บทที่ 5
สรุปและอภิปรายผล

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน โดยวิธีที่เสนอคือ วิธียิงเป้า โดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และวิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับค่าขอบ

ประเภทของปัญหาที่สามารถใช้วิธีการที่นำเสนอเป็นสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันที่สมบัติ ดังนี้

1. ส่วนที่เป็นปริพันธ์เป็นแบบวอลแตร์ราและเฟรดโฮล์ม
2. สมการส่วนปริพันธ์เป็นที่สามารถแยกได้
3. สมการเชิงฟังก์ชันจะอยู่ในส่วนที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์หรือส่วนที่เป็นปริพันธ์
4. อนุพันธ์มีอันดับสูง ฟังก์ชันในสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เป็นทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น
5. สมการเชิงฟังก์ชันมีจุดร่วม
6. เงื่อนไขค่าขอบหลายจุดและเป็นสมการเชิงเส้น

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และขั้นตอนการแก้ระบบสมการ

การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น ผู้วิจัยแปลงสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน แล้วใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหา การแก้ระบบสมการผู้วิจัยเลือกใช้วิธีของบรอยเดน

ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน มีข้อที่ต้องพิจารณาในการดำเนินการแก้ปัญหาคือ ค่าของฟังก์ชันที่จุดที่พิจารณาและจุดที่เป็นฟังก์ชัน เพื่อที่จะให้การดำเนินการเริ่มต้นเป็นไปได้ จุดเริ่มต้นเป็นจุดร่วมของสมการเชิงฟังก์ชัน ซึ่งอาจจะไม่ใช่จุดขอบของช่วง ดังนั้นเมื่อเริ่มต้นที่จุดภายในของช่วงจึงต้องหาค่าฟังก์ชันทางขวาและทางซ้ายไปยังจุดขอบ กล่าวคือ ให้ h เป็นบวกและ h เป็นลบ

ผู้วิจัยเลือกใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น แทนที่จะเลือกใช้วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ด้วยเหตุผลดังต่อไปนี้

1. ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีเทย์เลอร์อันดับสี่เป็นอันดับสี่ เทียบเท่ากับวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่
2. ค่าของฟังก์ชันที่ต้องการใช้ในวิธีของเทย์เลอร์ เป็นค่าที่จุดแบ่งตามที่กำหนดไว้ตั้งแต่แรก

และที่จุดที่เป็นค่าของฟังก์ชัน แต่ค่าที่ใช้ในวิธีของรุงเง-คุตตาต้องเป็นค่าที่จุดกึ่งกลางของจุดแบ่งซึ่งยากต่อการคำนวณ

การแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น วิธีที่มีประสิทธิภาพคือ วิธีของนิวตัน-บรอยเดน ซึ่งเหมาะสำหรับวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นระบบสมการไม่เชิงเส้น แต่ถ้าเงื่อนไขค่าขอบเป็นระบบสมการเชิงเส้นแล้ว วิธีของนิวตัน-บรอยเดนจะเหมือนกับวิธีของบรอยเดน ดังนั้นเราจึงเลือกใช้วิธีของบรอยเดน

จากการทดลองแก้ปัญหาต่าง ๆ ผู้วิจัยพบว่า วิธีการที่ผู้วิจัยใช้สามารถแก้ปัญหาได้ดีทุกปัญหาที่ทดลอง สำหรับปัญหาค่าขอบของสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น และปริพันธ์ในแบบวอลแตร์ราและเฟลดโฮล์ม การแก้ปัญหาได้ดี หมายถึง การเลือกจุดคาดเดากระทำได้ง่ายและนำไปสู่ผลเฉลยได้รวดเร็ว (2-22 iterations) ค่าคลาดเคลื่อนอยู่ในขอบเขตที่กำหนด

ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยศึกษาการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน โดยกระทำภายใต้เงื่อนไขที่ว่า สมการส่วนปริพันธ์สามารถแยกได้ และสมการเชิงฟังก์ชันมีจุดร่วม กล่าวคือ $x = h(x)$ แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ประวิงเวลา (Delay Differential Equations) รูปแบบสมการคือ $y'(t) = f(y(t), y(t-\tau))$, $t \in \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นสมการเชิงฟังก์ชันที่ไม่มีจุดร่วม อาจต้องมีการแก้ปัญหาโดยกำหนดจุดกึ่งกลางและจุดต้น เป็นจุดเริ่มต้น 2 จุด ในการแก้ปัญหาพร้อม ๆ กัน

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University