บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ (IDEs) เกิดขึ้นในหลายสาขาทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น ปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ (physical phenomena) การศึกษาเกี่ยวกับพลังงานและการเคลื่อนที่ของของเหลว (fluid dynamics) แบบจำลองทางชีววิทยา (biological models) การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนไหวของร่างกายและแรงที่กระทำร่างกายทางเคมี (chemical kinetics) (Batiha, Noorani, & Hashim, 2008) จะเห็นว่าสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์นั้นมีความสำคัญ จึงได้รับความสนใจอย่างแพร่หลายในการศึกษาค้นคว้าพัฒนาจากนักวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์หลายท่าน ไม่ว่าจะเป็นสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น มีวิธีการประมาณสืบเนื่อง (The Successive Approximations) วิธีการแยกของอะโดเมียน (Adomain Decomposition Method) วิธีฮอมอโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (Homotopy perturbation method) วิธีการเกิดร่วมของเชบบีเชฟและเทย์เลอร์ (Chebyshev and Taylor collocation) วิธีของฮาร์วาเวเลท (Haar Wavelet) และชุดวิธีของทอและแวลซ์ (Tau and Walsh series method) ซึ่งการหาผลเฉลยที่แม่นตรงสำหรับบางปัญหานั้นเป็นเรื่องยาก ดังนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงมีบทบาทสำคัญในการหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์

ลักษณะปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เป็นสมการที่มีอนุพันธ์และปริพันธ์อยู่ในสมการเดียวกัน โดยที่ตัวไม่ทราบค่าหรือผลเฉลยเป็นฟังก์ชันและมีเงื่อนไขที่บางจุด ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์มี 2 แบบ ดังนี้

ให้ $\mathbf{Y}'(t) = (\mathbf{y}^{(n)}(t), \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \ldots, \mathbf{y}'(t), \mathbf{y}(t))$

1. สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบวอลแตร์รา

$$f(x, \mathbf{Y}'(x)) + \int_a^x K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt = 0 \tag{1.1}$$

เมื่อ $K(x, t, \mathbf{Y}'(t))$ เป็นเคอร์เนลของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ $f(x, \mathbf{Y}'(x))$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x บนช่วงปิด $[a, x]$ โดย x เป็นตัวไม่ทราบค่าและ a เป็นค่าคงที่

2. สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์ม

$$f(x, \mathbf{Y}'(x)) + \int_a^b K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt = 0 \tag{1.2}$$

เมื่อ $K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$ เป็นเคอร์เนลของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์

$f(x,\mathbf{Y}'(x))$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงปิดของจำนวนจริง $[a,b]$ ซึ่ง $a \le x \le b$, $a \le t \le b$

และ a, b เป็นค่าคงที่

เงื่อนไขค่าขอบ $\quad \mathbf{g}(\mathbf{Y}'(t_0),\mathbf{Y}'(t_1),\dots,\mathbf{Y}'(t_k)) = \mathbf{0} \qquad (1.3)$

เมื่อ $\quad x \in R, \quad \mathbf{Y}'(t) = (\mathbf{y}^{(n)}(t),\mathbf{y}^{(n-1)}(t),\dots,\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t)) \in R^{n+1}$

$\quad f \in R^{n+2} \times R$, $\mathbf{y}(t) \in R$, $K \in R^{n+3} \times R$

และ $\quad \mathbf{g} \in R^{(n+1)\times(k+1)} \times R^m$, $t_0 = a$ และ $t_k = b$

เราเรียกปัญหานี้ว่าเป็นแบบปัญหาค่าขอบ

ในสมการ (1.1) และ (1.2) ถ้า $K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$ สามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$K(x,t,\mathbf{Y}'(t)) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) k_i(t,\mathbf{U}'(t)) \qquad (1.4)$$

เมื่อ ψ_i และ k_i เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดทุกอันดับ เรากล่าวว่าปัญหานี้อยู่ในแบบที่ปริพันธ์แยกได้ เช่น

$$K(x,t,\mathbf{Y}'(t)) = e^t y^2(t) \sin x$$

จะได้ $\quad \psi_i(x) = \sin x$ และ $k_i(t,\mathbf{U}'(t)) = e^t \cdot y^2(t)$ กรณีนี้เป็นแบบปริพันธ์แยกได้ แต่ถ้ากรณีแบบปริพันธ์แยกไม่ได้ ฟังก์ชัน K จะอยู่ในรูปแบบ เช่น

$$K(x,t,\mathbf{Y}'(t)) = e^{xt} y(t)$$

ถ้าฟังก์ชัน K อยู่ในแบบที่แยกเป็นฟังก์ชันของ x ได้ สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์นั้นจะสามารถแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ ซึ่งจะใช้วิธีแก้สมการเชิงอนุพันธ์และปัญหาค่าขอบได้ แต่ถ้าปริพันธ์ไม่สามารถแปลงให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ วิธีแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้วิธีการหาค่าปริพันธ์เข้ามาช่วย

ฮิวเซียน และคณะ (2008) เสนอวิธีเชิงวิเคราะห์ฮอมอโทปี (The Homotopy Analysis Method) ในการแก้ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเชิงเส้น

$$y'(x) = p(x)y(x) + g(x) + \lambda \int_a K(x,t)y(t)dt \qquad (1.5)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(a) = \alpha$ ซึ่ง λ, α, a เป็นค่าคงที่ มอแฮมมัดและซามอรัด (2005) เสนอวิธีแบ่งช่วงประมาณค่าของทอ (The piecewise Tau method) ในการแก้ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มแบบเชิงเส้นด้วยการแบ่งหาค่าทีละช่วงๆ ละเท่าๆ กัน ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีค่าคลาดเคลื่อนจากค่าจริงน้อยมาก ซึ่งเป็นวิธีที่ดีวิธีหนึ่ง แต่ไม่สามารถหาครั้งเดียวทั้งหมดได้

รูปสมการทั่วไป

$$Dy(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = f(x), x \in [a,b] \qquad (1.6)$$

วาฮิดิ, บาโบเลียน, อาซาดิ และอาซิมซาเด (2009) ได้เสนอการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกของอะโดเมียน ในปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มแบบเชิงเส้นว่ามีประสิทธิภาพในด้านความแม่นยำของผลเฉลยมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธี CAS Wavelet และวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential transform method) รูปแบบสมการ

$$y'(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(s,t)y(t)dt \tag{1.7}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = y_0$ บาติฮาและคณะ (2008) นำเสนอวิธีแก้ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นในแบบ

$$\frac{du}{dx} = f(x) + \int_0^x \psi(t, u(t), u'(t))dt \tag{1.8}$$

โดยมีเงื่อนไข $u(0) = a$ โดยใช้วิธีทำซ้ำแปรผัน (Variation Iteration Method) เปรียบเทียบกับวิธีการแยกของอะโดเมียนทั้งสองวิธีแก้ปัญหาใช้วิธีวิเคราะห์โดยการประมาณค่าเริ่มต้น ผลสรุปคือทั้งสองวิธีมีผลเฉลยใกล้เคียงกันแต่วิธี VIM จะใกล้เคียงและกระทำได้ง่ายกว่า

สำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ในสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ อะริโกกลุ และออสโกล (2005) เสนอวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อต้องการพิสูจน์ทฤษฎีของ DTM และแสดงการหาผลลัพธ์ในสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นว่ามีการลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็ว จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าส่วนใหญ่เป็นการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น ยังมีส่วนน้อยที่จะพบงานที่แก้ปัญหาค่าขอบ

การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นหรือปัญหาค่าขอบโดยวิธีวิเคราะห์นั้นอาจเป็นไปได้เพียงเฉพาะปัญหาบางชนิด บางแบบเท่านั้น เนื่องจากปัญหาส่วนใหญ่ค่อนข้างยากไม่สามารถใช้วิธีวิเคราะห์ได้และในปัจจุบันยังไม่มีวิธีเฉพาะเจาะจงที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าว ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะเสาะหาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาแก้ปัญหาโดยใช้วิธีทางตัวเลขช่วยในการประมาณค่าผลเฉลย ซึ่งการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นมีหลายวิธี เช่น วิธีของเทย์เลอร์ (Taylor's Method) วิธีของรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Method) เป็นต้น ในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบจะใช้วิธีการแก้ระบบสมการซึ่งมีหลายวิธี เช่น วิธีของนิวตัน (Newton's Method) วิธีของบรอยเดน (Broyden's Method) และวิธีของนิวตัน-บรอยเดนซึ่งอำพล ธรรมเจริญ (2553) ได้เสนอเป็นครั้งแรกซึ่งวิธีนี้ยังคงส่วนดีวิธีของนิวตันไว้และแทนที่ส่วนที่ยุ่งยากคือสมการเชิงอนุพันธ์ที่คำนวณหาค่าอนุพันธ์ได้ยากโดยใช้วิธีของบรอยเดน ซึ่งวิธีของนิวตัน-บรอยเดนมีการลู่เข้าในอันดับเหนือเชิงเส้นและคาดว่าดีกว่าวิธีของบรอยเดน ส่วนการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบก็มีหลายวิธี เช่น วิธีผลต่างจำกัด (Finite-Difference Method) วิธีฟังก์ชันประมาณค่า (Collocation Method) และวิธียิงเป้า (Shooting Method) เป็นต้น

วิธียิงเป้าเป็นวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพและได้รับความนิยมมากในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพราะใช้ได้ดีกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยที่ไม่ยุ่งยากมากนัก และมีค่าคลาดเคลื่อนน้อย สามารถใช้ระเบียบวิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีประสิทธิภาพได้ เช่น วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่และวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ เป็นต้น

การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข แม้จะให้ค่าที่เป็นเพียงค่าประมาณ แต่เป็นเรื่องจำเป็นต้องใช้เพราะบางฟังก์ชันเราไม่สามารถหาได้โดยวิธีวิเคราะห์โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ ในส่วนที่เป็นปริพันธ์นั้นมีฟังก์ชันไม่ทราบค่าซึ่งเป็นเรื่องยากที่จะหาผลเฉลย ซึ่งการหาผลเฉลยค่าปริพันธ์จำกัดเขตมีด้วยกันหลายวิธี เช่น กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangle rule) กฎจุดกึ่งกลาง (Midpoint rule) กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) และกฎของซิมป์สัน (Simpson's rule) เป็นต้น สำหรับกฎของซิมป์สันเป็นการหาปริพันธ์โดยใช้พหุนามดีกรีสองทำให้มีความคลาดเคลื่อนน้อยจึงน่าจะเป็นวิธีที่ดี

ในวิทยานิพนธ์ผู้วิจัยจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ โดยเน้นไปที่ปัญหาที่ไม่สามารถแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ เราจะใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่กับวิธีกฎของซิมป์สันซึ่งจะต้องมีการดัดแปลงสูตรเพื่อใช้ร่วมกัน

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาและปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น ใช้กฎของซิมป์สันในการหาปริพันธ์ และใช้ระเบียบวิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ได้วิธีการแก้ปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ที่ไม่สามารถแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ที่มีประสิทธิภาพไปใช้ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นโดยที่ปริพันธ์เป็นแบบวอลแตร์ราและเฟรดโฮล์ม

2. ใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น ใช้กฎของซิมป์สันในการหาปริพันธ์และใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบ

3. สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ที่พิจารณาเป็นสมการที่มีผลเฉลย

นิยามศัพท์เฉพาะ

วิธีรุงเงคุตตา-ซิมป์สัน (Runge-Kutta method with Simpson's rule; RSM) หมายถึง วิธีการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์โดยใช้กฎของซิมป์สันในส่วนการหาปริพันธ์