

ชั้นสอน

- 1. แจกเอกสารประกอบการเรียนรู้ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 2 ตัวอย่างที่ 1- 3 เรื่อง “กฎการคูณ” พร้อมทั้งอธิบาย
 - 2. ยกตัวอย่างโจทย์ที่มีลักษณะเดียวกันให้นักเรียนทำโดยเขียนโจทย์บนกระดานดังตัวอย่างที่ 4 - 5 โดยครูใช้ถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ
 - 3. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 3 ตัวอย่างที่ 1 - 3 เรื่อง “กฎการบวก” พร้อมทั้งอธิบาย
 - 4. ให้นักเรียนแต่ละคนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 2, 3 ข้อคู่ โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
 - 5. คຸ່ມນັກเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
 - 6. ให้นักเรียนทำใบงานข้อที่เหลือเป็นกรบ้าน
- ขั้นสรุป
- ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับกฎการคูณและกฎการบวก

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตงกการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตงกการทำกิจกรรม
- 6.3 จกผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จกผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ท32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง แฟกทอเรียล

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดสัญลักษณ์ $n!$ มีความหมายดังนี้

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- เข้าใจความหมายและค่าของแฟกทอเรียลได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สาระการเรียนรู้

ในการคำนวณหาจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นจากการทดลองหรือการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง บางครั้งจำนวนที่หานั้นเกิดจากผลคูณของจำนวนหลาย ๆ จำนวน

เช่น $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เป็นต้น

ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการเขียนจำนวนเหล่านี้ นักคณิตศาสตร์จึงได้กำหนดสัญลักษณ์แทนจำนวนดังกล่าว ดังนี้

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เขียนแทนด้วย $8!$

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{เขียนแทนด้วย } 7!$$

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{เขียนแทนด้วย } 6!$$

นั่นคือ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดสัญลักษณ์ $n!$ มีความหมายดังนี้

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$



หมายเหตุ 1. $n!$ อ่านว่า n แฟกทอเรียล

2. $n!$ ก็คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวก n กับจำนวนที่ลดลง จาก n ทีละ 1 จนกระทั่งถึง 1

3. $0! = 1$ ***

ตัวอย่างที่ 1 (1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$(2) 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

(3) $(-3)!$ ไม่มีความหมาย ***

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$$(1) \frac{5!}{4!} \quad (2) \frac{8!}{6!}$$

$$(3) \frac{7!}{9!} \quad (4) \frac{10!}{8!}$$

วิธีทำ (1) $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$

$$\text{หรือ } \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

$$(2) \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

$$(3) \frac{7!}{9!} = \frac{7!}{9 \times 8 \times 7!} = \frac{1}{72}$$

$$(4) \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปของแฟกทอเรียล

$$(1) 210$$

$$(2) 360$$

วิธีทำ (1) $210 = 7 \times 6 \times 5$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{4!}$$

$$(2) \ 360 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6!}{2!}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียน $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ ในรูปแฟกทอเรียล

วิธีทำ $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!} \\ &= \frac{(n+4)!}{n!} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1640$ จงหาค่า n

วิธีทำ จาก
$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$= (n+1)n$$

ดังนั้น $(n+1)n = 1640$

จากขั้นตอนนี้นักเรียนอย่าใช้วิธีการแก้สมการหาค่า n ควรใช้การแยกจำนวน 1640

ให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนที่มีค่าน้อยกว่ากันอยู่ 1 จะดีกว่า

นั่นคือ $(n+1)n = 1640$

$$= 41 \times 40$$

ดังนั้น $n+1 = 41$

$$n = 40$$

4. สื่อการเรียนรู้

4.1 ใบความรู้ที่ 4

4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 4

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูซักถามนักเรียนเกี่ยวกับปัญหาและข้อสงสัยจากการทำใบกิจกรรมฝึกทักษะข้อที่เหลือเป็นการบ้าน
2. สุ่มเรียกนักเรียนให้ออกมาอธิบายคำตอบจนกระทั่งใบกิจกรรมฝึกทักษะข้อที่เหลือแล้วครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง
3. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นสอน

1. ครูแจกเอกสารประกอบการเรียนรู้ ใบความรู้ที่ 4 เรื่อง “แฟกทอเรียล”
2. ครูให้นิยามของ $n!$ และยกตัวอย่างที่ 1 – 3 ประกอบการอธิบาย และให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างการหาค่าแฟกทอเรียล
3. ครูยกตัวอย่างที่ 4 – 5 และใช้คำถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ
4. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 4 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
5. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาค่าของแฟกทอเรียล

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จาผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จาผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่ง
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- การจัดของ r สิ่งซึ่งเลือกมาจากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยถือลำดับเป็นสำคัญ เรียกว่า การจัดลำดับ หรือ วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation)
- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n!$ วิธี
- มีของ 2 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $2m$ สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หาร m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $2! \times m! \times m!$ วิธี
- มีของ 3 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $3m$ สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หาร m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $3! \times m! \times m! \times m!$ วิธี
- มีของ k ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด km สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หาร m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $k! \times (m!)^k$ วิธี

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่งได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย

- การเชื่อมโยงความรู้วิทยาศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สารการเรียนรู้

วิธีเรียงสับเปลี่ยน เป็นวิธีหนึ่งสิ่งต่าง ๆ มาจัดเรียงโดยยึดถืออันดับเป็นสำคัญ เช่น ถ้านักเรียนมี ดินสอ ปากกา และ ยางลบ อย่างละ 1 ชิ้น นักเรียนนำมาจัดวางเรียงได้ 6 วิธี ดังนี้



นักเรียนจะสังเกตพบว่า ถ้าอันดับไม่เหมือนกันเราถือว่าเป็น วิธีที่แตกต่างกัน และเราเรียกวิธีการจัดสิ่งต่าง ๆ ในลักษณะเช่นนี้ว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยน (การจัดลำดับ)

การจัดของ r สิ่งซึ่งเลือกมาจากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยยึดลำดับเป็นสำคัญ เรียกว่า การจัดลำดับ หรือ วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation)

ดังนั้นขออย่าให้เข้าใจอีกครั้งหนึ่งว่า ในการหาจำนวนวิธีที่เกิดจากการนำสิ่งต่าง ๆ มาใช้ วิธีเรียงสับเปลี่ยนนั้นต้องคำนึงถึงอันดับด้วย ถ้าอันดับไม่เหมือนกันเราถือว่าเป็นคนละวิธีกัน เนื่องจากการนำสิ่งต่าง ๆ มาจัดเรียงนั้นมีมากมายหลายแบบ เช่น นำมาเรียงเป็นแถวตรง นำมาเรียงเป็นวงกลม สิ่งที่น่ามาจัดมีบางสิ่งซ้ำกัน เป็นต้น จึงขอแยกเป็นหัวข้อให้นักเรียนศึกษาดังนี้

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จะจัดให้คน 4 คน คือ A, B, C และ D นั่งเรียงเป็นแถวตรง จะมีวิธีจัดได้กี่วิธี

จะได้เท่ากับ $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 มีต้นไม้ 5 ชนิด ๆ ละ 1 ต้น เรียงกันเป็นแถวตรงจะมีวิธีจัดได้กี่วิธี

จะได้เท่ากับ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันที่จะจัดตัวอักษรจากคำว่า COMPUTER

จะได้เท่ากับ $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ครูคนหนึ่งนำลูกศิษย์ 6 คน มายืนถ่ายรูป โดยยืนเป็น 2 แถว ๆ ละ 3 คน จะมีวิธีจัดให้ยืนทั้งหมดกี่วิธี

การยืนแยกเป็น 2 แถว ๆ ละ 3 คน ไม่สำคัญ สิ่งสำคัญก็คือ ต้องถือว่า นี่เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรงของสิ่งของ 6 สิ่ง 6 ตำแหน่ง ดังนั้น

จำนวนวิธีจัดให้ยืนทั้งหมด $= 6! = 720$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 ตามีภรรยาคนหนึ่ง พร้อมด้วยลูก 4 คน มายืนเรียงแถวเพื่อถ่ายรูป จะมีวิธีจัดให้ยืนทั้งหมดกี่วิธี

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

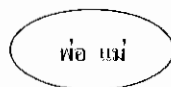
(2) พ่อและแม่ยืนติดกัน

(3) พ่อและแม่ยืนริมทั้งสองด้าน

วิธีทำ

(1) จำนวนวิธีจัดแบบไม่มีเงื่อนไข $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ วิธี

(2) ถ้าต้องการให้พ่อและแม่ยืนติดกัน จะถือว่าพ่อและแม่เป็นบุคคลเดียวกัน ดังนั้น คน 6 คน จะคิดเป็น 5 คน



คน 5 คน มีวิธีจัดให้ยืนได้ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ในแต่ละวิธี พ่อและแม่มีวิธีจัดให้ยืนได้ $2! = 2 \times 1 = 2$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด $120 \times 2 = 240$ วิธี

(3)



พ่อและแม่มีวิธีจัดให้ยืนริมทั้งสองด้านได้ $- 2! - 2$ วิธี

ในแต่ละวิธี ลูก 4 คน มีวิธีจัดได้ $= 4! = 24$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดทั้งหมด $= 2 \times 24 = 48$ วิธี

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกัน

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ชาย 4 คน หญิง 4 คน นั่งสลับชายและหญิง เป็นแถวได้กี่วิธี ถ้า

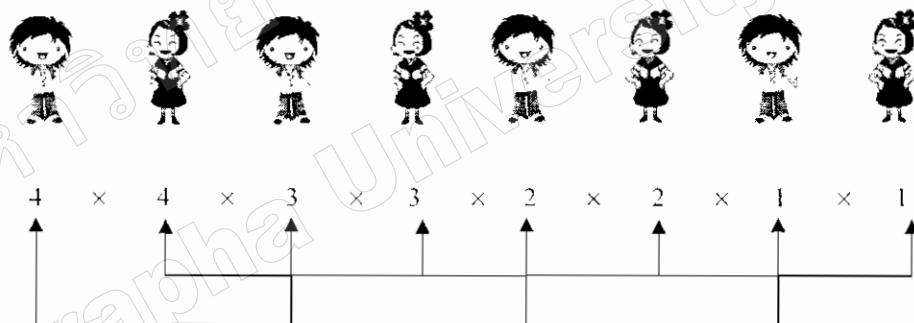
(1) สลับชาย 1 คน หญิง 1 คน

(2) สลับชาย 2 คน หญิง 2 คน

วิธีทำ (1) สลับชาย 1 คน หญิง 1 คน

เพราะว่าจำนวนผู้ชายเท่ากับผู้หญิง ดังนั้น การจัดที่นั่งสามารถจัดได้ 2 กรณี คือ

ผู้ชายนำ:



กรณีนี้จึงได้ $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี

ผู้หญิงนำ:



$4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$

กรณีนี้จึงได้ $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี

รวมทั้ง 2 กรณีนี้จึงได้ $576 + 576 = 1,152$ วิธี

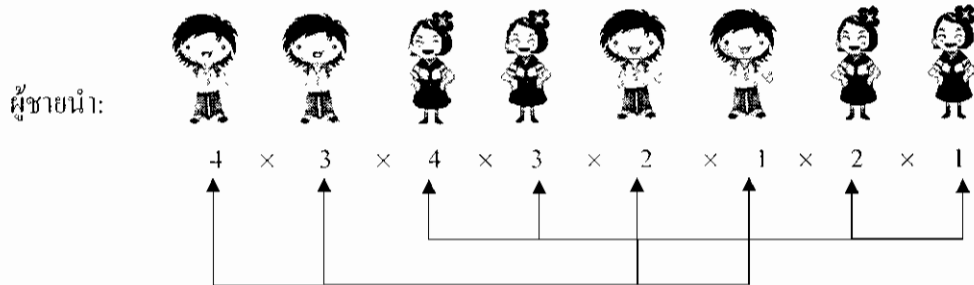
หรือ ในแต่ละกรณีผู้ชายสลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และในแต่ละวิธี ผู้หญิงก็สลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี

และสลับของสองประเภทคือชายกับหญิง

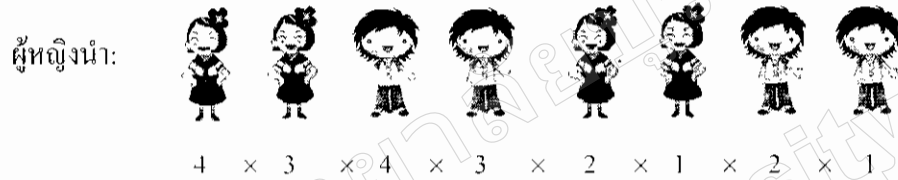
ดังนั้นจะทำได้ $= 2! \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1,152$ วิธี

(2) สลับชาย 2 คน หญิง 2 คน

เราสามารถจัดที่นั่งได้ 2 กรณี เช่นกัน คือ



กรณีนี้จะได้ $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี



กรณีนี้จะได้ $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี

รวมทั้ง 2 กรณีนี้จะได้ $576 + 576 = 1,152$ วิธี

หรือ ในแต่ละกรณีผู้ชายสลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และในแต่ละวิธี ผู้หญิงก็สลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และสลับของสองประเภทคือชายกับหญิง

ดังนั้นจะได้ $2! \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1,152$ วิธี

ข้อสังเกต

1. การนั่งสลับชาย หญิง จะเป็นสลับหนึ่งต่อหนึ่งหรือสองต่อสอง จำนวนวิธีจะเท่ากัน
ในกรณีชาย 4 คน หญิง 4 คน จำนวนวิธีนี้สลับจะเท่ากับ $2! \times 4! \times 4!$ วิธี

2. ในการหาจำนวนวิธี ชาย 4 คน หญิง 4 คน นั่งสลับที่กันอาจแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 ชาย 4 คน สลับกันได้ $= 4!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หญิง 4 คน สลับกันได้ $= 4!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 สลับของสองประเภทคือชายกับหญิง ได้ $= 2!$ วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จะได้ว่าจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2! \times 4! \times 4!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 ชาย m คน หญิง m คน นั่งสลับกัน r ต่อ r ได้กี่วิธี (r หาร m ลงตัว)

แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 ชาย m คน นั่งสลับกันได้ $= m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หญิง m คน นั่งสลับกันได้ $m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 สลับของสองประเภทคือชายกับหญิงได้ 2! วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2! \times m! \times m!$ วิธี
สรุปได้ดังต่อไปนี้

มีของ 2 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $2m$ สิ่ง สลับประเภท
ทีละ r สิ่ง (r หรือ m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $2! \times m! \times m!$

ตัวอย่างที่ 3 มีคำภาษาอังกฤษ 12 เล่มต่างกันและคำภาษาไทย 12 เล่มต่างกัน จะจัดเรียง
สับเปลี่ยนทั้ง 24 เล่มบนชั้นหนังสือ ได้กี่วิธี ถ้าเรียงคำภาษาอังกฤษและภาษาไทยสลับกัน

(1) 1 ต่อ 1

(2) 2 ต่อ 2

(3) 3 ต่อ 3

(4) 4 ต่อ 4

(5) 6 ต่อ 6

(6) 12 ต่อ 12

วิธีเรียงสับเปลี่ยนในตัวอย่างนี้สอดคล้องกับข้อสรุปดังกล่าว

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนในข้อ (1) ถึง (6) เท่ากันและเท่ากับ $2! \times 12! \times 12!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ชาย m คน หญิง m คน และเด็ก m คน ยืนสลับชาย หญิง และเด็ก โดยสลับทีละ r
(r หรือ m ลงตัว) ได้กี่วิธี

แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 ชาย m คน สลับกันได้ $m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หญิง m คน สลับกันได้ $m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เด็ก m คน สลับกันได้ $m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 4 สลับของ 3 ประเภทคือชาย หญิง และเด็ก ได้ $3!$ วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $3! \times m! \times m! \times m!$ วิธี
สรุปได้ดังต่อไปนี้

มีของ 3 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $3m$ สิ่ง สลับประเภท
ทีละ r สิ่ง (r หรือ m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $3! \times m! \times m! \times m!$ วิธี

4. สื่อการเรียนรู้

- 4.1 ใบความรู้ที่ 5, 6
- 4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 5, 6

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องแฟกทอเรียลโดยใช้การถามตอบ โดยให้นักเรียนหาคำคำตอบของโจทย์ที่ครูกำหนดให้ เช่น ให้นักเรียนหาคำของ $\frac{9!}{7!}$ ซึ่งคำตอบคือ 72

2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนนำ ดินสอ ปากกา และยางลบ ขึ้นมาอย่างละ 1 ชิ้น และให้นักเรียนลองจัดวางเรียงดินสอ ปากกา และยางลบ ให้นักเรียนช่วยกันคิดว่า จะวางเรียงได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยถ้าสลับที่กันจะถือเป็นคนละวิธี และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกจนวนวิธีที่เกิดขึ้น ซึ่งจะสรุปได้ว่าวางเรียงได้ทั้งหมด 6 วิธี

2. ครูให้นักเรียนช่วยกันให้คำจำกัดความของคำว่า “วิธีเรียงสับเปลี่ยน” (วิธีการนำสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจัดเรียง โดยการจัดเรียงนั้น ให้ลำดับที่ของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ)

3. ครูอธิบายวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของต่าง ๆ กันในแนวเส้นตรง และยกตัวอย่างโจทย์ที่ 1 4 ในใบความรู้ที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคร 1 ถึง n สิ่ง บนกระดาน

4. นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 5 ตัวอย่างโจทย์ที่ 5 โดยครูใช้ถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ

5. ครูยกโจทย์ตัวอย่างที่ 1 – 2 ในใบความรู้ที่ 6 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภท สลับกัน และให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการหาคำตอบ

6. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารใบความรู้ที่ 6 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภท สลับกัน ตัวอย่างที่ 3 4 โดยครูใช้ถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ

7. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 5, 6 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ

8. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

9. ให้นักเรียนทำกรบ้านข้อเหลือจากใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 5, 6 เป็นกรบ้าน

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับเกราะจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคร่าวละ n สิ่งและจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกัน

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จากผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จากผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$)
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- จากของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน ถ้าเรานำมาจัดเป็นแถวแบบวิธีเรียงสับเปลี่ยน r สิ่ง

จำนวนวิธีที่จัดได้เท่ากับ $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$) ได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สาระการเรียนรู้

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$)

จากของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน ถ้าเรานำมาจัดเป็นแถวแบบวิธีเรียงสับเปลี่ยน r สิ่ง

จำนวนวิธีที่จัดได้เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

เพื่อความสะดวก เรานิยมใช้ $P_{n,r}$ หรือ ${}_nP_r$ หรือ nP_r หรือ $P(n, r)$ แทน ดังนั้น

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่างที่ 1 $P(4, 1) = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

ตัวอย่างที่ 2 $P(6, 6) = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1} = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

ข้อสังเกต $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

ดังนั้น

$$P(n, n) = n!$$

$$(0! = 1)$$

ตัวอย่างที่ 3 มีสิ่งของ 7 สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงเป็นแถว 3 สิ่ง จงหาจำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด

วิธีทำ จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมดเท่ากับ $P(7, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{7!}{(7-3)!} \\ &= \frac{7!}{4!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} \\ &= 210 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 มีหนังสือ 10 เล่ม จะจัดเรียงบนชั้นหนังสือซึ่งมีที่ว่าง 3 ที่ได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมดเท่ากับ $P(10, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{10!}{(10-3)!} \\ &= \frac{10!}{7!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 มีนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 6 คน ต้องการให้นักเรียนในกลุ่มนี้ไปนั่งบนม้านั่งยาวอย่างน้อย 1 คน จะมีวิธีการนั่งแตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีของการให้นักเรียน 1 คน นั่งม้านั่งยาว ได้

$$P(6, 1) = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \times 5!}{5!} = 6 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีของการให้นักเรียน 2 คน นั่งม้านั่งยาว ได้

$$P(6, 2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีของการให้นักเรียน 3 คน นั่งม้านั่งยาว ได้

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีของการให้นักเรียน 4 คน นั่งม้านั่งยาว ได้ $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ วิธี}$

จำนวนวิธีของการให้นักเรียน 5 คน นั่งม้านั่งยาว ได้ $P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 720 \text{ วิธี}$

จำนวนวิธีของการให้นักเรียน 6 คน นั่งม้านั่งยาว ได้ $P(6, 6) = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1!} = 720 \text{ วิธี}$

ดังนั้น จะมีวิธีการนั่งแตกต่างกันทั้งหมด $6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1,956 \text{ วิธี}$

4. สื่อการเรียนรู้

4.1 ใบความรู้ที่ 7

4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 7

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูยกโจทย์บนกระดานให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบเพื่อทบทวนการหาค่าจำนวนวิธี

เรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่ง เช่น นักเรียน

จำนวน 4 คน ต้องการยืนถ่ายรูปเป็นแถวตรง จะมีวิธีเรจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี (ตอบ $4! = 24 \text{ วิธี}$)

ขั้นตอน

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

จากของ 10 สิ่งที่แตกต่างกัน ถ้านำของมา 6 สิ่งเพื่อจัดเรียงเป็นแถว เราสามารถใช้หลักการนับเบื้องต้นคำนวณหาจำนวนวิธีที่จะทำได้ทั้งหมดดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกของ 1 สิ่งจากของ 10 สิ่ง มาไว้ตำแหน่งที่ 1 ซึ่งเราจะเลือกทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกของ 1 สิ่งจากของที่เหลือ 9 สิ่ง มาไว้ตำแหน่งที่ 2 ซึ่งเราจะเลือกทำได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกของ 1 สิ่งจากของที่เหลือ 8 สิ่ง มาไว้ตำแหน่งที่ 3 ซึ่งเราจะเลือกทำได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกของ 1 สิ่งจากของที่เหลือ 7 สิ่ง มาไว้ตำแหน่งที่ 4 ซึ่งเราจะเลือกทำได้ 7 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 เลือกของ 1 สิ่งจากของที่เหลือ 6 สิ่ง มาไว้ตำแหน่งที่ 5 ซึ่งเราจะเลือกทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 6 เลือกของ 1 สิ่งจากของที่เหลือ 5 สิ่ง มาไว้ตำแหน่งที่ 6 ซึ่งเราจะเลือกทำได้ 5 วิธี

จากการกระทำทั้ง 6 ขั้นตอน เราสามารถเลือกทำได้

$$\begin{aligned}
 &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \\
 &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{10!}{4!} = \frac{10!}{(10-6)!} \text{ วิธี}
 \end{aligned}$$

สามารถสรุปได้ว่า จากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน ถ้านำมาจัดเป็นแถวแบบวิธีเรียงสับเปลี่ยน r สิ่ง

$$\text{จำนวนวิธีที่จัดได้เท่ากับ } \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

ซึ่งนิยมใช้ $P_{n,r}$ หรือ ${}_nP_r$ หรือ nP_r หรือ $P(n, r)$ แทน ดังนั้น

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารใบความรู้ที่ 7 ตัวอย่างที่ 1 – 4 โดยครูใช้ถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 5 จนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างโจทย์พร้อมหาคำตอบ

4. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 7 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ

5. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$)

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จากผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จากผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ท32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ไขปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- ถ้าเรามีสิ่งของ n สิ่ง ในของ n สิ่งนี้ มี n_1 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 1, n_2 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 2, n_3 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 3 และ n_r สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ r

โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$

นำของทั้ง n สิ่งนี้มาจัดเรียงเป็นแถวทั้งหมด จะทำได้เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \text{ วิธี}$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
 - หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรงได้
- 2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ
 - การแก้ปัญหา
 - การให้เหตุผล
 - การสื่อสารและสื่อความหมาย
 - การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์
- 2.3 ด้านคุณลักษณะ
 - นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
 - นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
 - นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สารการเรียนรู้

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง

ถ้าเรามีสิ่งของ n สิ่ง ในของ n สิ่งนี้ มี n_1 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 1, n_2 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 2, n_3 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 3 และ n_r สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ r

$$\text{โดยที่ } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$$

นำของทั้ง n สิ่งนี้มาจัดเรียงเป็นแถวทั้งหมด จะทำได้เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 1 ในการสลับอักษรในคำ “CANADA” จะได้คำที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ

วิธีทำ คำ “CANADA” มีอักษร 6 ตัว ซึ่งเป็นตัว A ซ้ำกัน 3 ตัว

$$\text{ดังนั้น จะได้คำที่แตกต่างกัน } \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ คำ}$$

ตัวอย่างที่ 2 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มาเรียงสับเปลี่ยนกันได้กี่วิธี

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มี 11 ตัว

มี S ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 4 ตัว

มี I ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 4 ตัว

มี P ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 2 ตัว

มี M ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 1 ตัว

ดังนั้น จากการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง

$$\text{จะทำได้เท่ากับ } \frac{11!}{4! \times 4! \times 2! \times 1!} \text{ วิธี}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 2}$$

$$= 34,650 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าต้องการบรรจุคนงาน 9 คน เข้าทำงานใน 3 แผนก โดยที่แผนกที่หนึ่งต้องการคนงาน 2 คน แผนกที่สองต้องการคนงาน 3 คน และแผนกที่สามต้องการคนงาน 4 คน แล้วจะมีวิธีบรรจุคนงานเหล่านี้ได้กี่วิธี

วิธีทำ คนงานที่อยู่ในแผนกเดียวกัน จะสับเปลี่ยนอย่างไรก็ยังคงอยู่ในแผนกเดียวกัน ดังนั้น เราจึงถือว่าคนในแผนกเดียวกัน ซ้ำกันหรือเหมือนกัน

ดังนั้น จำนวนวิธีการบรรจุคนงาน 9 คน จะเท่ากับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของคน 9 คน ซึ่งซ้ำกัน 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 ซ้ำ 2 คน, กลุ่มที่ 2 ซ้ำ 3 คน, กลุ่มที่ 3 ซ้ำ 4 คน นั่นคือ

$$\text{จำนวนวิธีการบรรจุคนงาน} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

1.260 วิธี

ตัวอย่างที่ 4 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า TROTTING มาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำต่าง ๆ (ไม่จำเป็นต้องมีความหมายก็ได้) โดยมีเงื่อนไขว่าคำนั้นต้องขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วย T

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า TROTTING มี 8 ตัว

T มี 3 ตัว

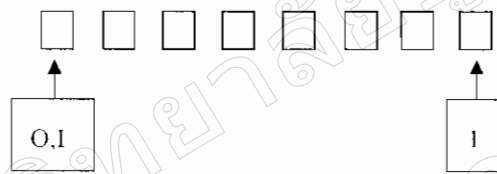
R มี 1 ตัว

I มี 1 ตัว

N มี 1 ตัว

G มี 1 ตัว

O มี 1 ตัว



$$\text{จำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำได้เท่ากับ } 2 \times \frac{6!}{2!} \times 1 = 6! = 720 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 5 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า "AXIOMATIC" มาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำต่าง ๆ (ไม่จำเป็นต้องมีความหมายก็ได้) โดยมีเงื่อนไขว่าสระทุกตัวอยู่ติดกัน

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า AXIOMATIC มี 9 ตัว

A มี 2 ตัว

X มี 1 ตัว

I มี 2 ตัว

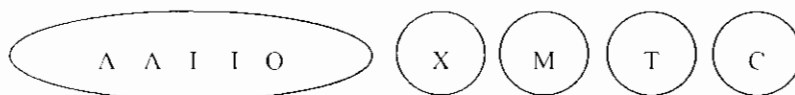
O มี 1 ตัว

M มี 1 ตัว

T มี 1 ตัว

C มี 1 ตัว

เนื่องจากโจทย์ต้องการให้สระทุกตัวอยู่ติดกัน



ให้คิดรวมกันเป็น 1 หน่วย และอย่าลืมว่าจะจะต้องคำนวณตัวที่ซ้ำกัน และการเรียงสับเปลี่ยนในกลุ่มด้วย



$$\text{ดังนั้นมีวิธีจัด} = \frac{5!}{2! \times 2!} \times 5! = 3,600 \text{ วิธี}$$

4. สื่อการเรียนรู้

- 4.1 ใบความรู้ที่ 8
- 4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 8

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
2. ครูยกโจทย์บนกระดานให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบเพื่อทบทวนการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่ง เช่น ตัวอักษรในคำว่า MUSIC จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นค่าต่าง ๆ ได้ทั้งหมดกี่วิธี (ตอบ $5! = 120$ วิธี)

ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้
ถ้ามีตัวอักษร A A A B B และนำตัวอักษรทั้ง 5 ตัวมาเรียงเป็นแถว นักเรียนคิดว่าจะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้เท่ากับ $5!$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

คำตอบคือ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนเพียง 10 วิธีเท่านั้น คือ

A A A B B	A A B A B	A A B B A	A B A A B
A B A B A	A B B A A	B B A A A	B A B A A
B A A B A	B A A A B		

เพราะเหตุใดคำตอบจึงเหลือเพียง 10 วิธีเท่านั้น

สาเหตุคือ ตัวอักษร A ซ้ำกัน 3 ตัว และอักษร B ซ้ำกัน 2 ตัว

ถ้า A ไม่ซ้ำกัน 3 ตัว จะยังคงสลับที่กันเองได้อีก $3! = 6$ วิธี

และในแต่ละวิธี ถ้า B ไม่ซ้ำกัน จะสลับที่กันเองได้อีก $2! = 2$ วิธี

ดังนั้น ถ้า A ไม่ซ้ำ และ B ไม่ซ้ำ จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $10 \times 6 \times 2 = 120$

$$\text{นั่นคือ } 10 = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

สามารถสรุปได้ว่า

- ถ้าเรามีสิ่งของ n สิ่ง ในของ n สิ่งนี้ มี n_1 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 1,
 n_2 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 2,

n_i สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 3

และ n_j สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ r

โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$

นำของทั้ง n สิ่งนี้มาจัดเรียงเป็นแถวทั้งหมด จะทำได้เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \text{ วิธี}$$

- 2. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารใบความรู้ที่ 8 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง ตัวอย่างที่ 1 – 3 โดยครูใช้ถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ
- 3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4 – 5 บนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างโจทย์พร้อมหาคำตอบ
- 4. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 8 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
- 5. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกันซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จาผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จาผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งในแนววงกลม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับกรนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เท่ากับ $(n-1)!$
- ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ 1 สิ่ง เท่ากับ $(n-1)! \times n!$
- ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ k สิ่ง (k หาร์ n ลงตัว) เท่ากับ $k \times (n-1)! \times n!$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เป็นวงกลมได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันเป็นวงกลมได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สาระการเรียนรู้

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดในลักษณะวงกลม

พิจารณาการจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C เป็นแถวตรงจะมีวิธีจัดเรียงได้ $3! = 6$ วิธี คือ

ABC

BCA

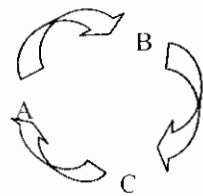
CAB

ACB

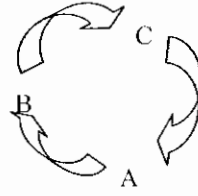
BAC

CBA

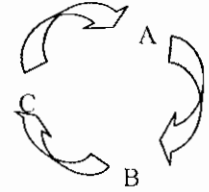
วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ABC BCA CAB เป็นการจัดเรียงแถวตรงที่แตกต่างกัน แต่ถ้านำแต่ละวิธีมาจัดเป็นวงกลม จะได้



A → B → C



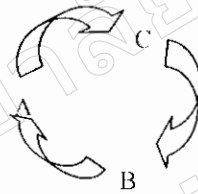
B → C → A



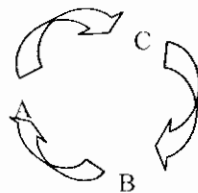
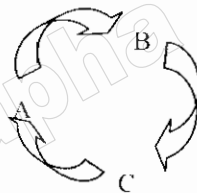
C → A → B

จะเห็นว่า การจัดเรียงทั้งสามแบบ ถือว่าเป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี เท่านั้น

ในทำนองเดียวกัน วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ACB BAC และ CBA เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี ก็



ดังนั้น การจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลม จะได้ 2 วิธี คือ



แนวคิดในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง อาจจะเริ่มโดยให้สิ่งของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลืออยู่ $n - 1$ สิ่ง จะได้ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมทั้งหมดเท่ากับ

$$(n - 1)(n - 2)(n - 3) \dots 3 \times 2 \times 1 = (n - 1)!$$

สรุปได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เท่ากับ $(n - 1)!$

ตัวอย่างที่ 1 มีคน 7 คน จะจัดคนทั้ง 7 คน นั่งรอบโต๊ะกลมเพื่อรับประทานอาหาร ได้กี่วิธี

วิธีทำ คน 7 คน สามารถนั่งรอบโต๊ะกลมได้ $-(7 - 1)!$

$$6!$$

$$= 720 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 มีคน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี เมื่อ

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

คน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(10 - 1)! = 9!$ วิธี

(2) ถ้ามีคน 2 คนขอนั่งติดกันเสมอ

คน 2 คนขอนั่งติดกันเสมอ คิดเป็น 1 ตำแหน่ง กับอีก 8 คน รวมเป็น 9 ตำแหน่ง

9 ตำแหน่ง จัดลำดับเป็นวงกลมได้ $(9 - 1)! = 8!$ วิธี

คน 2 คนนั่งติดกันสลับที่กันได้ $2! = 2$ วิธี

ดังนั้นวิธีนั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งคน 2 คนนั่งติดกันเสมอ $= 2 \times 8!$ วิธี

(3) ถ้ามีคน 2 คนขอนั่งแยกกันเสมอ

จำนวนวิธีที่คน 2 คนขอนั่งแยกกันเสมอ

= จำนวนวิธีที่ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม - จำนวนวิธีที่คน 2 คนนั่งติดกันเสมอ

$9! - (2 \times 8!) = (9 \times 8!) - (2 \times 8!) = 8!(9 - 2) = 7 \times 8!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 มีผู้หญิง 2 คน และผู้ชาย 4 คน มายืนเรียงเป็นวงกลม จะยืนได้กี่วิธี เมื่อ

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

จำนวนวิธีการยืน $(6 - 1)! = 5! = 120$ วิธี

(2) ผู้หญิง 2 คนยืนตรงข้ามกันเสมอ

ผู้หญิง 2 คนเลือกยืนตรงข้ามกันได้ 1 วิธี

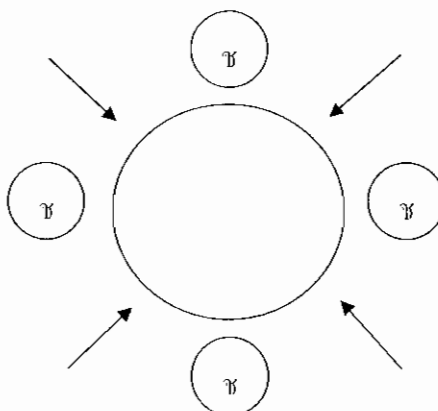
(เพราะหมุนได้ตามหลักเกณฑ์ของวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม)

ในแต่ละวิธี ผู้ชาย 4 คน มีวิธีการยืน $= 4! = 24$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการยืน $= 1 \times 24 = 24$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้าต้องการจัดให้เด็กชาย 4 คน และเด็กหญิง 3 คน นั่งเป็นวงกลม โดยไม่ให้เด็กหญิงนั่งติดกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ



จัดเด็กชาย 4 คน นั่งโต๊ะกลมก่อน จะจัดได้ $3!$ วิธี

มีที่ให้เด็กหญิง 3 คน แทรกได้ 4 ที่

ดังนั้น จัดเด็กหญิงนั่งแยกกันได้ $P(4, 3) = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

$\therefore$ จำนวนวิธีทั้งหมดที่จัดได้ $3! \times 24 = 144$ วิธี

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันเป็นวงกลม

พิจารณาการนั่งสลับที่กันระหว่างชายหญิงเป็นวงกลม ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 มีชาย 3 คน และหญิง 3 คน นั่งสลับชาย 1 หญิง 1 รอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี

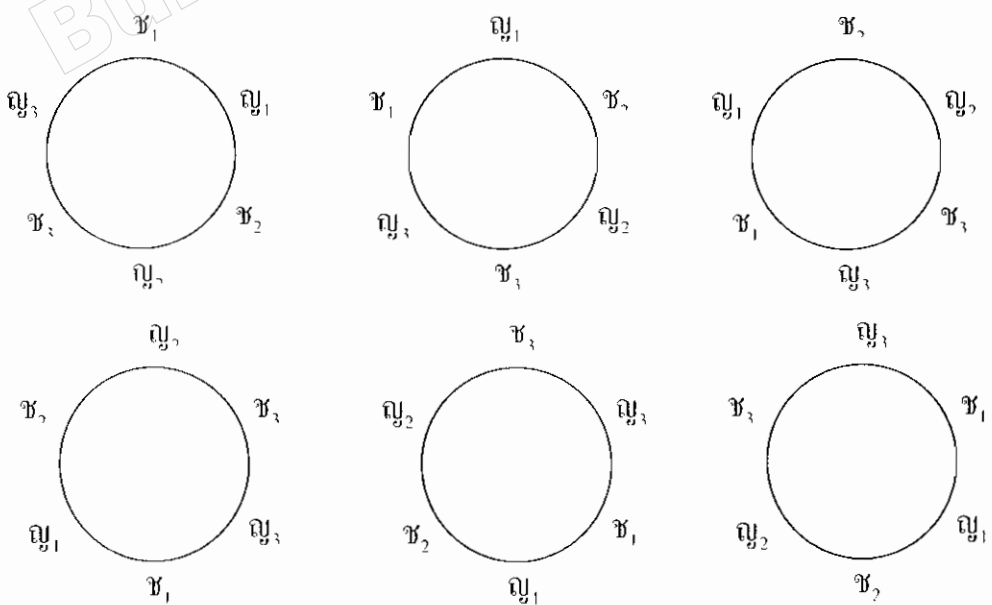
ให้ $ช_1, ช_2, ช_3$ หมายถึง ชายคนที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ

$ญ_1, ญ_2, ญ_3$ หมายถึง หญิงคนที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ

พิจารณาการจัดชายหญิงเป็นแนวตรง 6 วิธีต่อไปนี้

$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$
$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$
$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$
$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$
$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$
$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$

ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม 6 วิธีนี้ถือเป็น 1 วิธี ดังภาพ



ดังนั้นเรียงสับเปลี่ยนเป็นแนวตรงได้ 6 วิธี เรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ 1 วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นแนวตรงได้ทั้งหมด $2! \times 3! \times 3!$ วิธี

ดังนั้น เรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ $\frac{2! \times 3! \times 3!}{6} = 2! \times 3!$ วิธี

สามารถสรุปได้ดังนี้

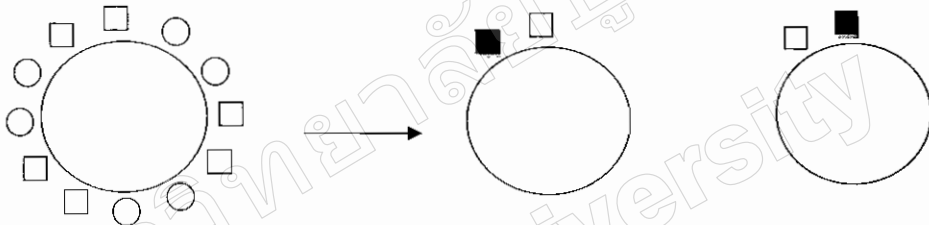
ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ 1 สิ่ง เท่ากับ $(n-1)! \times n!$

ตัวอย่างที่ 2 มีชาย 6 คน หญิง 6 คน ถ้าจัดนั่งรอบโต๊ะกลมจะมีกี่วิธี ถ้าชายและหญิงต้องนั่งสลับกันทีละ

(1) 2 คน

(2) 3 คน

วิธีทำ (1) 2 คน (ให้ $\square$ แทนผู้ชาย และ $\bigcirc$ แทนผู้หญิง)



ให้ใครคนหนึ่ง (ชายหรือหญิงก็ได้) ไปเลือกที่นั่ง และอยู่กับที่

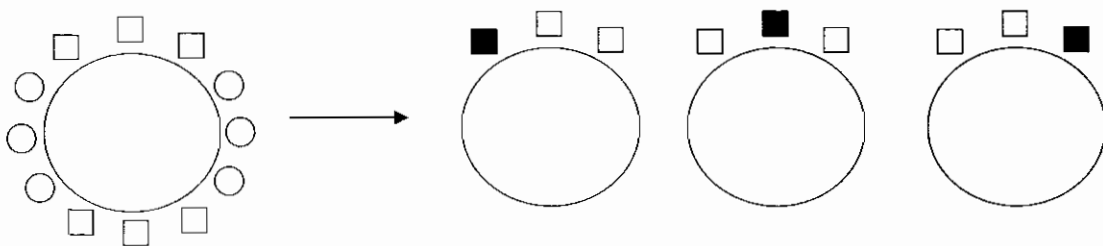
จำนวนวิธีเลือกที่นั่ง = 2 วิธี (ดังภาพ $\blacksquare$)

จากภาพให้คนที่นั่งอยู่กับที่คือผู้ชาย ผู้ชาย 5 คนที่เหลือไปนั่งที่ผู้ชาย และสลับที่กันเองได้ 5! วิธี

ในแต่ละวิธี จัดให้ผู้หญิงนั่งเก้าอี้ว่าง ซึ่งมีที่นั่ง 6 ที่และสลับที่กันเอง จะจัดได้ 6! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดให้ผู้ชายและผู้หญิงนั่งสลับกันเท่ากับ $2 \times 5! \times 6! = 2 \times 120 \times 720 = 172,800$ วิธี

(2) 3 คน



ให้ชายคนหนึ่งไปเลือกที่นั่งในตำแหน่งผู้ชาย และอยู่กับที่

จำนวนวิธีเลือกที่นั่ง = 3 วิธี (ดังภาพ $\blacksquare$)

ในแต่ละวิธี ผู้ชาย 5 คนที่เหลือไปนั่งที่ผู้ชาย และสลับที่กันเองได้ 5! วิธี

ในแต่ละวิธี จัดให้ผู้หญิง 6 คน ไปนั่งที่ผู้หญิงและสลับที่กันเอง จะจัดได้ 6! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดให้ผู้ชายและผู้หญิงนั่งสลับกันเท่ากับ $3 \times 5! \times 6! = 2 \times 120 \times 720 = 259,200$ วิธี
สามารถสรุปได้ดังนี้

ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ
ทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ k สิ่ง (k หาร n ลงตัว) เท่ากับ $k \times (n-1)! \times n!$

ตัวอย่างที่ 3 มีชาย 12 คน หญิง 12 คน นั่งเป็นวงกลม โดยนั่งสลับกันระหว่างชายและหญิง จะมี
วิธีการนั่งกี่วิธี เมื่อ

(1) สลับกันทีละ 1 คน

(2) สลับกันทีละ 3 คน

วิธีทำ (1) สลับกันทีละ 1 คน

จำนวนวิธีการนั่ง $= 1 \times (12-1)! \times 12! = 11! \times 12!$ วิธี

(2) สลับกันทีละ 3 คน

จำนวนวิธีการนั่ง $= 3 \times (12-1)! \times 12! = 3 \times 11! \times 12!$ วิธี

4. สื่อการเรียนรู้

4.1 ใบความรู้ที่ 9, 10

4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 9, 10

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

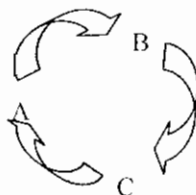
2. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดใน

แนวเส้นตรง โดยให้นักเรียนออกมาทำโจทย์บนกระดาน คือ จัดให้นักเรียน 3 คน คือ A, B และ C
มาขึ้นเรียงเป็นแถวตรงสามารถขึ้นได้กี่วิธี (6 วิธี คือ ABC BCA CAB ACB BAC และ CBA)

ขั้นสอน

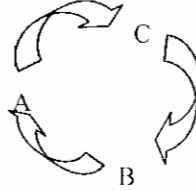
1. ให้นักเรียนทั้ง 3 คนนั่งเป็นวงกลมและจัดเรียงอันดับตามเข็มนาฬิกา และทวนเข็มนาฬิกา แล้วให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นการจัดวิธีแบบเดิมหรือไม่ เพราะอะไร โดยให้นักเรียน

เขียนแจกแจงวิธี พิจารณากลุ่มแรก คือ ABC BCA CAB นำมาจัดเป็นวงกลม ดังภาพ



และให้นักเรียนสังเกตว่าถ้าหมุนวงกลมนี้แล้วตำแหน่งของ ABC เปลี่ยนแปลงไปหรือไม่ อย่างไร

2. ให้นักเรียนพิจารณาอีกกลุ่มคือ ACB BAC CBA นำมาจัดเป็นวงกลม ดังภาพ สามารถทำได้ทั้งหมดกี่วิธี



3. ครูและนักเรียนร่วมกันยกตัวอย่างโจทย์ที่จัดเรียงแบบวงกลมและช่วยกันหาคำตอบ
4. ครูให้นักเรียนช่วยกันหาสูตรในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน
5. นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 9 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดในลักษณะวงกลม ตั้งแต่คำอธิบายเริ่มต้นกระทั่งถึงตัวอย่างที่ 2 โดยครูใช้การถามตอบและอธิบายเพิ่มเติมโดยยกตัวอย่างกรณีจัดเรียงเป็นแถวตรง
6. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 3, 4 และวาดภาพบนกระดาน
7. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 10 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันเป็นวงกลม โดยครูใช้การถามตอบและอธิบายเพิ่มเติมบนกระดาน จากนั้นจึงช่วยกันสรุปสูตรในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของแต่ละประเภทสลับกันเป็นวงกลม
8. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 9, 10 ข้อคู่ โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
9. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมทั้งซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
10. ให้นักเรียนทำข้อที่เหลือในใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 9, 10 เป็นการบ้านส่งในคาบถัดไป

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เป็นวงกลมและจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันเป็นวงกลม

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จดผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จดผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- การนำสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันมาเรียงเป็นวงกลม
 - ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง โดยแบ่งกลุ่มเป็น k กลุ่ม
 - กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง
 - กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง
 - ...
 - กลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง
 - ถ้า ห.ร.ม. $(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง
- ดังกล่าว เท่ากับ
$$\frac{(n-1)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$
 วิธี
- แต่ถ้า ห.ร.ม. $(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq 1$ ไม่สามารถใช้สูตรข้างต้นนี้ได้ สามารถแก้ปัญหานี้ได้ โดยการแจกแจงด้วยภาพ

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
 - หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลมได้
- 2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ
 - การแก้ปัญหา
 - การให้เหตุผล
 - การสื่อสารและสื่อความหมาย
 - การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์
- 2.3 ด้านคุณลักษณะ
 - นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
 - นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม

- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สารการเรียนรู้

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลม

การนำสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันมาเรียงเป็นวงกลม

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง โดยแบ่งกลุ่มเป็น k กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง

ถ้า $n_1, n_2, \dots, n_k = 1$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง

ดังกล่าว เท่ากับ $\frac{(n-1)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ วิธี

แต่ถ้า $n_1, n_2, \dots, n_k \neq 1$ ไม่สามารถใช้สูตรข้างต้นนี้ได้ สามารถแก้ปัญหานี้ได้

โดยการแจกแจงด้วยภาพ

ตัวอย่างที่ 1 มีลูกบอลสีเข้เหมือนกัน 2 ลูก สีเหลืองเหมือนกัน 3 ลูก และสีน้ำเงินเหมือนกัน 4 ลูก จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของลูกบอลทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ เนื่องจาก $n_1, n_2, n_3 \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของลูกบอลทั้งหมด} &= \frac{(9-1)!}{2! \times 3! \times 4!} \\ &= \frac{8!}{2! \times 3! \times 4!} = 140 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือเคมี 1 เล่ม หนังสือคณิตศาสตร์เหมือนกัน 2 เล่ม หนังสือฟิสิกส์เหมือนกัน 2 เล่ม และหนังสือชีววิทยาเหมือนกัน 3 เล่ม ถ้าต้องการนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงเป็นวงกลม จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

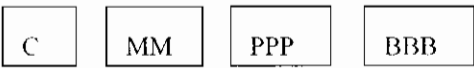
เนื่องจาก $n_1, n_2, n_3 \neq 1$

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือทั้งหมดเป็นวงกลม} = \frac{(8-1)!}{1! \times 2! \times 2! \times 3!}$$

$$- \frac{7!}{1! \times 2! \times 2! \times 3!} = 210 \text{ วิธี}$$

(2) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

รวมหนังสือโนวิชาเดียวกันเป็น 1 เล่ม



ดังนั้น จึงเหมือนกับมีหนังสือ 4 เล่ม แตกต่างกัน ซึ่งมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= (4 - 1)! = 3! = 6$ วิธี
ตัวอย่างที่ 3 มีตัวอักษร A, A, B, B, B นำมาวางเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ทำได้ทั้งสิ้นกี่วิธี เมื่อ

- (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- (2) ตัวอักษร A อยู่ติดกัน

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เนื่องจาก ห.ร.ม. $(2, 3) = 1$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $\frac{(5-1)!}{2! \times 3!} = \frac{4!}{2! \times 3!} = 2$ วิธี

- (2) ตัวอักษร A อยู่ติดกัน

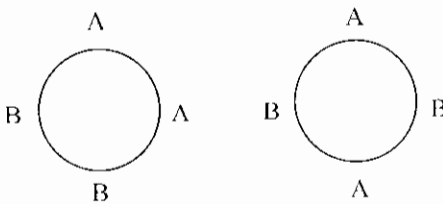


รวม A 2 ตัว เป็น 1 ตัว เนื่องจาก ห.ร.ม. $(1, 3) = 1$

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= \frac{(4-1)!}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 มีตัวอักษร A อยู่ 2 ตัว และอักษร B อยู่ 2 ตัว นำมาวางเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ทำได้ทั้งสิ้นกี่วิธี

วิธีทำ เนื่องจาก ห.ร.ม. ของจำนวนตัวอักษร A และ B เป็น 2 (ห.ร.ม. $(2, 2) = 2$) จึงต้องใช้วิธีการแจกแจงคำยภาพ ดังนี้



ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= 2$ วิธี

4. สื่อการเรียนรู้

- 4.1 ใบความรู้ที่ 11
- 4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 11

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูซักถามนักเรียนถึงปัญหาและข้อสงสัยของการบ้านที่ได้มอบหมายให้ จากนั้นจึงสุ่มเรียกนักเรียนให้ออกมาเฉลยหน้าชั้นเรียน
2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
3. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง โดยให้นักเรียนออกมาทำโจทย์บนกระดาน คือ ในการสลับอักษรในคำ “BANANA” จะได้คำที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ (จะจัดได้แตกต่างกันเท่ากับ $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$ คำ)

ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 11 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลม โดยครูใช้การถามตอบเปรียบเทียบกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงและอธิบายเพิ่มเติมบนกระดาน จากนั้นจึงช่วยกันสรุปสูตรในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลม
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 – 4 บนกระดาน โดยใช้การถามตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ
3. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 11 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
4. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลม

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจกการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจกการทำกิจกรรม
- 6.3 จกผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จกผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

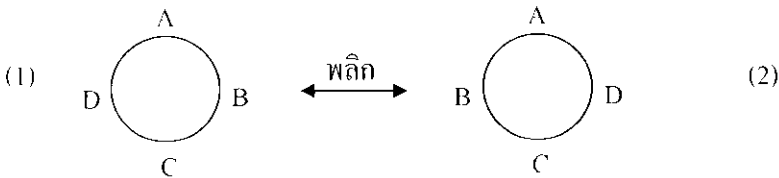
- การจัดเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง มาจัดเรียงเป็นวงกลมในลักษณะที่มองได้ 2 ด้าน จำนวนวิธีที่สามารถจัดทำได้เท่ากับ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี

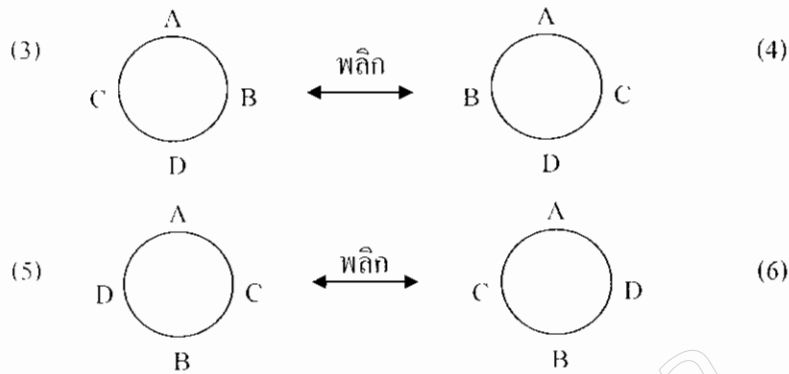
2. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
 - หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติได้
- 2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ
 - การแก้ปัญหา
 - การให้เหตุผล
 - การสื่อสารและสื่อความหมาย
 - การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์
- 2.3 ด้านคุณลักษณะ
 - นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
 - นักเรียนมีความเมตตาเพื่อส่วนรวม
 - นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สาระการเรียนรู้

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติ
- วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของ A, B, C, D ใน 3 มิติหรือการมองได้ 2 ด้าน จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน ดังภาพต่อไปนี้





จะสังเกตได้ว่าถ้าเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมและมองด้านเดียว จะมีวิธีการเรียงได้ทั้งหมดคือ $(4 - 1)! = 3! = 6$ วิธี (เนื่องจากเราให้ A คงที่ตำแหน่งที่ 1 ไว้ ส่วน B, C และ D ก็สลับแบบเชิงเส้น)

แต่ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบมองได้ 2 ด้าน จะเหลือเพียง $\frac{(4 - 1)!}{2} = \frac{3!}{2} = 3$ วิธีเท่านั้น

นั่นคือ รูป (1) และรูป (2) ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

รูป (3) และรูป (4) ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

รูป (5) และรูป (6) ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

ยกตัวอย่างเช่น มีลูกโป่งจำนวน 3 ลูก ซึ่งมีสีแดง ขาว และน้ำเงิน ถ้าวางเป็นวงกลมบนพื้น 2 วิธีต่อไปนี้ก็จะแตกต่างกัน



แต่ถ้านักเรียนนำลูกโป่งทั้ง 3 ลูกนี้ มาร้อยเป็นกำไลข้อมือ จะได้ทั้งสองวิธีเหมือนกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

การจัดเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง

มาจัดเรียงเป็นวงกลมในลักษณะที่มองได้ 2 ด้าน

จำนวนวิธีที่สามารถจัดทำได้เท่ากับ $\frac{(n - 1)!}{2}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 มีดอกไม้ 7 ดอก ดอกละ 1 สี จะมีวิธีนำดอกไม้ทั้ง 7 ดอก มาร้อยเป็นพวงมาลัยกลมได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่สามารถทำได้ = $\frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = 360$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 มีลูกปัดสีแตกต่างกัน จำนวน 8 ลูก ในจำนวนนี้มีสีแดงและสีขาวอยู่ด้วย ถ้านำลูกปัดเหล่านี้ทั้งหมดมาร้อยเป็นกำไลข้อมือ จะได้กำไลที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วง เมื่อ

- (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
(2) สีแดงอยู่ติดกับสีขาว

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

จะได้กำไลที่แตกต่างกันทั้งหมด = $\frac{(8-1)!}{2} = \frac{7!}{2} = 2,520$ วง

- (2) สีแดงอยู่ติดกับสีขาว

รวมสีแดงและสีขาวเป็นอันเดียวกัน จะนับจำนวนลูกปัดได้ทั้งหมด 7 ลูก

นำมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมมองได้ 2 ด้าน ได้ $\frac{(7-1)!}{2}$ วิธี

และเนื่องจากลูกปัดสีแดงและสีขาวสลับที่กันเองได้ 2! วิธี

ดังนั้น จะได้กำไล $\frac{(7-1)! \times 2!}{2} = \frac{6! \times 2!}{2} = 720$ วง

4. สื่อการเรียนรู้

- 4.1 ใบความรู้ที่ 12
- 4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 12

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
2. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดในลักษณะวงกลมโดยใช้การถามตอบให้นักเรียนบอกสูตรที่ใช้ในการแก้โจทย์พร้อมยกตัวอย่าง
3. ครูให้นักเรียนสังเกตจากการนำลูกปัดจำนวน 3 ลูก มีสีแดง ขาว และน้ำเงิน เมื่อนำมาวางบนโต๊ะแล้วสังเกตเปรียบเทียบกับเมื่อนำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือ จะมีสีที่แตกต่างกันหรือไม่อย่างไร

ชั้นสอน

- 1. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 12 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติ โดยครูอธิบายเพิ่มเติมบนกระดาน จากนั้นจึงช่วยกันสรุปสูตรในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติ
- 2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 – 2 บนกระดาน โดยใช้เกรلامตอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ
- 3. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 12 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
- 4. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติ

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากคำตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จากผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จากผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีจัดหมู่

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง

$$\text{เมื่อ } 0 \leq r \leq n \text{ เท่ากับ } \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$$\text{เขียนแทนด้วย } C(n, r), \binom{n}{r}, {}^nC_r$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง เมื่อ $0 \leq r \leq n$ ได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สาระการเรียนรู้

- วิธีจัดหมู่ของสิ่งที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง

การจัดหมู่ ของสิ่งของที่แตกต่างกัน เป็นการจับกลุ่มของสิ่งของที่ไม่คำนึงถึงอันดับของสิ่งของนั้น เช่น การจัดหมู่ตัวอักษร A, B และ C ถ้านำมาจัดคราวละ 2 ตัว จะจัดได้ 3 วิธี ดังนี้ AB AC BC

แต่ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยน (คือถืออันดับเป็นสำคัญ) และนำมาจัดคราวละ 2 ตัว จะได้ 6 วิธี คือ AB BA AC CA BC CB เป็นต้น

จะเห็นว่าสิ่งของที่แตกต่างกัน 3 สิ่ง เมื่อนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 2 สิ่ง จะได้เท่ากับ $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$ วิธี

แต่เมื่อนำมาจัดหมู่จะได้เท่ากับ $\frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$ วิธี

ต่อไปนี้ให้นักเรียนลองทำ

เช่น การจัดหมู่ตัวอักษร A, B, C และ D ถ้านำมาจัดคราวละ 2 ตัว จะได้ 6 วิธี ดังนี้ AB AC AD BC BD CD

แต่ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยน (คือถืออันดับเป็นสำคัญ) และนำมาจัดคราวละ 2 ตัว จะได้ 12 วิธี ดังนี้ AB BA AC CA AD DA BC CB BD DB CD DC

จะเห็นว่าสิ่งของที่แตกต่างกัน 4 สิ่ง เมื่อนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 2 สิ่ง จะได้เท่ากับ $\frac{4!}{(4-2)!} = 12$ วิธี

แต่เมื่อนำมาจัดเป็นหมู่จะได้เท่ากับ $\frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$ วิธี

สรุป จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง

เมื่อ $0 \leq r \leq n$ เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)! \times r!}$

เขียนแทนด้วย $C(n, r), \binom{n}{r}, {}^nC_r$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $C(6, 2)$ และ $C(8, 5)$

วิธีทำ $C(6, 2) = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15$

$$C(8, 5) = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

ตัวอย่างที่ 2 ในการคัดเลือกนักกีฬาจำนวน 5 คนจากผู้สมัครจำนวน 8 คน จะมีวิธีเลือกทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ $C(8, 5) = \frac{8!}{(8-5)! \times 5!}$

$$= \frac{8!}{3! \times 5!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการคัดเลือกนักกีฬาจำนวน 5 คน จากผู้สมัครจำนวน 8 คน มีทั้งหมด 56 วิธี

ตัวอย่างที่ 3 หีบไฟ 5 ใบ จอไฟสำหรับหนึ่ง (มี 52 ใบ) ได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธี = $C(52, 5)$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 กล่องใบหนึ่งมีลูกหิน 15 ลูก ที่แตกต่างกันเป็นสีเขียว 6 ลูก สีเหลือง 5 ลูก สีส้ม 4 ลูก ถ้าหยิบลูกหินมา 3 ลูก จงหาจำนวนวิธีที่

- (1) มีสีต่างกันทุกลูก
- (2) มีสีเหมือนกันทุกลูก
- (3) ไม่มีสีซ้ำกัน

วิธีทำ (1) มีสีต่างกันทุกลูก

จากโจทย์ถ้า “สีต่างกันทุกลูก” คือ การหยิบลูกหินมาสีละ 1 ลูก ให้ครบจำนวน 3 ลูก

ขั้นที่ 1 เลือกหยิบเฉพาะสีเขียว 1 ลูก ได้ $C(6, 1)$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกหยิบเฉพาะสีเหลือง 1 ลูก ได้ $C(5, 1)$ วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกหยิบเฉพาะสีส้ม 1 ลูก ได้ $C(4, 1)$ วิธี

ดังนั้น จะเลือกหยิบได้ $= C(6, 1) \times C(5, 1) \times C(4, 1) = 6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี

- (2) มีสีเหมือนกันทุกลูก

กรณีที่ 1 เลือกหยิบเฉพาะสีเขียว 3 ลูก ได้ $C(6, 3)$ วิธี

กรณีที่ 2 เลือกหยิบเฉพาะสีเหลือง 3 ลูก ได้ $C(5, 3)$ วิธี

กรณีที่ 3 เลือกหยิบเฉพาะสีส้ม 3 ลูก ได้ $C(4, 3)$ วิธี

จะเลือกหยิบได้ $= C(6, 3) + C(5, 3) + C(4, 3)$ วิธี

$$= \frac{6!}{3! \times 3!} + \frac{5!}{2! \times 3!} + \frac{4!}{1! \times 3!}$$

$$= 20 + 10 + 4 = 34 \text{ วิธี}$$

(3) ไม่มีสินเงิน

เลือกหยิบ 3 ลูกจากลูกหินที่ไม่ใช่สีน้ำเงินจะหยิบได้

$$C(11, 3) = \frac{11!}{8! \times 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2 \times 1} = 165 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 5 หน่วยงานหนึ่งต้องการรับคนงานชาย 3 คน และคนงานหญิง 2 คน ถ้ามีผู้ชายมาสมัคร 5 คนและผู้หญิงมาสมัคร 4 คน จงหาจำนวนวิธีที่หน่วยงานแห่งนั้นจะเลือกคนงานดังกล่าวเข้าทำงาน

วิธีทำ คนงานชายทั้งหมด 5 คน เลือกมา 3 คน จะเลือกได้ $C(5, 3)$

$$= \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ วิธี}$$

คนงานหญิงทั้งหมด 4 คน เลือกมา 2 คน จะเลือกได้ $C(4, 2)$

$$= \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกคนงานเข้าทำงาน ได้เท่ากับ $10 \times 6 = 60$ วิธี

4. สื่อการเรียนรู้

- 4.1 ใบความรู้ที่ 13
- 4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 13

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
2. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวเส้นตรงโดยยกตัวอย่างให้นักเรียนหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร 2 ตัวจากตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B, C แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ (ตอบ 6 วิธี คือ AB AC BA BC CA CB)

ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวอักษร 2 ตัวจากตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B, C โดยไม่คำนึงถึงลำดับก่อนหลังของการเลือก แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ (ตอบ 3 วิธี คือ AB (หรือ BA), AC (หรือ CA), BC (หรือ CB))
2. ให้นักเรียนเปรียบเทียบคำตอบของการหาคำตอบทั้ง 2 วิธี ว่าจำนวนวิธีของแบบใดมากกว่าอย่างไร

- 3. ครูอธิบายเรื่องวิธีจัดหมู่ แล้วให้นักเรียนอภิปรายว่าระหว่างวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่มีความสัมพันธ์กันอย่างไร
 - 4. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสูตรการหาจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง
 - 5. ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 – 3 ในใบความรู้ที่ 13 เรื่องวิธีจัดหมู่ของสิ่งที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง และให้นักเรียนยกตัวอย่างเพิ่มเติมพร้อมหาคำตอบ
 - 6. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4 – 5 ในใบความรู้ที่ 13 บนกระดานโดยใช้การถามตอบเพื่อเสริมสร้างคามเข้าใจ
 - 7. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 13 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
 - 8. คู่เมื่อนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
- ขั้นสรุป**
- ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง เมื่อ $0 \leq r \leq n$

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จกผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จกผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง การจัดหมู่สิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- การหาจำนวนวิธีเลือกของ r สิ่งที่แตกต่างกันมาจัดลำดับ มีขั้นตอนดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 เลือกของ r สิ่ง จาก n สิ่งได้ $C(n, r)$ วิธี
ขั้นตอนที่ 2 จัดลำดับของ r สิ่งได้ $P(r, r) = r!$ วิธี
โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจะได้ว่า
จำนวนวิธีเลือกของ r สิ่งที่แตกต่างกันมาจัดลำดับเท่ากับ $C(n, r) \times r!$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
 - หาจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกันได้
- 2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ
 - การแก้ปัญหา
 - การให้เหตุผล
 - การสื่อสารและสื่อความหมาย
 - การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์
- 2.3 ด้านคุณลักษณะ
 - นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
 - นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
 - นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สารการเรียนรู้

- วิธีจัดหมู่สิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

การจัดหมู่สิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน ทำโดยแยกเป็นกรณีจากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด จนกระทั่งถึงกรณีที่มีสิ่งของซ้ำกันมากที่สุด ตัวอย่างเช่น มีอักษร ABBBBCC จะเลือกนำอักษรมา 3 ตัว ทำได้ดังนี้

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวนั้นต่างกันหมด คือ ABC

กรณีที่ 2 อักษร 3 ตัวนั้นซ้ำกัน 2 ตัว คือ AAB AAC BBA BBC CCA หรือ CCB

กรณีที่ 3 อักษร 3 ตัวนั้นเหมือนกันหมด คือ BBB

ตัวอย่างที่ 1 จะเลือกอักษร 3 ตัวจากคำว่า FOOD ได้ทั้งสิ้นกี่วิธี

วิธีทำ FOOD มีทั้งหมด 4 ตัว มี O ซ้ำ 2 ตัว

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวที่เลือกต่างกันทั้งหมด จะเลือกได้ $C(3, 3) - 1$ วิธี

กรณีที่ 2 อักษร 3 ตัวมีอักษรเหมือนกัน 2 ตัวคือ O และเลือกเพิ่มอีก 1 ตัว จาก F, D

จะเลือกได้ $C(2, 1) - 2$ วิธี

ดังนั้น จะเลือกอักษร 3 ตัวดังกล่าวได้ทั้งหมด $1 + 2 = 3$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 จะเลือกอักษร 3 ตัวจากคำว่า PAPAYA ได้ทั้งสิ้นกี่วิธี

วิธีทำ PAPAYA มีทั้งหมด 6 ตัว คือ PP, AAA, Y

มี A ซ้ำ 3 ตัว, มี P ซ้ำ 2 ตัว

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวที่เลือกต่างกันทั้งหมด จะเลือกได้ $C(3, 3) - 1$ วิธี

กรณีที่ 2 อักษร 3 ตัวมีอักษรเหมือนกัน 2 ตัว และแตกต่างอีก 1 ตัว

จะเลือกได้ $C(2, 1) \times C(2, 1) = 4$ วิธี

กรณีที่ 3 อักษร 3 ตัวนั้นเหมือนกันหมด เลือกได้ 1 วิธี

ดังนั้น จะเลือกอักษร 3 ตัวดังกล่าวได้ทั้งหมด $1 + 4 + 1 = 6$ วิธี

☺ การหาจำนวนวิธีเลือกของ r สิ่งที่แตกต่างกันมาจัดลำดับ

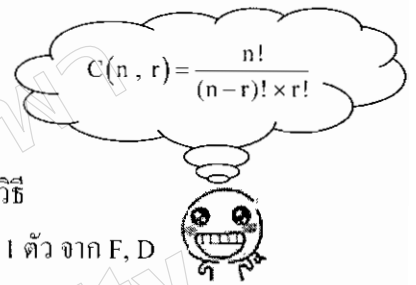
มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกของ r สิ่งจาก n สิ่งได้ $C(n, r)$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดลำดับของ r สิ่งได้ $P(r, r) = r!$ วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจะได้ว่า

จำนวนวิธีเลือกของ r สิ่งที่แตกต่างกันมาจัดลำดับเท่ากับ $C(n, r) \times r!$



ตัวอย่างที่ 3 จะจัดลำดับตัวอักษร 4 ตัว ซึ่งเลือกมาจากคำว่า NATION ได้กี่วิธี

วิธีทำ NATION มี 6 ตัว แต่มี N ซ้ำ 2 ตัว จึงต้องแบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 เลือกอักษร 4 ตัวมาจัดโดยตัวที่เลือกต่างกันทั้งหมด

ขั้นที่ 1 เลือกอักษร 4 ตัวที่แตกต่างกันจาก 5 ตัว คือ N A T I O ได้ $C(5, 4)$ วิธี

ขั้นที่ 2 จัดลำดับอักษร 4 ตัวได้ $4!$ วิธี

จะเลือกมาจัดลำดับได้ $= C(5, 4) \times 4!$

$$= \frac{5!}{1! \times 4!} \times 4! = 120 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 เลือกอักษร 4 ตัว มีอักษรเหมือนกัน 1 คู่และตัวอื่นอีก 2 ตัวต่างกัน

ขั้นที่ 1 เลือกอักษร 4 ตัว มีอักษรเหมือนกัน 1 คู่และตัวอื่นอีก 2 ตัวต่างกันจาก 4 ตัว คือ A T I O) เลือกได้ $1 \times C(4, 2)$ วิธี

ขั้นที่ 2 จัดลำดับอักษร 4 ตัว ซ้ำกัน 1 คู่ได้ $\frac{4!}{2!}$ วิธี

จะเลือกมาจัดลำดับได้ $= C(4, 2) \times \frac{4!}{2!}$

$$= \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2!}$$

$= 72$ วิธี

ดังนั้น จะจัดได้ทั้งหมดเท่ากับ $120 + 72 = 192$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 จะจัดลำดับตัวอักษร 3 ตัว ซึ่งเลือกมาจากคำว่า COLLEGE ได้กี่วิธี

วิธีทำ COLLEGE มีทั้งหมด 7 ตัว L, L, E, E, C, O, G

มี L ซ้ำ 2 ตัว, มี E ซ้ำ 2 ตัว

กรณีที่ 1 เลือก 3 ตัวมาจัดโดยตัวที่เลือกต่างกันทั้งหมด

ขั้นที่ 1 เลือกอักษร 3 ตัวที่แตกต่างกันจาก 5 ตัว คือ C O L E G ได้ $C(5, 3)$ วิธี

ขั้นที่ 2 จัดลำดับอักษร 3 ตัวได้ $3!$ วิธี

จะเลือกมาจัดลำดับได้ $= C(5, 3) \times 3! = \frac{5!}{2! \times 3!} \times 3! = 60$ วิธี

กรณีที่ 2 เลือกอักษร 3 ตัว มีอักษรเหมือนกัน 1 คู่และตัวอื่นอีก 1 ตัว แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 เลือกอักษร 3 ตัว มีอักษรเหมือนกัน 1 คู่และตัวอื่นอีก 1 ตัว

เลือกได้ $C(2, 1) \times C(4, 1)$ วิธี

ขั้นที่ 2 จัดลำดับอักษร 3 ตัว ซ้ำกัน 2 ตัวได้ $\frac{3!}{2!}$ วิธี

$$\begin{aligned}\text{จะเลือกมาจัดลำดับได้} &= C(2, 1) \times C(4, 1) \times \frac{3!}{2!} \\ &= 24 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณี จะจัดได้เท่ากับ $60 + 24 = 84$ วิธี

4. สื่อการเรียนรู้

4.1 ใบความรู้ที่ 14

4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 14

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
2. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องการหาจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง เมื่อ $0 \leq r \leq n$ โดยให้นักเรียนยกตัวอย่างพร้อมหาคำตอบ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างโจทย์เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันพร้อมหาคำตอบ แล้วออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน
2. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 14 วิธีจัดหมู่สิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน โดยครูอธิบายบนกระดานพร้อมกับซักถามขั้นตอนการทำเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ
3. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมฝึกทักษะที่ 14 โดยครูเป็นผู้ชี้แนะ
4. สุ่มนักเรียนอธิบายวิธีการคิดหาคำตอบ โดยเพื่อนร่วมชั้นและครูร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง พร้อมกับซักถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่งจากของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำกิจกรรม
- 6.3 จากผลการตรวจใบกิจกรรมฝึกทักษะ
- 6.4 จากผลการทำแบบทดสอบ

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ 32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีการแบ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการแบ่งสิ่งของทั้งหมดออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ จำนวน k กลุ่ม แต่ละกลุ่ม มีจำนวนสิ่งของ ดังนี้

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของจำนวน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของจำนวน n_2 สิ่ง

⋮

กลุ่มที่ k มีสิ่งของจำนวน n_k สิ่ง

โดยที่ $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \dots \neq n_k$ และ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ จะได้ว่า

จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่ม $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ วิธี

- ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการแบ่งสิ่งของทั้งหมดออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ จำนวน k กลุ่ม แต่ละกลุ่ม มีจำนวนสิ่งของ ดังนี้

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของจำนวน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของจำนวน n_2 สิ่ง

⋮

กลุ่มที่ k มีสิ่งของจำนวน n_k สิ่ง

โดยที่ $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ และ ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม จะได้ว่า

จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่ม $\frac{n!}{(n_1! n_2! \dots n_k!) k!}$ วิธี

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีการแบ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม ซึ่งแต่ละกลุ่มไม่เท่ากันได้
- หาจำนวนวิธีการแบ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม ซึ่งแต่ละกลุ่มเท่ากันได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. การการเรียนรู้

- วิธีการแบ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม ซึ่งแต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างดังนี้

นักเรียนต้องการแบ่งดินสอสีต่าง ๆ กัน 9 แท่ง ออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งมี 4 แท่ง กลุ่มที่สองมี 3 แท่ง และกลุ่มที่สามมี 2 แท่ง จะแบ่งได้กี่วิธี

แบ่งดินสอสีต่าง ๆ กัน 9 แท่ง ออกเป็น 3 กลุ่ม ได้ดังนี้

กลุ่มที่หนึ่งแบ่งได้ $C(9, 4)$ วิธี

กลุ่มที่สองแบ่งได้ $C(5, 3)$ วิธี

กลุ่มที่สามแบ่งได้ $C(2, 2)$ วิธี

จำนวนวิธีแบ่งได้ทั้งหมด $= C(9, 4) \times C(5, 3) \times C(2, 2)$

$$\begin{aligned} & \frac{9!}{5!4!} \times \frac{5!}{2!3!} \times \frac{2!}{2!} \\ &= \frac{9!}{4!3!2!} \quad \text{วิธี} \end{aligned}$$

จะสรุปได้ว่า

ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการแบ่งสิ่งของทั้งหมดออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ จำนวน k กลุ่ม แต่ละกลุ่ม มีจำนวนสิ่งของ ดังนี้

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของจำนวน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของจำนวน n_2 สิ่ง

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีสิ่งของจำนวน n_k สิ่ง

โดยที่ $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \dots \neq n_k$ และ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ จะได้ว่า

$$\text{จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่ม} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \text{ วิธี}$$

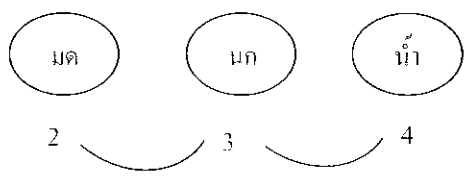
ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนวิธีการแบ่งหนังสือ 12 เล่ม ที่แตกต่างกัน ออกเป็น 3 กอง โดยที่กองหนึ่งมี 3 เล่ม อีกกองหนึ่งมี 4 เล่ม และอีกกองหนึ่งมี 5 เล่ม

วิธีทำ เนื่องจากแต่ละกองมีหนังสือจำนวนไม่เท่ากัน จะได้ว่า

$$\text{จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่ม} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27,720 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือที่แตกต่างกัน 9 เล่ม ต้องการแบ่งให้นักเรียน 3 คน คือ มด นก และน้ำ จงหาจำนวนวิธีการแบ่งหนังสือ เมื่อคนหนึ่งได้ 2 เล่ม อีกคนหนึ่งได้ 3 เล่ม และอีกคนหนึ่งได้ 4 เล่ม

วิธีทำ จากโจทย์ ไม่ได้ระบุว่า นักเรียนคนใดได้ 2 เล่ม 3 เล่ม และ 4 เล่ม ดังนั้น



จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของจำนวนหนังสือของแต่ละคน $= 3! = 6$ วิธี

$$\text{ในแต่ละวิธี แบ่งหนังสือ 9 เล่ม ได้จำนวน} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1,260 \text{ วิธี}$$

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธีการแบ่ง} = 6 \times 1,260 = 7,560 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนวิธีการแบ่งหนังสือที่แตกต่างกัน 12 เล่ม ให้ พัด แพน และพร โดยที่

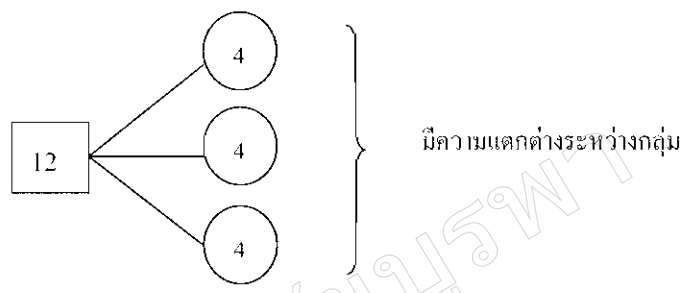
- (1) พัดได้ 3 เล่ม แพนได้ 4 เล่ม และพรได้ 5 เล่ม
- (2) ทุกคนได้หนังสือจำนวนเท่า ๆ กัน

ตอบ (1) พัดได้ 3 เล่ม แพนได้ 4 เล่ม และพรได้ 5 เล่ม

$$\text{จำนวนวิธีการแบ่ง} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27,720 \text{ วิธี}$$

(2) ทุกคนได้หนังสือจำนวนเท่า ๆ กัน

เป็นการแบ่งหนังสือ 12 เล่ม ออกเป็น 3 กลุ่ม ๆ ละ 4 เล่มเท่า ๆ กัน แต่ว่าในแต่ละกลุ่มมีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม คือ ตัวคนรับต่างกัน ดังนั้น

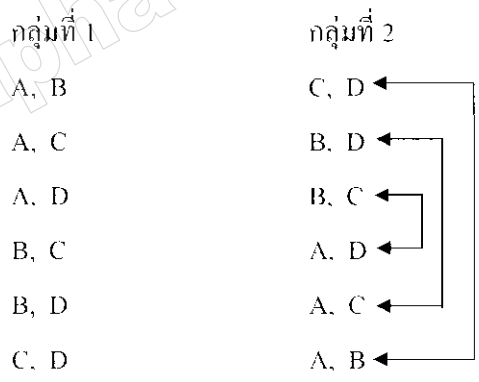


$$\text{จำนวนวิธีการแบ่ง} = \frac{12!}{4!4!4!} = 34,650 \text{ วิธี}$$

- วิธีการแบ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มละเท่า ๆ กัน

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างดังนี้

การแบ่งตัวอักษร A, B, C และ D ออกเป็นกลุ่มละ 2 ตัวอักษร จะจัดได้ดังนี้ คือ



จะเห็นว่าแทนที่จะได้ 6 วิธี แต่เนื่องจากมีวิธีซ้ำกันเป็นคู่ จึงแบ่งได้ 3 วิธี หรือเท่ากับ

$$\frac{6}{2} \text{ หรือ } \frac{4!}{(2!2!)2!} \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ถ้าแบ่งสิ่งของที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ เท่า ๆ กัน k กลุ่ม จะมีวิธีซ้ำกัน

$k!$ วิธี คือ เท่ากับจำนวนวิธีที่ k กลุ่ม สลับที่กันจึงต้องหารออกด้วย $k!$ เสมอ

นั่นคือ

ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการแบ่งสิ่งของทั้งหมดออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ จำนวน k กลุ่ม แต่ละกลุ่ม มีจำนวนสิ่งของ ดังนี้

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของจำนวน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของจำนวน n_2 สิ่ง

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีสิ่งของจำนวน n_k สิ่ง

โดยที่ $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ และ ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม จะได้ว่า

$$\text{จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่ม} = \frac{n!}{(n_1! n_2! \dots n_k!) k!} \text{ วิธี}$$

☺ ในกรณีกลุ่มที่มีจำนวนสิ่งของเท่ากัน ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม

$$\text{จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่มเท่ากับ} \frac{n!}{(n_1! n_2! \dots n_k!) m_1! m_2! \dots m_j!} \text{ วิธี}$$

เมื่อ m_1 - จำนวนกลุ่มที่มีสิ่งของเท่ากัน พวกที่ 1

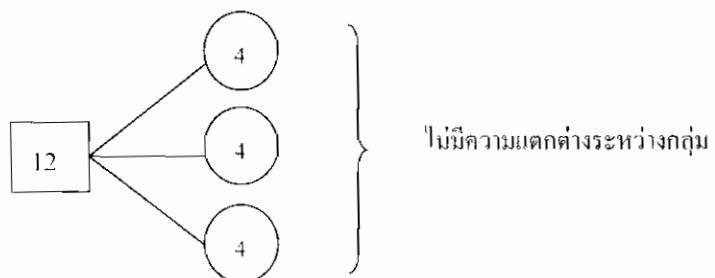
m_2 - จำนวนกลุ่มที่มีสิ่งของเท่ากัน พวกที่ 2

$\vdots$

m_j - จำนวนกลุ่มที่มีสิ่งของเท่ากัน พวกที่ j

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนวิธีการแบ่งหนังสือ 12 เล่ม ที่แตกต่างกัน ออกเป็น 3 กอง โดยที่แต่ละกอง มีหนังสือจำนวนเท่า ๆ กัน

วิธีทำ เนื่องจากหนังสือ 3 กอง มีจำนวนเท่ากัน และไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม จะได้ว่า



$$\text{จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่ม} = \frac{12!}{4!4!4!3!} = 5,775 \text{ วิธี}$$