

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในบทนี้เป็นการนำเสนอข้อมูลผลการทดสอบการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน โดยการแปลงสมการให้กลายเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน และใช้วิธีของเพียร์สันอันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีของบรอยเดนได้ผลดังนี้

ปัญหาที่ 1

กำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้ $0 \leq x \leq 1.1$

ฟังก์ชัน F คือ $F(z) = \begin{bmatrix} y(0) - \ln^2(3) \\ y(1.1) - \ln^2(4.1) \end{bmatrix}$

ให้ $u(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{t+3} dt$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเปลี่ยนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y''(x) = g(x) - y'(x) - e^{-x} y\left(\frac{x}{2}\right) - u(x)$$

$$u'(x) = \frac{y(x)}{x+3}$$

โดย $g(x) = 2 \frac{[1 - \ln(x+3)]}{(x+3)^2} + \frac{2 \ln(x+3)}{x+3} + e^{-x} \ln^2\left(\left(\frac{x}{2}\right) + 3\right) + \frac{\ln^3(x+3) - \ln^3(3)}{3}$

สมการมี $h(x) = \frac{x}{2}$ สมการ $x = \frac{x}{2}$ มีผลเฉลย $x=0$ เป็นจุดเริ่มต้น

กำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = [y(0), y'(0)]' = [\ln^2(3), 1]'$ และ $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์

เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [y(0), y'(0)]'$ อยู่เข้าสู่ $[1.206949, 0.7324082]'$ ในการคำนวณ 2 ชั้น ซึ่งเป็นผลเฉลยของปัญหา (แสดงค่าจุดเริ่มต้นและค่าฟังก์ชันในตารางที่ 6 ของภาคผนวก ก และการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Test1 ของภาคผนวก ข)

ตารางที่ 1 แสดงค่าประมาณของผลเฉลยเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง $y(x) = \ln^2(x+3)$

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
0	1.2069490	1.2069490	0.00e+000
1	1.2800708	1.2800707	1.65e-008
2	1.3529198	1.3529198	2.70e-008
3	1.4254509	1.4254509	3.27e-008
4	1.4976263	1.4976263	3.48e-008
5	1.5694151	1.5694151	3.41e-008
6	1.6407915	1.6407915	3.13e-008
7	1.7117348	1.7117348	2.69e-008
8	1.7822279	1.7822278	2.13e-008
9	1.8522572	1.8522572	1.48e-008
10	1.9218121	1.9218121	7.61e-009
11	1.9908842	1.9908842	2.22e-016

ปัญหาที่ 2

กำหนดค่าต่างๆ ดังนี้ $0 \leq x \leq 1$

ฟังก์ชัน $\mathbf{F}$ คือ $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} y(0) + 2y(0.5) - 2y(1) \\ 2y(0) + y(0.5) + y(1) - \sqrt{3} \end{bmatrix}$

ให้ $ua(x) = \int_{0.5}^{x+0.5} y(t)dt$, $ub(x) = \int_{0.5}^x y(t)dt$, $va(x) = \int_{0.5}^{x+0.5} ty(t)dt$, $vb(x) = \int_{0.5}^x ty(t)dt$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเปลี่ยนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y'(x) = -\left(\frac{4\pi^2}{9} + \frac{9}{4\pi^2}\right)y(x) + \frac{9}{4\pi^2}\left(\frac{x-0.5}{2}\right)y\left(\frac{x+0.5}{2}\right) + ua(x) - ub(x) - va(x) + vb(x)$$

$$ua'(x) = \frac{1}{2}y\left(\frac{x+0.5}{2}\right), ub'(x) = y(x), va'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+0.5}{2}\right)y\left(\frac{x+0.5}{2}\right), vb'(x) = xy(x)$$

สมการมี $h(x) = \frac{x+0.5}{2}$ สมการ $x = \frac{x+0.5}{2}$ มีผลเฉลยคือ $x = 0.5$ เป็นจุดเริ่มต้น

กำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = [y(0.5), y'(0.5)]' = [-1, -1]'$ และ $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [y(0.5), y'(0.5)]'$ ถูเข้าสู่ $[0.8660241, 1.047196]'$ ในการคำนวณ 4 ชั้น ซึ่งเป็นผลเฉลยของปัญหา (แสดงค่าจุดเริ่มต้นและค่าฟังก์ชันในตารางที่ 7 ของภาคผนวก ก และการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Test2 ของภาคผนวก ข)

ตารางที่ 2 แสดงค่าประมาณของผลเฉลยเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง $y(x) = \sin \frac{2\pi x}{3}$

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
0	0.0000011	0.0000000	1.07e-006
1	0.1045292	0.1045285	7.85e-007
2	0.2079122	0.2079117	4.94e-007
3	0.3090172	0.3090170	2.07e-007
4	0.4067366	0.4067366	7.47e-008
5	0.4999997	0.5000000	3.42e-007
6	0.5877847	0.5877853	5.93e-007
7	0.6691298	0.6691306	8.22e-007
8	0.7431438	0.7431448	1.02e-006
9	0.8090158	0.8090170	1.20e-006
10	0.8660241	0.8660254	1.34e-006
11	0.9135440	0.9135455	1.46e-006
12	0.9510550	0.9510565	1.55e-006
13	0.9781460	0.9781476	1.60e-006
14	0.9945203	0.9945219	1.61e-006
15	0.9999984	1.0000000	1.57e-006
16	0.9945204	0.9945219	1.50e-006
17	0.9781462	0.9781476	1.38e-006
18	0.9510553	0.9510565	1.23e-006
19	0.9135444	0.9135455	1.03e-006
20	0.8660246	0.8660254	8.03e-007

ปัญหาที่ 3

กำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้ $0 \leq x \leq 1$

$$\text{ฟังก์ชัน } \mathbf{F} \text{ คือ } \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} y(1) - y'(1) - y(0) \\ 2y'(0) - y'(0) + y''(1) - e \\ y'(1) - y'(1) + y'(0) - 3 \\ u(1) - u(0) - c \end{bmatrix}$$

$$\text{ให้ } u(x) = \int_0^x ty(t)y'(t)dt$$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเปลี่ยนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y''(x) = -xy'(1-x) + y'(x) + xy'(1-x) + u(x) - \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{12} - x$$

$$u'(x) = xy(x)y'(x)$$

สมการมี $h(x) = 1-x$ สมการ $x = 1-x$ มีผลเฉลยคือ $x = 0.5$ เป็นจุดเริ่มต้น

กำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = [y(0.5), y'(0.5), y''(0.5), c]^T = [1, 1.5, -1, 5]^T$ เมื่อ

$$c = \int_0^1 ty(t)y'(t)dt \text{ และ } D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า}$$

$$z_0 = [y(0.5), y'(0.5), y''(0.5), c]^T \text{ ถูเข้าสู่}$$

$[2.1487266, 2.6487212, 1.6487213, 4.1488791]^T$ ในการคำนวณ 17 ขั้น ซึ่งเป็นผลเฉลยของ

ปัญหา (แสดงค่าจุดเริ่มต้นและค่าฟังก์ชันในตารางที่ 8 ของภาคผนวก ก และการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Test3 ของภาคผนวก ข)

ตารางที่ 3 แสดงค่าประมาณของผลเฉลยเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง $y(x) = e^x + x$

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
0	1.0000054	1.0000000	5.37e-006
1	1.1012765	1.1012711	5.36e-006
2	1.2051763	1.2051709	5.36e-006
3	1.3118396	1.3118342	5.36e-006
4	1.4214081	1.4214028	5.35e-006
5	1.5340308	1.5340254	5.35e-006

ตารางที่ 3 (ต่อ)

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
6	1.6498642	1.6498588	5.34e-006
7	1.7690729	1.7690675	5.34e-006
8	1.8918300	1.8918247	5.33e-006
9	2.0183175	2.0183122	5.33e-006
10	2.1487266	2.1487213	5.32e-006
11	2.2832583	2.2832530	5.31e-006
12	2.4221241	2.4221188	5.31e-006
13	2.5655461	2.5655408	5.30e-006
14	2.7137580	2.7137527	5.29e-006
15	2.8670053	2.8670000	5.29e-006
16	3.0255462	3.0255409	5.28e-006
17	3.1896521	3.1896469	5.27e-006
18	3.3596084	3.3596031	5.26e-006
19	3.5357149	3.5357097	5.25e-006
20	3.7182871	3.7182818	5.23e-006

ปัญหาที่ 4

กำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้ $1 \leq x \leq 2$

$$\text{ฟังก์ชัน } F \text{ คือ } F(z) = \begin{bmatrix} 2y(1) - y'(2) - y'(1) - 2 \\ y'(2) - 2y'(1) + y(1) \\ y'(2) - 2y'(1) - y(2) + 3 \\ u(2) - c \end{bmatrix}$$

$$\text{ให้ } u(x) = \int_1^x y'(t)^2 dt$$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเปลี่ยนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y''(x) = y'(x)^2 - 2y'\left(\frac{1}{x}\right) - y'(x)y''(x) + 2x^2 y'\left(\frac{1}{x}\right) + u(x) + \frac{28}{3}$$

$$u(x) = y(x)^2$$

สมการมี $h(x) = \frac{1}{x}$ สมการ $x = \frac{1}{x}$ มีผลเฉลยคือ $x = 1$ เป็นจุดเริ่มต้น

กำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = [y(1), y'(1), y''(1), c]' = [1.8, 1.8, 1.95, 9.6]'$

เมื่อ $c = \int_1^2 y'(t)^2 dt$ และ $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า

$z_0 = [y(1), y'(1), y''(1), c]'$ ลู่เข้าสู่ $[2, 2, 2, 9.333333]'$ ในการคำนวณ 22 ขั้น ซึ่งเป็นผลเฉลยของปัญหา (แสดงค่าจุดเริ่มต้นและค่าฟังก์ชันในตารางที่ 9 ของภาคผนวก ก และการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Test4 ของภาคผนวก ข)

ตารางที่ 4 แสดงค่าประมาณของผลเฉลยเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง $y(x) = x^2 + 1$

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
0	2.0000000	2.0000000	2.07e-014
1	2.1025000	2.1025000	1.91e-014
2	2.2100000	2.2100000	1.73e-014
3	2.3225000	2.3225000	1.60e-014
4	2.4400000	2.4400000	1.47e-014
5	2.5625000	2.5625000	1.38e-014
6	2.6900000	2.6900000	1.20e-014
7	2.8225000	2.8225000	1.11e-014
8	2.9600000	2.9600000	1.02e-014
9	3.1025000	3.1025000	9.77e-015
10	3.2500000	3.2500000	8.88e-015
11	3.4025000	3.4025000	8.44e-015
12	3.5600000	3.5600000	7.99e-015
13	3.7225000	3.7225000	7.55e-015
14	3.8900000	3.8900000	7.55e-015
15	4.0625000	4.0625000	7.11e-015
16	4.2400000	4.2400000	7.11e-015

ตารางที่ 4 (ต่อ)

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
17	4.4225000	4.4225000	7.99e-015
18	4.6100000	4.6100000	7.99e-015
19	4.8025000	4.8025000	8.88e-015
20	5.0000000	5.0000000	8.88e-015

ปัญหาที่ 5

กำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

ฟังก์ชัน F คือ $F(z) = \begin{bmatrix} y'(0) + 3y(\frac{\pi}{2}) + y(0) \\ y''(0) + y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} \\ y'(0) + y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) + 1 \\ u(0) \end{bmatrix}$

ให้ $u(x) = \int_0^x y(t)^2 dt$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเปลี่ยนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y''(x) = \cos 2x \cdot y'(\frac{\pi}{2} - x) - y'(x)y'(\frac{\pi}{2} - x) - 4y'(x) + \frac{\sin 4x}{8} + u(x)$$

$$u'(x) = y(x)^2$$

สมการมี $h(x) = \frac{\pi}{2} - x$ สมการ $x = \frac{\pi}{2} - x$ มีผลเฉลยคือ $x = \frac{\pi}{4}$ เป็นจุดเริ่มต้น

กำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = [y(\frac{\pi}{4}), y'(\frac{\pi}{4}), y''(\frac{\pi}{4}), u(\frac{\pi}{4})]^T = [1.5, 1, -3, 1]^T$ และ

$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [y(\frac{\pi}{4}), y'(\frac{\pi}{4}), y''(\frac{\pi}{4}), u(\frac{\pi}{4})]^T$

คู่เข้าสู่ $[1.7854422, 1.0000182, -4.0000627, 1.0542557]'$ ในการคำนวณ 13 ชั้น ซึ่งเป็นผล
เฉลยของปัญหา (แสดงค่าจุดเริ่มต้นและค่าฟังก์ชันในตารางที่ 10 ของภาคผนวก ก และการเขียน
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Test5 ของภาคผนวก ข)

ตารางที่ 5 แสดงค่าประมาณของผลเฉลยเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง $y(x) = \sin 2x + x$

i	$y(x_i)$	$y(x)$	error
0	0.0000253	0.0000000	2.53e-005
1	0.2350015	0.2349743	2.73e-005
2	0.4661259	0.4660966	2.93e-005
3	0.6896412	0.6896099	3.12e-005
4	0.9019777	0.9019445	3.32e-005
5	1.0998410	1.0998059	3.51e-005
6	1.2802929	1.2802559	3.71e-005
7	1.4408241	1.4407852	3.89e-005
8	1.5794157	1.5793750	4.07e-005
9	1.6945891	1.6945467	4.24e-005
10	1.7854422	1.7853982	4.40e-005
11	1.8516716	1.8516263	4.52e-005
12	1.8935807	1.8935343	4.63e-005
13	1.9120714	1.9120241	4.73e-005
14	1.9086224	1.9085744	4.80e-005
15	1.8852526	1.8852040	4.85e-005
16	1.8444712	1.8444223	4.88e-005
17	1.7892163	1.7891674	4.89e-005
18	1.7227824	1.7227337	4.87e-005
19	1.6487393	1.6486910	4.83e-005
20	1.5708439	1.5707963	4.76e-005