บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน (Functional Integro-Differential Equations) เกิดขึ้นในหลายๆ สาขาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ตัวอย่างเช่น aeroelastic motions of certain airfoils ปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ (physical phenomena) ปัญหาทางโครงสร้างของของเหลว (fluid-structure problem) (Brunner, 1999; Burns & Herdman, 1990) จะเห็นว่าสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันได้รับความสนใจอย่างแพร่หลาย ซึ่งในการหาผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์นั้นสามารถกระทำได้เฉพาะปัญหาบางชนิด ดังนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงมีบทบาทสำคัญในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

ลักษณะปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นสมการที่มีอนุพันธ์และปริพันธ์อยู่ในสมการเดียวกันและตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าเป็นฟังก์ชัน โดยผลเฉลยเป็นฟังก์ชัน และมีเงื่อนไขที่บางจุด

ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันมี 2 แบบ ดังนี้

ให้ $\mathbf{Y}^{'}(x) = (\mathbf{y}^{(m)}(x), \mathbf{y}^{(m-1)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{'}(x), \mathbf{y}(x))$,

$\mathbf{U}^{'}(x) = (\mathbf{y}^{(m-1)}(x), \mathbf{y}^{(m-2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{'}(x), \mathbf{y}(x))$

1. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบวอลแตร์รา

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{Y}^{'}(x), \mathbf{U}^{'}(h(x))) + \int_a^x \mathrm{K}_1(x, t, \mathbf{Y}^{'}(t), \mathbf{Y}^{'}(h(t)))dt = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

2. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเฟรดโฮล์ม

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{Y}^{'}(x), \mathbf{U}^{'}(h(x))) + \int_a^b \mathrm{K}_2(x, t, \mathbf{Y}^{'}(t), \mathbf{Y}^{'}(h(t)))dt = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

เงื่อนไขค่าขอบ $\mathbf{g}(\mathbf{Y}^{'}(t_0), \mathbf{Y}^{'}(t_1), \ldots, \mathbf{Y}^{'}(t_k)) = \mathbf{0}$ (1.3)

เมื่อ $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{Y}^{'}(x), \mathbf{U}^{'}(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \in \mathbb{R}^{n+3} \times \mathbb{R}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(n+1)} \times \mathbb{R}^m$, $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_0 = a$ และ $t_k = b$ กรณีที่ $k = 0$ เรียกว่าปัญหาค่าเริ่มต้น ถ้า $k = 1$ จะเรียกว่าปัญหาค่าขอบ และเรียกปัญหาค่าขอบหลายจุดกรณี $k > 1$ สำหรับปริพันธ์ใน (1.1) เราเรียกว่าแบบวอลแตร์รา และปริพันธ์ใน (1.2) เรียกว่าแบบเฟรดโฮล์ม

การพิสูจน์การมีผลเฉลยแน่นอนและมีเพียงผลเฉลยเดียว (The Existence and Uniqueness) สำหรับปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันบางปัญหาถูกพิจารณาใน (Murugesu & Suguna, 2010; Ntouyas & Tsamatos, 1994) แต่ในหลาย ๆ การพิสูจน์การมีผลเฉลยแน่นอนและมีเพียงผลเฉลยเดียวทำได้ยาก ดังนั้นผู้วิจัยจึงขอละไว้ไม่นำมาพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ โดยวิทยานิพนธ์นี้มีข้อสมมติว่าปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันมีผลเฉลย

การหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบโดยวิธีวิเคราะห์นั้นอาจเป็นไปได้เพียงเฉพาะปัญหาบางชนิด เนื่องจากว่าปัญหาส่วนใหญ่ค่อนข้างยากไม่สามารถใช้วิธีวิเคราะห์ได้และในปัจจุบันยังไม่มีวิธีเฉพาะเจาะจงที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาดังกล่าว ดังนั้นจึงต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขช่วยในการประมาณค่าผลเฉลย เช่น ผลต่างจำกัด (Finite-Difference Method) วิธีประมาณค่าฟังก์ชัน (Collocation Method) วิธียิงเป้า (Shooting Method) (อำพล ธรรมเจริญ, 2551)

วิธียิงเป้าเป็นวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพและได้รับความนิยมมากในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพราะใช้ได้ดีกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยที่ไม่ยุ่งยากมากนัก และยังมีค่าคลาดเคลื่อนน้อย เพราะว่าสามารถใช้ระเบียบวิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีประสิทธิภาพได้ (เช่น วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่) ข้อเสียคือ อาจไม่ลู่เข้าหรือไม่สามารถบอกได้แน่นอนว่าลู่เข้าหรือไม่

Rashed (2004) เสนอการแก้สมการเชิงปริพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบวอลแตร์ราและแบบเฟรดโฮล์มโดยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรานจ์ (Lagrange interpolation) และการประมาณค่าในช่วงแบบเชบีเชฟ (Chebyshev interpolation) รูปแบบสมการคือ

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} y(x_i) l_i(x)$$

เมื่อ $l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k}\right)$

ซึ่งวิธีนี้สามารถแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์เชิงฟังก์ชันและสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ได้อีกด้วย

Abbas Saadatmandi and Mehdi Dehghan (2010) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาสมการผลต่างปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเส้นในแบบเฟรดโฮล์มที่มีอันดับสูงในรูปแบบ

$$\sum_{k=1}^{s} p_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{t} p_r^*(x) y^{(r)}(x-\tau) = f(x) + \int_a^b K(x,t) y(t-\tau) dt, \ \tau \geq 0$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ $\sum_{k=0}^{s-1} \left[\alpha_{ik} y^{(k)}(a) + \beta_{ik} y^{(k)}(b) + \gamma_{ik} y^{(k)}(\eta) \right] = \mu_i, \ i = 0, 1, \ldots, s-1$

เมื่อ $p_k(x), p_r^*(x), K(x,t)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสัมประสิทธิ์ $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$

และ μ_i เป็นค่าคงที่โดยที่ η เป็นจุดที่อยู่ในโดเมน และประมาณค่าของผลเฉลยโดยพหุนามเลอจองด์ (Legendre polynomials) ซึ่งวิธีดังกล่าวมีการปรับเปลี่ยนเพื่อให้สามารถแก้ปัญหาสมการผลต่างเชิงอนุพันธ์และสมการปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์มได้

ขนิษฐา ชมภูวิเศษ (2554) ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ โดยใช้วิธียิงเป้าในการแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้วิธีของเทย์เลอร์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และใช้วิธีของนิวตัน-บรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบ ซึ่งพบว่าสามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้ดีกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น และเงื่อนไขค่าขอบเป็นระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีลักษณะแยกไม่ได้

วราภรณ์ ทรงบัณฑิตย์ (2556) เสนอวิธีเชิงตัวเลขในการแก้สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ โดยสมการที่ศึกษานั้นเป็นแบบแยกปริพันธ์ไม่ได้ ซึ่งในส่วนของปริพันธ์ใช้กฎของซิมป์สันในการแก้สมการปริพันธ์ และใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาร่วมกับกฎของซิมป์สันในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบ

อำพล ธรรมเจริญ (2554) เสนอวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์ โดยเงื่อนไขค่าขอบเป็นสมการ ในรูปแบบ

$$y^{(m)}(x) = \phi(x, \mathbf{u}'(x)) + \sum_{i=1}^{k_1} p_i(x)\int_a^x r_i(t, \mathbf{U}'(t))dt + \sum_{j=1}^{k2} q_j(x)\int_a^b s_j(t, \mathbf{U}'(t))dt$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}(x_0), \mathbf{Y}'(x_1), \ldots, \mathbf{Y}'(x_l)) = \mathbf{0}$$

โดยใช้วิธีของเทย์เลอร์ควบกับวิธีปรับเปลี่ยนของบรอยเดน (TBM) ผลสรุปคือวิธีที่เสนอสามารถแก้ปัญหาได้ดี ผลเฉลยใกล้เคียงกับผลเฉลยแท้จริงเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น เช่นวิธีแยกของอโดเมียน (Adomian Decomposition Method) และวิธีทำซ้ำแปรผัน (Variation Iteration Method) สองวิธีที่กล่าวมาเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันในแต่ละครั้งของการกระทำ ซึ่งดำเนินการด้วยวิธีวิเคราะห์ซึ่งกระทำได้ยาก ผลเฉลยที่ได้จึงยังห่างจากผลเฉลยที่แท้จริง

สมการเชิงฟังก์ชันคือ สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าเป็นฟังก์ชัน โดยทั่วไปการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน คือการหาฟังก์ชันคำตอบที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งอาจจะมีฟังก์ชันคำตอบจำนวนมาก หรืออาจจะไม่มีคำตอบ ซึ่งการแก้สมการเชิงฟังก์ชันนั้นไม่มีหลักเกณฑ์ตายตัว โดยการแก้ปัญหามักเป็นการผสมผสานใช้วิธีต่าง ๆ จนกว่าจะได้คำตอบที่ต้องการ

ในวิทยานิพนธ์นี้ผู้วิจัยจะศึกษาวิธีแก้สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันโดยเน้นปัญหาที่สามารถแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ โดยใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับเปลี่ยนค่าเริ่มต้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันโดยการแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชันและใช้วิธียิงเป้าในการแก้ปัญหาค่าขอบ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ได้วิธีการแก้ปัญหาสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีประสิทธิภาพซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์อื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

1. ปริพันธ์ในสมการเป็นแบบวอลแตร์ราและเฟรดโฮล์ม
2. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันมีผลเฉลย
3. ใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาเริ่มต้น และวิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบ