$$

$$y = r \sin \theta$$

แล้วใช้สมการนี้แปลงสมการคาร์ทีเซียนไปเป็นสมการ $r = 2a(1 - \cos \theta)$.

12.3 ฟังก์ชันนิยามโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ มีโดเมนร่วม $[\alpha, \beta]$ และให้

$$(1) \quad x = f(t), \quad y = g(t)$$

ถ้า f' ต่อเนื่อง และ $f'(t) \neq 0$ สำหรับ $\alpha \leq t \leq \beta$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้นบน $[\alpha, \beta]$ เพราะฉะนั้น f มีฟังก์ชันผกผันต่อเนื่อง f^{-1} ซึ่ง $t = f^{-1}(x)$ สำหรับทุก x บนช่วงปิดซึ่งมีจุดปลายที่ $f(\alpha)$ และ $f(\beta)$ (โดย 9.4.5 ทฤษฎีบท) ดังนั้น

$$(2) \quad y = g(t) = g(f^{-1}(x)) = F(x)$$

เมื่อ $F = g(f^{-1})$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง มีโดเมนเป็นช่วงปิดมีจุดปลายที่ $f(\alpha)$ และ $f(\beta)$ เพราะฉะนั้นสมการอิงตัวแปรเสริม (1) นิยาม y เหมือนเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x ที่ซึ่งสมนัยกับ (2)

โดยการแทนค่า $x = f(t)$ ใน (2) เราจะได้

$$(3) \quad g(t) = F(f(t))$$

ถ้าเราหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของ (3) เทียบกับ t โดยกฎลูกโซ่

$$g'(t) = F'(f(t)) \cdot f'(t)$$

โดยสมการ (1) เราสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

เพราะว่า $\frac{dx}{dt} = f'(t) \neq 0$,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

สรุปเป็นทฤษฎีบทคือ

12.3.1 ทฤษฎีบท ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และมีโดเมนร่วม $[\alpha, \beta]$ ถ้า f' ต่อเนื่องและ $f'(t) \neq 0$ สำหรับ $\alpha \leq t \leq \beta$ แล้วสมการอิงตัวแปรเสริม $x=f(t)$ และ $y=g(t)$ ทำให้ y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x และ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

ตัวอย่าง 1. ถ้า $x=6t^2$, $y=t^3$, $t \neq 0$ จงหา $D_x y$

เฉลย $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = 3t^2 \div 12t = \frac{t}{4}$ #

ผลต่างเชิงอนุพันธ์มีประโยชน์มากสำหรับการนำมาหาอนุพันธ์อันดับต่างๆของฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

ตัวอย่าง 2. จงหา 2 อนุพันธ์แรกของฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x=t^2, \quad y=\frac{1}{t}$$

เฉลย $dx=2t dt$ และ $dy=-\frac{2dt}{t^2}$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2t^3} = y'$$

เพราะฉะนั้น

$$dy' = \frac{3t^{-4}}{2} dt$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{3t^{-4}}{2} dt \div 2t dt = \frac{3}{4t^5}$$

#

แบบฝึกหัด 12.3

ข้อ 1- ข้อ 4 จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยขจัดตัวแปรเสริม

1. $x=t^2$, $y=\frac{1}{2t}$, $t \neq 0$

2. $x=t^2-1$, $y=\frac{2}{t}$, $t \neq 0$

3. $x=\frac{3}{t(t^2+2)}$, $y=\frac{1}{t^2+2}$, $t \neq 0$

4. $x=2\sin t+5$, $y=4\cos t-1$, $t \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

ข้อ 5- ข้อ 6 จงหาสมการของเส้นสัมผัส และเส้นนอร์มัลของเส้นโค้งที่กำหนดให้ โดยไม่ต้องขจัดตัวแปรเสริม พร้อมเขียนกราฟ

5. $x=3t$, $y=8t^3$, $t=-\frac{1}{2}$

6. $x=4\cos\theta-3$, $y=4\sin\theta+1$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$

บทที่ 13

เมตริกซ์

13.1 บทนำ

ผลเฉลยของระบบสมการที่มีตัวไม่รู้ n ตัว คืออันดับของ n จำนวน ซึ่งสอดคล้องระบบสมการ

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} & x+3y-2z=-7 \\ (1) \quad & 2x-y+z=-9 \\ & 4x-2y-3z=-23 \end{aligned}$$

โดยเอา 4 เท่าของสมการที่ 1 ลบออกจากสมการที่ 3 จะมีระบบสมการ

$$\begin{aligned} & x+3y-2z=-7 \\ (2) \quad & 2x-y+z=-9 \\ & 4y+5z=5 \end{aligned}$$

โดยเอา 2 เท่าสมการที่ 1 ลบออกจากสมการที่ 2 จะมีระบบสมการ

$$x+3y-2z = -7$$

$$(3) \quad 7y-5z = -5$$

$$4y+5z = 5$$

โดยเอา 2 เท่าของสมการที่ 2 ลบออกจากสมการที่ 3 จะมีระบบสมการ

$$x+3y-2z = -7$$

$$(4) \quad 7y-5z = -5$$

$$z = 1$$

โดยเอา 5 เท่าของสมการที่ 3 บวกกับสมการที่ 2 จะมีระบบสมการ

$$x+3y-2z = -7$$

$$(5) \quad y = 0$$

$$z = 1$$

โดยเอา 3 เท่าของสมการที่ 2 ลบออกจากสมการที่ 1 ก็จะมีระบบสมการ

$$x-2z = -7$$

$$(6) \quad y = 0$$

$$z = 1$$

โดยเอา 2 เท่าของสมการที่ 3 บวกกับสมการที่ 1 ก็จะมีระบบสมการ

$$x = -5$$

$$(7) \quad y = 0$$

$$z = 1$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (1) คือ $x = -5, y = 0, z = 1$

หรือเขียนแบบสั้น $(-5, 0, 1)$

เราสามารถทดสอบความถูกต้องได้โดยนำผลเฉลยไปแทนในระบบสมการ (1) ถ้าถูกต้องสมการก็จะจริง

เรากล่าวว่า 2 ระบบสมการเชิงเส้น **สมมูลกัน** ถ้าทุกผลเฉลยของแต่ละระบบเป็นผลเฉลยของอีกระบบหนึ่ง

13.1.1 ทฤษฎีบท การดำเนินการบนระบบสมการเชิงเส้นที่ให้ผลลัพธ์เป็นระบบที่สมมูลกัน คือ

- (i) เปลี่ยนตำแหน่งของ 2 สมการ
- (ii) คูณสมการทั้งสองข้างด้วยจำนวนคงตัว
- (iii) การบวกของการคูณสมการหนึ่งด้วยจำนวนไม่เป็นศูนย์ กับอีกสมการหนึ่ง

สำหรับ (i) และ (ii) เห็นได้ชัดเจน ส่วน (iii) ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอักษรที่ใช้แทนตัวแปรในระบบสมการเชิงเส้นไม่สำคัญ ระบบสมการ (1) มีผลเฉลยเหมือนกับระบบสมการ

$$u + 3v - 2w = -7$$

$$2w - v + w = -9$$

$$4w - 2v - 3w = -23$$

สัมประสิทธิ์และจำนวนเทอมเท่านั้นที่มีผลต่อผลเฉลย ดังนั้นเพื่อการประหยัดเวลา เราจะแก้สมการโดยตัดตัวไม่รู้ และเครื่องหมายเท่ากับทิ้งโดยเขียนแทนระบบสมการ (1) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -23 \end{bmatrix}$$

สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จัดเรียงจำนวนเรียกว่า **เมตริกซ์(matrix)** แนวนอนเรียกว่า **แถว** แนวตั้งเรียกว่า **หลัก** เมตริกซ์มี 3 แถว 4 หลัก เรียกว่า เมตริกซ์ขนาด 3×4 (3 by 4)

จะพบทวนการแก้ระบบสมการ(1) โดยเปรียบเทียบกับ การเขียนระบบสมการเป็นเมตริกซ์ พิจารณาว่ามีอะไรเกิดขึ้นบ้างสำหรับแต่ละขั้นตอน

$$(1') \quad \begin{array}{rcl} x+3y-2z & = & -7 \\ 2x-y+z & = & -9 \\ 4x-2y-3z & = & -23 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -23 \end{array} \right]$$

โดยเอา 4 เท่าสมการที่ 1 ลบออกจากสมการที่ 3 (และเอา 4 คูณแถวที่ 1 ลบออกจากแถวที่ 3 ของเมตริกซ์) จะมีระบบสมการ

$$(2') \quad \begin{array}{rcl} x+3y-2z & = & -7 \\ 2x-y+z & = & -9 \\ 0x+14y+5z & = & 5 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 14 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

โดยเอา 2 เท่าสมการที่ 1 ลบออกจากสมการที่ 2 (และเอา 2 คูณแถวที่ 1 ลบออกจากแถวที่ 2 ของเมตริกซ์) จะมีระบบสมการ

$$(3') \quad \begin{array}{rcl} x+3y-2z & = & -7 \\ 0x+7y-5z & = & -5 \\ 0x+14y+5z & = & 5 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 14 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

โดยเอา 2 เท่าของสมการที่ 2 ลบออกจากสมการที่ 3 (และเอา 2 คูณแถวที่ 2 ลบออกจากแถวที่ 3) จะมีระบบสมการ

$$(4') \quad \begin{array}{rcl} x+3y+2z & = & -7 \\ 0x+7y-5z & = & -5 \\ 0x+0y+z & = & 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

โดยเอา5เท่าสมการที่¹3 บวกกับสมการที่¹2 (และเอา2คูณแถวที่¹2 บวกกับแถวที่¹2)
จะมีระบบสมการ

$$(5') \quad \begin{aligned} x+3y-2z &= -7 \\ 0x+y+0z &= 0 \\ 0x+0y+z &= 1 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

โดยเอา3เท่าของสมการที่¹2 ลบออกจากสมการที่¹1 (และเอา3คูณแถวที่¹2 ลบออกจากแถวที่¹1) จะมีระบบสมการ

$$(6') \quad \begin{aligned} x+0y-2z &= -7 \\ 0x+y+0z &= 0 \\ 0x+0y+z &= 1 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

โดยเอา2เท่าของสมการที่¹3 บวกกับสมการที่¹1 (และเอา2คูณแถวที่¹3 บวกกับแถวที่¹1)
จะมีระบบสมการ

$$(7') \quad \begin{aligned} x+0y+0z &= -5 \\ 0x+y+0z &= 0 \\ 0x+0y+z &= 1 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

ผลเฉลย $(-5, 0, 1)$ ของสมการ (1) สามารถดูได้จากหลักที่4ของเมตริกซ์ใน (7')
เส้นแนวดิ่งเขียนไว้เพื่อเตือนความจำว่า จำนวนทางซ้ายเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวไม่
รู้ จำนวนในหลักทางขวาของเส้นมาจากเทอมคงตัวของสมการ

การดำเนินการบนเมตริกซ์ของระบบสมการในขั้นตอน (2'), (3'), (4'), (5')
(6') และ (7') เรียกว่า การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (elementary row-
operation)

โดยขั้นตอนทั้งหมดจะประกอบด้วย

- (i) เปลี่ยนแถว 2 แถว
- (ii) คูณแถวด้วยตัวคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์
- (iii) การบวกของผลคูณแถวด้วยตัวคงตัวกับแถวอื่น

ถ้าเมตริกซ์สามารถกำหนดจากเมตริกซ์อื่นได้ โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิง
ธาตุมูล เมตริกซ์ เรียกว่า **เมตริกซ์สมมูลแถว**

เพราะว่าการดำเนินการบนระบบสมการเชิงเส้นให้ระบบสมการที่สมมูลกันเสมอ
(โดย 13.1.1 ทฤษฎีบท) ดังนั้นเราจะมีบทแทรกดังนี้

13.1.2 บทแทรก เมตริกซ์สมมูลแถวจะอยู่ในระบบสมการเชิงเส้นที่สมมูลกัน

สามหลักในเมตริกซ์ของระบบสมการ (1)

$$(8) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -23 \end{array} \right]$$

เรียกว่า **สัมประสิทธิ์เมตริกซ์ (coefficient matrix)** เพราะว่าสัมประสิทธิ์มี 3 แถว
และ 3 หลัก จึงเป็น **เมตริกจัตุรัส (square matrix)**

เส้นทแยงมุมของสมาชิกจากมุมบนซ้ายมือไปมุมล่างขวามือ เรียกว่า **เส้นทแยงมุมหลัก
ค้ำ (principal diagonal)**

เราหาผลเฉลยของระบบสมการ (1) โดยลดทอนเมตริกซ์ (8) ไปเป็นเมตริกซ์

$$(9) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลเท่านั้น

ข้อสังเกต สัมประสิทธิ์เมทริกซ์ใน (9) ตามแนวเส้นทแยงมุมสำคัญเป็น 1 ทั้งหมด และสมาชิกอื่นเป็นศูนย์หมด

ตัวอย่าง 1. โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล จงแก้ระบบสมการ

$$2x - y = -7$$

$$x + 4y = 19$$

เฉลย เมทริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้นคือ

$$(10) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & 19 \end{array} \right]$$

เราจะต้องลดทอนสัมประสิทธิ์เมทริกซ์เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right]$$

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลบนเมทริกซ์ (10)

เอา -2 คูณแถวที่ 2 บวกกับแถวที่ 1

$$(11) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & -45 \end{array} \right]$$

เอา $-\frac{1}{9}$ คูณแถวที่ 2

$$(12) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

เอา $\frac{1}{2}$ คูณแถวที่ 1

$$(13) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

เอา $\frac{1}{2}$ คูณแถวที่ 2 บวกกับแถวที่ 1

$$(14) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ หลักสุดท้ายของเมทริกซ์ใน (14) คือ $(-1, 5)$

เราอาจจะทดสอบคำตอบได้โดยนำ $(-1, 5)$ ไปแทนในระบบสมการที่กำหนดให้ จากตัวอย่างที่กล่าวมาจะเห็นว่าผลเฉลยของระบบสมการมีเพียงผลเฉลยเดียว แต่ระบบสมการเชิงเส้น n สมการมีตัวไม่รู้ n ตัว บางระบบมีผลเฉลยได้จำนวนอนันต์ และบางระบบไม่มีผลเฉลย เราใช้ภาษาทางเรขาคณิตอธิบายความหมายนี้

พิจารณาระบบของ 3 สมการเชิงเส้นมีตัวไม่รู้ 3 ตัว ในปริภูมิคาร์ทีเซียน 3 มิติ กราฟของสมการแต่ละสมการจะเป็นระนาบ ถ้า 3 ระนาบตัดกันที่จุดเดียว ระบบของสมการก็จะมีผลเฉลยเดียว คือพิกัดของจุดร่วม ถ้า 3 ระนาบมีเส้นร่วม ระบบสมการก็จะมีผลเฉลยจำนวนอนันต์ เพราะว่าพิกัดของทุกจุดบนเส้นร่วมนี้จะสอดคล้องสมการ ถ้าเส้นของผลตัดของ 2 ระนาบขนานกับระนาบที่ 3 ระบบสมการจะไม่มีผลเฉลย

เราใช้วิธีการของเมทริกซ์แสดงให้เห็นความจริงดังนี้

ตัวอย่าง 2. จงแก้ระบบสมการ

$$(15) \quad \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 6 \\ -x+4y-z & = & 8 \\ 2x+y-z & = & 5 \end{array}$$

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุ

ผลเฉลย เมตริกซ์ของระบบคือ

$$(16) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

เพื่อความสะดวก เราจะแทนแถวที่ 1 ด้วย R_1 แถวที่ 2 ด้วย R_2 และแถวที่ 3 ด้วย R_3
แทน R_3 ด้วย $(-2)R_1 + R_3$

$$(17) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \end{array} \right]$$

โดยแทน R_2 ใน (17) ด้วย $R_1 + R_2$

$$(18) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \end{array} \right]$$

แทน R_3 ด้วย $R_2 + 2R_3$ และคูณ R_2 ด้วย $\frac{1}{2}$

$$(19) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ดังนั้นระบบสมการ (15) ก็จะสมมูลกับระบบสมการ

$$(20) \quad \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 6 \\ 3y-z & = & 7 \end{array}$$

ถ้าแทน y ด้วยจำนวน t ใดๆ ผลเฉลยของระบบสมการ (20) คือ $(t-1, t, 3t-7)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใดๆ

ดังนั้นพิกัดของทุกจุดบนเส้นซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$(21) \quad x=t-1, \quad y=t, \quad z=3t-7, \quad t \in \mathbb{R}$$

เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (15) #

ตัวอย่าง 3. จงแก้สมการของระบบสมการ

$$(22) \quad \begin{aligned} x+2y-z &= 6 \\ -x+4y-z &= 8 \\ 2x+y-z &= 3 \end{aligned}$$

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุ

ผลเฉลย ข้อสังเกตระบบสมการนี้ต่างจากตัวอย่างที่ 2 เฉพาะเทอมคงตัวของสมการที่ 3 เมตริกซ์ของระบบสมการนี้คือ

$$(23) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

โดยแทน R_3 ด้วย $-2R_1 + R_3$

$$(24) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -9 \end{array} \right]$$

โดยแทนที่ R_2 ใน (24) ด้วย $R_1 + R_2$

$$(25.) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \\ 0 & -3 & 1 & -9 \end{array} \right]$$

โดยแทน R_3 ใน (25) ด้วย $R_2 + 2R_3$

$$(26.) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

แถวที่ 3 ของเมทริกซ์ จะสมมูลกับสมการ $0 = -4$ ซึ่งไม่มี x, y, z ที่สอดคล้องสมการนี้ ดังนั้นระบบนี้ไม่มีผลเฉลย $\#$

ความหมายทางเรขาคณิต จะเห็นว่า 2 ระนาบแรกตัดกันเป็นเส้นตรงใน (21) แต่เส้นตรงนี้ขนานกับระนาบที่ 3 ดังนั้นจึงไม่มีจุดร่วม

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น m สมการและมีตัวไม่รู้ n ตัว ($m \neq n$) เราจะกล่าวในหัวข้อ 13.5

แบบฝึกหัด 13.1

ข้อ 1-ข้อ 2 จงใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลเมทริกซ์ให้อยู่ในแบบ

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right]$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$1. \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

$$2. \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

ข้อ 3-ข้อ 4 เขียนเมทริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้น แล้วใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถว
เชิงธาตุ ลดทอนให้อยู่ในแบบ

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right]$$

$$3. \quad 5x - 4y = -2z$$

$$3x + 7y = 15$$

$$4. \quad 6x + 2y = -22$$

$$5x - 3y = -9$$

5. ใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุ แปลงเมทริกซ์ให้อยู่ในแบบ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right]$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

6. ใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุ ลดทอนเมทริกซ์ของระบบให้อยู่ในแบบ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right]$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

$$7u - v - w = 7$$

$$4u + 3v - 5w = -4$$

$$-2u + 6v - 11w = -19$$

7. ใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุของเมทริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้น

$$x + 2y - z = 6$$

$$-x + 4y - z = 8$$

$$2x + y - z = 4$$

แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย

8. จงพิสูจน์ 13.1.1 ทฤษฎีบทข้อ (iii) โดยแสดงว่า $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

ก็คือเมื่อ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ เป็นผลเฉลยของระบบ

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + c(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) = k_1 + ck_2$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เป็นศูนย์.

13.2 พิสูจน์ของเมทริกซ์

13.2.1 บทนิยาม ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $m \times n$ (m by n) เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จัดเรียงจำนวน a_{ij} m แถว n หลัก ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) จำนวน a_{ij} เรียกว่า **สมาชิกเมตริกซ์** ครรชนนี้ล่างตัวที่ 1 บอกแถวที่สมาชิกปรากฏ และครรชนนี้ล่างตัวที่ 2 บอกหลักที่สมาชิกปรากฏ

ตัวอย่างเช่น a_{34} เป็นสมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 4

$m \times n$ เมตริกซ์ เรียกว่า **เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ($m \times n$)**, จำนวนที่ 1 m เป็นจำนวนแถวในเมตริกซ์ และจำนวนที่ 2 n เป็นจำนวนหลักของเมตริกซ์ เครื่องหมาย x ในสัญลักษณ์ขนาดไม่ได้แปลว่าผลคูณ เพียงแต่เป็นส่วนหนึ่งของสัญลักษณ์ที่คุ้นแล้วเข้าใจง่าย เพื่อความสะดวกบางครั้งเราจะเขียนแทน $m \times n$ เมตริกซ์ด้วย $[a_{ij}]_{mn}$

13.2.2 บทนิยาม เราจะกล่าวว่า 2 $m \times n$ เมตริกซ์ $A=[a_{ij}]_{mn}$ และ $B=[b_{ij}]_{mn}$ เท่ากันก็ต่อเมื่อ

$$a_{ij} = b_{ij}$$

สำหรับทุก $i=1,2,\dots,m$ และ $j=1,2,\dots,n$

ดังนั้น 2 เมตริกซ์เท่ากันก็ต่อเมื่อ

(i) มีขนาดเหมือนกัน

(ii) สมาชิกที่สมนัยกันเท่ากันทั้งหมด

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 0(1) & -3+1 \\ \frac{6}{3} & 3 & \frac{8}{2} \end{bmatrix}$$

แต่
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 7 & -8 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 8 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

13.2.3 บทนิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{mn}$ และ $B=[b_{ij}]_{mn}$ ผลบวกของ $m \times n$ เมตริกซ์ คือ

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{mn}$$

นั่นคือ ถ้า 2 เมตริกซ์มีขนาดเดียวกัน เราบวกเมตริกซ์โดยบวกสมาชิกที่สมกัน
ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$A+B = \begin{bmatrix} 3+(-4) & (-5)+1 \\ 2+3 & (-4)+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

การบวกเมตริกซ์เรานิยามเฉพาะเมตริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน

13.2.4 ทฤษฎีบท การบวกเมตริกซ์มีคุณสมบัติการสลับที่ และคุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์มีขนาดเดียวกัน แล้ว

$$A+B=B+A \quad \text{และ} \quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

พิสูจน์ การสลับที่

ถ้า $A=[a_{ij}]_{mn}$ และ $B=[b_{ij}]_{mn}$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ แล้ว

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{mn} = [b_{ij}+a_{ij}]_{mn} = B+A$$

เพราะว่าสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง และการบวกของจำนวนจริงมีคุณสมบัติการสลับที่

สำหรับการเปลี่ยนกลุ่มจะเว้นไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด

#

13.2.5 บทนิยาม ผลคูณของจำนวนจริง k และ $m \times n$ เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{mn}$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์

$$kA = [ka_{ij}]_{mn}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} 3 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3(-2) & 3(1) & 3(0) \\ 3(3) & 3(4) & 3(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ถ้าสมาชิกทั้งหมดของเมตริกซ์เป็นศูนย์ เรียกว่า **เมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix)** เขียนแทนด้วย 0

13.2.7 บทนิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{mn}$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ ผลคูณ AB เป็น $m \times p$ เมตริกซ์ $C = [c_{ik}]_{mp}$ ที่ซึ่ง

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

ตัวอย่าง 1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} 1(2)+2(-1) & 1(1)+2(0) & 1(3)+2(1) & 1(-1)+2(2) \\ -1(2)+3(-1) & -1(1)+3(0) & -1(3)+3(1) & -1(-1)+3(2) \\ 3(2)+(-2)(-1) & 3(1)+(-2)(0) & 3(3)+(-2)(1) & 3(-1)+(-2)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

13.2.8 ทฤษฎีบท (กฎการเปลี่ยนกลุ่มและกฎการแจกแจงสำหรับการคูณเมตริกซ์)

(i) ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n, n \times p$ และ $p \times q$ ตามลำดับ แล้ว

$$(AB)C = A(BC)$$

(ii) ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ B และ C เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ และ ถ้า D เป็น $p \times q$ เมตริกซ์ แล้ว

$$A(B+C) = AB+AC$$

และ $(B+C)D = BD+CD$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทให้เป็นแบบฝึกหัด

ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ B เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ ผลคูณ AB มีความหมายตาม
 1 3.2.7 บทนิยาม แต่ BA ไม่มีความหมายนอกจาก $p=m$

ผลคูณ AB และ BA จะมีความหมายทั้งคู่ก็ต่อเมื่อ A มีขนาด $m \times n$ และ B มีขนาด
 $n \times m$ แล้วผลคูณ AB จะเป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times m$ BA จะเป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$

เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเหมือนกับจำนวนหลัก เรียกว่า เมตริกซ์จัตุรัส (square matrix)

ตัวอย่างต่อไปจะแสดงว่ากฎการสลับที่ไม่จริง สำหรับการคูณเมตริกซ์

ตัวอย่าง 3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} 1(1) + (-2)(-2) & 1(3) + (-2)(-1) \\ 2(1) + 3(-2) & 2(3) + 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } BA = \begin{bmatrix} 1(1) + 3(2) & 1(-2) + 3(3) \\ (-2)(1) + (-1)(2) & (-2)(-2) + (-1)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $BA \neq AB$

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการมีตัวไม่รู้ 3 ตัว

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

เราสามารถเขียน

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

หรือ $AX=K$

เมื่อ A เป็น 2×3 สัมประสิทธิ์เมทริกซ์ X เป็น 3×1 เมทริกซ์ของตัวไม่รู้ และ K เป็น 2×1 เมทริกซ์ของเทอมคงตัว

ระบบ 3 สมการตัวไม่รู้ 2 ตัว

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = k_3$$

เราสามารถเขียนได้ดังนี้

$$AX=K$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

ระบบ n สมการเชิงเส้นตัวไม่รู้ n ตัว

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = k_n$$

สามารถเขียนได้ดังนี้

$$AX=K$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

สัมประสิทธิ์เมทริกซ์ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$

แบบฝึกหัด 13.2

ข้อ 1-ข้อ 3 จงหา $A+B$ เมื่อมี ถ้าไม่มีจงอธิบายว่าทำไม?

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

ข้อ 4-ข้อ 5 จงหา AB ถ้ามี ถ้าไม่มีจงอธิบายว่าทำไม?

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

6. ถ้า A และ B นิยามเหมือนแบบฝึกหัดข้อ 4 จงหา BA , $AB=BA$ หรือไม่?
7. เมตริกซ์จัตุรัส $[a_{ij}]_{nn}$ ที่ซึ่ง $a_{ij}=1$ ถ้า $i=j$ และ $a_{ij}=0$ ถ้า $i \neq j$ เรียกว่า $n \times n$ เมตริกซ์เอกลักษณ์สำหรับการคูณ เขียนแทนด้วย I_n จงพิสูจน์ว่า
ถ้า $B=[b_{ij}]_{nn}$ เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ แล้ว $BI=IB=B$

ข้อ 8-ข้อ 9 จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในแบบ

$AX=K$ เมื่อ A เป็นสัมประสิทธิ์เมตริกซ์ของระบบ

X เป็นเมตริกซ์ของตัวไม่รู้

K เป็นเมตริกซ์ของเทอมคงตัว

แล้วทดสอบคำตอบโดยการคูณเมตริกซ์

8. $5x-2y = -2$

$3x+4y = 12$

9. $4r-2s+3t = 10$

$-7r+4s+3t = 5$

$3r-2s-t = 9$

10. จงพิสูจน์การบวกเมตริกซ์มีคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

11. จงพิสูจน์ 13.2.8 ทฤษฎีบทข้อ (i).

13.3 ตัวกำหนด (Determinant)

ถ้า A คือเมตริกซ์จัตุรัส

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เราจะเขียนแทนตัวกำหนดของ A ด้วย $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

เป็นสัญลักษณ์แทนการจัดเรียงจำนวนเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและใช้เส้นแนวดิ่งปิดล้อม

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์อันดับ n และ $\det A$ เรียกว่า **ตัวกำหนดอันดับ n** ดังนั้น ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

แล้ว A เป็นเมทริกซ์อันดับ 3 และ

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

เป็นดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 3

เมทริกย่อย (submatrix) ของเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการตัดบางแถวหรือบางหลัก หรือทั้งหลักทั้งแถว

ตัวอย่างเช่น ถ้าเราตัดแถวที่ 2 และแถวที่ 4 และหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ขนาด 4×6 เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 3 & 4 & -5 \\ -3 & 2 & 4 & 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -5 & 1 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

ก็จะได้เมทริกซ์ย่อยขนาด 2×5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

ในเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ $n(1)$ คือเทอร์มินัลของเมทริกซ์จัตุรัสย่อยอันดับ $n-1$ ที่ได้จากการตัดแถวและหลัก ที่ซึ่งมีสมาชิก a_{ij} เรียกว่า **ส่วนน้อย(minor)** ของ a_{ij} และเขียนแทนด้วย M_{ij} โคแฟกเตอร์(cofactor)ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย A_{ij} นิยามโดย

$$(2) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ตัวอย่าง 1. เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

2 มีอยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 1 เมทริกซ์ย่อยอันดับ 2 ที่ได้จากการตัดแถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ส่วนน้อยของ 2 ใน A คือ

$$M_{21} = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

และโคแฟกเตอร์ของ 2 คือ

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

เรานิยามให้ตัวกำหนดคือจำนวนดังนี้

13.3.1 นิยาม ให้ A เป็นเมตริกซ์อันดับ n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้า $n=1$ แล้ว $A=[a_{11}]$ และ $\det A$ นิยามให้คือ จำนวน a_{11}

ถ้า $n=2$ แล้ว $\det A$ เป็นจำนวนที่นิยามโดย

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ถ้า $n>2$ แล้ว $\det A$ เป็นจำนวนที่นิยามโดย

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

เมื่อ A_{1j} เป็นโคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{1j} ในแถวที่ 1 และหลักที่ j ของ A ($j=1, 2, \cdots, n$)

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

เฉลย จาก 13.3.1 ทฤษฎีบท

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-2)A_{11} + 2A_{12} + 4A_{13}$$

เพราะว่า

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 [3(0) - (-4)(3)] = 12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 [3(0) - 4(3)] = 12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^4 [3(-4) - 4(3)] = -24$$

ดังนั้น $\det A = (-2)(12) + 2(12) + 4(-24) = -24$ #

ตัวอย่าง 3. จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์อันดับ 4

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย โดย 13.3.1 บทนิยาม ตัวกำหนดคือ

$$(3) \quad 3A_{11} + 1A_{12} + 4A_{13} + 2A_{14}$$

เพราะว่า

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

และ

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3[(-1)(-2) - 0(4)] + 0 - 1[0(0) - 0(-1)] = -6$$

ดังนั้น $A_{11} = -6$

เพราะว่า $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

และ

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4[(-1)(-2) - 4(0)] + 0 - 1[1(0) - 0(-1)] = -8$$

ดังนั้น $A_{12} = 8$

เพราะว่า

$$A_{13} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

และ

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4[0(0) - 0(-1)] + 3[1(-2) + 0(-1)] + 0 = -6$$

ดังนั้น $A_{13} = -6$

เพราะว่า

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

และ

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4[0(0) - 0(-1)] + 3[1(0) - 0(-1)] + 0 = 0$$

ดังนั้น $A_{14} = 0$

นำ A_{11}, A_{12}, A_{13} และ A_{14} ไปแทนใน (3) จะได้ค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์อันดับ 4 ที่กำหนดให้คือ

$$3(-6) + 1(8) + 4(-6) + 2(0) = -34$$

ใน 13.3.1 บทนิยาม ค่าตัวกำหนดของ $n \times n$ เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{nn}$ เรานิยามโดยสมการ

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

จำนวนทางขวามือของสมการเรียกว่า **การขยายของตัวกำหนดขึ้นอยู่กัสมาชิกแถวที่ 1**

เราสามารถเขียนค่า $\det A$ ให้อยู่ในรูปแบบการขยายขึ้นอยู่กัสมาชิกแถวใดๆ หรือหลักใดๆก็ได้ ซึ่งเขียนเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

13.3.2 ทฤษฎีบท ถ้า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ $[a_{ij}]_{nn}$ แล้ว

$$(1) \quad \det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

เมื่อ i เป็นจำนวนคงตัวในเซต $1, 2, \dots, n$

$$(ii) \quad \det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

เมื่อ j เป็นจำนวนคงตัวในเซต $1, 2, \dots, n$

สำหรับการพิสูจน์ กรณี $n=2$ และ $n=3$ การพิสูจน์ไม่ยาก แต่กรณีทั่วไป n ต้องใช้พื้นที่การเขียนมากจึงเว้นไว้ไม่มีพิสูจน์ สำหรับผู้สนใจสามารถหาอ่านได้จากบรรณานุกรม

ตัวอย่าง 4. ให้ A เป็นเมตริกซ์อันดับ 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

จงพิสูจน์ว่าการขยายของ $\det A$ ขึ้นอยู่กับสมาชิกแถวที่ 2 ให้ค่าของ $\det A$

พิสูจน์ โดย 13.3.1 บทนิยามค่าของ $\det A$ คือ

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

ส่วนขยายของ $\det A$ ขึ้นอยู่กับสมาชิกแถวที่ 2 คือ

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{21}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

ซึ่งมีค่าเหมือนกับ $\det A$

#

ข้อสังเกต การขยายตัวกำหนดขึ้นอยู่กับสมาชิกของแถวหรือหลัก เราใช้ $(-1)^{i+j}$ ใน (2) คำนวณหาเครื่องหมายส่วนน้อยในเทอมที่ 1 ของการขยายเพียงเทอมเดียวเท่านั้น สำหรับเทอมอื่นเครื่องหมายจะเป็นบวกลบสลับกันไป

ตัวอย่างเช่น ขยาย $\det A[a_{ij}]_{44}$ ขึ้นอยู่กับสมาชิกหลักที่ 2

เราจะหา $a_{12}A_{12}$

$$a_{12}A_{12} = a_{12}(-1)^{2+1}M_{12} = -a_{12}M_{12}$$

$$\text{ดังนั้น } \det[a_{ij}]_{44} = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} + a_{42}M_{42}$$

13.3.3 บทนิยาม การสลับเปลี่ยน (transpose) ของ $m \times n$ เมตริกซ์ A คือ $n \times m$

เมตริกซ์ A^T เกิดจากการเปลี่ยนแถวและหลักของ A แถวที่ i ของ A เป็นหลักที่ i ของ A^T

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

13.3.4 ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว $\det A = \det A^T$

พิสูจน์ พิสูจน์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

เมื่อ $n=1$, $A=[a_{11}]=A^T$

$$\det A = a_{11} = \det A^T$$

เมื่อ $n=2$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \det A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \det A^T$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริงเมื่อ $n=1$ และ $n=2$

สมมติทฤษฎีบทจริงเมื่อ $n=k-1$

ให้ $A=[a_{ij}]_{kk}$ และ $B=[b_{ij}]_{kk}=A^T$

โดย 13.3.2 ทฤษฎีบทข้อ(ii)

$$\det B = b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + \dots + b_{k1}B_{k1}$$

และเพราะว่า $b_{i1} = a_{1i}$ และ $B_{i1} = A_{i1}^T$, $i=1, 2, \dots, k$

$$\det B = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{21}^T + \dots + a_{1k}A_{k1}^T$$

เพราะว่า A_{i1}^T และ A_{1i} เป็นตัวกำหนดของเมตริกซ์อันดับ $k-1$ ซึ่งเป็นการสลับเปลี่ยนของแต่ละอัน และเราสมมติว่าทฤษฎีบทจริงเมื่อ $n=k-1$ ดังนั้น

$$A_{i1}^T = A_{1i}, \quad i=1, 2, \dots, k$$

และ

$$\det A^T = \det B = a_{11}A_{11} + \dots + a_{1k}A_{1k} = \det A \quad \#$$

โดยการอุปนัยคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่าทฤษฎีบทจริงเมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ #

แบบฝึกหัด 13.3

1. จงหาค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่า $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

หลังจากขยายให้ขึ้นอยู่กับสมาชิกแถวที่ 1

3. จงขยาย

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

ให้ขึ้นอยู่กับหลักที่ 3 และหาค่า

4. จงขยายตัวกำหนดให้ขึ้นอยู่กับหลักที่ 1 และหาค่า

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. จงเขียนการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

และหาค่า $\det A$ และ $\det A^T$

6. เมตริกซ์จัตุรัส $A=[a_{ij}]_{nn}$ เรียกว่า **สมมาตร (symmetric)** ถ้า $a_{ij}=a_{ji}$ สำหรับทุก $i=1,2,\dots,n$ และ $j=1,2,\dots,n$ จงพิสูจน์ว่า เมตริกซ์สมมาตรเท่ากับการสลับเปลี่ยน

7. ในปริภูมิคาร์ทีเซียน 2 มิติ จงแสดงว่าสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $P_1:(x_1, y_1)$ และ $P_2:(x_2, y_2)$ สามารถเขียนอยู่ในแบบดีเทอร์มิแนนต์

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. จงพิสูจน์ว่า 3 จุด $P_1:(x_1, y_1)$, $P_2:(x_2, y_2)$ และ $P_3:(x_3, y_3)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13.4 คุณสมบัติตัวกำหนด

เราสามารถหาตัวกำหนดอันดับ 20 ได้โดยการกระทำซ้ำแบบเดียวกับตัวอย่าง 2, 3 และ 4 ซึ่งอาจจะเสียเวลามาก เราจะพิสูจน์คุณสมบัติของตัวกำหนด เพื่อช่วยในการหา

ตัวกำหนดอันดับ n

13.4.1 คุณสมบัติของตัวกำหนด

- (i) แถวและหลักของเมตริกซ์จัตุรัสสลับกัน ค่าของตัวกำหนดไม่เปลี่ยน นั่นคือ ถ้า a_{ij} และ a_{ji} สลับที่กัน ค่าของตัวกำหนดไม่เปลี่ยน
- (ii) สมาชิกของสองแถว (หรือสองหลัก) สลับกัน ค่าของตัวกำหนดจะคูณด้วย -1
- (iii) ถ้าสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของเมตริกซ์จัตุรัสเป็นศูนย์หมด ค่าของตัวกำหนดเป็นศูนย์
- (iv) ถ้าสมาชิกที่สมมาตรกันของสองแถว (หรือสองหลัก) เป็นสัดส่วนกัน ค่าของตัวกำหนดเป็นศูนย์
- (v) ผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถว (หรือในหลัก) ของเมตริกซ์จัตุรัส กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกที่สมมาตรกันของแถว (หรือหลัก) ที่ต่างกันเท่ากับศูนย์
- (vi) ถ้าสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งของเมตริกซ์จัตุรัสถูกคูณด้วยจำนวน k ทั้งหมด ค่าของตัวกำหนดของเมตริกซ์จะถูกคูณด้วย k
- (vii) ถ้ามีแถว (หรือหลัก) ของเมตริกซ์จัตุรัสเกิดจากผลบวกของผลคูณแถวหนึ่งด้วย $k \neq 0$ กับอีกแถวค่าของตัวกำหนดไม่เปลี่ยน

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์เฉพาะกรณีแถว สำหรับกรณีหลักก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน

- (i) คือ 13.3.4 ทฤษฎีบท
 - (ii) จะพิสูจน์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์
- เพราะว่า

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

ทฤษฎีบทจริงเมื่อ $n = 2$

สมมติทฤษฎีบทจริงสำหรับ $n=k-1$

ให้ $A=[a_{ij}]_{kk}$ และ B แทนเมตริกซ์โดยการเปลี่ยนแถวของ A ถ้าเราขยาย B ให้ขึ้นอยู่กัแถวที่ i เมื่อแถวที่ i ไม่ใช่แถวที่เปลี่ยน เราจะมี

$$\det B = b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \dots + b_{ik}B_{ik}$$

เพราะฉะนั้น $b_{ij}=a_{ij}$ และ B_{ij} จะเหมือนกับ A_{ij} ยกเว้นแถวของ A_{ij} ที่เปลี่ยนไปเป็น B_{ij}

สมมติ $n=k-1$, $B_{ij}=-A_{ij}$, $j=1,2,\dots,k-1$ ดังนั้น

$$\det B = -a_{i1}A_{i1} - a_{i2}A_{i2} - \dots - a_{ik}A_{ik} = -\det A$$

เพราะฉะนั้นถ้าทฤษฎีบทเป็นจริงเมื่อ $n=k-1$ แล้วจะจริงเมื่อ $n=k$

โดยการอุปนัยคณิตศาสตร์เราสรุปได้ว่าทฤษฎีบทจริงเมื่อ $n \geq 2$

(iii) เพราะว่าทุกเทอมในการขยายตัวกำหนดขึ้นอยู่กับสมาชิกของแถวซึ่งเป็นศูนย์หมดเมื่อเป็นตัวประกอบ

(iv) ถ้า 2 แถวของเมตริกซ์จัตุรัส A เป็นส่วนกลับกันแล้ว กรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้จริง
กรณี 1. มีแถวใดแถวหนึ่งที่มีสมาชิกศูนย์หมด

ดังนั้น โดย (iii) $\det A = 0$

กรณี 2. ผลคูณของแถวหนึ่งของ A ด้วยส่วนประกอบของสัสด่วน k ทำให้ 2 แถวนี้เหมือนกัน เราแทนเมตริกซ์ที่ 2 แถวเหมือนกันด้วย B

เมื่อเราสลับแถวที่เหมือนกันของเมตริกซ์ B เมตริกซ์ก็เหมือนเดิม แต่โดย (ii)

$$\det B = -\det B$$

ดังนั้น $\det B = 0$ แต่ $\det B = k \det A$, $k \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\det A = 0$

(v) ให้ $A=[a_{ij}]_{nn}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสอันดับ $n > 1$ และให้ p และ q เป็น

จำนวนเต็มที่แตกต่างกันในเซต $1, 2, \dots, n$ เราจะพิสูจน์ว่าค่าของผลบวก

$$a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \dots + a_{pn}A_{qn}$$

เป็นศูนย์

ให้ B เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนแถวที่ q ของ A ด้วยแถว $a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pn}$ เพราะว่าแถวที่ p และแถวที่ q ของ B เหมือนกัน ดังนั้น $\det B = 0$ (โดย(iv))

โดยขยาย $\det B$ ให้ขึ้นอยู่กับสมาชิกของแถวที่ q เราจะมี

$$\det B = a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \dots + a_{pn}A_{qn} = 0$$

(vi) ขยายตัวกำหนดเมตริกซ์ให้ขึ้นอยู่กับสมาชิกแถวที่ถูกคูณด้วย k ดังนั้นทุกเทอมของการขยายจะมี k เป็นตัวประกอบ

(vii) ให้ B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากบวก ka_{pj} กับ a_{qj} ในเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{nn}$ เมื่อ $k \neq 0$ และ p, q เป็นจำนวนคู่หนึ่งที่คงตัวและต่างจากเซต $1, 2, \dots, n$ และ $j = 1, 2, \dots, n$

โดยขยาย $\det B$ ให้ขึ้นอยู่กับสมาชิกแถวที่ q เราจะมี

$$\det B = (ka_{p1} + a_{q1})A_{q1} + \dots + (ka_{pn} + a_{qn})A_{qn}$$

$$= k(a_{p1}A_{q1} + \dots + a_{pn}A_{qn}) + (a_{q1}A_{q1} + \dots + a_{qn}A_{qn}) = \det A$$

เพราะว่า $a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \dots + a_{pn}A_{qn} = 0$ (โดย(v)) #

ตัวอย่าง 1. จงใช้ 13.4.1คุณสมบัติ หาค่า $\det A$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

เฉลย เพราะว่าแถวที่ 1 หลักที่ 2 เป็น 0 ถ้าทำให้แถวที่ 1 หลักที่ 3 เป็นศูนย์ ก็จะทำให้การหาค่า $\det A$ ง่าย

นำ -2 คูณหลักที่ 1 บวกหลักที่ 3

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & -18 \end{vmatrix}$$

ขยายตัวกำหนดขึ้นอยู่กับแถวที่ 1

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -3 & -18 \end{vmatrix} = 108 \neq 0$$

ตัวกำหนดมีการนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง และที่เรานำมาประยุกต์ใช้เป็นประจำคือ กฎของแครมเมอร์สำหรับแก้ระบบสมการเชิงเส้น n สมการมีตัวไม่รู้ n ตัว

13.4.2 กฎของแครมเมอร์ (Cramer's rule)

ให้ $A = [a_{ij}]_{nn}$ เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ และแทน $A_{(j)}$ เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ที่เกิดจากแทนสมาชิก a_{ij} ของหลักที่ j ของ A ด้วยจำนวน $k_i, i=1, 2, \dots, n$ ถ้า $\det A \neq 0$

ระบบสมการเชิงเส้น n สมการมีตัวไม่รู้ n ตัว

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = k_n$$

มีผลเฉลยเดียวคือ

$$x_1 = \frac{\det A_{(1)}}{\det A},$$

$$x_2 = \frac{\det A_{(2)}}{\det A}$$

$$x_n = \frac{\det A_{(n)}}{\det A}$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์กรณี $n=3$ สำหรับกรณีทั่วไป ก็พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน
ถ้า (y_1, y_2, y_3) เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = k_1 \\ & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = k_2 \\ & a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = k_3 \end{aligned}$$

ถ้าเราคูณสมการที่ 1 ด้วย A_{11} ทั้งสองข้าง คูณสมการที่ 2 ด้วย A_{21} ทั้งสองข้าง
คูณสมการที่ 3 ด้วย A_{31} ทั้งสองข้าง แล้วนำมาบวกกัน

$$\begin{aligned} & (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})y_1 \\ & + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y_2 \\ & + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})y_3 = k_1A_{11} + k_2A_{21} + k_3A_{31} \end{aligned}$$

โดย 13.4.1 (v) สัมประสิทธิ์ของ y_2 และ y_3 เป็นศูนย์
ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$(2) \quad (\det A)y_1 = \det A_{(1)}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ โดยกระทำจาก(1)

$$(3) \quad \begin{aligned} (\det A)y_2 &= \det A_{(2)} \\ (\det A)y_3 &= \det A_{(3)} \end{aligned}$$

จาก(2)และ(3) เพราะว่า $\det A \neq 0$

$$(4) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{\det A_{(1)}}{\det A} \\ y_2 &= \frac{\det A_{(2)}}{\det A} \\ y_3 &= \frac{\det A_{(3)}}{\det A} \end{aligned}$$

ซึ่งเราได้พิสูจน์แล้วว่า ถ้า (y_1, y_2, y_3) เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้ แล้วค่าของ y_1, y_2 และ y_3 จะมีเพียงค่าเดียวใน(4)

การพิสูจน์กฎแครมเมอร์ สำหรับ $n=3$ จะสมบูรณ์ ถ้าเราแสดงได้ว่า(4)เป็นผลเฉลยของระบบสมการที่กำหนดให้ นั่นคือจะต้องพิสูจน์ว่า ถ้า (4) แล้วได้ (1) ซึ่งเราสามารถเขียนพิสูจน์ได้โดยใช้ขั้นตอนกลับจากที่เขียนมา #

ตัวอย่าง 3. จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 4x+3y-6z &= 10 \\ -x+2y-5z &= 6 \\ 7x-y+z &= 8 \end{aligned}$$

โดยใช้กฎของแครมเมอร์

ผลเฉลย $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -36$

โดยกฎของแครมเมอร์

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 & -6 \\ 8 & 2 & -5 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-36} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 & -6 \\ -1 & 6 & -5 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{-36} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 \\ -1 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{-36} = -3$$

#

ตรวจสอบผลเฉลยโดยนำไปแทนในระบบสมการ

แบบฝึกหัด 13.4

ข้อ 1-ข้อ 2 หาคำกำหนดของเมทริกซ์โดยใช้ 13.3.1 บทนิยาม ลดทอน A เป็นเมทริกซ์มีแถวหนึ่ง (หรือหลัก) มีศูนย์ 2 ตัว และขยายคำกำหนดให้ขึ้นอยู่กับสมาชิกของแถว (หรือหลัก) นี้

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ข้อ3-ข้อ4 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของแครมเมอร์

$$\begin{aligned} 3. \quad x + 3y - 2z &= 11 \\ 4x - 2y + z &= -15 \\ 3x + 4y - z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad -2x + y + 3z &= 9 \\ 4x - 5z &= -13 \\ 7x - 3y - z &= -21 \end{aligned}$$

5. ทำไมกฎของแครมเมอร์จึงไม่สามารถประยุกต์ใช้กับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 11x + 5y - 5z &= -8 \\ 2x + y - z &= -2 \\ 7x + 3y - 3z &= -4 \end{aligned}$$

ให้แก้สมการโดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลบนเมตริกซ์ของระบบสมการ

6. โดยไม่ต้องขยายตัวกำหนด จงพิสูจน์

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

เป็นสมการคาร์ทีเซียนของระนาบผ่าน จุด $P_1:(x_1, y_1, z_1)$, $P_2:(x_2, y_2, z_2)$ และ $P_3:(x_3, y_3, z_3)$ [และ: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ และ A_{15} เป็นตัวคงตัว เนื่องจากสมการเป็นสมการเชิงเส้นใน x, y และ z เพราะฉะนั้นกราฟในระนาบคาร์ทีเซียนเป็นระนาบ นอกจากนั้นแต่ละจุด (x_i, y_i, z_i) , $i=1, 2, 3$ สอดคล้องสมการ เพราะว่าเมื่อแทนค่าในตัวกำหนดจะมีแถวเหมือนกัน เพราะฉะนั้นเท่ากับศูนย์ ดังนั้นระนาบบรรจุจุด P_1, P_2 และ P_3].

13.5 คำลำดับชั้น (Rank)

ระบบเชิงเส้นทั่วไป

13.5.1 บทนิยาม จะกล่าวว่าเมตริกซ์จัตุรัสเป็นเมตริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน (non singular matrix) ถ้าตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์ นอกจากนี้เรียกว่า เอกฐาน (singular)

ตัวอย่างเช่น เมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน เพราะว่า $\det A = 22 \neq 0$

และเมตริกซ์จัตุรัส

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์เอกฐาน เพราะว่า $\det B = 0$

เมตริกซ์จัตุรัสซึ่งสมาชิกทั้งหมดตามแนวเส้นทแยงมุมหลักไม่เป็นศูนย์ และทุกสมาชิกที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ เรียกว่า เมตริกซ์สามเหลี่ยม (triangular matrix)

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม

ข้อสังเกต $-4(5)=-20$, $5(-6)(2)=-60$, $1(1)(1)=1$ เป็นค่าของตัวกำหนดตามลำดับ และเป็นผลคูณของสมาชิกตามแนวเส้นทแยงมุม

13.5.2 ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม $\det A$ จะเท่ากับผลคูณของสมาชิกตามแนวเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ ให้ $A=[a_{ij}]_{nn}$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม โดยขยาย $\det A$ ขึ้นอยู่กับสมาชิกหลักที่ 1

$$\det A = a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

อีกครั้ง เพราะว่า M_{11} เป็นตัวกำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยมอันดับ $n-1$ เราสามารถขยายให้ขึ้นอยู่กับสมาชิกของหลักที่ 1

$$\det A = a_{11}M_{11} = a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

โดยวิธีการนี้อย่างต่อเนื่อง $n-3$ ครั้ง $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$ #

13.5.3 บทแทรก เมตริกซ์สามเหลี่ยมเป็นเมตริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน

ความคิดเกี่ยวกับค่าลำดับชั้น จะตอบปัญหาเกี่ยวกับการมีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น m สมการตัวไม่รู้ n ตัว เมื่อ m ต่างจาก n

13.5.4 บทนิยาม ค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์ A เป็นจำนวนเต็ม r ใหญ่สุดซึ่งเมตริกซ์ย่อยซึ่งไม่ใช่เอกฐานขนาด $r \times r$ มี

เพราะฉะนั้น ค่าลำดับชั้นของ 2×4 เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เป็น 2 เพราะว่า

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -26 \neq 0$$

และค่าลำดับชั้นของ 2×3 เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

คือ 1 เพราะว่า

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

จะเห็นได้ว่าค่าลำดับชั้นของ $m \times n$ เมตริกซ์ไม่ใหญ่กว่าจำนวนเต็มทีน้อยที่สุดระหว่าง 2 จำนวน m และ n

ถ้า m และ n ใหญ่มากการหาค่าลำดับชั้นโดย 13.5.4 บทนิยามจะยุ่งยากเพราะเรา
ต้องหาคำกำหนดของเมตริกซ์ย่อยจัตุรัส

เรามีทฤษฎีบทช่วยในการหาค่าลำดับชั้นดังนี้

13.5.5 ทฤษฎีบท ถ้า $m \times n$ เมตริกซ์เกิดจากอีกเมตริกซ์ โดยการดำเนินการแถวเชิง
ธาตุมูล ค่าลำดับชั้นของ 2 เมตริกซ์จะเท่ากัน

ทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจาก 13.4.1(ii), (vi) และ (vii) การพิสูจน์ให้เป็น
แบบฝึกหัด

13.5.6 บทนิยาม $m \times n$ เมตริกซ์ เรียกว่า **แบบลดรูปเป็นขั้น (echelon form)** ถ้า

(i) สำหรับแต่ละแถวของ r แถวแรกมีสมาชิกไม่เป็นศูนย์ และสมาชิกใน $n-r$

แถว เป็นศูนย์หมด

(ii) สำหรับแต่ละแถวใน r แถวแรก สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์จะเท่ากับ 1

(iii) สำหรับแต่ละแถวใน r แถวแรก จำนวน 0 ที่นำ 1 ตัวแรกจะน้อยกว่า
จำนวน 0 ในแถวที่ติดตามมา

ตัวอย่าง 1. เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -20 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เป็นแบบลดรูปเป็นขั้น

ค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์ที่ 1 เท่ากับ 3

ค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์ที่ 3 เท่ากับ 1
เมตริกซ์ที่ไม่เป็นแบบลำดับชั้นลดรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ที่ 1 ชัดแย้งข้อ(i) ของ 13.5.6 บทนิยาม

เมตริกซ์ที่ 2 ชัดแย้งข้อ(ii) ของ 13.5.6 บทนิยาม

เมตริกซ์ที่ 3 ชัดแย้งข้อ(iii) ของ 13.5.6 บทนิยาม

13.5.7 ทฤษฎีบท ค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์แบบลดรูปเป็นชั้น คือจำนวน r ของแถวซึ่งบรรจุมารวมกันไม่เป็นศูนย์

พิสูจน์ ทุกเมตริกซ์ย่อยจัตุรัสอันดับมากกว่า r จะบรรจุอย่างน้อย 1 แถวซึ่งเป็นศูนย์หมด ดังนั้นจึงเป็นเมตริกซ์เอกฐาน เป็นไปได้เสมอที่เราจะตัด $n-r$ หลักจาก r แถวแรก เพื่อให้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์ย่อยแบบสามเหลี่ยม และโดย 13.5.3 บทแทรกเป็นเมตริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน *

จาก 13.5.6 บทนิยาม $m \times n$ เมตริกซ์แบบลดรูปเป็นชั้น r จะเป็นจำนวนมากที่สุดที่ r แถวแรกของเมตริกซ์เป็นแบบเมตริกซ์ย่อยสามเหลี่ยม และดังนั้น r จะไม่ใหญ่กว่า n ซึ่งเป็นจำนวนของหลัก

13.5.8 บทแทรก ถ้า r เป็นค่าลำดับชั้นของ $m \times n$ เมตริกซ์แบบลดรูปเป็นชั้น แล้ว $r \leq n$

13.5.9 ทฤษฎีบท เมตริกซ์ซึ่งไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์ สามารถลดทอนเป็นแบบลดรูปเป็นชั้น

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลอย่างต่อเนื่อง

การพิสูจน์ไม่ยาก แต่ต้องใช้พื้นที่ในการเขียนมาก เราจึงเว้นไว้ไม่พิสูจน์แต่จะแสดงตัวอย่างให้เห็นอย่างชัดเจนดังนี้

ตัวอย่าง 2. โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลอย่างต่อเนื่อง จงแปลงเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 4 & -12 & -4 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

เป็นแบบลดรูปเป็นขั้นและหาค่าลำดับชั้น

เฉลย เราแทนแถวของเมตริกซ์ด้วย R_1, R_2 และ R_3

โดย $\frac{1}{2}R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 4 & -12 & -4 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

โดย $(-4R_1) + R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

โดยสลับแถว R_2 กับ R_3

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดย $3R_1 + R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

สมมูลกับเมทริกซ์ที่กำหนดให้ โดย 13.5.7 ทฤษฎีบท ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ลดรูปเป็นชั้นเท่ากับ 1 และเพราะฉะนั้นโดย 13.5.5 ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ที่กำหนดให้คือ 1 #

ในกฎของแครมเมอร์ (13.4.2) ระบบสมการเชิงเส้น n สมการตัวไม่รู้ n ตัว มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน (non-singular matrix) จะมีผลเฉลยเดียว

ต่อไปเราจะนำไปสู่ระบบทั่วไปของสมการ m สมการตัวไม่รู้ n ตัว เมื่อ m ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ n และหาบรรทัดฐานสำหรับการมีผลเฉลยของระบบ

พิจารณาระบบของสมการเชิง m สมการ

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2 \\ & \text{-----} \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = k_m \end{aligned}$$

เมทริกซ์

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เรียกว่า **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** ของระบบสมการเชิงเส้น (1) และเมทริกซ์

$$(3) \quad B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_n \end{array} \right]$$

เรียกว่า **เมทริกซ์แต่งเติมแล้ว (augmented matrix)** ของระบบ

13.5.10 ทฤษฎีบท ระบบสมการเชิงเส้น m สมการตัวไม่รู้ n ตัว มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ ค่าลำดับชั้นของสัมประสิทธิ์เท่ากับค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์แต่งเติมแล้ว

นอกจากนี้ ถ้าสัมประสิทธิ์เมทริกซ์และเมทริกซ์แต่งเติมแล้วมีค่าลำดับชั้น r

(i) ถ้า $r = n$ ระบบสมการเชิงเส้นจะมีผลเฉลยเดียว

(ii) ถ้า $r < n$ ระบบสมการเชิงเส้นมีผลเฉลยจำนวนอนันต์

พิสูจน์ ให้ระบบสมการแบบ (1) สัมประสิทธิ์เมทริกซ์ A และเมทริกซ์แต่งเติมแล้ว B

เหมือนกับ (2) และ (3)

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล เมทริกซ์ B สามารถแปลงไปเป็นเมทริกซ์แบบลดรูปเป็นขั้น B_E (13.5.9)

โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล เมทริกซ์ A สามารถแปลงไปเป็นเมทริกซ์แบบลดรูปเป็นขั้น A_E

โดย 13.5.5 ทฤษฎีบท ค่าลำดับชั้นของ B_E เท่ากับค่าลำดับชั้นของ B และค่าลำดับชั้นของ A_E เท่ากับค่าลำดับชั้นของ A

โดย 13.1.2 บทแทรก ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมี B_E เป็นเมทริกซ์แต่งเติมแล้ว จะสมมูลกับระบบสมการ (1) ซึ่งมีเมทริกซ์แต่งเติมแล้วคือ B

เพราะฉะนั้น 13.5.10 ทฤษฎีบทจริงสำหรับระบบสมการเชิงเส้น (1) ก็ต่อเมื่อจริง สำหรับระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมีเมทริกซ์แต่งเติมแล้วคือ B_E

ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์แบบลดรูปเป็นชั้น เท่ากับจำนวนของแถวซึ่งบรรจุมหาซิกไม่ เป็นศูนย์ (13.5.7 ทฤษฎีบท) ดังนั้นถ้าค่าลำดับชั้นของ B_E มากกว่าค่าลำดับชั้น r ของ A_E จะมีอย่างน้อย 1 แถวที่มีสมาชิกไม่ เป็นศูนย์มากกว่า A_E

ดังนั้น $r+1$ แถวแรกของ B_E จะอยู่ในแบบ

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad k$$

เมื่อ $k \neq 0$ และระบบสมการเชิงเส้นซึ่ง B_E เป็นเมทริกซ์แต่งเติมแล้วที่บรรจุ สมการ

$$0 = k$$

ไม่มีคำตอบ เพราะฉะนั้นค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์แต่งเติมแล้ว ของระบบสมการเชิงเส้น มากกว่าค่าลำดับชั้น r ของสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ ระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคำตอบ

สำหรับส่วนที่เหลือจากการพิสูจน์ เราสมมติค่าลำดับชั้นของ B_E เหมือนกับค่าลำดับชั้น r ของ A_E เพราะว่า $r \leq n$ เมื่อ n เป็นจำนวนหลักของ A_E (13.5.8 บทแทรก) จะมีทางเป็นไปได้ 2 กรณี

- (i) ถ้า $r=n$ กรณีนี้ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมี B_E เป็นเมทริกซ์แต่งเติมแล้วบรรจุ n สมการเชิงเส้นตัวไม่รู้ n ตัว (สมการอื่นจะอยู่ในแบบสมการสำคัญน้อย (trivial equation $0=0$) มีสัมประสิทธิ์เมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกลักษณ์ โดยกฎของแครมเมอร์ จะมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว
- (ii) ถ้า $r < n$ กรณีนี้ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมี B_E เป็นเมทริกซ์แต่งเติมแล้วบรรจุ สมการไม่สำคัญน้อย (nontrivial equation) r สมการมีตัวไม่รู้ n ตัว เพราะว่า A_E เป็นแบบลดรูปเป็นชั้น จะมีตัวไม่รู้ r ตัว ซึ่งแต่ละตัวจะปรากฏอยู่หน้าเทอมของ r สมการ

(สมการไม่สำคัญน้อย)

ถ้าเราสลับเปลี่ยน (transpose) ให้เทอมของสมการที่บรรจุ 1 รากของตัวไม่รู้ $n-r$ ที่เหลือไว้ทางขวามือ โดยกฎของแครมเมอร์ จะให้ผลเฉลยสำหรับตัวไม่รู้ r ตัวด้านซ้ายมือในเทอมของตัวไม่รู้ $n-r$ ตัวด้านขวามือ

เพราะว่า $n-r$ ตัวไม่รู้ทางด้านขวามือเราอาจจะกำหนดเป็นค่าใดๆก็ได้ ดังนั้นระบบสมการจึงมีผลเฉลยจำนวนอนันต์ #

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$x+3y+z = -1$$

$$3x+10y-2z=11$$

$$2x+6y+z = 1$$

$$x+4y-3z = 10$$

ผลเฉลย สัมประสิทธิ์เมทริกซ์ของระบบนี้คือ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์แต่งเติมแล้วของระบบคือ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & -2 & 11 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

แปลงเมตริกซ์แต่งเต็มแล้ว โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลให้เป็นแบบลดรูปเป็นขั้น

โดย $(-1R_1)+R_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & -2 & 11 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \end{array} \right]$$

โดย $(-2R_1)+R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \end{array} \right]$$

โดย $(-3R_1)+R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \end{array} \right]$$

โดย $(-1R_2)+R_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

โดย $R_3 + R_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

โดย $-1R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

เมตริกซ์แต่งเติมแล้วอันสุดท้ายอยู่ในแบบลดรูปเป็นขั้น เราจะเห็นว่าค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมแล้วเท่ากับค่าลำดับชั้นของสัมประสิทธิ์เมตริกซ์คือ 3

ดังนั้นระบบสมการเชิงเส้น 4 สมการมีตัวไม่รู้ 3 ตัวที่กำหนดให้ จะสมมูลกับระบบสมการ 3 สมการ คือ

$$x+3y+z = -1$$

$$y-5z = 14$$

$$z = -3$$

แก้สมการโดยนำ $z = -3$ แทนในสมการที่ 2

$$y = 14 - 5(-3) = -1$$

นำ $y = -1$ และ $z = -3$ แทนในสมการที่ 1

$$x = -1 + 3 + 3 = 5$$

ดังนั้น $(5, -1, -3)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

#

เราสามารถทดสอบผลเฉลยโดยนำไปแทนในระบบสมการที่กำหนดให้

แบบฝึกหัด 13.5

ข้อ 1-ข้อ 2 จงหาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & -6 & -15 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -8 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

ข้อ 3-ข้อ 4 จงแปลงเมทริกซ์ที่กำหนดให้ เป็นแบบลดรูปเป็นขั้น โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุ แล้วหาค่าลำดับชั้น

3.
$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 12 & 20 & 9 \end{bmatrix}$$

4.
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

ข้อ 5-ข้อ 6 โดยวิธีการแบบเดียวกับตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

5.
$$5x + 7y + 4z = -2$$

$$3x + y + 3z = 4$$

$$12x + 20y + 9z = -10$$

$$6. \quad -5x+10y-2z = -7$$

$$3x-6y+z = 5$$

$$7x-14y+z = 19$$

สมการเชิงเส้นเรียกว่าเอกพันธ์ (homogeneous) ถ้าบรรจุเทอมคงตัวเป็นศูนย์

สมการนี้มีผลเฉลยสำคัญน้อย (trivial solution) $(0,0,---,0)$ เสมอ

7. จงหาผลเฉลยไม่สำคัญน้อย (nontrivial solution) ของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ 3 สมการ

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0$$

และทดสอบผลเฉลย.

ภาคผนวก

ภ.1 ทฤษฎีบทลิมิต

ภ.1.1 ทฤษฎีบทประกอบ ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = 0$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เราจะพิสูจน์ว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta, x \in D_f, x \in D_g \implies |f(x)g(x) - 0| = |f(x)g(x)| < \epsilon$$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ 1 เป็นจำนวนเต็มบวกจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta_1, x \in D_f \implies |f(x) - L| < 1$$

แต่ $|f(x)| - |L| = |f(x) - L|$ ดังนั้น

$$0 < |x - c| < \delta_1, x \in D_f \implies |f(x)| - |L| < 1$$

หรือ

$$(1) \quad 0 < |x - c| < \delta_1, x \in D_f \implies |f(x)| < 1 + |L|$$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ และ $\frac{\epsilon}{1+|L|} > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$(2) \quad 0 < |x-c| < \delta_2, \quad x \in D_g \implies |g(x)| < \frac{\epsilon}{1+|L|}$$

ให้ δ เป็นจำนวนน้อยที่สุดระหว่าง δ_1 และ δ_2 เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2)

$$0 < |x-c| < \delta, \quad x \in D_f, \quad x \in D_g \implies |f(x)g(x)| < (1+|L|) \frac{\epsilon}{1+|L|} = \epsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = 0$ #

ท.1.2 ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LM$$

พิสูจน์ เพราะถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ แล้ว

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - L) = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} (g(x) - M) = 0$$

เนื่องจาก

$$f(x)g(x) = (f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M) + LM$$

เพราะฉะนั้น โดย ท.1.1

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow c} [(f(x) - L)g(x)] + \lim_{x \rightarrow c} [L(g(x) - M)]$$

$$+ \lim_{x \rightarrow c} LM = LM$$

#

ท. 1.3 ทฤษฎีบทประกอบ ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M \neq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เราจะพิสูจน์ว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta, \quad x \in D_g \implies \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon$$

ซึ่งแปลว่า $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ และ $\frac{|M|}{2} > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - c| < \delta_1, \quad x \in D_g \implies |M - g(x)| < \frac{|M|}{2}$$

แต่ $|M| - |g(x)| \leq |M - g(x)|$ เพราะฉะนั้น

$$0 < |x - c| < \delta_1, \quad x \in D_g \implies |M| - |g(x)| < \frac{|M|}{2}$$

$$\implies |g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

$$\implies \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$$

ดังนั้น

$$(1) \quad 0 < |x - c| < \delta_1, \quad x \in D_g \implies \frac{1}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2}$$

ให้ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$(2) \quad 0 < |x - c| < \delta_2, \quad x \in D_g \implies |M - g(x)| < \frac{\epsilon M^2}{2}$$

ให้ δ เป็นจำนวนน้อยที่สุดระหว่าง δ_1 และ δ_2 เพราะฉะนั้น (1) และ (2) จึงได้ว่า $0 < |x-c| < \delta$, $x \in D_g$ ดังนั้น

$$0 < |x-c| < \delta, \quad x \in D_g \quad \longrightarrow \quad \frac{|M-g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2} \cdot \frac{\epsilon M^2}{2} = \epsilon$$

แต่

$$\left| \frac{M-g(x)}{Mg(x)} \right| = \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right|$$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-c| < \delta, \quad x \in D_g \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

#

ท. 1.4 ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

พิสูจน์ โดย ท. 1.2 และ ท. 1.3

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M} \quad \#$$

ท. 1.5 ทฤษฎีบท ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $c \geq 0$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ เราแยกพิสูจน์ 2 กรณี คือ $c \neq 0$ หรือ $c = 0$

กรณี 1. ($c \neq 0$) เพราะว่า

$$p^n - q^n = (p - q)(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1})$$

เมื่อ p และ q เป็นจำนวนจริงใดๆ เพราะฉะนั้น

$$(1) \quad (x - c) = ({}^n\sqrt{x} - {}^n\sqrt{c}) [({}^n\sqrt{x})^{n-1} + ({}^n\sqrt{x})^{n-2}({}^n\sqrt{c}) + \dots + ({}^n\sqrt{x})({}^n\sqrt{c})^{n-2} + ({}^n\sqrt{c})^{n-1}]$$

ในกรณี 1 c เป็นบวกหรือลบ เพราะฉะนั้นจะมีช่วงเปิดบรรจุ c ซึ่งจำนวน x ทั้งหมดในช่วงนี้มีเครื่องหมายเหมือน c เพราะฉะนั้นในกรณี 1 เราสามารถสมมุติได้ว่า x มีเครื่องหมายเหมือน c โดยไม่เสียการพิสูจน์

ให้ทางขวาของ (1) ในวงเล็บสี่เหลี่ยมแทนด้วย Q นั่นคือ

$$Q = ({}^n\sqrt{x})^{n-1} + ({}^n\sqrt{x})^{n-2}({}^n\sqrt{c}) + \dots + ({}^n\sqrt{x})({}^n\sqrt{c})^{n-2} + ({}^n\sqrt{c})^{n-1}$$

ถ้า $c > 0$ แล้ว $x > 0$ และทุกเทอมใน Q เป็นบวก

ถ้า $c < 0$ แล้ว $x < 0$ และ n จะเป็นจำนวนคี่ ดังนั้นเทอมที่ 1 ของ Q เป็นบวก เพราะว่า $n-1$ เป็นจำนวนคู่ เทอมที่ 2 ของ Q เป็นบวก เพราะว่า เป็นผลคูณของ 2 จำนวนลบ เทอมที่ 3 ของ Q เป็นผลคูณของ 2 จำนวนบวกจึงเป็นบวก เทอมที่ 4 ของ Q เป็นผลคูณของ 2 จำนวนลบจึงเป็นบวก เทอมอื่นๆก็คิดได้ทำนองเดียวกันว่า เป็นบวก เพราะฉะนั้นเทอมของ Q ทั้งหมดเป็นบวกเมื่อ $c \neq 0$

เนื่องจาก $\sqrt[n]{c^{n-1}}$ เป็นเทอมสุดท้ายของ Q เพราะฉะนั้น

$$(2) \quad 0 < \sqrt[n]{c^{n-1}} < Q$$

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่าสำหรับ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า x อยู่ในโดเมน

$$0 < |x-c| < \delta \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}| < \epsilon$$

เพราะว่า

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}| < \epsilon \iff |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}| \cdot \left| \frac{Q}{Q} \right| < \epsilon$$

$$\iff \left| \frac{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c})Q}{Q} \right| < \epsilon$$

$$\text{โดย (1)} \quad \iff \frac{|x-c|}{|Q|} < \epsilon$$

$$(3) \quad 0 < x-c < \epsilon \sqrt[n]{c^{n-1}}, \quad x \in D \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}| < \epsilon$$

ดังนั้น สำหรับ $\epsilon > 0$ เราเลือก $\delta = \epsilon \sqrt[n]{c^{n-1}}$ แล้ว

$$0 < |x-c| < \delta, \quad x \in D \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}| < \epsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

กรณี 2. ($c=0$) ให้ $\epsilon > 0$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว

$$0 < |x| < \epsilon^n \implies |\sqrt[n]{x}| < \epsilon$$

เพราะฉะนั้น

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว

$$0 < x < \epsilon^n \longrightarrow |\sqrt[n]{x}| < \epsilon$$

ดังนั้น

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

จาก (4) และ (5) ก็จะมีการพิสูจน์กรณี 2

#

ภ.2 สูตรจากเรขาคณิตและตรีโกณมิติ

ภ.2.1 เรขาคณิต

ให้ r หรือ R แทนรัศมี, h ความสูง, b ความยาวของฐาน, B พื้นที่ของฐาน, s ความสูงเอียง และ θ แทนมุมศูนย์กลางวัดเป็นเรเดียน

1. วงกลม

$$\text{เส้นรอบวง} = 2\pi r$$

$$\text{พื้นที่} = \pi r^2$$

2. ส่วนโค้งวงกลม

$$\text{ความยาว} = r\theta$$

3. เชกเตอร์วงกลม

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

4. ส่วนวงกลม

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$

5. สามเหลี่ยม

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}bh$$

6. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

7. ทรงกลม

$$\text{ปริมาตร} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{พื้นที่ของพื้นผิว} = 4\pi r^2$$

8. ทรงกระบอกกลมตรง

$$\text{ปริมาตร} = \pi r^2 h$$

$$\text{พื้นผิวด้านข้าง} = 2\pi r h$$

9. กรวยกลมตรง

$$\text{ปริมาตร} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{พื้นผิวด้านข้าง} = \pi r s$$

10. กรวยยอกตัด

$$\text{ปริมาตร} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\text{พื้นผิวด้านข้าง} = \pi s (R + r)$$

11. ปริซึม

$$\text{ปริมาตร} = Bh$$

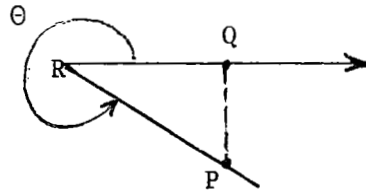
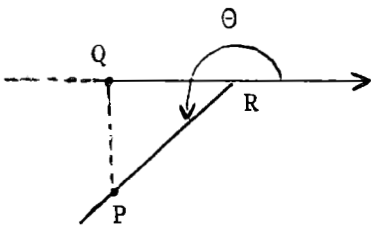
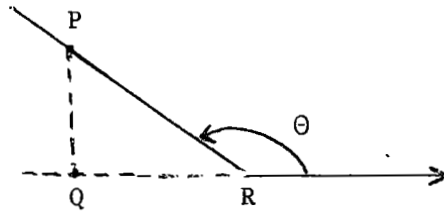
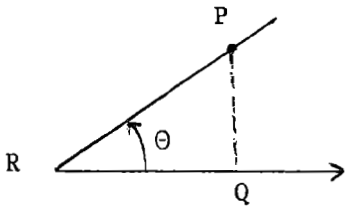
12. พีระมิด

$$\text{ปริมาตร} = \frac{1}{3} Bh$$

ภ.2.2 ครีโกณมิติ

ให้ P เป็นจุดใดๆอยู่บนด้านเส้นสุดของมุม และไม่ใช่ว่าจุดยอด เขียนแทนจุดยอดด้วย R ลากเส้นจุดจาก P ตั้งฉากกับด้านเริ่มต้น (หรือส่วนขยาย) (รูป ภ.2.1) แล้ว

$$\sin \theta = \frac{\overline{QP}}{|\overline{RP}|}, \quad \cos \theta = \frac{\overline{RQ}}{|\overline{RP}|}, \quad \tan \theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{RQ}}$$



รูป ป.2.1

สูตรลดทอน

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$$

$$\tan(\theta - 180^\circ) = \tan \theta$$

เอกลักษณ์ไพธากอเรียน

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

สูตรผลบวก

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi}$$

สูตรมุมสองเท่า

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

สูตรมุมครึ่ง

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

กฎของโคซายน์ ถ้า A, B และ C เป็นมุมข้างในของสามเหลี่ยม a, b และ c เป็นด้านตรงกันข้ามมุมตามลำดับ แล้ว

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ภ.3 ตารางเกี่ยวกับตัวเลข

ภ.3.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ วัดเป็นองศา 528

Angle	Sin	Tan	Cot	Cos	
0.0°	.0000	.0000	—	1.0000	90°
0.5°	.0087	.0087	114.59	1.0000	89.5°
1.0°	.0175	.0175	57.290	.9998	89.0°
1.5°	.0262	.0262	38.188	.9997	88.5°
2.0°	.0349	.0349	28.636	.9994	88.0°
2.5°	.0439	.0437	22.904	.9990	87.5°
3.0°	.0532	.0524	19.081	.9986	87.0°
3.5°	.0610	.0612	16.350	.9981	86.5°
4.0°	.0698	.0699	14.301	.9976	86.0°
4.5°	.0785	.0787	12.706	.9969	85.5°
5.0°	.0872	.0875	11.430	.9962	85.0°
5.5°	.0958	.0963	10.385	.9954	84.5°
6.0°	.1045	.1051	9.5144	.9945	84.0°
6.5°	.1132	.1139	9.7769	.9936	83.5°
7.0°	.1219	.1228	8.1443	.9925	83.0°
7.5°	.1305	.1317	7.5958	.9914	82.5°
8.0°	.1392	.1405	7.1154	.9903	82.0°
8.5°	.1478	.1495	6.6912	.9890	81.5°
9.0°	.1564	.1584	6.3138	.9877	81.0°
9.5°	.1650	.1673	5.9758	.9863	80.5°
10.0°	.1736	.1763	5.6713	.9848	80.0°
10.5°	.1822	.1853	5.3955	.9833	79.5°
11.0°	.1908	.1944	5.1446	.9816	79.0°
11.5°	.1994	.2035	4.9152	.9799	78.5°
12.0°	.2079	.2126	4.7046	.9781	78.0°
12.5°	.2164	.2217	4.5107	.9763	77.5°
13.0°	.2250	.2309	4.3315	.9744	77.0°
13.5°	.2334	.2401	4.1653	.9724	76.5°
14.0°	.2419	.2493	4.0108	.9703	76.0°
14.5°	.2504	.2586	3.8667	.9681	75.5°
15.0°	.2588	.2679	3.7321	.9659	75.0°
15.5°	.2672	.2773	3.6059	.9636	74.5°
16.0°	.2756	.2867	3.4874	.9613	74.0°
16.5°	.2840	.2962	3.3759	.9588	73.5°
17.0°	.2924	.3075	3.2079	.9563	73.0°
17.5°	.3007	.3153	3.1716	.9537	72.5°
18.0°	.3090	.3249	3.0777	.9511	72.0°
18.5°	.3173	.3346	2.9987	.9483	71.5°
19.0°	.3256	.3443	2.9042	.9455	71.0°
19.5°	.3338	.3541	2.8239	.9426	70.5°
20.0°	.3420	.3640	2.7475	.9397	70.0°
20.5°	.3502	.3739	2.6746	.9367	69.5°
21.0°	.3584	.3839	2.6051	.9336	69.0°
21.5°	.3665	.3939	2.5386	.9304	68.5°
22.0°	.3746	.4040	2.4751	.9272	68.0°
22.5°	.3827	.4142	2.4142	.9239	67.5°
—	Cos	Cot	Tan	Sin	Angle

Angle	Sin	Tan	Cot	Cos	
22.5°	.3827	.4142	2.4142	.9239	67.5°
23.0°	.3907	.4245	2.3559	.9205	67.0°
23.5°	.3987	.4348	2.2998	.9171	66.5°
24.0°	.4067	.4452	2.2460	.9135	66.0°
24.5°	.4147	.4557	2.1943	.9100	65.5°
25.0°	.4226	.4663	2.1445	.9063	65.0°
25.5°	.4305	.4770	2.0965	.9026	64.5°
26.0°	.4384	.4877	2.0503	.8988	64.0°
26.5°	.4462	.4986	2.0057	.8949	63.5°
27.0°	.4540	.5095	1.9626	.8910	63.0°
27.5°	.4617	.5206	1.9210	.8870	62.5°
28.0°	.4695	.5317	1.8807	.8829	62.0°
28.5°	.4772	.5430	1.8418	.8788	61.5°
29.0°	.4848	.5543	1.8040	.8746	61.0°
29.5°	.4924	.5658	1.7675	.8740	60.5°
30.0°	.5000	.5774	1.7321	.8660	60.0°
30.5°	.5075	.5890	1.6977	.8616	59.5°
31.0°	.5150	.6009	1.6643	.8572	59.0°
31.5°	.5225	.6128	1.6319	.8526	58.5°
32.0°	.5299	.6249	1.6003	.8480	58.0°
32.5°	.5373	.6371	1.5697	.8434	57.5°
33.0°	.5446	.6494	1.5399	.8387	57.0°
33.5°	.5519	.6619	1.5108	.8339	56.5°
34.0°	.5592	.6745	1.4826	.8290	56.0°
34.5°	.5664	.6873	1.4550	.8241	55.5°
35.0°	.5736	.7002	1.4281	.8192	55.0°
35.5°	.5807	.7133	1.4019	.8141	54.5°
36.0°	.5878	.7265	1.3764	.8090	54.0°
36.5°	.5948	.7400	1.3514	.8039	53.5°
37.0°	.6018	.7536	1.3270	.7986	53.0°
37.5°	.6088	.7673	1.3032	.7934	52.5°
38.0°	.6157	.7813	1.2799	.7880	52.0°
38.5°	.6225	.7954	1.2572	.7826	51.5°
39.0°	.6293	.8098	1.2349	.7771	51.0°
39.5°	.6361	.8243	1.2131	.7716	50.5°
40.0°	.6428	.8391	1.1918	.7660	50.0°
40.5°	.6494	.8541	1.1708	.7604	49.5°
41.0°	.6561	.8693	1.1504	.7547	49.0°
41.5°	.6626	.8847	1.1303	.7490	48.5°
42.0°	.6691	.9004	1.1106	.7431	48.0°
42.5°	.6756	.9163	1.0913	.7373	47.5°
43.0°	.6820	.9325	1.0724	.7314	47.0°
43.5°	.6884	.9490	1.0538	.7254	46.5°
44.0°	.6947	.9657	1.0355	.7193	46.0°
44.5°	.7009	.9827	1.0176	.7133	45.5°
45.0°	.7071	1.0000	1.0000	.7071	45.0°
—	Cos	Cot	Tan	Sin	Angle

ท.3.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ วัคเป็นเรเคียน

Radians	sin	cos	tan
0.00	0.0000	1.0000	0.0000
.01	.0100	1.0000	.0100
.02	.0200	0.9998	.0200
.03	.0300	.9996	.0300
.04	.0400	.9992	.0400
.05	.0500	.9988	.0500
.06	.0600	.9982	.0601
.07	.0699	.9976	.0701
.08	.0799	.9968	.0802
.09	.0899	.9960	.0902
.10	.0998	.9950	.1003
.11	.1098	.9940	.1104
.12	.1197	.9928	.1206
.13	.1296	.9916	.1307
.14	.1395	.9902	.1409
.15	.1494	.9888	.1511
.16	.1593	.9872	.1614
.17	.1692	.9856	.1717
.18	.1790	.9838	.1820
.19	.1889	.9820	.1923
.20	.1987	.9801	.2027
.21	.2085	.9780	.2131
.22	.2182	.9759	.2236
.23	.2280	.9737	.2341
.24	.2377	.9713	.2447
.25	.2474	.9689	.2553
.26	.2571	.9664	.2660
.27	.2667	.9638	.2768
.28	.2764	.9611	.2876
.29	.2860	.9582	.2984
.30	.2955	.9553	.3093
.31	.3051	.9523	.3203
.32	.3146	.9492	.3314
.33	.3240	.9460	.3425
.34	.3335	.9428	.3537
.35	.3249	.9394	.3650
.36	.3523	.9359	.3764
.37	.3616	.9323	.3879
.38	.3709	.9287	.3994
.39	.3802	.9249	.4111

Radians	sin	cos	tan
0.40	0.3894	0.9211	0.4228
.41	.3986	.9171	.4346
.42	.4078	.9131	.4466
.43	.4169	.9090	.4586
.44	.4259	.9048	.4708
.45	.4350	.9004	.4831
.46	.4439	.8961	.4954
.47	.4529	.8916	.5080
.48	.4618	.8870	.5206
.49	.4706	.8823	.5334
.50	.4794	.8776	.5463
.51	.4882	.8727	.5594
.52	.4969	.8778	.5726
.53	.5055	.8628	.5859
.54	.5141	.8577	.5994
.55	.5227	.8525	.6131
.56	.5312	.8473	.6269
.57	.5396	.8419	.6410
.58	.5480	.8365	.6552
.59	.5564	.8309	.6696
.60	.5646	.8253	.6841
.61	.5729	.8196	.6989
.62	.5810	.8139	.7139
.63	.5891	.8080	.7291
.64	.5972	.8021	.7445
.65	.6052	.7961	.7602
.66	.6131	.7900	.7761
.67	.6210	.7839	.7923
.68	.6288	.7776	.8087
.69	.6365	.7712	.8253
.70	.6442	.7648	.8423
.71	.6518	.7548	.8595
.72	.6594	.7518	.8771
.73	.6669	.7452	.8949
.74	.6743	.7385	.9131
.75	.6816	.7317	.9316
.76	.6889	.7428	.9505
.77	.6961	.7179	.9697
.78	.7033	.7109	.9893
.79	.7014	.7038	1.009

Radians	sin	cos	tan
0.80	0.7174	0.6967	1.030
.81	.7243	.6895	1.050
.82	.7311	.6822	1.072
.83	.7379	.6749	1.093
.84	.7446	.6675	1.116
.85	.7513	.6600	1.138
.86	.7578	.6524	1.162
.87	.7643	.6448	1.185
.88	.7707	.6372	1.210
.89	.7771	.6294	1.235
.90	.7833	.6216	1.260
.91	.7895	.6137	1.286
.92	.7956	.6058	1.313
.93	.8016	.5978	1.341
.94	.8076	.5898	1.369
.95	.8134	.5817	1.398
.96	.8192	.5737	1.428
.97	.8249	.5653	1.459
.98	.8305	.5570	1.491
.99	.8360	.5487	1.524
1.00	.8415	.5403	1.557
1.01	.8468	.5319	1.592
1.02	.8521	.5234	1.628
1.03	.8573	.5148	1.665
1.04	.8624	.5062	1.704
1.05	.8674	.4976	1.743
1.06	.8724	.4489	1.748
1.07	.8772	.4801	1.827
1.08	.8820	.4713	1.871
1.09	.8866	.4625	1.917
1.10	.8192	.4536	1.965
1.11	.8957	.4447	2.014
1.12	.9001	.4357	2.066
1.13	.9044	.4267	2.120
1.14	.9086	.4176	2.176
1.15	.9128	.4085	2.234
1.16	.9186	.3993	2.296
1.17	.9208	.3902	2.360
1.18	.9246	.3809	2.427
1.19	.9284	.3717	2.498

Radians	sin	cos	tan
1.20	0.9320	0.3624	2.572
1.21	.9356	.3530	2.650
1.22	.9391	.3436	2.733
1.23	.9425	.3342	2.820
1.24	.9458	.3248	2.912
1.25	.9490	.3153	3.010
1.26	.9521	.3058	3.113
1.27	.9551	.2963	3.224
1.28	.9580	.2867	3.341
1.29	.9608	.2771	3.467
1.30	.9636	.2675	3.602
1.31	.9662	.2579	3.747
1.32	.9687	.2482	3.903
1.33	.9711	.2385	4.072
1.34	.9735	.2288	4.256
1.35	.9757	.2190	4.455
1.36	.9779	.2092	4.673
1.37	.9799	.1994	4.913
1.38	.9819	.1896	5.177
1.39	.9837	.1798	5.471
1.40	.9854	.1700	5.798
1.41	.9871	.1601	6.165
1.42	.9887	.1502	6.581
1.43	.9901	.1403	7.055
1.44	.9915	.1304	7.602
1.45	.9927	.1205	8.238
1.46	.9939	.1106	8.989
1.47	.9949	.1006	9.887
1.48	.9959	.0907	10.98
1.49	.9967	.0807	12.35
1.50	.9975	.0707	14.10
1.51	.9982	.0608	16.43
1.52	.9987	.0508	19.67
1.53	.9992	.0408	24.50
1.54	.9995	.0308	32.46
1.55	.9998	.0208	48.08
1.56	.9999	.0108	92.62
1.57	1.0000	.0008	1256

บรรณานุกรม

- [1] ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์โรงพิมพ์ประสิทธิ์สเทชั่นเนอรี่
และการพิมพ์ 117/31-32 ซอยโชฎีก ถนนเจริญกรุง กรุงเทพฯ 10110.
- [2] Purcell, E.J., **Calculus with Analytic Geometry**, Prentice-Hall
, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

เฉลยแบบฝึกหัดบางข้อ

แบบฝึกหัด 1.1

1. จริง 2. เท็จ 3. จริง 4. เท็จ
5. เท็จ 6. เท็จ 7. เท็จ 8. เท็จ
9. เท็จ 10. เท็จ 11. เท็จ 12. จริง
13. $\{4, -2\}$ 14. $\{a, e, i, o, u\}$ 15. $\{101, 102, ---\}$
16. $\{3, 5, 7\}$ 17. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 18. $\{2, 4, 6, 8\}$
19. $\{6, 7, 8, 9\}$ 20. $\{x/x \in \mathbf{N} \text{ และ } x < 200\}$
21. $\{x/x = 2n+1, n \in \mathbf{NU}\{0\}\}$ 22. $\{x/x \in \mathbf{NU}\{0\}\}$
23. $x/x = 3^n, n \in \mathbf{N}$ 24. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
25. $\{1, 2, 6, 7, 9\}$ 26. $\{1, 2\}$ 27. $\{1, 2\}$
28. A 29. A 30. $\{a, b, c, d\}$ 31. $\{a, b\}$
32. 12.

แบบฝึกหัด 1.3

1. $\{x/x < 0\}$ 2. $\{x/x > \frac{-5}{2}\}$ 3. $\{x/x > -6\}$ 4. $\{x/x < \frac{1}{9}\}$
5. $\{x/2 \leq x < 9\}$ 6. $\{x/-2 \leq x < -\frac{1}{2}\}$
7. $x/-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$ 8. $\{x/x \geq 2\}$ 9. $\{x/x < \frac{1}{3} \text{ หรือ } x > \frac{3}{2}\}$
10. $\{x/-3 \leq x < -\frac{21}{8}\}$ 11. $\{x/\frac{11}{56} < x < \frac{1}{4}\}$ 12. $\{x/x \leq -2 \text{ หรือ } x \geq -\frac{1}{6}\}$
13. $\{x/x > 2 \text{ หรือ } x < -1\}$ 14. $\{x/x < -5 \text{ หรือ } x > \frac{3}{2}\}$
15. $\{x/-3 < x < 1 \text{ หรือ } x > 2\}$ 16. $\{x/x < -\frac{1}{6} \text{ หรือ } -\frac{1}{3} < x < 0 \text{ หรือ } x > \frac{1}{6}\}$

$$17. \left\{ x/0 < x < \frac{2}{3} \text{ หรือ } 1 < x < 2 \right\}$$

$$18. \left\{ x/x < 0 \text{ หรือ } \frac{3}{5} \leq x < 3 \right\}$$

$$19. \left\{ x/1 \leq x < 13 \right\}$$

$$20. \left\{ x/\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3} \right\}$$

$$21. \left\{ x/0 \leq x < \frac{1}{3} \text{ หรือ } x > 1 \right\}.$$

แบบฝึกหัด 1.4

$$1. \quad 4, \text{ อยู่}$$

$$2. \quad \sqrt{7}, \text{ อยู่}$$

$$3. \quad \sqrt{3}, \text{ อยู่}$$

$$4. \quad 3, \text{ อยู่}$$

$$5. \quad 1, \text{ ไม่อยู่.}$$

แบบฝึกหัด 1.6

$$7. \quad \{x/-1 < x < 7\}$$

$$8. \quad \{x/2 < x < 5\} \quad 9. \quad \{x/x > 4 \text{ หรือ } x < \frac{1}{2}\}$$

$$10. \quad \{x/-3 < x < 1 \text{ หรือ } x > 2\}$$

$$11. \quad \{x/x < -1 \text{ หรือ } \frac{1}{2} < x < 4\}$$

$$12. \quad (\frac{3}{2}, \infty) \cup (-\infty, \frac{5}{3})$$

$$15. \quad \mathbf{R}$$

$$16. \quad \{x/x < -5 \text{ หรือ } -1 < x < \frac{3}{2} \text{ หรือ } x > \frac{1}{3}\}$$

$$17. \quad \{x/-1 < x < 7\}$$

$$18. \quad \{x/x < 1\} \quad 19. \quad (-\infty, \frac{1}{2})$$

$$20. \quad [\frac{16}{7}, \frac{14}{5}] - \{\frac{5}{2}\}$$

$$21. \quad \{x/x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq \frac{3}{7}\}.$$

แบบฝึกหัด 2.1

$$5. \quad (-3, 3)$$

$$6. \quad (-4, -6)$$

$$7. \quad (1, -3)$$

$$8. \quad (0, 3\sqrt{3}), (0, -3\sqrt{3}).$$

แบบฝึกหัด 2.2

$$1. \quad \sqrt{26}$$

$$3. \quad 73$$

$$4. \quad 7, -3$$

$$5. \quad (\pm\sqrt{96}, 0)$$

แบบฝึกหัด 2.3

1. 2
2. $(-34, 0)$
3. $(0, 22)$
4. $-\frac{3}{10}, \frac{4}{3}, -1$
5. $(-4, -\frac{3}{2})$
6. $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$
7. $(14, -10)$
8. $x=3, y=10$
9. $(\frac{7}{2}, 2), \sqrt{\frac{111}{2}}$
10. $(2, 5), (6, -1), (-2, -2)$
11. $x = \frac{2x_1 + x_2}{3}, y = \frac{2y_1 + y_2}{3}$

แบบฝึกหัด 2.4

11. พาราโบลา
12. พาราโบลา
13. วงรี
14. $(4, 3)$
15. $(-\frac{9}{10}, \frac{3}{10})$
16. $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$
17. $(1, 1), (-2, 4)$

แบบฝึกหัด 2.5

1. a. $y=0$ b. $x=0$ c. $x=-2$ $y=-2$
2. a. $y-3x-17=0$ b. $y+2x+7=0$ c. $y=3$ d. $y-6x+26=0$
3. $y-3x+21=0$

แบบฝึกหัด 2.6

1. $3x+4y=3$
2. $x-2y=4$
3. 2
4. $69\sqrt{\frac{137}{137}}$
5. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{10}{\sqrt{13}}$
9. $2x+3y+6=0$
10. $y^2-8x-4y+44=0$

แบบฝึกหัด 2.7

$$1. \quad -\frac{3}{31} \qquad 2. \quad 103^\circ \qquad 3. \quad 52^\circ \qquad 4. \quad -\frac{(160+89\sqrt{3})}{11}.$$

แบบฝึกหัด 2.8

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16, \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0 \\
 2. \quad & x^2 + y^2 - 8x - 2y - 57 = 0 \qquad 3. \quad (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25 \\
 4. \quad & x^2 + y^2 - 12x + 4y + 23 = 0 \qquad 5. \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \\
 6. \quad & x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0 \qquad 7. \quad 3x + 2y - 14 = 0 \quad 8. \quad (x+\frac{7}{4})^2 + y^2 = \frac{1025}{16} \\
 9. \quad & (x-\frac{4}{3})^2 + (y+\frac{4}{3})^2 = 16, \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \qquad 10. \quad x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \\
 11. \quad & x^2 + y^2 - 4x + 10y - 51 = 0.
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.9

$$\begin{aligned}
 1. \quad & F: (\frac{5}{2}, 0), x = -\frac{5}{2} \qquad 2. \quad F: (0, 3), y = -3 \\
 3. \quad & F: (0, -1), y = 1 \qquad 4. \quad F: (-\frac{3}{2}, 0), x = \frac{3}{2} \\
 5. \quad & F: (0, -\frac{7}{12}), y = \frac{7}{2} \qquad 6. \quad x^2 = 8y \qquad 7. \quad y^2 = -28x \\
 8. \quad & y^2 = 16x \qquad 9. \quad y^2 = -8x \qquad 10. \quad x^2 = \frac{8y}{3} \qquad 11. \quad x^2 = \frac{9y}{5} \\
 12. \quad & 3y^2 = x \qquad 13. \quad 3x^2 - 24xy + 16y^2 + 96x + 22y - 119 = 0 \\
 14. \quad & y^2 = -x.
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.10

$$1. \quad a. \quad -8, 6 \quad b. \quad -4, \frac{3}{2} \quad c. \quad -1, 1 \quad d. \quad 0, 0$$

2. a. จุดกำเนิด b. จุดกำเนิด , $y=x$
 c. แกน y d. แกน x
3. a. แนวตั้ง $x=3$ แนวนอน $y=-2$
 b. แนวตั้ง $x=-2$, $x=3$ แนวนอน $y=0$
 c. เส้นกำกับแนวตั้ง $x=-2$ d. เส้นกำกับแนวนอน $y=\pm 2$.

แบบฝึกหัด 2.11

1. $x'^2 + y'^2 = 16$ 2. $4x'^2 + 9y'^2 = 36$
 3. $y'^2 = 4x'$ 4. $9x'^2 - 16y'^2 = 144$
 5. $x'y' = 3$ 6. $x'^2 y' - 1 = 0$.

แบบฝึกหัด 2.12

9. $\{P:(x,y)/3x+2y-10>0, y>0\}$
 10. $\{P:(x,y)/x^2+y^2+4x-2y+4=0, -5x+6y-30\leq 0, 3x+7y+18\geq 0, 8x+y-5\leq 0\}$.

แบบฝึกหัด 3.1

1. a. 15 b. 1 c. $-.12$ d. $4+2$ e. $\frac{66}{7}$ f. $\frac{2+x}{x^2}$
2. a. -1 b. 200 c. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{2}{y^2-2}$ e. $-\frac{2}{x+2}$ f. $\frac{z}{1-2z}$
3. $f(a)=a^2-1$, $f(a+h)=(a+h)^2-1$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=h+2a$
4. $3a^2+3ah+h^2$
5. a. $D_f = \{z/z \geq -\frac{2}{3}\}$, $R_f = \{y/y \geq 0\}$
 b. $D_g = \{v/v \neq \frac{1}{2}\}$, $R_g = \mathbb{R}$

$$c. \quad D_f = \{x/x > 4 \text{ หรือ } x < -4\}, \quad R_f = \{y/y \geq 0\}$$

$$d. \quad D_H = \{x/|x| \leq 15\}, \quad R_H = \{y/-15 \leq y \leq 0\}$$

$$6. \quad a. \quad D_f = \mathbf{R}, \quad R_f = \mathbf{R}$$

$$b. \quad D_g = \{x/x > -1\}, \quad R_g = \{y/y > 0\}$$

$$c. \quad D_F = \mathbf{R}, \quad R_F = \{y/y \geq 0\}$$

$$d. \quad D_H = \mathbf{R}, \quad R_H = \mathbf{R}$$

$$7. \quad a. \quad \text{เป็น โดเมน} = \mathbf{R}$$

$$b. \quad \text{ไม่เป็น}$$

$$c. \quad \text{ไม่เป็น} \quad d. \quad \text{เป็น โดเมน} = \mathbf{R}$$

แบบฝึกหัด 3.2

$$1. \quad (f+g)(x) = \sqrt{x^2 - 2} + \frac{3}{x} \qquad (f-g)(x) = \sqrt{x^2 - 2} - \frac{3}{x}$$

$$(fg)(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 2}}{x} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 2}}{x}$$

$$D_{f+g} = \{x/x \geq 2, x \leq -2, x \neq 0\} = D_{f-g}$$

$$D_{fg} = \{x/x \geq 2, x \leq -2, x \neq 0\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x/x \geq 2, x \leq -2, x \neq 0\}$$

$$2. \quad (fg)(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \qquad D_{f \circ g} = \{x/x \neq 0, x \geq \frac{9}{2} \text{ หรือ } x \leq -\frac{9}{2}\}$$

$$3. \quad (g \circ f)(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2}} \qquad D_{f \circ g} = \{x/x > -2 \text{ หรือ } x < -2\}$$

$$4. \quad (f+g)(x) = \frac{1}{3x-4} + \sqrt{x-1} \qquad (fg)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3x-4} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_f = \{x/x \neq \frac{4}{3}\}$$

$$D_g = \{x/x \geq 1\}$$

$$D_{f+g} = \{x/x \geq 1, x \neq \frac{4}{3}\}$$

$$D_{fg} = \{x/x \neq \frac{4}{3}, x \geq 2\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x/x > 1\}$$

$$5. (f \circ g)(x) = \frac{1}{3\sqrt{x-1}-4}$$

$$D_{f \circ g} = \{x/x > 1\}$$

$$6. (g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-4}} - 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \neq \frac{4}{3}\}.$$

แบบฝึกหัด 4.1

$$1. -3$$

$$2. 4$$

$$3. 4$$

$$4. 1$$

$$5. 0$$

$$6. 1.$$

แบบฝึกหัด 4.2

$$1. 0 < \delta \leq 0.8$$

$$2. 0 < \delta \leq 0.125$$

$$3. 0 < \delta \leq 1$$

$$4. 0 < \delta \leq 0.75$$

$$5. 0 < \delta \leq \frac{7}{6}$$

$$6. 0 < \delta \leq \frac{1}{11}.$$

แบบฝึกหัด 4.4

$$6. 36$$

$$7. \frac{1}{6}.$$

แบบฝึกหัด 4.5

$$1. -1$$

$$2. -1$$

$$3. 1$$

$$4. 0$$

5. 9

6. 1

7. -1

8. 1, -1

แบบฝึกหัด 4.6

1. ไม่

2. ไม่เพราะ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

3. ต่อเนื่อง

4. $H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

5. $G(1) = 2$

6. $x \leq 3$

7. $x < 3$

8. $t = \frac{1}{2}$

9. $s = \frac{1}{2}$

10. $x = -2$ และ $x = \frac{3}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -2} F(x) \neq F(-2) = -2$ $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} F(x)$ ไม่มี

11. $x \in \mathbb{Z}$ เพราะ $\lim_{x \rightarrow c} F(x)$ ไม่มีสำหรับทุก $c \in \mathbb{Z}$

12. F ไม่ต่อเนื่องที่ c เพราะ $\lim_{x \rightarrow c} F(x)$ ไม่มี

13. ไม่ต่อเนื่องทุกจุด

แบบฝึกหัด 4.7

1. 0.56

2. 0.05

3. 0.89, 1.095

4. $g(x, x) = -x(2x + x)$, 1.44

5. 1.2886

6. 0.32 ลูกบาศก์นิ้ว

7. 14.31

8. 1.7487 ตารางนิ้ว

9. $P_1: (1, 0)$, $P_2: (1.6, 0.96)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.6$

10. $P_1: (2, \frac{1}{2})$, $P_2: (\frac{6}{5}, \frac{25}{18})$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10}{9}$

แบบฝึกหัด 5.1

1. 3

2. a

3. 4x

4. 2ax + b

5. $6x^2$

6. $15x^2 + 4x - 1$

7. $3x^2 - 2$

8. $3ax^2 + 2bx + c$

9. $4x^3$

10. $12x^3 - 8$

11. $D_x F(x) = -\frac{3}{x^2}$ $D_{F'} = x/x \neq 0$

12. $D_x F(x) = -\frac{6}{(2x-3)^2}$ $D_{F'} = x/x \neq \frac{3}{2}$

13. $D_x F(x) = \frac{-4 \cdot 6 \cdot x^2}{(2x^3+1)^2}$ $D_{F'} = \mathbb{R}$

14. $D_x F(x) = \frac{-(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$ $D_{F'} = \{x/x \neq -3 \text{ และ } x \neq 1\}$

15. $\frac{2(-3)}{x^4}$

16. $\frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^2}{(2x^3-3)^2}$

17. $\frac{-4}{x^5}$

18. $\frac{-1 \cdot (2)(4)x^3}{(2x^4+3)^2}$

19. $\frac{-1}{(2x)^{\frac{-3}{2}}}$

20. $\frac{-1}{(y-3)^{\frac{-3}{2}}}$

21. $\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$

22. $\frac{-u}{(u^2+8)^{\frac{3}{2}}}$

23. $\frac{-(x+1)+1}{2x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}}$

25. b. $f'(x) = 2x$, $|x| > 1$

c. $f'(x) = -2x$, $|x| < 1$.

แบบฝึกหัด 5.2

1. a. 12.6 b. 1.23 c. 0.1203, 12

2. a. $-\frac{1}{10}$ b. $-\frac{160}{21}$ c. $\frac{60200}{401}$

3. $\frac{\sqrt{3}x}{2}$ เมื่อ x เป็นความยาวของด้าน

5. $\frac{50\sqrt{21}}{21}$

7. a. $\frac{2\rho rh}{3}$ b. $\frac{\rho r^2}{3}$

8. $-\frac{1}{21}$

9. $-\frac{4}{243}$

10. $\frac{6}{5\rho}$ ฟต/นาที .

แบบฝึกหัด 5.3

1. $x = \frac{1}{3}$ 2. $t = -\frac{1}{2}$ 3. $|w| > \frac{2}{5}$ 4. $\{x/x \in \mathbb{Z}\}$
 5. 0

แบบฝึกหัด 6.2

1. $6x^5$ 2. $35x^4 - 12x^2$ 3. $\frac{1}{2}(-15x^2 + 1)$
 4. $48x^3 - 60x^2 + 30x - 28$
 5. $2x^7 + 13x^6 + 6x^5 - 31x^4 - 24x^3 + 23x^2 - 32x - 30$
 6. $\frac{-(15x^4 + 4x)}{(3x^5 + 2x^2 + 3)^2}$ 7. $\frac{4x^5 - 10x^4 - 10x^2 + 40x - 3}{(x-2)^2}$
 8. $\frac{-3x^2 - 14x + 11}{(x-8)^2(x+3)^2}$
 9. $\frac{-2v^4 - 18v^3 - 47v^2 + 44v + 15}{(v^3 + 6v^2 - v + 2)^2}$
 10. $\frac{48t - 168t^8 + 84t^6 + 42t^5 + 21t^4 + 24t^3}{(2t^3 - t)^4}$
 11. $\frac{-18y^6 + 13y^4 + 138y^2 - 46y + 40}{(y^3 + 2y - 1)^2(2y + 5)^2}$
 17. $\frac{(3x^6 + 4)^{10}(8x^3) - (2x^4 - 15)(3x^6 + 4)^9(180x^5)}{(3x^6 + 4)^{20}}$
 19. $b = 8,$

แบบฝึกหัด 6.3

1. $-160(3-8x)^{19}$ 2. $10(x^3 - 5x^2 + 1)^9(3x^2 - 10)$
 3. $n(ax^3 + bx^2 + cx + d)^{n-1}(3ax^2 + 2bx + c)$

4. $(3x-2)^3(2)(x^3-1)(3x^2)+(x^3-1)^2(3)(3x-2)^2(3)$
5. $(3x^4-4x^3+x+1)^4(8)(-4x^5+10x^3-12)^7(-20x^4+30x^2)$
 $+9-4x^5+10x^3-12)(4)(3x^4-4x^3+x+1)(12x^3-12x^2+1)$
6. $\frac{-8(3x^5-2x^3+1)^7(15x^4-6x^2)}{(3x^5-2x^3+1)^{16}}$
7. $-25(-4x^7+3x^3+10)^{-6}(-28x^6+9x^2)$
8. $\frac{4(x^4-3x^2+1)^3(32x^3-15x^2+1)-3(3x^4-5x^3+1)(x^4-3x^2+1)^2(4x^3-6x)}{(x^4-3x^2+1)^6}$
9. $(3x+1)^2(x^4-3)^4[160(x^4-1)^4x^6+24x(x^4-1)^5]$
 $\frac{-8x^3(x^4-1)^5[12x(3x+1)^2(x^4-3)^3+2(x^4-3)^4(3x+1)]}{(3x+1)^4(x^4-3)^8}$
10. $\frac{164(5u+2)^3}{(7-3u)^5}$
11. $\frac{(3t^4-t+5)^2[(t^6+3t^3+t)(12t^3-1)-(3t^4-t+5)(6t^5+9t^2+1)]}{(t^6+3t^3+t)^4}$
12. $3(10w^4-8w+2)^{-4}(4w^5-w^2+6)^2(20w^4-2w)$
 $+(4w^5-w^2-6)^3(-4)(10w^4+8w+2)^{-5}(40w^3+8)$
13. $-8\left(\frac{4s^4+5s}{3s^3+1}\right)^{-9}\left[\frac{(3s^3+1)(16s^3+5)-(4s^4+5s)(9s^2)}{(3s^3+1)^2}\right]$
14. $(3x^2+x+5)^3\frac{[12x^3-2-(3x^4-2x+1)(3)(3x^2+x+5)^2(6x+1)]}{(3x^2+x+5)^6}$
15. สำหรับ $|t| < \frac{2}{3}$, $\phi'(t) = -18t$
 สำหรับ $|t| > \frac{2}{3}$, $\phi'(t) = 18t$
 $D_\phi = \mathbf{R}$, $D_{\phi'} = \{t/t \in \mathbf{R}, t \neq \pm \frac{2}{3}\}$
16. $\frac{1}{625}$

แบบฝึกหัด 6.4

$$1. \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}} \quad 2. 3(3x^4-2x+4)^{\frac{1}{2}}(6x^3-1)$$

$$3. \frac{1}{11}(21x^2-3)(7x^3-3x+10)^{-\frac{10}{11}}$$

$$4. 3ax^2+2bx+c$$

$$5. -\frac{5}{\sqrt{8-x}\sqrt{(2+x)^3}}$$

$$6. \frac{9v^3}{2}(v^3-a^2)^{\frac{3}{4}}+(v^3-a^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$7. 4(w-3)^3-4(w-3)^{-5}$$

$$8. \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

$$9. -\frac{5}{3}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$10. \frac{\sqrt{6+4t^3}(15t^2-6t)-6t^2(6+4t^3)^{-\frac{1}{2}}(5t^3-3t^2+1)}{(6+4t^3)}$$

$$11. \frac{5}{2}\left(\frac{10z}{17z^2-5}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{5(17z^2-5)(10z)^{-\frac{1}{2}}-34z}{(17z^2-5)^2}10z\right]$$

$$12. \frac{1}{2}u(3+u^2)^{-\frac{1}{2}}(2+\sqrt{3+u^2})^{-\frac{1}{2}}.$$

แบบฝึกหัด 6.5

$$1. 12x^2-36x$$

$$2. 6ax+2b$$

$$3. x^{-3}$$

$$4. \frac{1}{2}[(4x^5-4x^3+2)^{-\frac{1}{2}}(80x^3+24x)-\frac{1}{2}(20x^4+12x^2)(4x^5+4x^3+2)^{-\frac{3}{2}}(20x^4-12x^2)]$$

5. $2(2x+1)(x-3)^2 + (2x+1)[2(2x+1)(x-3) + 2(x-3)^2]$
 6. $8(2x+4)^{-3}$
 7. $3[(2x-1)^2(3)(x+1)^2 + (x+1)^3(2)(2x^3-1)6x^2]$
 8. $72x$ 9. $-3072(8x+1)^{-4}$ 10. $-24(3-4x)^{-\frac{5}{2}}$
 11. $108(3x+1)^{-4}$
 12. $\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}x(-\frac{3}{2})(x-1)^{-\frac{5}{2}} + (x-1)^{-\frac{3}{2}} + (-\frac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}}]$
 13. $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D_x^n y = \frac{2^n (n!)}{(1-2x)^{n+1}}$

แบบฝึกหัด 6.6

1. $-\frac{y}{3x}$ 2. $-\frac{4x}{9y}$ 3. $\frac{3x(x-2y)}{3x^2+7}$ 4. $\frac{20\sqrt{xy}-y}{6\sqrt{xy}+x}$
 5. $\frac{6y^2}{4xy-3x^4y^{\frac{1}{2}}}$
 6. $-(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$ 7. $\frac{(y^3-1)(2+4y^3)}{9x^2y^5}$
 8. $10(x-2y)^{-3}$
 9. $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$ 10. $\frac{48xy^2-9x^4}{64y^3}$
 11. $3y^{-3}$

แบบฝึกหัด 7.1

1. $2x-y=1, x+2y=3$ 2. $12x+4y-5=0$

3. $D_x y = \frac{x}{y}$, $\sqrt{2}x - y - 6 = 0$

4. $3x + 2y - 8 = 0$ 6. 45°

7. $4x + y - 7 = 0$, $4x + y + 9 = 0$

8. $2x + y + 5 = 0$, $6x + 3y - 17 = 0$.

แบบฝึกหัด 7.2

1. 150 ลูกบาศก์ฟุต / วินาที

2. .8 ฟุต / นาที

3. $D_t h = \frac{1}{4\pi}$ ฟุต / วินาที

4. $D_t x = \frac{9}{3}$ ฟุต / วินาที

5. $\frac{1}{12}$ ฟุต / นาที

6. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ หน่วย / วินาที

7. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ฟุต / วินาที

8. $\frac{2}{\pi}$ ฟุต / วินาที

9. 860.261 ไมล์ / ชั่วโมง

10. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ฟุต/วินาที

11. $\frac{3}{32\pi}$ ฟุต / นาที

12. $3\sqrt{5}$ หน่วย/วินาที

13. $\frac{192}{49\pi}$ ฟุต / นาที

14. $\frac{1}{3}$ ตารางฟุต/วินาที
 $3\sqrt{6\pi}$

15. $\frac{15}{4}$ ฟุต / วินาที

16. 1.5 ฟุต / นาที

แบบฝึกหัด 8.1

1. $x = \pm\sqrt{2}$

2. $x = 0, \pm 1$

3. $x = 3, 1$

4. $x = 84, -\frac{7}{4}$

5. มี 2 เพียงจำนวนเดียวซึ่ง $F'(2) = 0$ จุดซึ่งจะเป็นค่าสุดขีดมีเพียงจุดเดียว
คือ 2 (โดย 8.1.3 ทฤษฎีบท)

$$\text{แต่ } x < 2 \text{ ---} \rightarrow F(x) < 0$$

$$x > 0 \text{ ---} \rightarrow F(x) > 0$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทค่าสุดขีด $F(2)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดของ F บนช่วง $(0, 3)$

6. สูงสุดคือ 1 ที่ทุกจุดในช่วง $[1, 2)$
 ค่าสุดคือ 0 ที่ทุกจุดในช่วง $(0, 1)$
7. h ต่อเนื่อง, $h(-3)=h(3)=1$, $z=\pm\sqrt{3}$
8. g ต่อเนื่อง, $g(-1)=g(2)=0$, $z=\frac{1}{2}$
9. 1 ค่าในช่วง $[-3, -2]$ 2. 2 ค่าในช่วง $[-2, -1], [1, 2]$.

แบบฝึกหัด 8.2

1. $z=-1$ 2. ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ 3. ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$
 4. ไม่เพราะว่า $H'(1)$ ไม่มี 5. $z=1+\sqrt{2}$.

แบบฝึกหัด 8.3

1. ลดลงบน $(-\infty, -3]$, เพิ่มขึ้นบน $[-3, -\frac{1}{2}]$, ลดลงบน $[-\frac{1}{2}, 2]$ และเพิ่มขึ้นบน $[2, \infty)$
2. ลดลงบน $(-\infty, -1]$, เพิ่มขึ้นบน $[-1, 1]$, ลดลงบน $[1, 2]$ และเพิ่มขึ้นบน $[2, \infty)$
3. $x \leq -\sqrt{2}$ หรือ $x \geq \sqrt{2}$ เพิ่มขึ้น 4. $x < 0$ ลดลง
 $-\sqrt{2} < x \leq \sqrt{2}$ ลดลง $x > 0$ เพิ่มขึ้น
5. เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0)$ และบนช่วง $[4, \infty)$ ลดลงบนช่วง $(0, 4]$

แบบฝึกหัด 8.4

1. $v=4t-4$ 2. $v=-t^3+6t+1$ 4. $v=4t^3-6t^2+2t$
 $a=4$ $a=-6t$ $a=12t^2-12t+2$
5. $v=2t-\frac{16}{t^2}$
 $a=2+\frac{32}{t^3}$

6.

(i) 9 ฟุต, ความเร็ว 21 ฟุต / วินาที ความเร่ง 18 ฟุต/วินาที

(ii) ไปข้างหน้า $t < -\sqrt{2}$, $t > \sqrt{2}$, ย้อนกลับ $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ (iii) $t = \pm\sqrt{2}$ (iv) ช่วงเวลาเป็นบวก $t > 0$ ช่วงเวลาเป็นลบ $t < 0$

(v) -6 ฟุต / วินาที

7. 100 ฟุต, 5 วินาที, -80 ฟุต / วินาที

8. 276 ฟุต 9. (i) $t = 0.75$, $t = 0.5$ (ii) $t = 0$, $t = 1.5$

แบบฝึกหัด 8.5

1. 2 b. -0.4 2. 0.4 (b) -1.2

3. $(2x+10)dx$ 4. $-24x^2(3+2x^3)^{-5}dx$ 5. $\frac{1}{2}(3x^4+2x-1)^{-\frac{1}{2}}(12x^3+2)dx$ 6. $\frac{1}{5}[(t^3-4)^3]^{-\frac{4}{5}}9t^2(t^3-4)^2dt$ 7. $(3x^3+1)^2 3(x-3)^2 + 18(x-3)^2(3x^3+1)x^2 dx$ 8. $-(x-1)^2(x^2+1)^{-2}[-(x-1)^2(x^2+1)^{-2}2xdx + (x^2+1)^{-1}2(x-1)dx]$ 9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3x^2}{x^7}$ 10. a. $\Delta y = 0.84$, $dy = 0.8$ b. $\Delta y = 0.41$, $dy = 0.4$ 11. $dy = 0.33$ 12. a. 7.0714 b. 3.037 13. 22.62 ลบ.นิ้ว

14. 3.817 ลบ.นิ้ว 15. 5.2779 ลบ.นิ้ว.

แบบฝึกหัด 8.7

1. $f(-1) = 12$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f $f(2) = -15$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f 2. $f(-1) = 1$ ค่าสูงสุด, $f(1) = -3$ ค่าสูงสุด 3. $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$ สูงสุด4. $h(1) = -1$ ต่ำสุด 5. $G(3) = -28$ ต่ำสุดสัมพัทธ์และต่ำสุด6. $f(\frac{23}{7})$ ต่ำสุดสัมพัทธ์และต่ำสุด 7. ไม่มี

8. $f(1)=2$ ค่าสุดสัมพัทธ์
 $f(-1)=2$ สูงสุดสัมพัทธ์
10. $f(\frac{3\sqrt{2}}{2})=\frac{9}{2}$ สูงสุดสัมพัทธ์และสูงสุด
 $f(\frac{-3\sqrt{2}}{2})=-\frac{9}{2}$ ค่าสุดสัมพัทธ์และต่ำสุด
9. $f(0)$ ค่าสุดสัมพัทธ์และต่ำสุด

แบบฝึกหัด 8.8

1. $F(\frac{3}{2})=\frac{159}{4}$ สูงสุดสัมพัทธ์, $F(\frac{7}{4})=\frac{635}{16}$ ค่าสุดสัมพัทธ์
2. $f(-1)=12$ สูงสุดสัมพัทธ์
 $f(2)=-15$ ค่าสุดสัมพัทธ์
3. $h(-1)=-137$ ค่าสุดสัมพัทธ์
4. $f(1)=2$ ค่าสุดสัมพัทธ์และต่ำสุด
5. $F(\frac{27}{8})=-\frac{9}{4}$ ค่าสุดสัมพัทธ์และต่ำสุด

แบบฝึกหัด 8.9

1. 6, 2 2. $\frac{1}{2}$ 3. กว้าง 10 ยาว 20
4. 20 ฟุต, 30 ฟุต 5. 1024 ลบ. นิ้ว
6. $\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}$ 7. a. สูง $(1, \frac{10}{a})$, ค่า $(3, \frac{20}{3})$
b. สูง $(6, \frac{5}{8})$ ค่า $(4, \frac{25}{36})$
8. $2r^2$ ตารางหน่วย
9. 6, 18 10. ส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยมยาว $\frac{64}{\sqrt{4}}$ นิ้ว 11. $\frac{128}{4+\sqrt{}}$ ตารางฟุต
12. $x=2\sqrt{\frac{2A}{\sqrt{4}+4}}$, $y=\sqrt{\frac{2A}{\sqrt{4}+4}}$ 13. P: (9, 0) 14. $\frac{32\sqrt{r}}{81}r^3$
15. $\frac{r}{h}=\frac{1}{4}$ 16. $\frac{6}{\sqrt{2}}$ ไมล์จากจุดที่ใกล้เกาะที่สุด

17. ต้องโยงสายไฟฟ้าจากโรงไฟฟ้าข้ามแม่น้ำไปยังฝั่งตรงกันข้าม ห่างจากจุดตรงกันข้ามเป็นระยะทาง $250/\sqrt{6}=102.06$ เมตร

19. ห่างจากแหล่งที่ 1 เป็นระยะ

$$\frac{SI_1 \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \quad \text{เมตร}$$

20. $\frac{\text{สูง}}{\text{กว้าง}} = \frac{1+1}{2}$

แบบฝึกหัด 8.10

1. เว้าลง 2. เว้าลง $-3 < x < 3$ 3. เว้าลง
4. เว้าลง $x < 0$, เว้าขึ้น $x > 0$ 5. เว้าลง $x < 0$, เว้าขึ้น $x > 0$
จุดเปลี่ยนโค้ง $(0, 0)$
6. เว้าลง $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $x \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$ เว้าลง $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$, $(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{9}{8})$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

แบบฝึกหัด 8.11

1. 0 2. $-\frac{1}{5}$ 3. $\frac{a_0}{b_0}$ 5. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
8. $-\infty$ 9. $+\infty$ 11. $+\infty$, $+\infty$ 12. $x=3$, $x=-3$
13. $x=1, y=1$ 14. $x=2, y=1$ 15. $x=-\frac{1}{2}$, $x=4$ และ $y=\frac{3}{2}$
16. $x=0, y=4$ 17. $x=-1, y=x+2$ 18. $x=0, y=x$
19. $x=-5, y=3x-1$

แบบฝึกหัด 8.12

1. a. เพิ่มตลอด b. ว่างลงบน $(-\infty, 0)$ ว่างขึ้นบน $(0, \infty)$ c. ไม่มี
d. $(1, -2)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า
2. a. ลดลงบน $(-\infty, \sqrt[3]{2})$ เพิ่มขึ้นบน $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ b. ว่างขึ้นตลอด
c. $(\sqrt[3]{2}, -6\sqrt[3]{2})$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ d. ไม่มี e. ไม่มี
3. a. ลดลงบน $[-3, -2]$ เพิ่มขึ้นบน $(-2, \infty)$ b. ว่างขึ้นตลอด
c. $(-2, -4)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ d. ไม่มี e. ไม่มี
4. a. ลดลงบน $(-\infty, -\sqrt{2})$ และ $[\sqrt{2}, \infty)$ เพิ่มบน $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
b. ว่างขึ้นบน $[-\sqrt{6}, 0]$ และ $[\sqrt{6}, \infty)$ ว่างลงบน $(-\infty, -\sqrt{6}]$ และ $[0, \sqrt{6}]$
d. $(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}), (0, 0)$ และ $(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า
e. แกน x เป็นเส้นกำกับแนวนอน
5. a. ลดลงบน $(-\infty, -1), (-1, -3-2\sqrt{2})$ เพิ่มขึ้นบน $[3+2\sqrt{2}, \infty)$
b. ว่างลงบน $(-\infty, -1)$ และ $(1, k]$ เมื่อ $k=8.7$ และว่างขึ้นบน $(-1, 1)$
และ $[k, \infty)$
d. $H(3-2\sqrt{2})=2.9$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า e. $x=-1, x=1$ และ $y=0$ เป็น
เส้นกำกับ 8. a. $D_H = \mathbb{R}, H'(x)=3x^2, x \geq 0, H'(x)=-3x^2, x < 0$
b. $D_{H''} = \mathbb{R}, H''(x)=6x, x \geq 0, H''(x)=-6, x < 0$ c. ค่าต่ำสุด $H(0)=0$

แบบฝึกหัด 8.13

- | | | | |
|---------------------|-----------|------------------|-----------------------|
| 1. 2.646 | 2. 2.0868 | 3. 1.4953 | 4. 0.241 |
| 5. 3.73, 0.27 | | 6. 2.732, -0.732 | |
| 7. 1.71, 0.29 | | 8. 2.21 | 9. -1.53, -0.35, 1.88 |
| 10. 4.0608, 0.24626 | | 11. 1.2879 | |

แบบฝึกหัด 9.2

- | | | | |
|------------------|-------------|------|-------------|
| 1. π | 2. 1 | 3. 1 | 4. 0 |
| 5. $\frac{1}{2}$ | 6. 1 | 7. 2 | 8. ∞ |
| 9. 0 | 10. π^2 | | |

แบบฝึกหัด 9.3

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{(\sec \sqrt{x})(\tan \sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ | 2. $\sec x (\sec^2 x + \tan^2 x)$ |
| 3. $\frac{2\csc(\frac{2}{x})\cot(\frac{2}{x})}{3x^2\csc^3(\frac{2}{x})}$ | 4. $-e^{\cot z}(\csc^2 z)$ |
| 5. $\frac{-\cot \sqrt{x}\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ | 6. $8\sin^3 2x \cos 2x + 3\sin x \cos^2 x$ |
| 7. $\frac{1+2\csc^2 x \cot x}{2\sqrt{x}-\csc^2 x}$ | 8. $\frac{\cot \pi x + \pi(x-1)\csc^2 \pi x}{\cot^2 \pi x}$ |
9. ไม่มีค่าสูงสุด ค่าสุด, $(0,0)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า เวก้าขึ้นบน $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ เวก้าลงบน $(0, \frac{\pi}{2})$

แบบฝึกหัด 9.4

- $f^{-1}(y) = \frac{x+1}{2}$, $D_{f^{-1}} = R = R_{f^{-1}}$
- $f^{-1}(y) = \frac{(1-y)^2}{2}$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$, $R_{f^{-1}} = (-\infty, \frac{1}{2}]$

$$3. \quad f^{-1}(y) = 5 + \frac{1}{y}, \quad D_{f^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \quad R_{f^{-1}} = (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$$

$$4. \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{y}, \quad D_{f^{-1}} = \{y/y \neq 0\}, \quad R_{f^{-1}} = \{x/x \neq 0\}$$

$$5. \quad f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{3y}, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}, \quad R_{f^{-1}} = \{x/x \neq \frac{2}{3}\}$$

$$6. \quad f^{-1}(y) = y^{\frac{2}{3}}, \quad y > 0$$

$$7. \quad f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}}, \quad y \neq 0.$$

แบบฝึกหัด 9.5

$$1. \quad \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$2. \quad \frac{\pi}{4}$$

$$3. \quad \frac{1}{x^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$4. \quad \frac{e^t}{e^{2t}+1}$$

$$5. \quad \frac{1}{2(3-x)\sqrt{2-x}}$$

$$6. \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x$$

$$7. \quad \frac{-1}{2\sqrt{(1-x^2)} \cos^{-1} x}$$

$$8. \quad \frac{1}{x|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$9. \quad \frac{-\csc x \cot x}{1+\csc^2 x}$$

$$10. \quad \frac{2 \tan^{-1} x}{1+x^2}$$

$$11. \quad 4e^{3z} \cot^{-1}(3z) = \frac{3e^{3z}}{1+9z^2}$$

$$14. \quad 4 \text{ ฟุต}$$

$$15. \quad \frac{8}{5} \text{ เรเดียน /วินาที}$$

แบบฝึกหัด 9.7

$$23. \quad y=1, \quad y=-1$$

$$24. \quad \text{สูงสุด } 1 \text{ ที่ } x=0 \text{ จุดเปลี่ยนเว้าที่ } x=\pm \ln(\sqrt{2}+1) \text{ เว้าลงบน } -\ln(\sqrt{2}+1), \\ \ln(\sqrt{2}+3) \text{ เว้าขึ้นเมื่อ } x < -\ln(\sqrt{2}+1) \text{ และ } x > \ln(\sqrt{2}+1).$$

แบบฝึกหัด 9.8

1. $3\cosh 3x$
2. $\frac{3x^2}{\sqrt{x^6-1}}$
3. $\tan x(4x^3 \sinh x^4)$
4. $\sinh^{-1} 2x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$
5. $\frac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1+\tanh^{-1} x}}$
6. $\frac{e^x}{1-e^{2x}}$
7. $\frac{2x}{1-x^4}$
8. $\frac{-2}{\sqrt{4x^2-(\cosh^{-1} 2x)^2}}$

แบบฝึกหัด 10.3

2. a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ วงรี b. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ ไฮเพอร์โบลา
3. วงรี จุดยอด $(\pm 6, 0)$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ โฟกัส $(3 \pm \sqrt{3}, 0)$ ไคเรกตริกซ์ $x = \pm 4\sqrt{3}$

แบบฝึกหัด 10.4

1. จุดยอด $= (\pm 5, 0)$ แกนเอก $= 10$ แกนโท $= 6$ $e = \frac{4}{5}$ โฟกัส $= (\pm 4, 0)$
เส้นไคเรกตริกซ์ $\frac{a}{e} = \frac{25}{4}$
2. จุดยอด $= (\pm \sqrt{10}, 0)$ $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ โฟกัส $= (\pm \sqrt{5}, 0)$ ไคเรกตริกซ์ $x = \pm 2\sqrt{5}$
แกนเอก $= 2\sqrt{10}$ แกนโท $= 2\sqrt{5}$
3. จุดยอด $= (0, \pm 5)$ $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$ โฟกัส $= (0, \pm \sqrt{21})$ ไคเรกตริกซ์ $y = \pm 25 \frac{\sqrt{21}}{21}$
แกนเอก $= 10$ แกนโท $= 4$
4. $a=3$, $b=2$ แกนमुखสำคัญอยู่บนแกน x จุดยอด $= (\pm 3, 0), (0, \pm 2)$ $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$
โฟกัส $= (\pm \sqrt{5}, 0)$
5. $a=3$, $b=2$ แกนमुखสำคัญอยู่บนแกน y จุดยอด $= (\pm 3, 0), (0, \pm 6)$ $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{โฟกัส} = (0, \pm 3\sqrt{3}) \quad \text{ไคเรกตริกซ์} \quad y = \pm \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$6. \quad 27x^2 = 36y^2 = 972$$

$$7. \quad 45x^2 + 81y^2 = 3645$$

$$8. \quad 73x^2 + 64y^2 = 4672$$

$$9. \quad 12x^2 + 8y^2 = 96$$

$$10. \quad 3x^2 + 7y^2 = 75$$

$$11. \quad e = \frac{\sqrt{4}}{4} \quad \text{จุดศูนย์กลาง} = (-2, 5) \quad \text{โฟกัส} = (-2 \pm \sqrt{7}, 5)$$

$$\text{ไคเรกตริกซ์} \quad x = -2 \pm \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

$$12. \quad e = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{จุดศูนย์กลาง} = (-6, 6) \quad \text{โฟกัส} = (-6, \pm 4 \cdot 2)$$

$$\text{ไคเรกตริกซ์} \quad y = \pm \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$13. \quad e = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{จุดศูนย์กลาง} = (0, 2) \quad \text{โฟกัส} = (0, 0) \text{ และ } (0, 4)$$

$$\text{ไคเรกตริกซ์} \quad y = 8 \text{ และ } y = -4$$

$$14. \quad 101x^2 + 48xy + 81y^2 - 564x + 612y + 792 = 0$$

$$16. \quad (16 + 2\sqrt{5})x^2 + (2 + 2\sqrt{5})y^2 = 32 + 16\sqrt{5}$$

$$17. \quad e = 0 \quad \text{โฟกัสที่} = (0, 0) \text{ ไม่มี} \quad 18. \quad e = .01674$$

แบบฝึกหัด 10.5

$$1. \quad e = \frac{\sqrt{41}}{5} \quad \text{จุดยอด} = (\pm 3, 0) \quad \text{โฟกัส} = (\pm \sqrt{41}, 0) \quad \text{ไคเรกตริกซ์} \quad x = \pm \frac{25}{\sqrt{41}}$$

$$\text{เส้นกำกับ} \quad 4x \pm 5y = 0$$

$$2. \quad e = \frac{\sqrt{7}}{5} \quad \text{จุดยอด} = (\pm \sqrt{51}, 0) \quad \text{โฟกัส} = (\pm \sqrt{21}, 0) \quad \text{ไคเรกตริกซ์} \quad x = \pm \frac{\sqrt{75}}{7}$$

$$\text{เส้นกำกับ} \quad \sqrt{2}x + \sqrt{5}y = 0$$

$$3. \quad e = \frac{\sqrt{13}}{3} \quad \text{จุดยอด} = (0, \pm 3) \quad \text{โฟกัส} = (0, \pm \sqrt{13}) \quad \text{ไคเรกตริกซ์} \quad y = \pm \frac{9\sqrt{13}}{13}$$

$$2a=6 \quad 2b=4 \quad \text{เส้นกำกับ} \quad 2x \pm 3y = 0$$

$$4. \quad e = \frac{\sqrt{41}}{4} \quad \text{จุดยอด} = (\pm 4, \pm 5) \quad \text{โฟกัส} = (\pm \sqrt{41}, 0) \quad a=4 \quad b=5$$

$$\text{เส้นกำกับ} \quad 5x \pm 4y = 0$$

$$5. \quad a=2 \quad b=3 \quad \text{แกนผ่าอยู่บนแกน } x \quad \text{จุดยอด} = (\pm 2, 0) \quad e = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{โฟกัส} = (\pm \sqrt{13}, 0) \quad \text{ไคเรกตริกซ์} \quad x = \pm \frac{4}{\sqrt{13}} \quad \text{เส้นกำกับ} \quad 3x \pm 2y = 0$$

$$6. \quad 9x^2 - 19y^2 = 144$$

$$7. \quad 9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$8. \quad -8x^2 + 4y^2 = 32$$

$$9. \quad -36x^2 + 45y^2 = 405$$

$$11. \quad x^2 - 4y^2 = 12$$

$$12. \quad 164x - 45y - 31 = 0$$

$$45x + 64y - 500 = 0$$

$$13. \quad x \pm y - 1 = 0.$$

แบบฝึกหัด 10.6

$$1. \quad 5x - 2\sqrt{5}y - 15 = 0$$

$$2. \quad x + y + 4 = 0, \quad x - y + 2 = 0$$

$$3. \quad \sqrt{10}x + 2y + 2\sqrt{10} = 0$$

$$4. \quad x + 2y - 5 = 0$$

$$5. \quad (2\sqrt{7}, -2)$$

$$6. \quad x - \sqrt{2}y \pm 2 = 0$$

$$7. \quad 2x + y - 4 = 0, \quad 2x - 4y + 1 = 0$$

แบบฝึกหัด 10.7

$$1. \quad (2, -2\sqrt{2}), (0, 2\sqrt{2}), (1, 1) \quad 2. \quad y' + 2 = 0 \quad 3. \quad \frac{x'}{2}{}^2 - \frac{y'}{2}{}^2 = 1$$

$$4. \quad 2x'{}^2 + 8y'{}^2 = 36$$

$$5. \quad x'{}^2 + 2y'{}^2 - 2x' + 3y' + 1 = 0$$

$$6. \quad 130x'{}^2 - 39y'{}^2 + 11\sqrt{13}x' + 16\sqrt{13}y' + 13 = 0$$

7. $55x'^2 + 22y'^2 - 4 = 0$

8. $31x'^2 + y'^2 + 10 = 0$

9. $250x'^2 + 7x' + y' + 5 = 0$

แบบฝึกหัด 10.8

1. ไฮเพอร์โบลา $5x''^2 - 2y''^2 = 0$ มุม $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ จุด $(-1, -3)$

2. ไฮเพอร์โบลา $2x''^2 - 3y''^2 = 6$ มุม $\tan^{-1} 3$ จุด $(3\sqrt{10}, 4\sqrt{10})$

3. พาราโบลา $x''^2 - 6y'' = 0$ มุม $= \frac{\pi}{4}$ จุด $(-3, -2)$

4. วงรี $13x''^2 + 3y''^2 = 78$ มุม $\tan^{-1} \frac{1}{13}$ จุด $(-2\sqrt{10}, \sqrt{10})$

5. ไฮเพอร์โบลา $-11x''^2 + 2y''^2 = 2$ มุม $\tan^{-1} \frac{2}{3}$ จุด $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{13})$

แบบฝึกหัด 10.9

6. ไฮเพอร์โบลา

7. วงรี

8. เส้นตรง

9. พาราโบลา

แบบฝึกหัด 11.1

5. a. $(\sqrt{5}, 0)$

b. $(-5, 0)$

c. $(2, 2\sqrt{3})$

d. $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

6. $r \cos \theta - 2r \sin \theta = 3$

7. $r = \frac{4}{\cos \theta}$

8. $r \sin \theta + 5 = 0$

9. $r = 4$

10. $x^2 + y^2 = 4$

11. $(x-1)^2 + y^2$

12. $a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + ax)^2$

13. $y = 4$

14. $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$

15. $y-4=0$.

แบบฝึกหัด 11.3

1. a. $r \sin \theta = 3$ b. $r \cos \theta = -4$ c. $\theta = \frac{2\pi}{3}$ d. $\theta = \frac{\pi}{2}$

2. $r \sin \theta + 4\sqrt{2} = 0$ 6. $r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) - 9 = 0$

7. $(-2, \frac{2\pi}{3})$

9. พาราโบลา จุดยอด $(-1, 0)$ ไคเรกตริกซ์ $r \cos \theta = 2$

10. วงรี จุดยอด $(4, 0), (\frac{4}{3}, \pi)$ จุดศูนย์กลาง $(\frac{4}{3}, 0)$ โฟกัส $(0, 0), (\frac{8}{3}, 0)$

ไคเรกตริกซ์ $r \cos \theta + 4 = 0$ $3r \cos \theta - 20 = 0$

11. ไฮเพอร์โบลา จุดยอด $(\frac{72}{13}, \frac{\pi}{2}), (-\frac{72}{5}, \frac{3\pi}{2})$ จุดศูนย์กลาง $(\frac{648}{65}, \frac{\pi}{2})$

โฟกัส $(0, \frac{\pi}{2}), (8, \frac{\pi}{2})$ ไคเรกตริกซ์ $4r \sin \theta - 7 = 0$ $4r \sin \theta - 25 = 0$

12. วงรี จุดยอด $(\frac{13}{6}, 0), (13, \pi)$ จุดศูนย์กลาง $(\frac{65}{6}, \pi)$ โฟกัส $(0, 0),$

$(\frac{65}{6}, \pi)$ ไคเรกตริกซ์ $5r \cos \theta - 26 = 0$ $30r \cos \theta + 48 = 0$

13. $e=1$ พาราโบลา จุดยอด $(1, \frac{\pi}{2})$ ไคเรกตริกซ์ $r \sin \theta = 2$

14. $e=\frac{4}{3}$ ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง $(-\frac{12}{5}, \frac{\pi}{2})$ จุดยอด $(-4, \frac{\pi}{2})$ และ

$(4, -\frac{\pi}{2})$

15. $e=\frac{3}{2}$ ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง $(-\frac{12}{5}, \frac{\pi}{2})$ จุดยอด $(-4, \frac{\pi}{2})$ และ

$(4, -\frac{\pi}{2})$ โฟกัส $(0, 0)$ และ $(-\frac{24}{5}, \frac{\pi}{2})$ ไคเรกตริกซ์ $r \sin \theta = -\frac{4}{3}$ และ

$r \sin \theta = -\frac{52}{15}$

16. $e=3$ ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง $(-\frac{3}{8}, 0)$ จุดยอด $(-\frac{1}{2}, 0)$ และ $(\frac{1}{4}, 1)$

โฟกัส $(0, 0)$ และ $(-\frac{3}{4}, 0)$ ไคเรกตริกซ์ $r \cos \theta = -\frac{1}{3}$ และ

$$r \sin \theta = -\frac{5}{12}$$

17. $8+5\sqrt{2}=15.1$, $8-5\sqrt{2}=0.9$

18. จุดยอด $(\frac{ed}{1-e}, 0), (\frac{ed}{1+e}, 1)$ จุดศูนย์กลาง $(\frac{e}{1-e^2}, 0)$

แบบฝึกหัด 11.5

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{5}$ 2. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 3. $\sqrt{3}-1, -(4+3\sqrt{3})$

4. $\sqrt{3}-2, -1$ 5. $\frac{51}{4}, \frac{(41+51)}{(4-51)}$ 6. $\theta=0, \theta=\frac{\pi}{2}$

7. $\theta=\frac{\pi}{2}$ 8. $\theta=0, \theta=\frac{\pi}{3}, \theta=\frac{2\pi}{3}$ 9. $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{3}), (0, 0)$

10. $(0, 0)$ ประมาณ $(\frac{2}{3}, 0.34)$ และ $(\frac{2}{3}, 3.48)$ 12. $-\sqrt{3}$

แบบฝึกหัด 12.1

2. $y=\sqrt{x-2}$, $2 \leq x \leq 5$ เส้นโค้งเชิงเดียว

3. $x^3-y^2=0$, $-1 \leq y \leq 8$ เส้นโค้งเชิงเดียว

5. $y=\frac{5\sqrt{9-x^2}}{3}$, $0 < x < 3$ 6. $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

7. $y=9-6\sqrt{x}+x$, $0 \leq x \leq 9$ เส้นโค้งเชิงเดียว

8. $y=\frac{x^2-8}{2}$, $-4 \leq x \leq 4$ ส่วนโค้งเชิงเดียว

9. $x=5\sec\theta+5$, $y=2\tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$10. \quad x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

$$11. \quad x = 2 \sin \theta, \quad y = 2 \cos \theta + 2$$

$$12. \quad x = 4 - 3t, \quad y = t.$$

แบบฝึกหัด 12.2

$$3. \quad x = (a-b) \cos \phi + b \cos \left[\frac{(a-b)}{b} \right] \phi, \quad y = (a-b) \sin \phi - b \sin \left[\frac{(a-b)}{b} \right] \phi$$

แบบฝึกหัด 12.3

$$1. \quad \frac{-1}{4t^3} \quad 2. \quad \frac{-1}{t^3} \quad 3. \quad \frac{2t^3}{[3(3t^2+2)]}, \quad t \neq 0$$

$$5. \quad -2t \tan t, \quad t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6. \quad 2x - y + 2 = 0, \quad 2x + 4y + 7 = 0$$

$$7. \quad \sqrt{3}x - 3y + 11\sqrt{3} + 3 = 0, \quad \sqrt{3}x + y + 3\sqrt{3} - 1 = 0.$$

แบบฝึกหัด 13.2

$$1. \quad A+B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A+B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad AB = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ -33 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

แบบฝึกหัด 13.3

1. $\det A = -5$, $\det B = 22$
2. 12
3. 72
4. -37
5. $\det A = 211 = \det A$.

แบบฝึกหัด 13.4

1. 139
2. -36
3. $\det A = -25$, $x = -2$, $y = 1$, $z = -5$
4. $(-2, 2, 1)$.

แบบฝึกหัด 13.5

1. 1
2. 1
3. 2
4. 3
5. $x = -\frac{17t+30}{16}$, $y = \frac{3t-26}{16}$, $z = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใดๆ
6. ไม่มีคำตอบ .

กรรมวิธี

ก

กฎของแครมเมอร์	490
กฎลูกโซ่	202
กฎไตรวิภาค	15
กราฟ	26
การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงขาคมูล	458
การสะท้อน	88
การส่ง	117
การแปลง	97
การเลื่อนทางขนาน	97
แกนตามขวาง	368
แกนमुखสำคัญ	80, 355
แกนสังยุค	369
แกนเอก	364
แกนโท	364

ข

ขอบเขตบน	22
ขอบเขตบนค่าน้อยสุด	22
ขอบเขตล่าง	22
ขอบเขตล่างค่ามากที่สุด	22

ค

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ 262

ค่าลำดับชั้น 497

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ 262

ค่าสถิติสัมพัทธ์ 262

ค่าสัมบูรณ์ 28

ค่าเบี่ยงศูนย์ 354

จ

จุดกำเนิด 41

จุดยอด 80,355

จุดวงกลม 76

จุดวงรี 389

จุดเปลี่ยนเว้า 283

ช

ไซคลอยด์ 448

ค

คิสคริมีแนนต์ 394

คิสคริมีแนนต์ของสมการ 394

โคเมน 115

ค

คัวก่อกำเนิด 353

ตัวกำหนด 353

ท

ทฤษฎีบทของโรล 235

ทฤษฎีบทค่ากลาง 241

บ

บริเวณปิด 107

บริเวณเปิด 107

ณ

แผ่นกลมปิด 107

แผ่นกลมเปิด 106

พ

พาราโบลา 356

พาราโบลาเสื่อมคล้าย 391

โพรเจกชัน 41

ฟ

ฟังก์ชันกำลังสอง 126

ฟังก์ชันคี่ 124

ฟังก์ชันคู่ 124

ฟังก์ชันคงตัว 125

ฟังก์ชันตรรกยะ 127

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	309
ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	333
ฟังก์ชันทางเดียว	245
ฟังก์ชันเพิ่ม	243
ฟังก์ชันพหุนาม	125
ฟังก์ชันพีชคณิต	127
ฟังก์ชันรากลำดับสอง	127
ฟังก์ชันลด	243
ฟังก์ชันศูนย์	126
ฟังก์ชันอดิศัย	128, 309
ฟังก์ชันเชิงเส้น	126
ฟังก์ชันเอกลักษณ์	125
ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	342
ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	348
ฟังก์ชันลอการิทึม	342
ฟังก์ชันชี้กำลัง	342

ก

ภาพ	117
-----	-----

ม

เมตริกซ์จัตุรัส	459, 471
เมตริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน	495
เมตริกซ์ย่อย	475
เมตริกซ์สัมประสิทธิ์	502

เมตริกซ์สมมูลแถว	459
เมตริกซ์สมมาตร	486
เมตริกซ์สามเหลี่ยม	485
เมตริกซ์ศูนย์	469
เมตริกซ์เอกฐาน	495
เมตริกซ์แต่งเติมแล้ว	502
เมตริกซ์แบบลดรูปเป็นขั้น	498

ร

ระนาบฟังก์ชันคาร์ทีเซียน	41
ระนาบพิกัดฉาก	41
เรเคียน	309
เรนจ์	115

ส

สัจพจน์ของความสมบูรณ์	23
สมการเชิงเส้น	59
สมการเชิงเส้นเอกพันธ์	508
สัมประสิทธิ์เมตริกซ์	459
ส่วนน้อย	476
ส่วนโค้ง	444
ส่วนโค้งเชิงเดียว	444
สี่เหลี่ยมผืนผ้าหลักมูล	372
เส้นจริง	24

เส้นจำนวน	24	
เส้นทแยงมุมสำคัญ	459	
เส้นนอร์แมล	220	
เส้นสัมผัส	219	
เส้นสมมาตร	88	
เส้นโคเรกตริกซ์	79,354	
เส้นโค้งกู่หลาบสี่กลีบ	417	
เส้นโค้งรูปหัวใจ	419	
เส้นโค้งระนาบ	440,444	
เส้นโค้งลีมาของ	415	
เส้นโค้งเลมนิสเคต	416	
เส้นโค้งเวียนกันหอยของอาร์คิมิดีส	418	
เส้นโค้งเวียนกันหอยแบบลอการิทึม	419	
เส้นโค้งเวียนกันหอยแบบส่วนกลับ	419	

อ

อตรรกยะ

อัตราสัมพัทธ์

อนันต์

อสมการ

อสมการสามเหลี่ยม

ฮ

ไฮเพอร์โบล่า

ไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ไฮเพอร์โบล่าเสื่อมคล้าย

136122