บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวน ที่ใช้เป็นแนวทางในการศึกษา โดยแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อ ดังนี้

2.1 ปริภูมิอิงระยะทาง

2.2 ฟังก์ชัน MT และการส่งหลายค่า

2.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับจุดตรึง

2.1 ปริภูมิอิงระยะทาง

ในหัวข้อนี้เป็นความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ ปริภูมิอิงระยะทาง การลู่เข้าและการมีขอบเขตของลำดับ ฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง (lower semi-continuous) และฟังก์ชันคอนเวกซ์ (convex function) ซึ่งอ้างอิงจาก Kreyzig (1978) และความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันอิงระยะทางเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff metric) และฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ซึ่งอ้างอิงจาก Takahashi (2000) ดังนี้

บทนิยาม 2.1.1 ให้ X แทนเซตใด ๆ และ $d : X \times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $d(x,y)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=y$ สำหรับทุก $x,y \in X$

2) $d(x,y)=d(y,x)$ สำหรับทุก $x,y \in X$

3) $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$ สำหรับทุก $x,y,z \in X$

เราเรียก d ว่า **เมตริก** หรือ **ฟังก์ชันอิงระยะทาง (metric or distance function)** บน X เรียก $d(x,y)$ ว่า **ระยะทาง (distance)** จาก x ถึง y และเรียก (X,d) ว่า **ปริภูมิอิงระยะทาง (metric space)**

ตัวอย่าง 2.1.1 ตัวอย่างของฟังก์ชันอิงระยะทาง

1) (The Taxicab Metric for $\mathbb{R}^n$) [4] ให้ $X=\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ และ $d' : X \times X \to [0,\infty)$ กำหนดโดย $d'(x,y)=\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ สำหรับ $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ และ $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่า d' เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X=\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

(1) สมมติให้ $d'(x,y)=0$ ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$ เพราะฉะนั้น $x_i = y_i$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ จะได้ว่า $x=y$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $x = y$ ดังนั้น $x_i = y_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ จะได้ว่า $|x_i - y_i| = 0$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i | = 0$

(2) ให้ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ และ $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i | = \sum_{i=1}^{n} | y_i - x_i | = d(y, x)$$

(3) ให้ $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ และ $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= \sum_{i=1}^{n} | x_i - z_i | = \sum_{i=1}^{n} | (x_i - y_i) + (y_i - z_i) | \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i | + \sum_{i=1}^{n} | y_i - z_i | = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

จากข้อ (1) - (3) จะได้ว่า d' เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

2) (The Max Metric for $\mathbb{R}^n$) [4] ให้ $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ และ $d'' : X \times X \to [0, \infty)$ กำหนดโดย $d''(x, y) = \max \{| x_i - y_i |\}_{i=1}^{n}$ สำหรับ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่า d'' เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

(1) สมมติให้ $d''(x, y) = 0$ ดังนั้น $\max \{| x_i - y_i |\}_{i=1}^{n} = 0$ เพราะฉะนั้น $x_i = y_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ จะได้ว่า $x = y$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $x = y$ ดังนั้น $x_i = y_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ จะได้ว่า $|x_i - y_i| = 0$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ดังนั้น $\max \{| x_i - y_i |\}_{i=1}^{n} = 0$ เพราะฉะนั้น $d''(x, y) = 0$

(2) ให้ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ และ $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$d''(x, y) = \max \{| x_i - y_i |\}_{i=1}^{n} = \max \{| y_i - x_i |\}_{i=1}^{n} = d''(y, x)$$

(3) ให้ $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ และ $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d''(x, z) &= \max \{| x_i - z_i |\}_{i=1}^{n} \\ &= \max \{| x_i - y_i + y_i - z_i |\}_{i=1}^{n} \\ &\leq \max \{| x_i - y_i |\}_{i=1}^{n} + \max \{| y_i - z_i |\}_{i=1}^{n} \end{aligned}$$

จากข้อ (1) - (3) จะได้ว่า d'' เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

3) ให้ $X = C[a,b]$ เมื่อ $C[a,b] = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง$\}$ และ $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ กำหนดโดย $\rho(f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx$ สำหรับ $f, g \in C[a,b]$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่า ρ เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = C[a,b]$

(1) สมมติให้ $\rho(f,g) = 0$ ดังนั้น $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = 0$ เพราะฉะนั้น $|f(x) - g(x)| = 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังนั้น $f = g$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $f = g$ ดังนั้น $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $|f(x) - g(x)| = 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังนั้น $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = 0$ เพราะฉะนั้น $\rho(f,g) = 0$

(2) ให้ $f, g \in C[a,b]$ จะได้ว่า

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx = \rho(g,f)$$

(3) ให้ $f, g, h \in C[a,b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \rho(f,h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)|dx \\ &\le \int_a^b |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x) - h(x)|dx \\ &\le \rho(f,g) + \rho(g,h) \end{aligned}$$

จากข้อ (1) - (3) จะได้ว่า ρ เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = C[a,b]$

4) ให้ $X = C[a,b]$ เมื่อ $C[a,b] = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง$\}$ และ $\rho' : X \times X \to [0,\infty)$ กำหนดโดย $\rho'(x,y) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a,b]\}$ สำหรับ $f, g \in C[a,b]$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่า ρ' เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = C[a,b]$

(1) สมมติให้ $\rho'(f,g) = 0$ ดังนั้น $\text{lub}\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a,b]\} = 0$ เพราะฉะนั้น $|f(x) - g(x)| = 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังนั้น $f = g$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $f = g$ ดังนั้น $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $|f(x) - g(x)| = 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังนั้น $\sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a,b]\} = 0$ เพราะฉะนั้น $\rho'(f,g) = 0$

(2) ให้ $f, g \in C[a,b]$ จะได้ว่า

$$\rho'(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\}$$
$$= \sup\{|g(x)-f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \rho'(g,f)$$

(3) ให้ $f, g, h \in C[a,b]$ จะได้ว่า

$$\rho'(f,h) = \sup\{|f(x)-h(x)| \mid x \in [a,b]\}$$
$$\leq \sup\{|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)| \mid x \in [a,b]\}$$
$$\leq \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\} + \sup\{|g(x)-h(x)| \mid x \in [a,b]\}$$
$$= \rho(f,g) + \rho(g,h)$$

จากข้อ (1) - (3) จะได้ว่า ρ' เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $X = C[a,b]$

บทนิยาม 2.1.3 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และให้ $a \in X$ และ $r > 0$ จะเรียก

1) เซต $B_d(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ ว่า **บอลเปิด (open ball)** จุดศูนย์กลางที่ a รัศมี r

2) เซต $B_d(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$ ว่า **บอลปิด (closed ball)** จุดศูนย์กลางที่ a รัศมี r

บทนิยาม 2.1.4 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $O \subseteq X$ จะกล่าวว่า O เป็น **เซตเปิด (open set)** ก็ต่อเมื่อ O เป็นผลรวม (union) ของบอลเปิด

บทตั้ง 2.1.5 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ดังนั้น จะได้ว่า

1) X และ ϕ เป็นเซตเปิด

2) ผลรวมของเซตเปิดเป็นเซตเปิด

3) ผลร่วมจำกัด (finite intersection) ของเซตเปิดเป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.1.6 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $C \subseteq X$ จะกล่าวว่า C เป็น **เซตปิด (closed set)** ก็ต่อเมื่อ $X - C$ เป็นเซตเปิด

บทตั้ง 2.1.7 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ดังนั้น จะได้ว่า

1) X และ ϕ เป็นเซตปิด

2) ผลร่วมของเซตปิดเป็นเซตปิด

3) ผลรวมจำกัดของเซตปิดเป็นเซตปิด

บทนิยาม 2.1.8 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บน $\mathbb{F}$ เมื่อ $\mathbb{F}$ คือ $\mathbb{C}$ หรือ $\mathbb{R}$ และ $A \subset X$ จะเรียก $\|\ \| : X \to \mathbb{F}$ ว่า **นอร์ม (norm)** บน X ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไข

1) $\|x\| \geq 0$ สำหรับ $x \in X$

2) $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ สำหรับ $x, y \in X$

4) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ สำหรับ $x \in X$ และ $a \in \mathbb{F}$

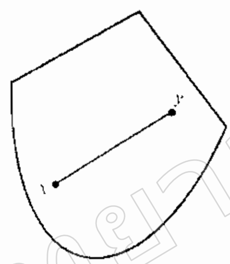
และเรียกคู่อันดับ $(X, \|\cdot\|)$ ว่า **ปริภูมินอร์ม (norm space)**

ข้อสังเกต 2.1.9 นอร์มบน X สามารถนิยามเป็น ฟังก์ชันอิงระยะทางบน X โดย

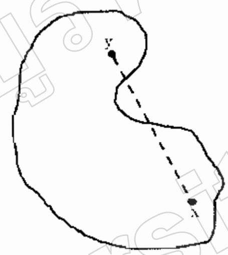
$$d(x,y) = \|x-y\| \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

เห็นได้ชัดว่า จากเงื่อนไขของนอร์ม จะได้ว่า ปริภูมินอร์มเป็นปริภูมิอิงระยะทาง

บทนิยาม 2.1.10 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มบน $\mathbb{R}$ และ $C \subset X$ จะกล่าวว่า C เป็น **เซตคอนเวกซ์ (convex set)** ก็ต่อเมื่อ $tx + (1-t)y \in C$ สำหรับทุก $x, y \in C$ และ $t \in [0,1]$



เซตคอนเวกซ์



ไม่ใช่เซตคอนเวกซ์

บทตั้ง 2.1.11 ถ้า C เป็นเซตคอนเวกซ์บนปริภูมินอร์ม และ $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset [0,1]$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ แล้ว $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \in C$ เมื่อ $a_i \in C$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

บทนิยาม 2.1.12 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มบน $\mathbb{R}$ และ $C \subset X$ จะกล่าวว่า C เป็น **เซตที่มีขอบเขต (bounded set)** ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $M > 0$ ซึ่งทำให้ $\|x\| \le M$ ทุกๆ $x \in C$

บทนิยาม 2.1.13 ให้ D เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $\le$ เป็นความสัมพันธ์บน D ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

1) $\alpha \le \alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in D$

2) ถ้า สำหรับ $\alpha, \beta, \gamma \in D$ ซึ่ง $\alpha \le \beta$ และ $\beta \le \gamma$ แล้ว $\alpha \le \gamma$

3) สำหรับ $\alpha, \beta \in D$ จะมี $\gamma \in D$ ซึ่ง $\alpha \le \gamma$ และ $\beta \le \gamma$

เรียก $(D, \le)$ ว่า **เซตระบุทิศทาง (directed set)**

บทนิยาม 2.1.14 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ D เป็นเซตระบุทิศทาง เรียก เซต $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ ว่า **ข่ายลำดับ (net)** ใน X เขียนแทนด้วย $\{x_\alpha\}$

บทนิยาม 2.1.15 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ เป็นข่ายลำดับใน X จะกล่าวว่า $\{x_\alpha\}$ **ลู่เข้า (converge)** สู่จุด $x_0 \in X$ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ เซตปิด O ซึ่ง $x_0 \in O$ มี $\alpha_0 \in D$ ซึ่ง $x_\alpha \in O$ ทุก α ที่ $\alpha_0 \leq \alpha$ เขียนแทนด้วย $x_\alpha \to x_0$ หรือ $\lim_\alpha x_\alpha = x_0$

บทนิยาม 2.1.16 ให้ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ เป็นข่ายลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) และ B เป็นเซตระบุทิศทางใน X จะเรียกข่ายลำดับ $\{x_{\alpha_\beta} \mid \beta \in B\}$ ว่า **ข่ายลำดับย่อย (subnet)** ของ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไข

1) $\{x_{\alpha_\beta} \mid \beta \in B\} \subset \{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$
2) สำหรับ $\alpha_0 \in D$ ถ้ามี $\beta_0 \in B$ ซึ่ง $\beta_0 \leq \beta$ แล้ว $\alpha_0 \leq \alpha_\beta$

บทตั้ง 2.1.17 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ เป็นข่ายลำดับใน X ดังนั้น ถ้า $p \in X$ เป็นจุดสะสม (accumulation point) ของ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ แล้ว จะมีข่ายลำดับย่อยของ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ ลู่เข้าสู่ $p \in X$ ในทางกลับกัน ถ้าข่ายลำดับย่อยของ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ ลู่เข้าสู่ $p \in X$ แล้ว p จะเป็นจุดสะสมของ $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$

บทนิยาม 2.1.18 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มและ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X จะเรียก

1) $\{x_n\}$ เป็น **ลำดับมีขอบเขต (bounded sequence)** ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $M > 0$ ซึ่งทำให้ $\|x_n\| \leq M$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$
2) $\{x_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** ก็ต่อเมื่อ มี $x \in X$ ซึ่งสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ ทุกๆ $n \geq N$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ หรือ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
3) $\{x_n\}$ เป็น **ลำดับโคชี (Cauchy sequence)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ ทุกๆ $m, n \geq N$

บทนิยาม 2.1.19 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม จะเรียก X ว่า **ปริภูมิบริบูรณ์ (complete space)** ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ลำดับโคชีใน X ลู่เข้าสู่สมาชิกใน X

- **บทนิยาม 2.1.20** ให้ C เป็นเซตที่ไม่ว่าง จะเรียก C ว่า **เซตบริบูรณ์ (complete set)** ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ลำดับโคชีใน C ลู่เข้า

บทตั้ง 2.1.21 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และ C เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างของ X จะได้ว่า ถ้า C เป็นเซตปิด แล้ว C เป็นเซตบริบูรณ์

บทนิยาม 2.1.22 เราเรียก ปริภูมิบริบูรณ์บน $\mathbb{R}$ ว่า **ปริภูมิบานาคบนจำนวนจริง (Real Banach space)**

บทนิยาม 2.1.23 ให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างของ $\mathbb{R}$

1) จะเรียกว่า $u \in \mathbb{R}$ ว่า **ขอบเขตบน (upper bound)** ของ A ก็ต่อเมื่อ $a \le u$ สำหรับทุก $a \in A$ และจะเรียกว่า A เป็น **เซตที่มีขอบเขตบน (bounded above)**
2) จะเรียกว่า $l \in \mathbb{R}$ ว่า **ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของ A ก็ต่อเมื่อ $a \ge l$ สำหรับทุก $a \in A$ และจะเรียกว่า A เป็น **เซตที่มีขอบเขตล่าง (bounded below)**
3) จะเรียกว่า A เป็น **เซตที่มีขอบเขต (bounded set)** ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตที่มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

บทนิยาม 2.1.24 ให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างของ $\mathbb{R}$

1) ให้ A เป็นเซตที่มีขอบเขตบน จะเรียกขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของ A ว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bounded or supremum)** ของ A เขียนแทนด้วย $\sup A$ นั่นคือ $M = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ
   1.1) M เป็นขอบเขตบนของ A และ
   1.2) ถ้ามี $w \in \mathbb{R}$ เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $M \le w$
2) ให้ A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง จะเรียกขอบเขตล่างที่มากที่สุดของ A ว่า **ขอบเขตล่างมากสุด (greatest lower bounded or infimum)** ของ A เขียนแทนด้วย $\inf A$ นั่นคือ $m = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ
   2.1) m เป็นขอบเขตล่างของ A และ
   2.2) ถ้ามี $w \in \mathbb{R}$ เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $m \ge w$

บทนิยาม 2.1.25 ให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างของ $\mathbb{R}$ จะเรียก

1) $\alpha \in \mathbb{R}$ ว่า **ค่าสูงสุด (maximum)** ของ A ก็ต่อเมื่อ
   1.1) $\alpha \in A$ และ
   1.2) α เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ A

เขียนแทนด้วย $\alpha = \max A$

2) $\beta \in \mathbb{R}$ ว่า **ค่าต่ำสุด (minimum)** ของ A ก็ต่อเมื่อ
   2.1) $\beta \in A$ และ
   2.2) β เป็นขอบเขตล่างมากสุดของ A

เขียนแทนด้วย $\beta = \min A$

บทนิยาม 2.1.26 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ และให้

$$S = \{x \in X \mid x \text{ เป็นลิมิตของบางลำดับย่อย } \{x_{n_k}\} \text{ ของ } \{x_n\}\}$$

1) จะเรียก $\sup S$ ว่า **ลิมิตซูพีเรียร์ (limit superior)** ของลำดับ $\{x_n\}$ และเขียนแทนด้วย $\limsup_{n\to\infty} x_n$

2) จะเรียก $\inf S$ ว่า **ลิมิตอินฟีเรียร์ (limit inferior)** ของลำดับ $\{x_n\}$ และเขียนแทนด้วย $\liminf_{n\to\infty} x_n$

บทตั้ง 2.1.27 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ดังนั้น

1) $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ก็ต่อเมื่อ $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$

บทนิยาม 2.1.28 ให้ X เป็นเซตที่ไม่ว่างและ $\mathbb{F}$ เป็น $\mathbb{C}$ หรือ $\mathbb{R}$ จะเรียกการส่ง $f: X \to \mathbb{F}$ ว่า **ฟังก์ชันนัล (functional)**

บทนิยาม 2.1.29 ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์บน $\mathbb{F}$ เมื่อ $\mathbb{F}$ คือ $\mathbb{C}$ หรือ $\mathbb{R}$ จะเรียก

1) การส่ง $T: V \to W$ ว่า **ตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operation)** ก็ต่อเมื่อ $T(x+y) = T(x) + T(y)$ และ $T(ax) = aT(x)$ ทุกๆ $x, y \in V$ และ $a \in \mathbb{F}$

2) การส่ง $T: V \to \mathbb{F}$ ว่า **ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น (linear functional)** ก็ต่อเมื่อ T เป็นการดำเนินการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.1.30 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ จะกล่าวว่า $\{x_n\}$ **ลู่เข้าอย่างเข้ม (strongly convergent)** สู่ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ เขียนแทนด้วย $x_n \to x$ หรือ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

บทนิยาม 2.1.31 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มบน $\mathbb{R}$ และ $f: X \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นที่มี **ขอบเขต (bounded)** ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่ $M \ge 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x)| \le M\|x\|$ สำหรับทุก $x \in X$

บทตั้ง 2.1.32 ให้ f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นบนปริภูมินอร์ม จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

บทนิยาม 2.1.33 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ และ $(Y, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มและ $f: X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต แล้ว นอร์มของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $\|f\|$ ซึ่งกำหนดโดย

$$\|f\| = \inf\{M \ge 0 : \|f(x)\| \le M\|x\| \text{ สำหรับทุก } x \in X\}$$

ประพจน์ 2.1.34 ให้ $(X, \|\cdot\|)$ และ $(Y, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม ถ้า $f: X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต แล้ว

$$\|f(x)\| \le \|f\|\|x\| \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

ประพจน์ 2.1.35 ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น ดังนั้น

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|f(x)\|$$

ตัวอย่าง 2.1.36 ตัวอย่างของฟังก์ชันนัลเชิงเส้น

1) นอร์ม $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ บนปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ เป็นฟังก์ชันนัลแต่ไม่เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น

พิสูจน์ เนื่องจาก สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a < 0$ จะได้ว่า $\|ax\| = |a|\,\|x\| \neq a\|x\|$ ดังนั้น $\|\cdot\|$ ไม่เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น เพราะฉะนั้น $\|\cdot\|$ ไม่เป็นฟังก์ชันนอลเชิงเส้น

2) (Dot product) ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มบน $\mathbb{R}$ และ $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ และให้การส่ง $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$f(x) = x \cdot a = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}^3$$

จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นที่มีขอบเขต

พิสูจน์ ให้ $x, y \in \mathbb{R}^3$ นั่นคือ $x = (x_1, x_2, x_3)$ และ $y = (y_1, y_2, y_3)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)\cdot a \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\cdot(a_1, a_2, a_3) \\ &= (x_1+y_1)a_1 + (x_2+y_2)a_2 + (x_3+y_3)a_3 \\ &= (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) + (y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

และ สำหรับ $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(cx) &= (cx)\cdot a \\ &= (cx_1, cx_2, cx_3)\cdot(a_1, a_2, a_3) \\ &= cx_1a_1 + cx_2a_2 + cx_3a_3 \\ &= c(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) \\ &= cf(x) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น

ต่อไปเราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นที่มีขอบเขต

ให้ $x \in \mathbb{R}^3$ ดังนั้น $\|f\| = |x \cdot a| \le \|x\|\|a\|$

สำหรับ $\|x\| = 1$ เราจะได้ว่า $\|f\| \le \|a\|$

จากประพจน์ 2.1.33 จะได้ว่า $|f(x)| \le \|f\|\|x\|$

ดังนั้น ถ้าให้ $x = a$ จะพบว่า $\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|x\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$

เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า $\|f\| = \|a\|$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นที่มีขอบเขต

บทนิยาม 2.1.37 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $f: X \to (-\infty,\infty]$ จะเรียก f ว่าเป็น **ฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง (lower semi-continuous)** บน X ก็ต่อเมื่อ มี $a \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ เป็นเซตปิดใน X

บทตั้ง 2.1.38 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะได้ $f: X \to (-\infty,\infty]$ เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_n \to x \in X$ แล้ว $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$

บทนิยาม 2.1.39 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก ฟังก์ชัน $f: C \to [-\infty,\infty]$ ว่า เป็น **ฟังก์ชันคอนเวกซ์** บน C ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x, y \in C$ และ $t \in [0,1]$ จะได้ว่า

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Takahashi,W. [12] ได้กำหนดบทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวกับฟังก์ชันอิงระยะทางเฮาส์ดอร์ฟและฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ไว้ดังนี้

บทนิยาม 2.1.40 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $CB(X)$ แทนวงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่างและมีขอบเขตของ X สำหรับ $x \in X$ และ $A \subseteq X$ กำหนดให้ $d(x,A) = \inf\{d(x,a): a \in A\}$ เป็นระยะทางระหว่าง x กับ A และสำหรับ $A, B \in CB(X)$ กำหนดฟังก์ชัน $H: CB(X) \times CB(X) \to [0,\infty)$ โดย

$$H(A,B) = \max\{h(A,B), h(B,A)\}$$

เมื่อ $h(A,B) = \sup\{d(a,B): a \in A\}$ เราเรียก H ว่าเป็น **ฟังก์ชันอิงระยะทางเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff metric)** บน $CB(X)$ ที่สร้างจากการวัดระยะทาง d บน X

ข้อสังเกต 2.1.41 เราจะพบว่าสมบัติของฟังก์ชันนัล (functional) H เป็นที่รู้จักดี ดังนี้

1) H เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $CB(X)$

2) ถ้าให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $A, B \in P(X)$ เมื่อ $P(X)$ แทนวงศ์เซตของเซตย่อยที่ไม่ว่างของ X และ $q > 1$ แล้ว สำหรับทุก $a \in A$ จะมี $b \in B$ ซึ่ง $d(a,b) \leq qH(A,B)$

บทนิยาม 2.1.42 ฟังก์ชัน $p: X \times X \to [0,\infty)$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชัน τ** เมื่อ p สอดคล้องกับเงื่อนไข

$(\tau 1)$ $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ สำหรับ $x, y, z \in X$

$(\tau 2)$ ถ้า $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x_n, y_n) \le M$

สำหรับบางค่าคงที่ $M > 0$ ที่ขึ้นอยู่กับ x แล้ว $p(x, y) \le M$

$(\tau 3)$ สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\limsup_{n\to\infty}\{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$

ถ้า มีลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$

$(\tau 4)$ สำหรับ $x, y, z \in X$ ถ้า $p(x, y) = 0$ และ $p(x, z) = 0$ แล้ว $y = z$

บทตั้ง 2.1.43 ให้ A เป็นเซตปิดที่ไม่ว่างบนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) และ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน ที่มีสมบัติสอดคล้อง ($\tau 3$) และมี $u \in X$ ซึ่ง $p(u, u) = 0$ ดังนั้น จะได้ว่า $p(u, A) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u \in A$

บทนิยาม 2.1.44 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและกำหนดฟังก์ชัน $p : X \times X \to [0, \infty)$ จะเรียก p ว่า**ฟังก์ชัน** τ^0 ก็ต่อเมื่อ p เป็นฟังก์ชัน τ ซึ่ง $p(x, x) = 0$ สำหรับ $x \in X$

ตัวอย่าง 2.1.45 ตัวอย่างของฟังก์ชัน p ที่เป็นฟังก์ชัน τ^0

1) ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ฟังก์ชัน $p = d$ เนื่องจาก ฟังก์ชันอิงระยะทาง d เป็นฟังก์ชัน τ^0 ดังนั้น p เป็นฟังก์ชัน τ^0

พิสูจน์ จากสมบัติของฟังก์ชันอิงระยะทาง d เห็นได้ชัดว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข $(\tau 1)$, $(\tau 3)$ และ $(\tau 4)$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $p = d$ สอดคล้อง $(\tau 2)$ ให้ $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x_n, y_n) \le M$ สำหรับบางค่าคงที่ $M > 0$ ที่ขึ้นอยู่กับ x ดังนั้น $p(x, y) = d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = \lim_{n\to\infty} p(x, y_n) \le M$

2) ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $c > 0$ กำหนดให้ฟังก์ชัน $p : X \times X \to [0, \infty)$ โดยที่

$$p(x, y) = \begin{cases} c & ; x \ne y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$$

สำหรับ $x, y \in X$ ดังนั้น เราจะพบว่า p เป็นฟังก์ชัน τ^0

พิสูจน์ $(\tau 1)$ ให้ $x, y, z \in X$ เราจะพบว่า

กรณี 1 $x = z$

กรณี 1.1 $x = y$ จะได้ว่า $p(x, z) = 0 = 0 + 0 = p(x, y) + p(y, z)$

กรณี 1.2 $x \ne y$ จะได้ว่า $p(x, z) = 0 \le c + c = p(x, y) + p(y, z)$

กรณี 2 $x \ne z$

กรณี 2.1 $x = y$ จะได้ว่า $p(x, z) = c = 0 + c = p(x, y) + p(y, z)$

กรณี 2.2 $x \neq y$ แต่ $y = z$ จะได้ว่า $p(x,z) = c \leq c + 0 = p(x,y) + p(y,z)$

กรณี 2.2 $x \neq y$ และ $y \neq z$ จะได้ว่า $p(x,z) = c \leq c + c = p(x,y) + p(y,z)$

ดังนั้น $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ สำหรับทุก $x,y,z \in X$

$(\tau 2)$ ให้ $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x,y_n) \leq c$

ดังนั้นให้ $M = c$ จะได้ว่า $p(x,y) = \lim_{n\to\infty} p(x,y_n) \leq M$

$(\tau 3)$ ให้ลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \sup\{p(x_n,x_m) : m > n\} = 0$

และลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} p(x_n,y_n) = 0$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$

เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$

$(\tau 4)$ ให้ $x,y,z \in X$ ซึ่ง $p(x,y) = 0$ และ $p(x,z) = 0$

ดังนั้น $x = y$ และ $x = z$ จะได้ว่า $y = z$

เพราะฉะนั้น p เป็นฟังก์ชัน τ^0

3) ให้ $X = \mathbb{R}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันอิงระยะทาง $d(x,y) = |x - y|$ สำหรับ $x,y \in X$ และ $0 < a < b$ กำหนดให้ฟังก์ชัน $p : X \times X \to [0,\infty)$ โดยที่

$$p(x,y) = \max\{a(x-y), b(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y \in X$$

จะได้ว่า p เป็นฟังก์ชัน τ^0

พิสูจน์ $(\tau 1)$ ให้ $x,y,z \in X$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
p(x,z) &= \max\{a(x-z), b(z-x)\} \\
&= \max\{a((x-y)+(y-z)), b((z-y)+(y-x))\} \\
&= \max\{a(x-y)+a(y-z), b(z-y)+b(y-x)\} \\
&\leq \max\{a(x-y), b(z-y)\} + \max\{a(y-z), b(y-x)\} \\
&= p(x,y) + p(y,z)
\end{aligned}$$

$(\tau 2)$ ให้ $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ เลือก

$M = \max\{a(x-y), b(y-x)\}$ ซึ่ง $p(x,y_n) \leq M$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \max\{a(x-y), b(y-x)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \max\{a(x-y_n), b(y_n-x)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} p(x,y_n) \leq M
\end{aligned}$$

$(\tau 3)$ ให้ลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \sup\{p(x_n,x_m) : m > n\} = 0$

และลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} p(x_n,y_n) = 0$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \max\{a(x_n-y_n), b(y_n-x_n)\} = 0$

เพราะฉะนั้น จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $x_n = y_n$ สำหรับ $n \geq N$ เราจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$

$(\tau 4)$ ให้ $x, y, z \in X$ ซึ่ง $p(x,y)=0$ และ $p(x,z)=0$
ดังนั้น $\max\{a(x-y), b(y-x)\}=0$ และ $\max\{a(x-z), b(z-x)\}=0$
ทำให้ได้ว่า $x=y$ และ $x=z$ ตามลำดับ จะได้ว่า $y=z$
เพราะฉะนั้น p เป็นฟังก์ชัน τ^0

บทนิยาม 2.1.46 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ p เป็นฟังก์ชัน τ^0 สำหรับ $A, B \in CB(X)$ กำหนดฟังก์ชัน $D_p : CB(X) \times CB(X) \to [0,\infty)$ โดย

$$D_p(A,B) = \max\left\{\delta_p(A,B), \delta_p(B,A)\right\}$$

เมื่อ $\delta_p(A,B) = \sup\{p(a,B) : a \in A\}$ และ $p(x,A) = \inf\{p(x,a) : a \in A\}$
จะเรียก D_p ว่าเป็น**ฟังก์ชันอิงระยะทาง** τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p

บทตั้ง 2.1.47 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ D_p เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p แล้ว สำหรับ $A, B, C \in CB(X)$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไข

(1) ถ้า $\delta_p(A,B)=0$ แล้ว $A=B$

(2) $\delta_p(A,C) \le \delta_p(A,B) + \delta_p(C,B)$

(3) สำหรับทุกฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p ที่กำหนดโดย p ที่เป็นฟังก์ชัน τ^0 เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $CB(X)$

บทตั้ง 2.1.48 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $p : X \times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X ถ้า A เป็นเซตปิดใน X แล้วจะมี $a \in A$ ซึ่ง $p(x,a) = p(x,A)$ สำหรับ $x \in X$

บทตั้ง 2.1.49 [6] ให้ p เป็นฟังก์ชัน τ บนปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ บน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}\sup\{p(x_n,x_m) : m>n\}=0$ แล้วจะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชีบน X

2.2 ฟังก์ชัน MT และการส่งหลายค่า

ในหัวข้อนี้เป็นความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ ฟังก์ชัน MT และการส่งหลายค่า ซึ่งอ้างอิงจาก Wei-Shih Du [11] ดังนี้

บทนิยาม 2.2.1 ฟังก์ชัน $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ จะเรียกว่า **ฟังก์ชัน MT (MT-function)** ก็ต่อเมื่อ φ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Mizoguchi-Takahashi นั่นคือ $\limsup_{s\to t^+}\varphi(s) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

ข้อสังเกต 2.2.2 1) ถ้าฟังก์ชัน $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ ซึ่ง $\varphi(t)=c$ เมื่อ $c \in [0,1)$ แล้ว φ เป็นฟังก์ชัน MT

2) ถ้าฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด (Non-decreasing function) แล้ว φ เป็นฟังก์ชัน MT

3) $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน MT ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะมี $r_t\in[0,1)$ และ $\varepsilon_t\in[0,1)$ ซึ่ง $\varphi(s)\le r_t$ สำหรับทุก $s\in[t,t+\varepsilon_t)$

ตัวอย่าง 2.2.3 ตัวอย่างของฟังก์ชัน MT

1) ให้ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ โดยที่ $\varphi(t)=\dfrac{1}{2}$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน MT

พิสูจน์ เนื่องจาก $\varphi(t)=\dfrac{1}{2}$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะได้ว่า $\limsup\limits_{s\to t^+}\varphi(s)=\dfrac{1}{2}<1$ ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชัน MT

2) ให้ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t)=\dfrac{t}{2(1+t)}$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน MT

พิสูจน์ ให้ $t\in[0,\infty)$ เลือก $r_t=\dfrac{1}{2}$ และให้ $\varepsilon_t\in[0,1)$ ดังนั้น สำหรับทุก $s\in[t,t+\varepsilon_t)$ จะได้ว่า $s\le s+1$ ทำให้ได้ว่า $\dfrac{s}{s+1}\le 1$ ดังนั้น

$\varphi(s)=\dfrac{s}{2(s+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s+1}\right)\le\dfrac{1}{2}=r_t$ เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชัน MT

3) ให้ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ กำหนดโดย

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{2t} & ;\ t\in(0,\frac{\pi}{2}]\\[2mm] 0 & ;\ t\notin(0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน MT

พิสูจน์ ให้ $t\in[0,\infty)$ เลือก $r_t=\dfrac{1}{2}$ และให้ $\varepsilon_t\in[0,1)$ ดังนั้น

กรณี 1 สำหรับ $s\in(0,\frac{\pi}{2}]$ เนื่องจาก $\dfrac{\sin s}{s}$ เป็นฟังก์ชันลดและ $0\le\dfrac{\sin s}{s}<1$ สำหรับทุก $s\in(0,\frac{\pi}{2}]$ ดังนั้น $\varphi(s)=\dfrac{\sin s}{2s}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin s}{s}\right)<\dfrac{1}{2}=r_t$

กรณี 2 สำหรับ $s\notin(0,\frac{\pi}{2}]$ จะได้ว่า $\varphi(s)=0<\dfrac{1}{2}=r_t$

ดังนั้น $\varphi(s)\le r_t$ สำหรับทุก $s\in[t,t+\varepsilon_t)$ เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชัน MT

บทตั้ง 2.2.4 ถ้า $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน MT แล้ว จะได้ว่า $k:[0,\infty)\to[0,1)$ กำหนดโดย $k(t)=\dfrac{\varphi(t)+1}{2}$ เป็นฟังก์ชัน MT

บทนิยาม 2.2.5 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $P(X)$ แทนวงศ์ (family) ของเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X เรียกการส่ง $T:X\to P(X)$ ว่าเป็น**การส่งหลายค่า**

บทนิยาม 2.2.6 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $P(X)$ แทนวงศ์ (family) ของเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียกการส่ง $T:X\to P(X)$ ว่าเป็น**การส่งหลายค่าแบบหดตัว** ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $k\in(0,1)$ ซึ่ง $H(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

บทนิยาม 2.2.7 ให้ A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตบนปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะเรียกการส่ง $T:A\cup B\to A\cup B$ ว่าเป็น**การส่งแบบวน (cyclic mapping)**
ก็ต่อเมื่อ $T(A)\subseteq B$ และ $T(B)\subseteq A$

ตัวอย่าง 2.2.8 ให้ $A=[0,3]$, $B=[-3,0]$ และ $T:A\cup B\to A\cup B$ กำหนดโดย

$$Tx=\begin{cases}\dfrac{-(x+1)}{2} & ;x\in(1,3]\\ 0 & ;x\in[-1,1]\\ \dfrac{-x+1}{2} & ;x\in[-3,-1]\end{cases}$$

จะเห็นได้ชัดว่า $T(A)\subseteq B$ และ $T(B)\subseteq A$ ดังนั้น T ว่าเป็นการส่งแบบวน

บทนิยาม 2.2.9 ให้ A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตบนปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะเรียกการส่ง $T:A\cup B\to CB(X)$ ว่าเป็น **การส่งหลายค่าแบบวน (cyclical multi-valued mapping)** ก็ต่อเมื่อ $Tx\subseteq B$ และ $Ty\subseteq A$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$

ตัวอย่าง 2.2.10 ให้ $A=[0,3]$, $B=[-3,0]$ และ $T:A\cup B\to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx=\begin{cases}\left\{\dfrac{-(x+1)}{2},-3\right\} & ;x\in(1,3]\\ \{0\} & ;x\in[-1,1]\\ \left\{\dfrac{-x+1}{2},3\right\} & ;x\in[-3,-1]\end{cases}$$

จะเห็นได้ชัดว่า $Tx\subseteq B$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $Ty\subseteq A$ สำหรับทุก $x\in B$ ดังนั้น T ว่าเป็นการส่งหลายแบบวน

บทนิยาม 2.2.11 ให้ A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตบนปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะเรียก $T:A\cup B\to A\cup B$ ว่าเป็น**การส่งแบบวนและหดตัว (cyclic contractive mapping)**

ก็ต่อเมื่อ $T(A) \subseteq B$ และ $T(B) \subseteq A$ และมีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ซึ่ง
$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)+(1-k)d(A,B)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$

บทนิยาม 2.2.12 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียก $T: X \to X$ ว่าเป็น **การส่งแบบหดตัว** a **(a- contraction mapping)** ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $a \in (0,1)$ ซึ่ง
$d(Tx,Ty) \leq ad(x,y)$ สำหรับทุกๆ $x,y \in X$

2.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับจุดตรึง

ในหัวข้อนี้เป็นความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ จุดตรึงและทฤษฎีเกี่ยวกับการมีจุดตรึงบนการส่งหลายค่าแบบวน ซึ่งอ้างอิงจาก Neammanee and Kaewkhao (2011) ดังนี้

บทนิยาม 2.3.1 ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง และ $T: X \to P(X)$ เป็นการส่งหลายค่า แล้วจะเรียกจุด $x \in X$ ว่าเป็น **จุดตรึง (fixed point)** ของ T ก็ต่อเมื่อ $x \in Tx$ และเขียนแทน เซตของจุดตรึงของ T ด้วย F_T นั่นคือ $F_T = \{x \in X \mid x \in Tx\}$

ทฤษฎีบท 2.3.2 (Banach's Theorem) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ และ $T: X \to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว a แล้ว T จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.3.3 [6] ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) สมมติให้ $T: A \cup B \to A \cup B$ เป็นการส่งแบบวน สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ สำหรับบางค่าคงที่ $k \in (0,1)$ แล้ว จะได้ว่า $A \cap B \neq \phi$ และ T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวใน $A \cap B$

ทฤษฎีบท 2.3.4 [1] ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T: X \to CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบหดตัวอย่างอ่อน (weakly contractive multi-value mapping) นั่นคือ จะมีค่าคงที่ $\theta \in (0,1)$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty) \leq \theta d(x,y) + Ld(x,Ty) \text{ สำหรับทุก } x,y \in X$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด

ทฤษฎีบท 2.3.5 [10] ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) สมมติให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขตสำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้า มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty) \leq kd(x,y) \text{ สำหรับทุก } x \in A \text{ และ } y \in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

ทฤษฎีบท 2.3.6 [10] ให้ $\{A_i\}_{i=1}^n$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และ 2^X เป็นเซตของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของ X สมมติให้ $T: \bigcup_{i=1}^n A_i \to 2^X$ และ Tx

เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ โดยที่ $A_{n+1} = A_1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \le i \le n$

(b) $\exists k \in (0,1)$ ซึ่ง $H(Tx,Ty) \le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \le i \le n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

ทฤษฎีบท 2.3.7 [10] ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $\theta \in (0,1)$ และ $L \ge 0$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty) \le \theta d(x,y) + L \cdot \min\{d(y,Tx), d(x,Ty)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์