บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการศึกษาทฤษฎีของจุดตรึง (fixed point theorem) ทฤษฎีที่สำคัญซึ่งเป็นการเริ่มต้นของการศึกษา ก็คือหลักการการหดตัวของบานาค (Kreyzig, 1978) ซึ่งกล่าวไว้ คือ ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space) และ $T:X\to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว a (a-contraction mapping) นั่นคือ มีค่าคงที่ $a\in(0,1)$ ซึ่ง $d(Tx,Ty)\le ad(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$ จะได้ว่า T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น

สำหรับการขยายผลของทฤษฎีบทนี้นั้นปรากฏอยู่ในผลงานวิจัยต่าง ๆ เช่น Kirk, Srinivasan, and Veeramani (2003) และอ้างอิงอื่น ๆ ในนั้นด้วย

ในปี 2003 หนึ่งในทฤษฎีที่น่าสนใจที่ Kirk, Srinivasan, and Veeramani (2003) ได้พิสูจน์ไว้ คือ ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) สมมติให้ $T:A\cup B\to A\cup B$ เป็นการส่งแบบวน (cyclic mapping) นั่นคือ $T(A)\subseteq B$ และ $T(B)\subseteq A$ และมี $k\in(0,1)$ ซึ่ง $d(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$ แล้วจะได้ว่า $A\cap B\neq\phi$ และ T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวใน $A\cap B$

ในปี 1969 Nadler (1969) ได้ศึกษาจุดตรึงภายใต้การส่งหลายค่าแบบหดตัว (contraction multi-valued mapping) โดยให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $P(X)$ แทนวงศ์ (family) เซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X เรียกการส่ง $T:X\to P(X)$ ว่าเป็นการส่งหลายค่า และถ้ามีค่าคงที่ $k\in(0,1)$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty)\le kd(x,y) \text{ สำหรับทุก } x,y\in X$$

เราจะเรียก T ว่าการส่งหลายค่าแบบหดตัว โดยที่ $H(A,B)=\max\{h(A,B),h(B,A)\}$ และ $h(A,B)=\sup\{d(a,B):a\in A\}$

จะเรียก $x\in X$ ว่าเป็นจุดตรึงของการส่งหลายค่า T ก็ต่อเมื่อ $x\in Tx$ และจะเขียนแทนเซตของจุดตรึงของ T ด้วย F_T นั่นคือ $F_T=\{x\in X:x\in Tx\}$ ดังนั้น ถ้า ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T:X\to CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบหดตัว เมื่อ $CB(X)$ แทน วงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างและมีขอบเขตของ X แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด

ในปี 2007 Berinde and Berinde (2007) ได้พัฒนาและขยายผลทฤษฎีของ Nadler ไว้ว่า ถ้า (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T:X\to CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบหดตัวอย่างอ่อน นั่นคือ มีค่าคงที่ $\theta\in(0,1)$ และ $L\geq 0$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty)\leq \theta d(x,y)+Ld(x,Ty) \text{ สำหรับทุก } x,y\in X$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด

ในปี 2011 Neammanee and Kaewkhao (2011) ได้พัฒนาและขยายผลทฤษฎีของจุดตรึงภายใต้การส่งหลายค่าแบบวน ดังนี้

1. ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) สมมติให้ $T:A\cup B\to P(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B โดยที่ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขตสำหรับทุก $x\in A\cup B$ ถ้า มีค่าคงที่ $k\in(0,1)$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty)\leq kd(x,y) \text{ สำหรับทุก } x\in A \text{ และ } y\in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$

2. ให้ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และ 2^X เป็นวงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของ X สมมติให้ $T:\bigcup_{i=1}^{n}A_i\to 2^X$ โดยที่ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, $A_{n+1}=A_1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

   (a) $Ta_i\subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i\in A_i$ และ $1\leq i\leq n$

   (b) $\exists k\in(0,1)$ ซึ่ง $H(Tx,Ty)\leq kd(x,y)$ สำหรับทุก $x\in A_i$ และ $y\in A_{i+1}$ เมื่อ $1\leq i\leq n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

3. ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A\cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $\theta\in(0,1)$ และ $L\geq 0$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty)\leq\theta d(x,y)+L\cdot\min\{d(y,Tx),d(x,Ty)\}$$

สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์ (complete set)

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะขยายแนวคิดทฤษฎีจุดตรึงของการส่งหลายค่าแบบวนซึ่งวางนัยทั่วไปกว่าของ Neammanee and Kaewkhao (2011) โดยใช้

1) แนวคิดของ Du, W. [4] ซึ่งกำหนดฟังก์ชัน $p:X\times X\to[0,\infty)$ ที่เป็นฟังก์ชัน τ^0 นั่นคือ สำหรับทุก $x\in X$ จะได้ว่า $p(x,x)=0$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$(\tau 1)\quad p(x,z)\leq p(x,y)+p(y,z) \text{ สำหรับ } x,y,z\in X$$

$(\tau 2)$ ถ้า $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x, y_n) \le M$ สำหรับบางค่าคงที่ $M > 0$ ที่ขึ้นอยู่กับ x แล้ว $p(x, y) \le M$

$(\tau 3)$ สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\limsup_{n\to\infty} \{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$ ถ้ามีลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$

$(\tau 4)$ สำหรับ $x, y, z \in X$, $p(x, y) = 0$ และ $p(x, z) = 0$ แล้ว $y = z$

2) ฟังก์ชัน D_p ที่เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p นั่นคือสำหรับ $A, B \in CB(X)$ กำหนดฟังก์ชัน $D_p : CB(X) \times CB(X) \to [0, \infty)$ โดย

$$D_p(A, B) = \max\{\delta_p(A, B), \delta_p(B, A)\}$$

เมื่อ $\delta_p(A, B) = \sup\{p(a, B) : a \in A\}$ และ $p(x, A) = \inf\{p(x, a) : a \in A\}$

3) ฟังก์ชัน MT $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Mizoguchi-Takahashi นั่นคือ $\limsup_{s \to t^+} \varphi(s) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อขยายทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

สมมติฐานของการวิจัย

ทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่วางนัยทั่วไปกว่าของ Neammanee and Kaewkhao (2011)

ขอบเขตของการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาทฤษฎีจุดตรึงโดยจะศึกษาจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

เพื่อทราบทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่วางนัยทั่วไปกว่าของ Neammanee and Kaewkhao (2011)

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ฟังก์ชัน τ^0 หมายถึง ฟังก์ชัน $p: X \times X \to [0,\infty)$ ซึ่ง $p(x,x)=0$ สำหรับทุก $x \in X$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข

$(\tau 1)$ $p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z)$ สำหรับ $x,y,z \in X$

$(\tau 2)$ ถ้า $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x,y_n) \le M$ สำหรับบางค่าคงที่ $M > 0$ ที่ขึ้นอยู่กับ x แล้ว $p(x,y) \le M$

$(\tau 3)$ สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \sup\{p(x_n,x_m): m>n\} = 0$ ถ้ามีลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} p(x_n,y_n) = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$

$(\tau 4)$ สำหรับ $x,y,z \in X$, $p(x,y)=0$ และ $p(x,z)=0$ แล้ว $y=z$

2. ฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p หมายถึง ฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p ซึ่ง สำหรับ $A,B \in CB(X)$ กำหนดฟังก์ชัน $D_p : CB(X)\times CB(X) \to [0,\infty)$ โดย

$$D_p(A,B) = \max\left\{\delta_p(A,B), \delta_p(B,A)\right\}$$

เมื่อ $\delta_p(A,B) = \sup\{p(a,B): a \in A\}$ และ $p(x,A) = \inf\{p(x,a): a\in A\}$

3. ฟังก์ชัน MT หมายถึง ฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Mizoguchi-Takahashi นั่นคือ $\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

4. การส่งหลายค่าแบบวน หมายถึง การส่งหลายค่า $T: A\cup B \to P(X)$ ซึ่ง $Tx \subseteq B$ และ $Ty \subseteq A$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $y \in B$ โดยที่ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d)