บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการวิจัยโดยละเอียด โดยจะแสดงวิธีคิดพร้อมคำอธิบายในการสร้างฟังก์ชันคลื่นทีละส่วน ซึ่งประกอบไปด้วย ส่วนตำแหน่ง ส่วนเฟลเวอร์ ส่วนสปิน และส่วนสี โดยใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2

กรอบแนวคิดของงานวิจัย

ในการวิจัยจะแบ่งการดำเนินงานออกเป็น 4 ส่วนคือ (1) การสร้างตัวดำเนินการเชิงภาพฉาย (2) การวิเคราะห์สมมาตรของฟังก์ชันคลื่น (3) การสร้างฟังก์ชันคลื่นของควาร์ก 5 ตัวของโปรตอน โดยสรุปได้ดังนี้

การสร้างตัวดำเนินการเชิงภาพฉาย จะใช้กลุ่ม S_4 เพื่อสร้างตัวดำเนินการเชิงภาพฉาย โดยการสร้างตัวแทนแบบลดทอนไม่ได้ทุกสมาชิกของ S_4 ขึ้นมาเพื่อใช้ในการสร้างฟังก์ชันคลื่นที่มีสมมาตร

การวิเคราะห์สมมาตรของฟังก์ชันคลื่นกระทำโดยวิเคราะห์สมมาตรของแบบรูป $[\lambda]$ ต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับแบบจำลองมาตรฐานและวิเคราะห์ความเป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ของฟังก์ชันคลื่นของโปรตอนในแต่ละส่วน

การสร้างฟังก์ชันคลื่นของควาร์ก 5 ตัวของโปรตอน ขั้นตอนนี้จะวิเคราะห์ควาร์ก 4 ตัวแรก $uuds$ ให้อยู่เป็นกลุ่มเดียวกันในระดับชั้นพลังงานสถานะพื้นที่ $L=0$ โดยฟังก์ชันคลื่นที่สร้างขึ้นต้องสอดคล้องกับการวิเคราะห์สมมาตรในแต่ละส่วนย่อยของฟังก์ชันคลื่นและนำฟังก์ชันคลื่นของควาร์ก 4 ตัวที่สร้างไว้มาคู่ควบกับปฏิควาร์กเอสที่อยู่ในระดับพลังงานสถานะกระตุ้นที่ 1 และมี $L=1$ เพื่อนำไปคำนวณสปินและโมเมนต์แม่เหล็กของควาร์กเอสต่อไปในบทที่ 4

วิธีการวิจัย

1. การสร้างตัวดำเนินการเชิงภาพฉาย

ในการสร้างตัวดำเนินการเชิงภาพฉายนั้นเราต้องทราบสมาชิกทั้งหมดของ S_4 ในแต่ละแบบรูป $[\lambda]$ ก่อน ซึ่งที่สมาชิกทั้งหมดคือ $n!=4!=24$ ตัว นั่นคือ

$$S_4 = \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1432), (1423), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \quad (3\text{-}1)$$

โดย $[\lambda]$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดใน S_4 คือ [4] [31] [22] [211] และ [1111] โดยในบทที่ 2 เราได้แสดงวิธีหาเมทริกซ์ตัวแทน $D^{[211]}(12)$ $D^{[211]}(13)$ $D^{[211]}(23)$ และ $D^{[211]}(34)$ ไปแล้ว ซึ่งยังเหลือสมาชิกอีกมายมายในแต่ละแบบรูป ในที่นี้จะแสดงวิธีคิดเพียง $D(12)$ $D(13)$ $D(23)$ และ $D(34)$ ของ [4] [31] [22] และ [1111] เท่านั้น เนื่องจากสมาชิกที่เหลือสามารถคำนวณได้จากสมการที่ 2-14

เริ่มจากแบบรูป [4] ในแบบรูปนี้มีจำนวนฟังก์ชันฐานยามาโนจิเพียง 1 ฐานคือ $\phi_1 = \left|[4](1111)\right\rangle$ โดยทุกตัวแทนเชิงเมทริกซ์ของทุกสมาชิกมีค่าเป็น 1 และจากสมการที่ 2-24

$$\begin{aligned} W_{(r)}^{[\lambda]} = W_{(1111)}^{[4]} &= \sum_i \langle [\lambda](r)|R_i|[\lambda](r)\rangle R_i = \sum_i \langle [4](1111)|R_i|[4](1111)\rangle R_i = P_{[4]} \\ &= (1) + (12) + (13) + (14) + (23) + (24) + (34) + (123) + (124) + (132) + (134) \\ &\quad + (142) + (143) + (234) + (243) + (1234) + (1243) + (1324) + (1342) + (1432) \\ &\quad + (1423) + (12)(34) + (13)(24) + (14)(23) \end{aligned} \quad (3\text{-}2)$$

สำหรับแบบรูป [31] จะมีจำนวนฟังก์ชันฐานยามาโนจิ 3 ฐานคือ $\phi_1 = \left|[31](2111)\right\rangle$ $\phi_2 = \left|[31](1211)\right\rangle$ และ $\phi_3 = \left|[31](1121)\right\rangle$ จากสมการที่ 2-15 ถึง 2-17 จะได้

$$\begin{aligned} (34)\left|[31](2111)\right\rangle &= \sigma_{21}\left|[31](2111)\right\rangle + \sqrt{1-\sigma_{21}^2}\left|[31](1211)\right\rangle \\ (34)\left|[31](1211)\right\rangle &= \sigma_{12}\left|[31](1211)\right\rangle + \sqrt{1-\sigma_{12}^2}\left|[31](2111)\right\rangle \\ (34)\left|[31](1121)\right\rangle &= \left|[31](1121)\right\rangle \end{aligned} \quad (3\text{-}3)$$

โดยที่

$$\sigma_{21} = \frac{1}{(\lambda_2 - 2) - (\lambda_1 - 1)} = \frac{1}{(1-2)-(3-1)} = -\frac{1}{3} = -\sigma_{12} \quad (3\text{-}4)$$

นั่นคือ

$$D^{[31]}(34)=\begin{bmatrix} -1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

จากสมการที่ 2-13 จะได้

$$\begin{aligned} D^{[31]}(12) &= D^{[3]}(12)\oplus D^{[21]}(12) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ D^{[31]}(13) &= D^{[3]}(13)\oplus D^{[21]}(13) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ D^{[31]}(23) &= D^{[3]}(23)\oplus D^{[21]}(23) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-6}$$

สมาชิกอื่น ๆ หาได้จากสมการที่ 2-14 เช่น

$$\begin{aligned} D^{[31]}(24) &= D^{[31]}(34)\ D^{[31]}(23)\ D^{[31]}(34) \\ &= \begin{bmatrix} -1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-7}$$

$$D^{[31]}(124) = D^{[31]}(12)\,D^{[31]}(24)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix} \tag{3-8}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & 1/2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & -1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$D^{[31]}(1342) = D^{[31]}(13)\,D^{[31]}(34)\,D^{[31]}(42) = D^{[31]}(13)\,D^{[31]}(34)\,D^{[31]}(24)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & \sqrt{2}/3 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & -1/6 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{2/3} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

สำหรับตัวดำเนินการเชิงภาพฉายนั้น เนื่องจากแบบรูป $[3\,1]$ มี 3 ฐานยามาโนจิ ดังนั้นตัวดำเนินการเชิงภาพฉายจึงมีค่าได้ 3 ค่าคือ (1) ประเภท λ คือ เมื่อเรียงสับเปลี่ยนอนุภาคที่ 1 และ 2 จะเป็นฟังก์ชันสมมาตร (2) ประเภท ρ คือ เมื่อเรียงสับเปลี่ยนอนุภาคที่ 1 และ 2 จะเป็นฟังก์ชันอสมมาตร และ (3) ประเภท η คือแบบอื่น ๆ ที่ไม่เหมือนประเภท λ และ ρ จะได้ตัวดำเนินการเชิงภาพฉายคือ

$$P_{[31]\lambda} = W^{[31]}_{(1211)} = \sum_i \langle [31]\,(1211) | R_i | [31]\,(1211) \rangle R_i$$

$$= (1) + \frac{1}{6}\big(6(12) - 3(13) + 5(14) - 3(23) + 5(24) + 2(34) - 3(123) + 5(124) - 3\,(132)$$
$$- (134) + 5(142) - (143) - (234) - (243) - (1234) - (1243) - 4\,(1324) - (1342)$$
$$- (1432) - 4(1423) + 2\,(12)(34) - 4\,(13)(24) - 4\,(14)(23)\big) \tag{3-10}$$

$$P_{[31]\rho} = W^{[31]}_{(1121)} = \sum_i \langle [31]\,(1121) | R_i | [31]\,(1121) \rangle R_i$$
$$= (1) + \frac{1}{2}\big(-2(12) + (13) + (14) + (23) + (24) + 2(34) - (123) - (124) - (132)$$
$$+ (134) - (142) + (143) + (234) + (243) - (1234) - (1243) - (1342)$$
$$- (1432) - 2\,(12)(34)\big)$$

(3-11)

$$P_{[31]\eta} = W^{[31]}_{(2111)} = \sum_i \langle [31]\,(2111) | R_i | [31]\,(2111) \rangle R_i$$
$$= (1) + \frac{1}{3}\big(3(12) + 3(13) - (14) + 3(23) - (24) - (34) + 3(123) - (124) + 3\,(132)$$
$$- (134) - (142) - (143) - (234) - (243) - (1234) - (1243) - (1324) - (1342)$$
$$- (1432) - (1423) - (12)(34) - (13)(24) - (14)(23)\big)$$

(3-12)

สำหรับแบบรูป [22] จะมีฟังก์ชันฐานยามาโนจิ 2 ฐานคือ $\phi_1 = \big|[22](2211)\big\rangle$ และ $\phi_2 = \big|[22](2121)\big\rangle$ จากสมการที่ 2-15 ถึง 2-17 จะได้

$$\begin{aligned}(34)\big|[22](2211)\big\rangle &= \big|[22](2211)\big\rangle \\ (34)\big|[22](2121)\big\rangle &= -\big|[22](2121)\big\rangle\end{aligned} \quad (3\text{-}13)$$

นั่นคือ

$$D^{[22]}(34) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}14)$$

จากสมการที่ 2-13 จะได้

$$D^{[22]}(12) = D^{[21]}(12) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D^{[22]}(13) = D^{[21]}(13) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}15)$$

$$D^{[22]}(23) = D^{[21]}(23) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

สมาชิกอื่น ๆ หาได้จากสมการที่ 2-14 ดังตัวอย่างของแบบรูป [31] และเช่นกันสำหรับตัวดำเนินการเชิงภาพฉาย

$$\begin{aligned} P_{[22]\lambda} = W^{[22]}_{(2211)} &= \sum_i \langle [22]\,(2211)|R_i|[22]\,(2211)\rangle R_i \\ &= (1) + \frac{1}{2}\big(2(12) - (13) - (14) - (23) - (24) + 2(34) - (123) - (124) - (132) \\ &\quad - (134) - (142) - (143) - (234) - (243) - (1234) - (1243) + 2(1324) \\ &\quad - (1342) + 2(1423) - (1432) + 2(12)(34) + 2(13)(24) + 2(14)(23)\big) \end{aligned} \quad (3\text{-}16)$$

$$\begin{aligned} P_{[22]\rho} = W^{[22]}_{(2121)} &= \sum_i \langle [22]\,(2121)|R_i|[22]\,(2121)\rangle R_i \\ &= (1) + \frac{1}{2}\big(-2(12) + (13) + (14) + (23) + (24) - 2(34) - (123) - (124) - (132) \\ &\quad - (134) - (142) - (143) - (234) - (243) + (1234) + (1243) - 2(1324) \\ &\quad + (1342) - 2(1423) + (1432) + 2(12)(34) + 2(13)(24) + 2(14)(23)\big) \end{aligned}$$

(3-17)

ตัวดำเนินการเชิงภาพฉายของแบบรูป [211] ได้คำนวณไว้แล้วในบทที่ 2 นั่นคือ

$$P_{[211]\lambda} = W^{[211]}_{(3211)} = \sum_i \langle [211]\,(3211)|R_i|[211]\,(3211)\rangle R_i$$
$$= (1) + \frac{1}{2}\big(2(12) - (13) - (14) - (23) - (24) - 2(34) - (123) - (124) - (132)$$
$$+ (134) - (142) + (143) + (234) + (243) + (1234) + (1243) + (1342)$$
$$+ (1432) - 2\,(12)(34)\big) \tag{3-18}$$

$$P_{[211]\rho} = W^{[211]}_{(3121)} = \sum_i \langle [211]\,(3121)|R_i|[211]\,(3121)\rangle R_i$$
$$= (1) + \frac{1}{6}\big(-6(12) + 3(13) - 5(14) + 3(23) - 5(24) - 2(34) - 3(123) + 5(124) - 3\,(132)$$
$$- (134) + 5(142) - (143) - (234) - (243) + (1234) + (1243) + 4\,(1324) + (1342)$$
$$+ 4\,(1423) + (1432) + 2\,(12)(34) - 4(13)(24) - 4(14)(23)\big) \tag{3-19}$$

$$P_{[211]\eta} = W^{[211]}_{(1321)} = \sum_i \langle [211]\,(1321)|R_i|[211]\,(1321)\rangle R_i$$
$$= (1) + \frac{1}{3}\big(-3\,(12) - 3\,(13) + (14) - 3\,(23) + (24) + (34) + 3(123) - (124) + 3\,(132)$$
$$- (134) - (142) - (143) - (234) - (243) + (1234) + (1243) + (1324) + (1342)$$
$$+ (1423) - (1432) - (1423) - (12)(34) - (13)(24) - (14)(23)\big) \tag{3-20}$$

สำหรับแบบรูป [1111] นั้นจะมีฟังก์ชันฐานยามาโนจิเพียงฐานเดียวคือ $\phi_1 = |[1111](4321)\rangle$ ซึ่งมีค่าเป็น -1 ทุก ๆ คู่การเรียงสับเปลี่ยน โดยที่สมาชิกอื่น ๆ หาได้จากสมการที่ 2-14 เช่น

$$\begin{aligned} D^{[1111]}(24) &= D^{[1111]}(34)\,D^{[1111]}(23)\,D^{[1111]}(34) \\ &= (-1)\,(-1)\,(-1) = -1 \end{aligned} \tag{3-21}$$

$$\begin{aligned} D^{[1111]}(143) &= D^{[1111]}(14)\,D^{[1111]}(43) = D^{[1111]}(14)\,D^{[1111]}(34) \\ &= (-1)\,(-1) = 1 \end{aligned} \tag{3-22}$$

$$
\begin{aligned}
D^{[1111]}(1423) &= D^{[1111]}(14)\, D^{[1111]}(42)\, D^{[1111]}(23) \\
&= D^{[1111]}(14)\, D^{[1111]}(24)\, D^{[1111]}(23) \\
&= (-1)\,(-1)\,(-1) = -1
\end{aligned}
\tag{3-23}
$$

โดยมีตัวดำเนินการเชิงภาพฉายคือ

$$
\begin{aligned}
P_{[1111]} = W^{[1111]}_{(4321)} &= \sum_{i} \langle [1111]\,(4321) | R_i | [1111]\,(4321) \rangle R_i \\
&= (1) - (12) - (13) - (14) - (23) - (24) - (34) + (123) + (124) + (132) \\
&\quad + (134) + (142) + (143) + (234) + (243) - (1234) - (1243) - (1324) \\
&\quad - (1342) - (1432) - (1423) + (12)(34) + (13)(24) + (14)(23))
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

2. การวิเคราะห์สมมาตรของฟังก์ชันคลื่น

ฟังก์ชันคลื่นของโปรตอนที่มีส่วนประกอบของควาร์กเอสนั้น อาจปะปนอยู่กับโปรตอนที่มีควาร์กสามตัวอยู่ โดยทั่วไปแล้วสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$
|p\rangle = A|uud\rangle + B|uuds\bar{s}\rangle \tag{3-25}
$$

ซึ่ง A และ B คือแอมพลิจูดของโปรตอนที่มีควาร์ก 3 ตัวและ 5 ตัว ซึ่งมีหลักฐานยืนยันแล้วว่ามีควาร์กเอสอยู่ 2-7% เทียบกับมวลของนิวคลิออน (Young, 2010) และประมาณให้การรบกวน (Perturbation) มีค่าน้อย ๆ กับระบบ ($B^2 << A^2$) ในการสร้างฟังก์ชันคลื่นของควาร์ก 5 ตัวนั้นไม่สามารถสร้างขึ้นมาได้โดยตรง เนื่องจากเราต้องคำนึงถึงสมมาตรที่สอดคล้องกับโครงร่างของมันด้วย ฟังก์ชันคลื่นตามแบบจำลองอย่างง่ายของควาร์กมีส่วนประกอบอยู่ 4 ส่วน คือ ตำแหน่ง เฟลเวอร์ สปิน และสี

โดยฟังก์ชันคลื่นของส่วนตำแหน่งไม่สามารถเขียนให้ชัดแจ้งได้เนื่องจากรูปแบบของมันขึ้นกับพลวัตของควาร์กซึ่งเราไม่ทราบละเอียดของมันมากนักนอกจากเป็นอันตรกิริยาอย่างเข้มอย่างไรก็ตามอันตรกิริยาระหว่างควาร์กสามารถประมาณได้ว่าถูกกักอยู่และโดยธรรมชาติแล้วอนุภาคมักมีพลังงานต่ำที่สุดเสมอ สถานะพลังงานที่ต่ำต้องเป็นฟังก์ชันคลื่นของตำแหน่งที่มีความสมมาตร ตัวเลือกที่ดีสำหรับพลังงานศักย์ที่กักและมีสมมาตรคือพลังงานศักย์ตัวกวัดแกว่งฮาร์มอนิค (Harmonic Oscillator Potential) (Hendry & Lichtenberg, 1978)

สำหรับส่วนของสปินและเฟลเวอร์ ควาร์กแต่ละตัวจะมีสปิน $\frac{1}{2}$ โดยสปินรวม S และองค์ประกอบในแนวแกน z ได้จากการรวมโมเมนตัมเชิงมุม และตามทฤษฎี QCD (Quantum Chromodynamics) อันตรกิริยาระหว่างควาร์กเป็นอิสระจากเฟลเวอร์เมื่อมวลของควาร์กยู ดี และเอสต่างกันน้อยมากหรือประมาณว่าเท่ากันทำให้แฮมิลโทเนียนไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลง $SU(3)$ โดยที่ควาร์กจะใช้ตัวแทนจาก $SU(3)$ ในขณะที่ปฏิควาร์กใช้ตัวแทนจากตัวแทนสังยุคของ $SU(3)$

ส่วนสุดท้ายส่วนสีเกิดขึ้นจากการศึกษาควาร์กซึ่งพบว่าควาร์กมีสปิน $\frac{1}{2}$ โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันคลื่นที่เกิดจากการรวมกันของอนุภาคที่จำแนกไม่ได้ของสปินครึ่งจะต้องเป็นอสมมาตรภายใต้การเรียงสับเปลี่ยนคู่อนุภาคใด ๆ แต่ฟังก์ชันคลื่นของควาร์กภายในแบริออนนั้นปรากฏว่าเป็นสมมาตรภายใต้การเรียงสับเปลี่ยนนี้ ทางออกจากการแก้ปัญหายุ่งยากนี้คือสมมติให้ควาร์กมีระดับขั้นความเสรีของสีเพิ่มขึ้นและกำหนดให้เป็นอสมมาตร แบริออนประกอบด้วยควาร์ก 3 ตัวในธรรมชาติจึงกำหนดให้ควาร์กมี 3 สี ซึ่งแต่ละตัวต้องมีสีต่างกันแล้วรวมกันให้เป็นฟังก์ชันคลื่นสีซิงเกลต (Singlet) หรือเรียกว่าไร้สี

การสร้างฟังก์ชันคลื่นของควาร์ก 5 ตัวนั้นจะต้องคำนึงถึงรูปแบบสมมาตรที่สอดคล้องกับโครงร่าง อันเนื่องมาจากฟังก์ชันคลื่นซึ่งมีส่วนประกอบอยู่ 4 ส่วนเช่นเดียวกัน แต่สำหรับระบบควาร์ก 5 ตัวของโปรตอนที่ถูกเสนอโดยโดย An Zou และ Riska (An et al., 2006) ได้ใช้โครงร่างแบบ $q^4\bar{q}$ โดยการคู่ควบ $uuds$ เข้ากับ $\bar{s}$ โดยในทฤษฎีกลุ่มรูปแบบของสมมาตรสำหรับควาร์กสี่ตัวนั้นนั้นสามารถแสดงโดย S_4 ด้วยยังแท็บลอยด์ [4] [31] [22] [211] และ [1111] หากพิจารณาสมมาตรเฟลเวอร์ด้วยแล้วจะเหลือเพียง 4 แบบรูปคือ $[4]_F$ $[31]_F$ $[22]_F$ และ $[211]_F$ ในขณะที่ $\bar{s}$ เป็นปฏิควาร์กที่มีสมมาตรเฟลเวอร์ $[1]^*_F=[11]_F$ เมื่อรวมควาร์กทั้งสองเข้าด้วยกันตามผลคูณภายนอก (Outer Product) ของตัวแทน $SU(3)$ จะได้

$$\begin{aligned}
[4]_F \otimes [1]^*_F &= 10 \oplus 35 \\
[31]_F \otimes [1]^*_F &= 8 \oplus 10 \oplus 27 \\
[22]_F \otimes [1]^*_F &= 8 \oplus \overline{10} \\
[211]_F \otimes [1]^*_F &= 1 \oplus 8
\end{aligned} \tag{3-26}$$

แต่เนื่องจากโปรตอนต้องเป็นการแสดงแบบออคเต็ท (Octet) แบบรูปของสมมาตรเฟลเวอร์จึงถูกบังคับให้เหลือเพียง $[31]_F$ $[22]_F$ และ $[211]_F$ เท่านั้น

ฟังก์ชันคลื่นของโปรตอนในส่วนของสีเป็นซิงเกลตหรือไร้สี ทำให้ฟังก์ชันคลื่นส่วนสีจากควาร์ก 4 ตัวและ $\bar{s}$ ต้องคู่ควบไปเป็น $[222]_C$ แต่เนื่องจากส่วนสีของปฏิควาร์ก $\psi^C(\bar{q})$ คือ

$[1]^{*}_{C} = [11]_{C}$ ดังนั้นส่วนสีของควาร์ก 4 ตัวที่เหลือ $\psi^{C}(q^{4})$ จึงต้องเป็น $[211]_{C}$ อีกทั้งฟังก์ชันคลื่นรวมจากทุกส่วนของควาร์ก 4 ตัวต้องมีรูปแบบเป็นเป็นอสมมาตร $[1111]$ ฟังก์ชันคลื่นส่วนที่เหลือ (ตำแหน่ง-สปิน-เฟลเวอร์) $\psi^{OSF}(q^{4})$ จึงต้องเป็น $[31]_{OSF}$ หรือเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น (Yan & Srisuphaphon, 2012)

$$\psi = \sum_{i,\, j=\lambda,\, \rho,\, \eta} a_{ij}\, \psi^{OSF}_{[31]i}\, \psi^{C}_{[211]j} \tag{3-27}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_{ij} คำนวณได้จากสมมาตรการเรียงสับเปลี่ยน S_4 โดยเริ่มจากดำเนินการการเรียงสับเปลี่ยน (12) ลงบนสมการที่ 3-27

$$\begin{aligned}(12)\,\psi = (12)\big[& a_{\lambda\lambda}\, \psi^{OSF}_{[31]\lambda}\, \psi^{C}_{[211]\lambda} + a_{\lambda\rho}\, \psi^{OSF}_{[31]\lambda}\, \psi^{C}_{[211]\rho} + a_{\lambda\eta}\, \psi^{OSF}_{[31]\lambda}\, \psi^{C}_{[211]\eta} \\ & + a_{\rho\lambda}\, \psi^{OSF}_{[31]\rho}\, \psi^{C}_{[211]\lambda} + a_{\rho\rho}\, \psi^{OSF}_{[31]\rho}\, \psi^{C}_{[211]\rho} \\ & + \ldots + a_{\eta\eta}\, \psi^{OSF}_{[31]\eta}\, \psi^{C}_{[211]\eta} \big]\end{aligned} \tag{3-28}$$

$D^{[211]}(12)$ จากสมการที่ 2-19 และ $D^{[31]}(12)$ จากสมการที่ 3-6 จะทำให้ทราบค่าลักษณะเฉพาะ เช่น $(12)\psi^{OSF}_{[31]\lambda} = \psi^{OSF}_{[31]\lambda}$, $(12)\psi^{C}_{[211]\lambda} = \psi^{C}_{[211]\lambda}$, $(12)\psi^{C}_{[211]\rho} = -\psi^{C}_{[211]\rho}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}-\psi = {} & a_{\lambda\lambda}\, \psi^{OSF}_{[31]\lambda}\, \psi^{C}_{[211]\lambda} + a_{\lambda\rho}\, \psi^{OSF}_{[31]\lambda} \left(-\psi^{C}_{[211]\rho}\right) + a_{\lambda\eta}\, \psi^{OSF}_{[31]\lambda} \left(-\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\ & + a_{\rho\lambda} \left(-\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right) \psi^{C}_{[211]\lambda} + a_{\rho\rho} \left(-\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right)\left(-\psi^{C}_{[211]\rho}\right) \\ & + \ldots + a_{\eta\eta}\, \psi^{OSF}_{[31]\eta} \left(-\psi^{C}_{[211]\eta}\right)\end{aligned} \tag{3-29}$$

สาเหตุที่ $(12)\,\psi = -\psi$ เนื่องจากตัวดำเนินการ (12) คือการเรียงสับเปลี่ยนระหว่างอนุภาคที่ 1 และ 2 เมื่ออนุภาคในแบริออนถูกเรียงสับเปลี่ยนจะทำให้ฟังก์ชันคลื่นเป็นปฏิสมมาตร เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ ψ จากสมการที่ 3-27 และสัมประสิทธิ์ของ $-\psi$ จากสมการที่ 3-29 จะพบว่า

$$a_{\lambda\lambda} = a_{\rho\rho} = a_{\rho\eta} = a_{\eta\rho} = 0 \tag{3-30}$$

ขั้นตอนต่อไปคือกระทำ (34) ลงบนสมการที่ 3-27 ที่แทนค่าสัมประสิทธิ์จากสมการที่ 3-30 แล้วจะได้

$$(34)\,\psi = (34)\Big[a_{\lambda\rho}\,\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\psi^{C}_{[211]\rho} + a_{\lambda\eta}\,\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\psi^{C}_{[211]\eta} + a_{\rho\lambda}\,\psi^{OSF}_{[31]\rho}\,\psi^{C}_{[211]\lambda} + a_{\eta\rho}\,\psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\psi^{C}_{[211]\rho} + a_{\eta\eta}\,\psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\psi^{C}_{[211]\eta}\Big] \tag{3-31}$$

นำค่าลักษณะเฉพาะจากสมาชิกในเมทริกซ์ $D^{[211]}(34)$ และ $D^{[31]}(34)$ แทนค่าลงในสมการที่ 3-31 จะได้

$$\begin{aligned}
-\psi = {} & a_{\lambda\rho}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta} + \frac{1}{3}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\right)\left(-\frac{1}{3}\psi^{C}_{[211]\rho} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& + a_{\lambda\eta}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta} + \frac{1}{3}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\rho} + \frac{1}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& + a_{\rho\lambda}\,\psi^{OSF}_{[31]\rho}\left(-\psi^{C}_{[211]\lambda}\right) \\
& + a_{\eta\rho}\left(-\frac{1}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\right)\left(-\frac{1}{3}\psi^{C}_{[211]\rho} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& + a_{\eta\eta}\left(-\frac{1}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\rho} + \frac{1}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right)
\end{aligned} \tag{3-32}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ ψ ระหว่างสมการที่ 3-27 และ 3-32 จะพบว่า

$$a_{\eta\rho} = -a_{\lambda\eta}, \quad a_{\eta\eta} = -a_{\lambda\rho} - \frac{a_{\lambda\eta}}{\sqrt{2}} \tag{3-33}$$

นำตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยน (124) กระทำเช่นเดียวกันกับสมการที่ 3-27 พร้อมทั้งแทนค่าจากสมการที่ 3-33 จะได้

$$(124)\,\psi = (124)\Big[a_{\lambda\rho}\,\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\psi^{C}_{[211]\rho} + a_{\lambda\eta}\,\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\psi^{C}_{[211]\eta} + a_{\rho\lambda}\,\psi^{OSF}_{[31]\rho}\,\psi^{C}_{[211]\lambda} - a_{\lambda\eta}\,\psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\psi^{C}_{[211]\rho} - \left(a_{\lambda\rho} + \frac{a_{\lambda\eta}}{\sqrt{2}}\right)\psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\psi^{C}_{[211]\eta}\Big] \tag{3-34}$$

โดยทราบค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมชิกในเมทริกซ์ $D^{[31]}(124)$ และ $D^{[211]}(124)$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
(124)\,\psi = (124)\Big[& a_{\lambda\rho}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta}+\frac{5}{6}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\psi^{C}_{[211]\lambda}+\frac{5}{6}\psi^{C}_{[211]\rho}+\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& +a_{\lambda\eta}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta}+\frac{5}{6}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi^{C}_{[211]\lambda}+\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\rho}-\frac{1}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& +a_{\rho\lambda}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\psi^{OSF}_{[31]\eta}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}-\frac{1}{2}\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right)\left(-\frac{1}{2}\psi^{C}_{[211]\lambda}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\psi^{C}_{[211]\rho}+\sqrt{\frac{2}{3}}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& -a_{\lambda\eta}\left(-\frac{1}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta}-\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\psi^{C}_{[211]\lambda}+\frac{5}{6}\psi^{C}_{[211]\rho}+\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right) \\
& -\left(a_{\lambda\rho}+\frac{a_{\lambda\eta}}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}\psi^{OSF}_{[31]\eta}-\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{OSF}_{[31]\lambda}-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi^{OSF}_{[31]\rho}\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi^{C}_{[211]\lambda}+\frac{\sqrt{2}}{3}\psi^{C}_{[211]\rho}-\frac{1}{3}\psi^{C}_{[211]\eta}\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{3-35}
$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ ψ ระหว่างสมการที่ 3-27 และ 3-35 จะพบว่า

$$a_{\lambda\eta}=0,\quad a_{\rho\lambda}=-a_{\lambda\rho} \tag{3-36}$$

แทนค่าคงที่ทั้งหมดลงไปผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\psi = a_{\lambda\rho}\,\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\psi^{C}_{[211]\rho}-a_{\lambda\rho}\,\psi^{OSF}_{[31]\rho}\,\psi^{C}_{[211]\lambda}-a_{\lambda\rho}\,\psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\psi^{C}_{[211]\eta} \tag{3-37}$$

จากนั้นคำนวณค่าคงที่ปกติ (Normalization) จะได้

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\psi^{C}_{[211]\rho}-\psi^{OSF}_{[31]\rho}\,\psi^{C}_{[211]\lambda}-\psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\psi^{C}_{[211]\eta}\right] \tag{3-38}$$

สิ่งที่ได้คือการรวมกันของฟังก์ชันคลื่นตำแหน่ง-เฟลเวอร์-สปินภายใต้สมมาตร [31] และฟังก์ชันคลื่นสีภายใต้สมมาตร [211] เพื่อรวมเป็นฟังก์ชันรวมของควาร์ก 4 ตัวภายใต้สมมาตร [1111] หรือได้รูปแบบสมมาตรฟังก์ชันคลื่นรวมของควาร์ก 4 ตัวเป็น $[1111]_{OSFC}[31]_{OSF}[211]_{C}$ และสำหรับฟังก์ชันคลื่นรวมของควาร์ก 5 ตัวจะอยู่ในรูป

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\Psi^{OSF}_{[31]\lambda}\,\Psi^{C}_{[222]\rho}-\Psi^{OSF}_{[31]\rho}\,\Psi^{C}_{[222]\lambda}-\Psi^{OSF}_{[31]\eta}\,\Psi^{C}_{[222]\eta}\right] \tag{3-39}$$

ฟังก์ชันคลื่นสีของควาร์ก 4 ตัว $\chi^{C}_{[211]j}$ สามารถสร้างได้โดยใช้ตัวดำเนินการเชิงภาพฉายของสมมาตร [211] ซึ่งจะได้เป็น

$$\begin{aligned} P_{[211]\lambda}|RRGB\rangle &= \Big[(1)+\frac{1}{2}\big(2(12)-(13)-(14)-(23)-(24)-2(34)-(123)-(124)-(132) \\ &\quad +(134)-(142)+(143)+(234)+(243)+(1234)+(1243)+(1342) \\ &\quad +(1432)-2\,(12)(34)\big)\Big]|RRGB\rangle \\ &= |RRGB\rangle+\frac{1}{2}\big(2|RRGB\rangle-|GRRB\rangle-|BRGR\rangle-|RGRB\rangle+\ldots-2|RRBG\rangle\big) \end{aligned} \tag{3-40}$$

จัดรูปและคำนวณค่าคงที่ปกติ

$$\begin{aligned} \chi^{C}_{[211]\lambda}(RRGB) &= \frac{1}{\sqrt{16}}\big[2|RRGB\rangle-2|RRBG\rangle-|GRRB\rangle-|RGRB\rangle-|BRGR\rangle-|RBGR\rangle \\ &\quad +|BRRG\rangle+|GRBR\rangle+|RBRG\rangle+|RGBR\rangle\big] \end{aligned} \tag{3-41}$$

เช่นเดียวกันสำหรับ $\chi^{C}_{[211]\rho}$ และ $\chi^{C}_{[211]\eta}$

$$\begin{aligned} \chi^{C}_{[211]\rho}(RRGB) &= \frac{1}{\sqrt{48}}\big[3|RGRB\rangle-3|GRRB\rangle+3|BRRG\rangle-3|RBRG\rangle+2|GBRR\rangle-2|BGRR\rangle \\ &\quad -|BRGR\rangle+|RBGR\rangle+|GRBR\rangle-|RGBR\rangle\big] \end{aligned} \tag{3-42}$$

$$\chi^{C}_{[211]\eta}(RRGB) = \frac{1}{\sqrt{6}}\big[|BRGR\rangle+|RGBR\rangle+|GBRR\rangle-|RBGR\rangle-|GRBR\rangle-|BGRR\rangle\big] \tag{3-43}$$

และฟังก์ชันคลื่นสีของควาร์ก 5 ตัว $\chi^{C}_{[222]j}$ ที่สอดคล้องกับสมมาตร $j=\lambda,\rho,\eta$ (Yan & Srisuphaphon, 2012) เป็น

$$\chi^{C}_{[222]j} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\chi^{C}_{[211]j}(RRGB)\overline{R} + \chi^{C}_{[211]j}(GGBR)\overline{G} + \chi^{C}_{[211]j}(BBRG)\overline{B}\right] \qquad (3\text{-}44)$$

3. การสร้างฟังก์ชันคลื่นของควาร์ก 5 ตัวของโปรตอน

ในหัวข้อนี้จะแสดงการสร้างฟังก์ชันคลื่นของโครงร่าง *uuds* ในระดับชั้นพลังงานสถานะพื้น โดยการกำหนดให้ส่วนตำแหน่งของควาร์ก 4 ตัวมีความเป็นสมมาตรสมบูรณ์ $[4]_X$ และสถานะของเฟลเวอร์-สปินต้องมีสมมาตรแบบผสม $[31]_{FS}$

ในส่วนของฟังก์ชันคลื่น $\psi^{OSF}(q^4)$ สำหรับสถานะพื้นสามารถสร้างได้โดยให้ส่วนตำแหน่งมีความเป็นสมมาตรสมบูรณ์ $[4]_X$ ทำให้สถานะของเฟลเวอร์-สปินจึงต้องมีสมมาตรรวมกันเป็นแบบ $[31]_{FS}$ โดยจะมีโครงร่างเฟลเวอร์-สปินคือ $\left|[31]_i[Y]_F[X]_S\right\rangle$ ในที่นี้คือฟังก์ชันคลื่นเฟลเวอร์-สปินประเภท i แบบรูป [31] เฟลเวอร์แบบรูป $[Y]$ และสปินแบบรูป $[X]$ ซึ่งเกิดจากการรวมกันของ $\psi^{F}_{[Y]j}$ (ฟังก์ชันคลื่นเฟลเวอร์ประเภท j แบบรูป $[Y]$) และ $\chi^{S}_{[X]k}$ (ฟังก์ชันคลื่นสปินประเภท k แบบรูป $[X]$) โดยอาศัยกระบวนการเช่นเดียวกับสมการที่ 3-27 สามารถสร้างฟังก์ชั่นคลื่นเฟลเวอร์-สปินที่เป็นไปได้ทั้งสิ้น 6 โครงร่างดังนี้

$$\left|[31]_{FS\lambda}[211]_F[22]_S\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\psi^{F}_{[211]\lambda}\chi^{S}_{[22]\lambda} + \psi^{F}_{[211]\rho}\chi^{S}_{[22]\rho} - \sqrt{2}\,\psi^{F}_{[211]\eta}\chi^{S}_{[22]\rho}\right) \qquad (3\text{-}45)$$

$$\left|[31]_{FS\rho}[211]_F[22]_S\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\psi^{F}_{[211]\lambda}\chi^{S}_{[22]\rho} + \psi^{F}_{[211]\rho}\chi^{S}_{[22]\lambda} + \sqrt{2}\,\psi^{F}_{[211]\eta}\chi^{S}_{[22]\lambda}\right) \qquad (3\text{-}46)$$

$$\left|[31]_{FS\eta}[211]_F[22]_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^{F}_{[211]\lambda}\chi^{S}_{[22]\lambda} + \psi^{F}_{[211]\rho}\chi^{S}_{[22]\rho}\right) \qquad (3\text{-}47)$$

$$\left|[31]_{FS\lambda}[211]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^{F}_{[211]\lambda}\chi^{S}_{[31]\eta} - \psi^{F}_{[211]\eta}\chi^{S}_{[31]\rho}\right) \qquad (3\text{-}48)$$

$$\left|[31]_{FS\rho}[211]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^{F}_{[211]\rho}\chi^{S}_{[31]\eta} + \psi^{F}_{[211]\eta}\chi^{S}_{[31]\lambda}\right) \qquad (3\text{-}49)$$

$$\left|[31]_{FS\eta}[211]_F[31]_S\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^{F}_{[211]\lambda}\chi^{S}_{[31]\lambda} + \psi^{F}_{[211]\rho}\chi^{S}_{[31]\rho}\right) \qquad (3\text{-}50)$$

$$\left|[31]_{FS\lambda}[22]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\psi^F_{[22]\lambda}\chi^S_{[31]\lambda} - \psi^F_{[22]\rho}\chi^S_{[31]\rho} + \sqrt{2}\psi^F_{[22]\lambda}\chi^S_{[31]\eta}\right) \tag{3-51}$$

$$\left|[31]_{FS\rho}[22]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\psi^F_{[22]\lambda}\chi^S_{[31]\rho} - \psi^F_{[22]\rho}\chi^S_{[31]\lambda} + \sqrt{2}\psi^F_{[22]\rho}\chi^S_{[31]\eta}\right) \tag{3-52}$$

$$\left|[31]_{FS\eta}[22]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^F_{[22]\lambda}\chi^S_{[31]\lambda} + \psi^F_{[22]\rho}\chi^S_{[31]\rho}\right) \tag{3-53}$$

$$\left|[31]_{FS\lambda}[31]_F[22]_S\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[22]\lambda} - \psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[22]\rho} + \sqrt{2}\psi^F_{[31]\eta}\chi^S_{[22]\lambda}\right) \tag{3-54}$$

$$\left|[31]_{FS\rho}[31]_F[22]_S\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[22]\rho} + \psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[22]\lambda} - \sqrt{2}\psi^F_{[31]\eta}\chi^S_{[22]\rho}\right) \tag{3-55}$$

$$\left|[31]_{FS\eta}[31]_F[22]_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[22]\lambda} + \psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[22]\rho}\right) \tag{3-56}$$

$$\left|[31]_{FS\lambda}[31]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-2\,\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[31]\lambda} + \sqrt{2}\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[31]\eta} + 2\,\psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[22]\rho} + \sqrt{2}\psi^F_{[31]\eta}\chi^S_{[22]\lambda}\right) \tag{3-57}$$

$$\left|[31]_{FS\rho}[31]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(2\,\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[31]\rho} + 2\,\psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[31]\lambda} + \sqrt{2}\,\psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[22]\eta} + \sqrt{2}\,\psi^F_{[31]\eta}\chi^S_{[31]\rho}\right) \tag{3-58}$$

$$\left|[31]_{FS\eta}[31]_F[31]_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[31]\lambda} + \psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[31]\rho} - 2\,\psi^F_{[31]\eta}\chi^S_{[22]\eta}\right) \tag{3-59}$$

$$\left|[31]_{FS\lambda}[31]_F[4]_S\right\rangle = \psi^F_{[31]\lambda}\chi^S_{[4]} \tag{3-60}$$

$$\left|[31]_{FS\rho}[31]_F[4]_S\right\rangle = \psi^F_{[31]\rho}\chi^S_{[4]} \tag{3-61}$$

$$\left|[31]_{FS\eta}[31]_F[4]_S\right\rangle = \psi^F_{[31]\eta}\chi^S_{[4]} \tag{3-62}$$

สำหรับฟังก์ชันคลื่นในส่วนของสปินจากควาร์ก 4 ตัว $\chi^{S}_{[X]\lambda}$ แต่ละตัวมีสปิน $\frac{1}{2}$ สามารถสร้างได้ง่ายโดยการคู่ควบด้วยสัมประสิทธิ์ Cleabsh-Gordan ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}
\chi^{S}_{[22]\lambda}(s_z=0) &= \sum_{s_{z34}=-1}^{1}\sum_{s_{z12}=-1}^{1}\sum_{s_{z4}=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sum_{s_{z3}=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sum_{s_{z2}=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sum_{s_{z1}=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C^{00}_{1s_{z12},1s_{z34}} C^{1s_{z34}}_{\frac{1}{2}s_{z3},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{1s_{z12}}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \\
&= \sum_{s_{z12}s_{z34}}\sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{00}_{1s_{z12},1s_{z34}} C^{1s_{z34}}_{\frac{1}{2}s_{z3},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{1s_{z12}}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big(2\left|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + 2\left|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle\Big)
\end{aligned}$$

(3-63)

โดยที่ ↑ ↓ แสดงถึงสปินขึ้นและลงตามลำดับ และสำหรับ $\chi^{S}_{[22]\rho}(s_z=0)$ คือ

$$\begin{aligned}
\chi^{S}_{[22]\rho}(s_z=0) &= \sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{00}_{00,00} C^{00}_{\frac{1}{2}s_{z3},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{00}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \\
&= \sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{00}_{\frac{1}{2}s_{z3},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{00}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \quad , C^{00}_{00,00}=1 \qquad (3\text{-}64) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}}\Big(\left|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle\Big)
\end{aligned}$$

เราสามารถใช้วิธีตัวดำเนินการเชิงภาพฉายได้ โดยกำหนดเฟสให้มีทิศเดียวกับสัมประสิทธิ์ Cleabsh-Gordan จากนั้นจึงคำนวณค่าคงที่ปกติ สำหรับแบบรูปอื่นสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\chi^{S}_{[31]\lambda}(s_z=s_z') = \sum_{s_{z123}}\sum_{s_{z12}}\sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{1s_z'}_{\frac{1}{2}s_{z123},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{\frac{1}{2}s_{z123}}_{1s_{z12},\frac{1}{2}s_{z3}} C^{1s_{z12}}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \qquad (3\text{-}65)$$

$$\chi^{S}_{[31]\lambda}(s_z=1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(2\left|\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle\Big) \qquad (3\text{-}66)$$

$$\chi^{S}_{[31]\lambda}(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{12}}\Big(2\left|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle - 2\left|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle\Big)$$

(3-67)

$$\chi^{S}_{[31]\lambda}(s_z=-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\left|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle - 2\left|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle\Big) \qquad (3\text{-}68)$$

$$\chi^{S}_{[31]\rho}(s_z = s'_z) = \sum_{s_{z123}} \sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{1s'_z}_{\frac{1}{2}s_{z123},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{\frac{1}{2}s_{z123}}_{00,\frac{1}{2}s_{z3}} C^{00}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \tag{3-69}$$

$$\chi^{S}_{[31]\rho}(s_z = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-70}$$

$$\chi^{S}_{[31]\rho}(s_z = 0) = \frac{1}{\sqrt{4}}\left(\left|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-71}$$

$$\chi^{S}_{[31]\rho}(s_z = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle\right) \tag{3-72}$$

$$\chi^{S}_{[31]\eta}(s_z = s'_z) = \sum_{s_{z123}} \sum_{s_{z12}} \sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{1s'_z}_{\frac{3}{2}s_{z123},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{\frac{3}{2}s_{z123}}_{1s_{z12},\frac{1}{2}s_{z3}} C^{1s_{z12}}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \tag{3-73}$$

$$\chi^{S}_{[31]\eta}(s_z = 1) = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(3\left|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-74}$$

$$\chi^{S}_{[31]\eta}(s_z = 0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\left|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-75}$$

$$\chi^{S}_{[31]\eta}(s_z = -1) = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\left|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle - 3\left|\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-76}$$

$$\chi^{S}_{[4]}(s_z = s'_z) = \sum_{s_{z123}} \sum_{s_{z12}} \sum_{s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}} C^{2s'_z}_{\frac{3}{2}s_{z123},\frac{1}{2}s_{z4}} C^{\frac{3}{2}s_{z123}}_{1s_{z12},\frac{1}{2}s_{z3}} C^{1s_{z12}}_{\frac{1}{2}s_{z1},\frac{1}{2}s_{z2}} \left|s_{z1}s_{z2}s_{z3}s_{z4}\right\rangle \tag{3-77}$$

$$\chi^{S}_{[4]}(s_z = 2) = \left|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle \tag{3-78}$$

$$\chi^{S}_{[4]}(s_z = 1) = \frac{1}{\sqrt{4}}\left(\left|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-79}$$

$$\chi^{S}_{[4]}(s_z = 0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\left|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{3-80}$$

$$\chi^{S}_{[4]}(s_z=-1)=\frac{1}{\sqrt{4}}\Big(\left|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle\Big) \tag{3-81}$$

$$\chi^{S}_{[4]}(s_z=-2)=\left|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle \tag{3-82}$$

สถานะสปินรวมเป็น 0 จะได้แก่โครงร่าง $[31]_{FS}[211]_F[22]_S$ และ $[31]_{FS}[31]_F[22]_S$ ขณะที่สปินรวมเท่ากับ 1 มีโครงร่างได้แก่ $[31]_{FS}[211]_F[31]_S$ $[31]_{FS}[22]_F[31]_S$ และ $[31]_{FS}[31]_F[31]_S$ สปินเท่ากับ 2 มีเพียงโครงร่างเดียวคือ $[31]_{FS}[31]_F[4]_S$

ฟังก์ชันคลื่นส่วนเฟลเวอร์ของควาร์ก 4 ตัว $\psi^F_{[\lambda]'}$ เกิดจากการรวมกันของเฟลเวอร์ 3 ชนิดคือ u d และ s การรวมเฟลเวอร์มีลักษณะคล้ายการรวมสปินมากจึงเรียกว่า ไอโซโทปิก สปิน (Isotopic Spin) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ไอโซสปิน (Isospin) สัญลักษณ์ที่ใช้คือ I และมีค่าไอโซสปินในองค์ประกอบที่สาม I_3 (คล้ายกับองค์ประกอบในแกน z ของสปิน) โดยที่ u จะมี $I=\frac{1}{2}$ $I_3=\frac{1}{2}$ ขณะที่ d จะมี $I=\frac{1}{2}$ $I_3=-\frac{1}{2}$ และ s จะมี $I=I_3=0$ ตัวอย่างเช่นโปรตอนมีส่วนประกอบคือ uud ดังนั้นโปรตอนจึงมี $I=I_3=\frac{1}{2}$ เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นเฟลเวอร์เกิดจากการรวมกันของเฟลเวอร์ 3 ชนิด ดังนั้นจึงใช้การรวมภายใต้กลุ่ม $SU(3)$ โดยใช้ตัวดำเนินการเชิงภาพฉาย (Yan & Srisuphaphon, 2012) หรือดังที่แสดงไว้ในเอกสารอ้างอิง (An et al., 2006)

$$\begin{aligned}
P_{[211]\lambda}\left|uuds\right\rangle &= \Big[(1)+\frac{1}{2}\big(2(12)-(13)-(14)-(23)-(24)-2(34)-(123)-(124)-(132)\\
&\quad +(134)-(142)+(143)+(234)+(243)+(1234)+(1243)+(1342)\\
&\quad +(1432)-2\,(12)(34)\big)\Big]\left|uuds\right\rangle\\
\psi^I_{[211]\lambda} &= \frac{1}{4}\Big[-2\left|uusd\right\rangle+\left|usud\right\rangle+\left|suud\right\rangle+2\left|uuds\right\rangle-\left|udus\right\rangle-\left|duus\right\rangle\\
&\quad -\left|usdu\right\rangle-\left|sudu\right\rangle+\left|udsu\right\rangle+\left|dusu\right\rangle\Big]
\end{aligned} \tag{3-83}$$

สำหรับฟังก์ชันคลื่นส่วนเฟลเวอร์ประเภทอื่น ๆ นั้นแสดงได้โดยใช้ตัวดำเนินการเชิงภาพฉายเช่นเดียวกัน

$$\psi^{F}_{[211]\rho} = \frac{1}{\sqrt{48}}\Big[3|usud\rangle - 3|suud\rangle - 3|udus\rangle + 3|duus\rangle - |usdu\rangle - |sudu\rangle + |udsu\rangle - |dusu\rangle + 2|sduu\rangle - 2|dsuu\rangle\Big] \tag{3-84}$$

$$\psi^{F}_{[211]\eta} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[-|usdu\rangle + |sudu\rangle + |udsu\rangle - |dusu\rangle - |sduu\rangle + |dsuu\rangle\Big] \tag{3-85}$$

$$\psi^{F}_{[22]\lambda} = \frac{1}{\sqrt{24}}\Big[2|uusd\rangle - |usud\rangle - |suud\rangle + 2|uuds\rangle - |udus\rangle - |duus\rangle - |usdu\rangle - |sudu\rangle - |udsu\rangle - |dusu\rangle + 2|sduu\rangle + 2|dsuu\rangle\Big] \tag{3-86}$$

$$\psi^{F}_{[22]\rho} = \frac{1}{\sqrt{8}}\Big[|usud\rangle - |suud\rangle + |udus\rangle - |duus\rangle - |usdu\rangle + |dusu\rangle - |udsu\rangle + |dusu\rangle\Big] \tag{3-87}$$

$$\psi^{F}_{[31]\lambda} = \frac{1}{12}\Big[6|uuds\rangle - 3|duus\rangle - 3|udus\rangle - 4|dsuu\rangle - 4|sduu\rangle + 5|sudu\rangle + 5|usdu\rangle + 2|uusd\rangle - |suud\rangle - |dusu\rangle - |usud\rangle - |udsu\rangle\Big] \tag{3-88}$$

$$\psi^{F}_{[31]\rho} = \frac{1}{\sqrt{48}}\Big[-3|duus\rangle + 3|udus\rangle - 3|dusu\rangle + 3|usdu\rangle - 2|dsuu\rangle + 2|sduu\rangle - |sudu\rangle + |usdu\rangle - |suud\rangle + |usud\rangle\Big] \tag{3-89}$$

$$\psi^{F}_{[31]\eta} = \frac{1}{\sqrt{18}}\Big[2|uusd\rangle + 2|suud\rangle + 2|usud\rangle - |sudu\rangle - |usdu\rangle - |dusu\rangle - |udsu\rangle - |dsuu\rangle - |sduu\rangle\Big] \tag{3-90}$$

การสร้างฟังก์ชันคลื่นส่วนเฟลเวอร์ของควาร์ก 5 ตัว $\Psi^{F}_{[\lambda]_F}$ จากการที่เฟลเวอร์ของปฏิควาร์กเอสมีไอโซสปินเป็น 0 จึงคู่ควบเข้ากับควาร์ก 4 ตัว ไปเป็นฟังก์ชันคลื่นเฟลเวอร์ของควาร์ก 5 ตัวได้เป็น

$$\Psi^{F}_{[\lambda]_F} = |uuds\rangle^{F}_{[\lambda]_F} \otimes |\bar{s}\rangle = \psi^{F}_{[\lambda]_F} \cdot |\bar{s}\rangle \tag{3-91}$$

ฟังก์ชันคลื่นส่วนเฟลเวอร์ของควาร์ก 5 ตัวแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\Psi^{F}_{[211]\lambda} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[211]\lambda} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[211]\lambda} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle \\
\Psi^{F}_{[211]\rho} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[211]\rho} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[211]\rho} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle \\
\Psi^{F}_{[211]\eta} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[211]\eta} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[211]\eta} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3-92}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^{F}_{[22]\lambda} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[22]\lambda} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[22]\lambda} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle \\
\Psi^{F}_{[22]\rho} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[22]\rho} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[22]\rho} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3-93}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^{F}_{[31]\lambda} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[31]\lambda} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[31]\lambda} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle \\
\Psi^{F}_{[31]\rho} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[31]\rho} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[31]\rho} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle \\
\Psi^{F}_{[31]\eta} &= \left|uuds\right\rangle^{F}_{[31]\lambda} \otimes \left|\bar{s}\right\rangle = \psi^{F}_{[31]\lambda} \cdot \left|\bar{s}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3-94}
$$

ฟังก์ชันคลื่นส่วนตำแหน่ง-สปินของควาร์ก 5 ตัว $X^{OS}_{[22]_t}$ จะสร้างจากการพิจารณาควาร์ก 4 ตัวอยู่ในสถานะพื้นหรือให้มีสปินรวมเป็นศูนย์ $(S_q = 0)$ และปฏิควาร์กสปินครึ่ง $(S_{\bar{s}} = 1/2)$ อยู่สถานะชั้นพลังงานกระตุ้นที่ 1 $(L_{\bar{s}} = 1)$ สปินรวมของควาร์ก 5 ตัวทั้งระบบจึงต้องทำการคู่ควบสปินและโมเมนตัมเชิงมุมเข้าด้วยกัน ตัวอย่างเช่น

$$
\begin{aligned}
X^{OS}_{[22]_t} &= \left(\left(\left|L_{\bar{s}} = 1\right\rangle \otimes \left|S_{\bar{s}} = \tfrac{1}{2}\right\rangle\right)_{J12=\frac{1}{2}} \otimes \left|S_q = 0\right\rangle\right)_{J=\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{J_{12}\, m_s\, s_{\bar{s}}} C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{00,\frac{1}{2}J_{12}} C^{1\frac{1}{2}J_{12}}_{\frac{1}{2}s_{\bar{s}},1m_{\bar{s}}} \chi^{S}_{[22]_t}(s_q = 0)\, \bar{Y}_{1m_s} \left|s_{\bar{s}}\right\rangle_{\bar{s}} \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}} \chi^{S}_{[22]_t}(s_q = 0)\, \bar{Y}_{11} \left|\downarrow\right\rangle_{\bar{s}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \chi^{S}_{[22]_t}(s_q = 0)\, \bar{Y}_{10} \left|\uparrow\right\rangle_{\bar{s}}
\end{aligned}
\tag{3-95}
$$

โดยที่ $\bar{Y}_{1m_s}$ คือสถานะของปฏิควาร์กเอสที่โมเมนตัมเชิงมุม $L = 1$ (ไม่ใช่ฟังก์ชันฮาร์มอนิกทรงกลม) โดยในที่นี้ $m_{\bar{s}}$ คือองค์ประกอบในแนวแกน z สำหรับสถานะที่ควาร์ก 4 ตัวมีค่าสปินเท่ากับ 1 มีโครงร่างที่เกี่ยวข้องคือ $[31]_{FS}[211]_F[31]_S$ $[31]_{FS}[22]_F[31]_S$ และ $[31]_{FS}[31]_F[31]_S$ มีฟังก์ชันคลื่นสปินดังนี้

$$
\begin{aligned}
X^{OS}_{[31]_l} &= \left(\left(\left| L_{\bar{s}} = 1 \right\rangle \otimes \left| S_{\bar{s}} = \tfrac{1}{2} \right\rangle \right)_{J_{12} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \otimes \left| S_q = 1 \right\rangle \right)_{J = \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg[\sum_{J_{12}\, s_q\, m_{\bar{s}}\, s_{\bar{s}}} C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{1 s_q, \frac{1}{2} J_{12}} C^{\frac{1}{2} J_{12}}_{\frac{1}{2} s_{\bar{s}}, 1 m_{\bar{s}}} \bar{Y}_{1 m_{\bar{s}}} \left| s_{\bar{s}} \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{1}{2}, m_{12} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q) \\
&\quad + \sum_{J_{12}\, s_q\, m_{\bar{s}}\, s_{\bar{s}}} C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{1 s_q, \frac{3}{2} J_{12}} C^{\frac{3}{2} J_{12}}_{\frac{1}{2} s_{\bar{s}}, 1 m_{\bar{s}}} \bar{Y}_{1 m_{\bar{s}}} \left| s_{\bar{s}} \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{3}{2}, m_{12} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q) \Bigg] \\
&= \frac{1}{2} \bar{Y}_{11} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = -1) - \frac{1}{3} \bar{Y}_{11} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 0) \\
&\quad + \frac{1}{3\sqrt{2}} \bar{Y}_{10} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 0) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \bar{Y}_{11} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 0) \\
&\quad - \frac{1}{3} \bar{Y}_{10} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 0) + \frac{1}{3} \bar{Y}_{10} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 1) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{Y}_{1,-1} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 1) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \bar{Y}_{10} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 1) \\
&\quad + \frac{1}{6} \bar{Y}_{1,-1} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} \left| \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \right\rangle_{J12} \chi^{S}_{[31]_l}(s_q = 1)
\end{aligned}
\tag{3-96}
$$

โดยที่ $\left| J'_{12}, m_{12} \right\rangle_{J12}$ คือสถานะที่โมเมนตัมเชิงมุมรวมระหว่างสปินและระดับชั้นพลังงานย่อยของปฏิควาร์กเอสมีค่าเป็น J'_{12} และมีค่าในแนวแกน z คือ m_{12}

สำหรับสถานะที่ควาร์ก 4 ตัวมีค่าสปินเท่ากับ 2 มีโครงร่างที่เกี่ยวข้องเพียงโครงร่างเดียว คือ $[31]_{FS}[31]_{F}[4]_{S}$ และมีฟังก์ชันคลื่นสปินคือ

$$
\begin{aligned}
X^{OS}_{[4]} &= \left(\left(\left| L_{\bar{s}} = 1 \right\rangle \otimes \left| S_{\bar{s}} = \tfrac{1}{2} \right\rangle \right)_{J_{12} = \frac{3}{2}} \otimes \left| S_q = 2 \right\rangle \right)_{J = \frac{1}{2}} \\
&= \sum_{J_{12}\, s_q\, m_{\bar{s}}\, s_{\bar{s}}} C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{2 s_q, \frac{3}{2} J_{12}} C^{\frac{3}{2} J_{12}}_{\frac{1}{2} s_{\bar{s}}, 1 m_{\bar{s}}} \chi^{S}_{[4]}(s_q)\, \bar{Y}_{1 m_{\bar{s}}} \left| s_{\bar{s}} \right\rangle_{\bar{s}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{10}} \chi^{S}_{[4]}(s_q = -1)\, \bar{Y}_{11} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} - \frac{1}{\sqrt{15}} \chi^{S}_{[4]}(s_q = 0)\, \bar{Y}_{11} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}} \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{15}} \chi^{S}_{[4]}(s_q = 0)\, \bar{Y}_{10} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \chi^{S}_{[4]}(s_q = 1)\, \bar{Y}_{10} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{10}} \chi^{S}_{[4]}(s_q = 1)\, \bar{Y}_{1,-1} \left| \uparrow \right\rangle_{\bar{s}} - \sqrt{\frac{2}{5}} \chi^{S}_{[4]}(s_q = 2)\, \bar{Y}_{1,-1} \left| \downarrow \right\rangle_{\bar{s}}
\end{aligned}
\tag{3-97}
$$

และสุดท้ายคือฟังก์ชันคลื่นตำแหน่ง-สปิน-เฟลเวอร์ของควาร์ก 5 ตัว $\Psi^{OSF}_{[31]_l}$ เกิดจากนำฟังก์ชันคลื่นตำแหน่ง-สปินไปคู่ควบเข้ากับฟังก์ชันคลื่นในส่วนเฟลเวอร์

$$\Psi^{OSF}_{[31]i} = \left|[31]_{OSFi}[Y]_F[X]_{OS}\right\rangle = \left|\left|[31]_{FSi}[Y]_F[X]_S\right\rangle \otimes \left|\bar{s}\right\rangle\right\rangle = \sum_{i,\,j=\lambda,\,\rho,\,\eta} a_{ij}\, \Psi^F_{[Y]i}\, \mathrm{X}^{OS}_{[X]j} \tag{3-98}$$

ซึ่งจะอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นด้วยสัมประสิทธ์ a_{ij} ฟังก์ชันคลื่นที่ได้เกิดจากการคู่ควบระหว่าง ฟังก์ชันคลื่นในส่วนของเฟลเวอร์จากควาร์ก 5 ตัว $\Psi^F_{[Y]i}$ และฟังก์ชันคลื่นในส่วนของตำแหน่ง-สปินจากควาร์ก 5 ตัว $\mathrm{X}^{OS}_{[X]j}$ จะได้เป็น

$$\left|[31]_{OSF\lambda}[211]_F[22]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\Psi^F_{[211]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\lambda} + \Psi^F_{[211]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\rho} - \sqrt{2}\,\Psi^F_{[211]\eta}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\rho}\right) \tag{3-99}$$

$$\left|[31]_{OSF\rho}[211]_F[22]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\Psi^F_{[211]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\rho} + \Psi^F_{[211]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\lambda} + \sqrt{2}\,\Psi^F_{[211]\eta}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\lambda}\right) \tag{3-100}$$

$$\left|[31]_{OSF\eta}[211]_F[22]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^F_{[211]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[22]\lambda} + \Psi^F_{[211]\rho}\mathrm{X}^{S}_{[22]\rho}\right) \tag{3-101}$$

$$\left|[31]_{OSF\lambda}[211]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^F_{[211]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\eta} - \Psi^F_{[211]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\eta}\right) \tag{3-102}$$

$$\left|[31]_{OSF\rho}[211]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^F_{[211]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\eta} + \Psi^F_{[211]\eta}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\lambda}\right) \tag{3-103}$$

$$\left|[31]_{OSF\eta}[211]_F[31]_{OS}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^F_{[211]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\lambda} + \Psi^F_{[211]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\rho}\right) \tag{3-104}$$

$$\left|[31]_{OFS\lambda}[22]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\Psi^F_{[22]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\lambda} - \Psi^F_{[22]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\rho} + \sqrt{2}\Psi^F_{[22]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\eta}\right) \tag{3-105}$$

$$\left|[31]_{OFS\rho}[22]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\Psi^F_{[22]\lambda}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\rho} - \Psi^F_{[22]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\lambda} + \sqrt{2}\Psi^F_{[22]\rho}\mathrm{X}^{OS}_{[31]\eta}\right) \tag{3-106}$$

$$\left|[31]_{OFS\eta}[22]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^F_{[22]\lambda}X^S_{[31]\lambda} + \Psi^F_{[22]\rho}X^{OS}_{[31]\rho}\right) \qquad (3\text{-}107)$$

$$\left|[31]_{OFS\lambda}[31]_F[22]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[22]\lambda} - \Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[22]\rho} + \sqrt{2}\Psi^F_{[31]\eta}X^{OS}_{[22]\lambda}\right) \qquad (3\text{-}108)$$

$$\left|[31]_{OFS\rho}[31]_F[22]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[22]\rho} + \Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[22]\lambda} - \sqrt{2}\Psi^F_{[31]\eta}X^{OS}_{[22]\rho}\right) \qquad (3\text{-}109)$$

$$\left|[31]_{OFS\lambda}[31]_F[22]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[22]\lambda} + \Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[22]\rho}\right) \qquad (3\text{-}110)$$

$$\begin{aligned}\left|[31]_{OFS\lambda}[31]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big(&-2\,\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[31]\lambda} + \sqrt{2}\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[31]\eta} \\ &+2\,\Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[22]\rho} + \sqrt{2}\Psi^F_{[31]\eta}X^{OS}_{[22]\lambda}\Big)\end{aligned} \qquad (3\text{-}111)$$

$$\begin{aligned}\left|[31]_{OFS\rho}[31]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big(&2\,\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[31]\rho} + 2\,\Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[31]\lambda} \\ &+\sqrt{2}\,\Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[22]\eta} + \sqrt{2}\,\Psi^F_{[31]\eta}X^{OS}_{[31]\rho}\Big)\end{aligned} \qquad (3\text{-}112)$$

$$\left|[31]_{OFS\eta}[31]_F[31]_{OS}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[31]\lambda} + \Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[31]\rho} - 2\,\Psi^F_{[31]\eta}X^{OS}_{[22]\eta}\right) \qquad (3\text{-}113)$$

$$\left|[31]_{OFS\lambda}[31]_F[4]_{OS}\right\rangle = \Psi^F_{[31]\lambda}X^{OS}_{[4]} \qquad (3\text{-}114)$$

$$\left|[31]_{OFS\rho}[31]_F[4]_{OS}\right\rangle = \Psi^F_{[31]\rho}X^{OS}_{[4]} \qquad (3\text{-}115)$$

$$\left|[31]_{OFS\eta}[31]_F[4]_{OS}\right\rangle = \Psi^F_{[31]\eta}X^{OS}_{[4]} \qquad (3\text{-}116)$$

สุดท้ายเราได้แสดงการสร้างฟังก์ชันคลื่นรวมของโปรตอนที่มีส่วนประกอบของควาร์ก 5 ตัว *uuds*$\bar{s}$ โดยควาร์ก 4 ตัว *uuds* อยู่ที่ระดับชั้นพลังงานสถานะพื้น และปฏิควาร์กเอส $\bar{s}$ อยู่ที่ระดับชั้นพลังงานสถานะกระตุ้นที่ 1 ในบทถัดไปจะเป็นการคำนวณหาสปินและโมเมนต์แม่เหล็กของควาร์กเอส