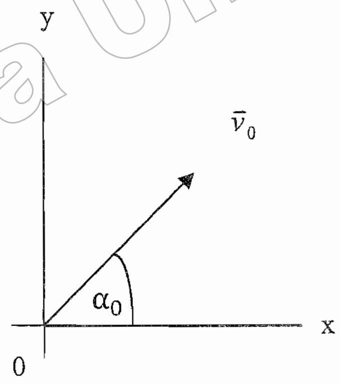
# บทที่ 2
# เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับต่อไปนี้ (1) การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (2) พลศาสตร์ของไหล และ (3) งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

## การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (Projectile Motion)

โพรเจกไทล์ คือ วัตถุใด ๆ ที่มีความเร็วต้นและเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางที่กำหนดโดยแรงโน้มถ่วงและแรงต้านอากาศเท่านั้น จะเรียกเส้นทางที่โพรเจกไทล์เคลื่อนที่ไปว่าเป็น “เส้นวิถี” โดยเริ่มด้วยแบบจำลองอนุภาคอุดมคติที่แทนโพรเจกไทล์ด้วยอนุภาคเดี่ยวที่มีความเร่งคงตัวทั้งขนาดและทิศทาง โดยจะไม่คำนึงถึงแรงเสียดทาน ความโค้งและการหมุนของโลก แบบจำลองนี้มีข้อจำกัดต่อการยิงขีปนาวุธระยะไกล ซึ่งต้องคำนึงถึงความโค้งของโลกและแรงต้านอากาศมีผลสำคัญต่อนักดิ่งพสุธา แต่สามารถเรียนรู้ได้หลายอย่างจากการวิเคราะห์แบบจำลองง่าย ๆ นี้ ซึ่งจะวิเคราะห์โดยไม่คำนึงถึงแรงต้านอากาศ

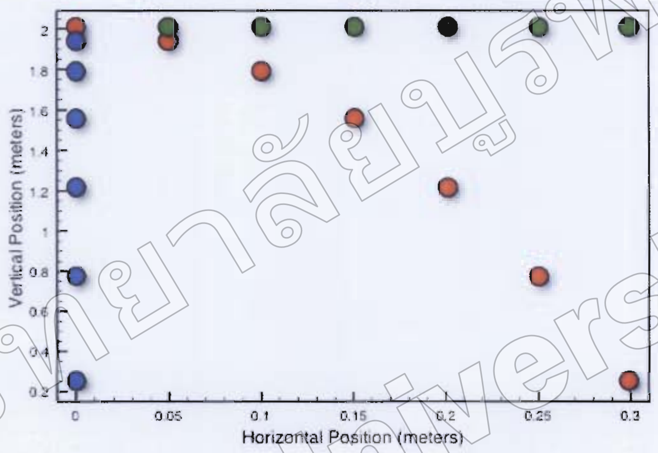



ภาพที่ 2-1 แบบจำลองอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยเวกเตอร์ความเร็วต้น $\vec{v}_0$

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์อยู่ในระนาบแนวดิ่งที่ถูกกำหนดโดยทิศของความเร็วต้นดังภาพที่ 2-1 เพราะความเร่งจากแรงโน้มถ่วงมีทิศในแนวดิ่งอย่างเดียว แรงโน้มถ่วงเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ไปด้านข้างไม่ได้ การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์จึงเป็นการเคลื่อนที่ในสองมิติจะเรียกระนาบการเคลื่อนที่ว่าระนาบ xy โดยกำหนดให้แกน x เป็นแกนนอนและแกน y เป็นแกนในแนวดิ่ง

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

หลักสำคัญของการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์อยู่ที่สามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวแกน x (แนวราบ) และแนวแกน y (แนวดิ่ง) แยกกันได้ องค์ประกอบตามแนวแกน x ของความเร่งมีค่าเป็นศูนย์และองค์ประกอบตามแนวแกน y มีค่าคงตัวเท่ากับ –g (โดยนิยาม g เป็นบวกเสมอ ในขณะที่ทิศของพิกัดที่เลือก $a_y$ มีค่าเป็นลบ) ดังนั้นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เป็นการรวมกันของการเคลื่อนที่แนวนอนด้วยความเร็วคงตัวกับการเคลื่อนที่แนวดิ่งด้วยความเร่งคงตัว ดังภาพที่ 2-2




ภาพที่ 2-2 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แนวนอนและแนวดิ่ง (http://scienceblogs.com/dotphysics/2008/09/basics-projectile-motion.php)

ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์เวกเตอร์สำหรับตำแหน่ง ความเร็วและความเร่งโดยแยกสมการออกเป็นองค์ประกอบตามแนวนอนและแนวดิ่ง องค์ประกอบของความเร่งคือ

$a_x = 0$, $a_y = -g$ (การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ไม่มีแรงต้านอากาศ)

โดยทั่วไปมักใช้ $g = 9.81\ m/s^2$ เนื่องจากความเร่งตามแนวแกน x และความเร่งตามแนวแกน y มีค่าคงตัวทั้งคู่ จึงสามารถใช้สมการการเคลื่อนที่ในแนวตรงด้วยความเร่งคงตัวได้ สมการการเคลื่อนที่ในแนวตรงด้วยความเร่งคงตัว

$$v = v_0 + at \qquad (2\text{-}1)$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$x = x_0 + \frac{(v_0 + v)}{2}t \qquad (2\text{-}2)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2\text{-}3)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (2\text{-}4)$$

สมมุติอนุภาคเริ่มต้นอยู่ที่จุด $(x_0, y_0)$ และที่เวลานี้องค์ประกอบความเร็วมีค่าตั้งต้น $v_{0x}$ และ $v_{0y}$ องค์ประกอบของความเร่งคือ $a_x = 0$ และ $a_y = -g$ เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน $x$ แทน $v$ ด้วย $v_x$ และ $v_0$ ด้วย $v_{0x}$ และ $a$ เท่ากับ 0 ลงในสมการที่ 2-1 และ 2-3 พบว่า

$$v_x = v_{0x} \qquad (2\text{-}5)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad (2\text{-}6)$$

ส่วนแกน $y$ แทน $x$ ด้วย $y$, $v$ ด้วย $v_y$, $v_0$ ด้วย $v_{0y}$ และ $a$ ด้วย $-g$ ลงในสมการที่ 2-1 และ 2-3 จะได้

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad (2\text{-}7)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2\text{-}8)$$

วิธีการในการแก้ปัญหาอย่างง่าย คือ การเลือกตำแหน่งตั้งต้นที่เวลา $t = 0$ เป็นจุดกำเนิด สำหรับในกรณีนี้จะให้ตำแหน่งตั้งต้นคือ $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ ตัวอย่างเช่น จุดนี้อาจเป็นตำแหน่งของลูกบอลขณะหลุดออกจากมือผู้โยน ดังภาพที่ 2-3 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ซึ่งเริ่มที่จุดกำเนิด $t = 0$ แสดงตำแหน่ง ความเร็ว องค์ประกอบของความเร็ว ความเร่งที่เวลาต่าง ๆ ซึ่งมีช่วงเวลาห่างเท่ากัน $a_x$ มีค่าเป็นศูนย์ดังนั้น $v_x$ มีค่าคงตัว $a_y$ มีค่าคงตัวและไม่เป็นศูนย์

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ทำให้ $v_y$ มีค่าไม่เท่ากันในช่วงเวลาที่เท่ากัน ที่จุดสูงสุดของเส้นวิถี $v_y = 0$ และแทนความเร็วต้น $\vec{v}_0$ ด้วยขนาด $v_0$ (อัตราเร็วต้น) และมุม $\alpha_0$ ที่กระทำกับแกนบวก ในภาพที่ 2-3 องค์ประกอบ $v_{0x}$ และ $v_{0y}$ ของความเร็วต้นคือ

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \text{ และ } v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$$

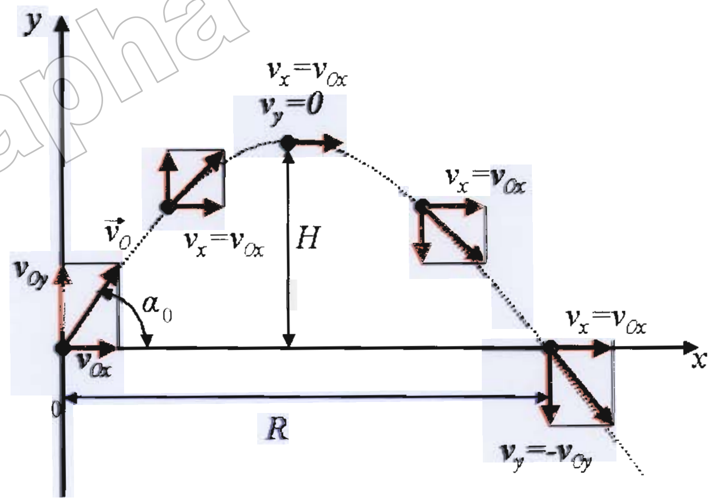
แทนความสัมพันธ์เหล่านี้ในสมการที่ 2-5 ถึง 2-8 และแทนค่า $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ จะได้ว่า

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \tag{2-9}$$

$$y = (v_0 \sin\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2-10}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \tag{2-11}$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt \tag{2-12}$$




ภาพที่ 2-3 เส้นทางการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ด้วยความเร็วต้น $\vec{v}_0$ ทำมุม $\alpha_0$ กับแนวระดับ (http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php?topic=3671.0)

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

สมการเหล่านี้ใช้สำหรับการบรรยายตำแหน่งและความเร็วของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ในภาพที่ 2-3 ที่เวลา (t) ใด ๆ นอกจากนี้ยังสามารถหาข้อมูลได้อีกมากมายจากสมการนี้ ตัวอย่างเช่น ที่เวลาใด ๆ ระยะทาง r จากจุดกำเนิด (ขนาดของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ ) สามารถหาได้จาก

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2-13}$$

อัตราเร็วของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (ขนาดของความเร็ว) ที่เวลาใด ๆ คือ

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{2-14}$$

ทิศของความเร็วในรูปของมุม $\alpha$ ที่ความเร็วทำกับแกนบวก x หาได้จาก

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{2-15}$$

โดยเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}$ มีทิศสัมผัสกับเส้นวิถีที่แต่ละจุด

สมการที่ใช้บรรยายรูปร่างของเส้นวิถีในรูปของ $x$ และ $y$ ทำได้โดยกำจัด t จากสมการที่ 2-9 และ 2-10 ซึ่งสมมุติให้ $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ จะได้ว่า $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$ และ

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2 \tag{2-16}$$

หากไม่คำนึงเกี่ยวกับรายละเอียดของสมการนี้ จุดสำคัญอยู่ที่รูปแบบทั่วไปของสมการปริมาณ $v_0$ $\tan\alpha_0$ $\cos\alpha_0$ และ $g$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นสมการนี้อยู่ในรูป

$$y = bx - cx^2 \tag{2-17}$$

โดย b และ c เป็นค่าคงตัว นี่คือสมการของพาราโบลา ในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์สำหรับแบบจำลองง่าย ๆ เส้นทางวิถีมีรูปร่างเป็นพาราโบลาเสมอ

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

**พลศาสตร์ของไหล (Fluid Dynamics)**

พลศาสตร์ของไหลเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหล ในปัจจุบันได้แบ่งการไหลของของไหลออกเป็น 2 ประเภทหลัก คือการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) และการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow)

การไหลแบบราบเรียบ เป็นการเคลื่อนที่อย่างเป็นระเบียบ โดยชั้นของการไหลที่อยู่ติดกันจะเลื่อนผ่านกันอย่างราบเรียบไม่ปะปนกัน เส้นทางการไหลของแต่ละอนุภาคจะไม่ตัดกัน แต่หากของไหลมีความเร็วมากจนถึงค่าหนึ่ง การเคลื่อนที่ของของไหลจะเปลี่ยนไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งมีลักษณะยุ่งเหยิงไม่เป็นระเบียบและมีรูปร่างที่ซับซ้อน ดังแสดงในภาพที่ 2-4

ภาพที่ 2-4 การไหลแบบราบเรียบและการไหลแบบปั่นป่วน
(http://graphics.stanford.edu/~lucasp/pictures/italy/sink/cup2.jpg)

ในเบื้องต้นการศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลจะถูกจำกัดไว้ที่การเคลื่อนที่ของของไหลอุดมคติ (Ideal Fluid) ซึ่งของไหลอุดมคติจะต้องมีสมบัติเกี่ยวกับการไหล 4 ข้อ ดังนี้

1. การไหลแบบคงตัว (Steady Flow) เป็นการไหลที่ความเร็วของของไหลที่จุด ๆ หนึ่งมีค่าคงตัวเสมอ แต่ความเร็วของของไหลในแต่ละจุดที่ต่างกันไม่จำเป็นต้องเท่ากัน การไหลแบบคงตัวไม่เกิดขึ้นในการไหลแบบปั่นป่วนเนื่องจากการไหลแบบปั่นป่วนไม่มีสภาวะคงตัว

2. การไหลแบบไม่หมุน (Irrotational Flow) เป็นการไหลที่จุดหนึ่ง ๆ ในของไหลไม่มีความเร็วเชิงมุมกล่าวได้ว่า ไม่ต้องพิจารณาพลังงานจลน์ในการหมุนของของไหล

3. การไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible Flow) เป็นการไหลที่ความหนาแน่นของของไหลที่จุดต่าง ๆ มีค่าคงตัว หากแบ่งการไหลออกเป็นของเหลวกับแก๊สจะพบว่า ข้อกำหนดของการไหลแบบอัดตัวไม่ได้จะใช้ได้ดีกับของเหลว เนื่องจากความหนาแน่นของของเหลวค่อนข้าง

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

คงตัว ยกเว้นในกรณีที่ความดันกระทำต่อของเหลวมีการเปลี่ยนแปลงมาก อาจทำให้ความหนาแน่นของของไหลเปลี่ยนแปลงได้ ส่วนแก๊สเป็นสสารที่อัดตัวได้ง่ายแต่ก็อาจใช้ข้อกำหนดนี้ได้ หากความเร็วของการไหลน้อยหรือความดันที่ทำให้เกิดการไหลไม่มาก

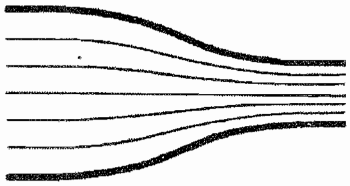
4. การไหลแบบไม่มีความหนืด (Nonviscous Flow) เป็นการไหลที่ไม่พิจารณาความหนืดภายในของไหล ความหนืดเป็นความเสียดทานภายในของไหล การไหลแบบไม่มีความหนืดจึงเป็นการไหลที่มีความเสียดทานเท่ากับศูนย์ แต่ในความเป็นจริงแล้วไม่มีของไหลใดที่มีความหนืดเท่ากับศูนย์ ถึงแม้จะเป็นการไหลแบบราบเรียบก็ยังคงมีความหนืดอยู่ดี อย่างไรก็ดีปัญหาของพลศาสตร์ของไหลจำนวนมากสามารถกำหนดให้เป็นการไหลแบบไม่มีความหนืดได้ ซึ่งจะช่วยให้วิเคราะห์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

**การไหลแบบราบเรียบและการไหลแบบปั่นป่วน**

การไหลแบบราบเรียบและการไหลแบบปั่นป่วน ออสบอร์น เรย์โนลด์ (Osborne Reynolds) ได้สาธิตให้เห็นลักษณะของการไหลทั้งสองแบบดังกล่าวในปี ค.ศ.1883 โดยการฉีดสีเข้าไปในที่ปากหลอดแก้วที่ต่อจากถังน้ำ ส่วนทางปลายหลอดแก้วมีวาล์วสำหรับปรับความเร็วของน้ำในหลอดแก้ว จากการสาธิตของออสบอร์น เรย์โนลด์ ปรากฏว่าเมื่อน้ำในหลอดแก้วมีความเร็วต่ำก็จะเห็นเส้นสีที่ฉีดเข้าไปนั้นไหลเป็นเส้นตรงตลอดความยาวของท่อ ลักษณะการไหลดังกล่าวนี้แสดงว่าอนุภาคของน้ำเคลื่อนที่ขนานกันเป็นเส้นตรง แต่เมื่อค่อย ๆ เพิ่มความเร็วโดยการเปิดวาล์วให้กว้างขึ้นแล้ว ก็จะปรากฏว่าลักษณะการไหลของน้ำในท่อเปลี่ยนแปลงไป ในตอนแรกนั้นขนาดของเส้นสีที่อยู่ในหลอดแก้วจะหนาขึ้น ต่อจากนั้นเส้นสีที่อยู่ในบริเวณปากทางเข้าของหลอดแก้วก็จะแตกตัวปนเข้าไปในน้ำวนที่เกิดขึ้นส่วนเส้นสีที่อยู่ถัดออกไปทางด้านใต้น้ำก็จะกระจายตัวออกไปอย่างสม่ำเสมอจนกระทั่งมองไม่เห็นเส้นสี จากการสังเกตนี้แสดงว่าความเร็วของอนุภาคต่าง ๆ ของของเหลวจากการไหลแบบหลังนี้เปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลาทั้งขนาดและทิศทาง

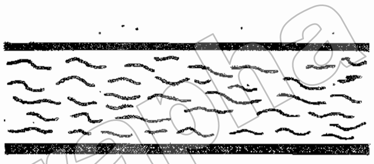
ลักษณะการไหลจากการสาธิตแบบแรกของออสบอร์น เรย์โนลด์ นั้นมีชื่อเรียกว่าการไหลแบบราบเรียบหรือการไหลแบบสตรีมไลน์ (Streamline) หรือการไหลของของไหลที่มีความหนืดสูง (Viscous Flow) ลักษณะที่สำคัญของการไหลแบบนี้คือ ของไหลในแต่ละชั้นจะเคลื่อนที่โดยการเลื่อนตัวไปชั้นที่อยู่ถัดไป และอนุภาคของของไหลในแต่ละชั้นจะเคลื่อนที่ไปในเส้นทางที่แน่นอนและสามารถสังเกตเห็นได้ หรือเคลื่อนที่เป็นเส้นสตรีมไลน์ ดังภาพที่ 2-5 การไหลแบบนี้เป็นลักษณะการไหลของของไหลที่มีความหนืดสูง หรือความหนืดของของไหลนั้นมีอิทธิพลมากกว่าคุณสมบัติอื่น ๆ

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

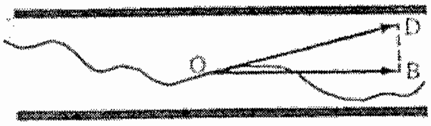


ภาพที่ 2-5 การไหลแบบราบเรียบ (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2542)

ลักษณะการไหลแบบที่สอง มีชื่อเรียกว่า การไหลแบบปั่นป่วน การไหลแบบนี้มีลักษณะดังภาพที่ 2-6 (ก) เป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่เป็นระเบียบของกลุ่มอนุภาคของของไหลจำนวนมากในช่วงเวลาเพียงสั้น ๆ ส่วนภาพที่ 2-6 (ข) แสดงให้เห็นเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ไม่เป็นระเบียบและมีเส้นทางการไหลที่ไม่แน่นอนของอนุภาคเดียวในช่วงเวลาการเคลื่อนที่ที่ยาวนานขึ้น ลักษณะที่สำคัญของการไหลแบบนี้คือความไม่เป็นระเบียบที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคต่าง ๆ นั่นเอง ถ้าหากการไหลแบบปั่นป่วนนี้มีคลื่นอยู่ด้วยแล้วคลื่นนั้นก็จะมีความถี่ไม่คงที่ และถ้ามีการไหลวน (Eddy) เกิดขึ้นแล้วก็จะไม่เห็นลักษณะของการไหลวนนั้น



(ก)




(ข)

ภาพที่ 2-6 การไหลแบบปั่นป่วน (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2542)

การไหลวนขนาดใหญ่ การไหลหมุน (Swirl) และการเคลื่อนที่ที่ผิดปกติของก้อนของไหลขนาดใหญ่ที่มีต้นตอที่ทำให้เกิดการไหลดังกล่าวนั้น ไม่ใช่สาเหตุที่จะทำให้เกิดการไหลแบบปั่นป่วนเลย อาจจะเรียกการไหลแบบนี้ว่าเป็นการไหลที่เกิดจากการถูกรบกวน (Disturbed Flow) ก็ได้ ในทางตรงกันข้ามการไหลที่สงบเรียบและไม่มีต้นตอที่ทำให้เกิดการไหลแบบนั้นก็อาจจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วนได้ ความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไป (Fluctuation) นี้จะมีขนาดค่อนข้างเล็กและจะตรวจพบได้ก็ต่อเมื่อมีเครื่องมือพิเศษเท่านั้น

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ตามตัวอย่างในภาพที่ 2-6 (ข) นั้นอนุภาคที่จุด O อาจจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว OD แต่ในกรณีที่มีการไหลเป็นแบบปั่นป่วนนั้น OD จะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางอยู่ตลอดเวลา ความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปนี้จะเกิดขึ้นพร้อม ๆ กับการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา การเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหลที่มีการไหลแบบปั่นป่วน จะมีสภาพที่ผิดปกติและมีเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ไม่แน่นอน เส้นทางที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคสองอนุภาคของของไหลที่มีการไหลแบบปั่นป่วนนั้นไม่มีโอกาสที่จะเหมือนกันเลยดังนั้นจึงไม่มีวิธีการตายตัวทางคณิตศาสตร์ที่จะใช้กับการไหลแบบปั่นป่วนนี้ และจะต้องใช้วิธีการประเมินผลทางสถิติแทน

**เลขเรย์โนลด์**

วิศวกรชาวอังกฤษชื่อออสบอร์น (Osborne Reynolds) ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงการไหลภายในท่อจากการไหลแบบราบเรียบไปสู่การไหลแบบปั่นป่วน จากผลการทดลอง เขาค้นพบตัวแปรไร้มิติตัวหนึ่ง ซึ่งก็คืออัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อยต่อแรงเนื่องจากแรงหนืดของของไหล อัตราส่วนนี้เรียกว่า เลขเรย์โนลด์ (Reynolds Number; Re) ซึ่งมีผลต่อลักษณะการไหล กล่าวคือ เมื่อของไหลมีความเร็วต่ำจะได้เลขเรย์โนลด์ต่ำ ถ้าของไหลมีความเร็วสูงขึ้นก็จะได้เลขเรย์โนลด์สูงขึ้นเช่นกัน

สำหรับของไหลที่มีความหนืด $\mu$ และความหนาแน่น $\rho$ ไหลผ่านแผ่นระนาบที่มีความยาว $L$ ด้วยความเร็วสม่ำเสมอ $v$ แรงเนื่องจากความหนืด $F_v$ ที่กระทำต่อของไหล และแรงเฉื่อยของของไหล $F_L$ คำนวณได้จากสมการ

$$F_v = \text{ความเค้นเฉือนเนื่องจากผลของความหนืด} \times \text{พื้นที่}$$

$$F_v = \left(\frac{\mu v}{L}\right)(L^2) = \mu v L \qquad (2\text{-}18)$$

$$F_L = \text{ความดันพลวัต (Dynamic Pressure)} \times \text{พื้นที่}$$

$$F_v = (\rho v^2)(L^2) = \rho v^2 L^2 \qquad (2\text{-}19)$$

ดังนั้น

$$\mathrm{Re} = \frac{F_L}{F_v} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L}$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \tag{2-20}$$

ในที่นี้ $L$ คือความยาวบ่งลักษณะเฉพาะ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของการไหล ถ้าเป็นการไหลท่วมแผ่นระนาบ $L$ คือ ความยาวของแผ่นระนาบที่วัดในทิศการไหล ถ้าเป็นการไหลภายในท่อ $L$ คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ ถ้าเป็นการไหลขวางท่วมแท่งทรงกระบอก $L$ คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของแท่งทรงกระบอก

นอกจากนี้ ถ้าการไหลมีเลขเรย์โนลด์ที่ต่ำมาก ๆ (Re << 1) จะพบว่า แรงเนื่องจากความหนืดจะมีผลต่อการไหลมาก ในขณะที่แรงเฉื่อยมีผลต่อการไหลน้อยมาก ซึ่งกล่าวได้ว่า การไหลในกรณีของ Re << 1 นี้ ความหนืดของของไหลเป็นตัวแปรที่สำคัญมากกว่าความหนาแน่นของของไหล ซึ่งเรียกการไหลแบบนี้ว่า การไหลแบบคืบคลาน (Creeping Flow) ในทางตรงกันข้าม ถ้าการไหลมีเลขเรย์โนลด์ที่สูง ความหนืดจะมีผลมากเมื่อเทียบกับผลของความเฉื่อย ดังนั้นจึงพิจารณาเฉพาะแรงเฉื่อยที่มีผลต่อการไหล และสมบัติให้เป็นของไหลที่ไม่มีความหนืด

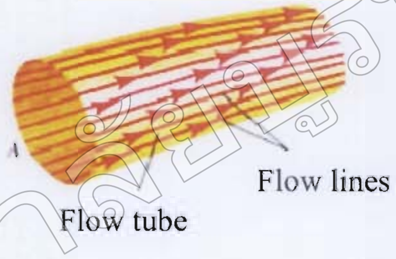
**เลขเรย์โนลด์กำหนดแบบการไหล**

โดยทั่วไปแล้วของไหลที่ไหลอยู่ได้ต่อเนื่องนั้น เนื่องจากมีแรงเฉื่อย (Inertia Force) กระทำในทิศการไหล และขณะเดียวกันจะมีแรงเนื่องจากความหนืดกระทำในทิศตรงข้ามกับทิศการไหล ของไหลดังกล่าวจะไหลเร็วหรือช้าขึ้นอยู่กับอัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อยต่อแรงเนื่องจากความหนืด ถ้าอัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อยต่อแรงเนื่องจากความหนืดมีค่าสูงของไหลจะไหลเร็วมาก ถ้าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าต่ำของไหลจะไหลช้าลง อัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อยต่อแรงเนื่องจากความหนืด ก็คือ เลขเรย์โนลด์ เลขเรย์โนลด์นี้ใช้เป็นเลขกำหนดแบบการไหลสำหรับการไหลภายในท่อ สำหรับการไหลภายในท่อกลมแนวตรง การไหลจะเป็นการไหลแบบราบเรียบก็ต่อเมื่อ Re < 2100 และการไหลแบบปั่นป่วนจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ Re > 4000 สำหรับในกรณีที่มีค่า 2100 < Re < 4000 เรียกบริเวณนี้ว่า บริเวณการเปลี่ยนแปลง (Transition Region) การไหลอาจเป็นได้ทั้งแบบราบเรียบและแบบปั่นป่วน สำหรับการใช้งานนั้นจะกำหนดให้บริเวณการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นเมื่อ Re = 2100 สำหรับการไหลภายในท่อ

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

**สายกระแสและหลอดการไหล (Flow Line and Flow Tube)**

เส้นทางการเดินของแต่ละอนุภาคของของไหลที่กำลังเคลื่อนที่เรียกว่า สายกระแส สมมุติมีสายกระแสจำนวนหนึ่งลากผ่านบริเวณหนึ่งในของไหล บริเวณที่ถูกล้อมรอบโดยสายกระแสเหล่านี้เรียกว่า หลอดการไหล ดังเช่นที่แสดงในภาพที่ 2-7 จากนิยามของสายกระแส ถ้าการไหลเป็นแบบราบเรียบจะไม่มีอนุภาคของไหลใดสามารถวิ่งผ่านผนังของหลอดการไหลได้ และของไหลที่อยู่ในหลอดการไหลคนละอันจะไม่สามารถรวมกันได้




ภาพที่ 2-7 สายกระแสและหลอดการไหล

(http://www.il.mahidol.ac.th/e-media/ap-physics2/lesson8_1.html)

**สมการของความต่อเนื่อง (The Equation of Continuity)**

มวลของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงในขณะที่มันเคลื่อนที่นี่เป็นที่มาของสมการของความต่อเนื่อง พิจารณาส่วนหนึ่งของหลอดการไหลที่อยู่ระหว่างภาคตัดขวาง 2 บริเวณ ดังแสดงในภาพที่ 2-8 ของไหลกำลังเคลื่อนที่จากด้านล่างไปยังด้านบนของหลอดการไหลภาคตัดขวางด้านล่างมีพื้นที่ $A_1$ และด้านบนมีพื้นที่ $A_2$ อัตราเร็วของของไหลที่บริเวณทั้งสองนี้มีค่าเป็น $v_1$ และ $v_2$ ตามลำดับ ไม่มีของไหลผ่านเข้าออกระหว่างผนังของหลอดการไหลนี้เนื่องจากที่ทุกจุดบนผนังของหลอดการไหล เวกเตอร์ความเร็วของของไหลจะขนานกับผนังในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ $dt$ ของไหลจากพื้นที่หน้าตัด $A_1$ จะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $v_1dt$ ดังนั้น จะได้ของไหลรูปท่อทรงกระบอกที่มีความสูง $v_1dt$ พื้นที่หน้าตัด $A_1$ และมีปริมาตรเป็น $dV_1 = A_1v_1dt$ ซึ่งกำลังไหลเข้าไปในหลอดการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด $A_1$ ในช่วงเวลาสั้น ๆ เดียวกันนี้ ของไหลรูปท่อทรงกระบอกที่มีปริมาตรเป็น $dV_2 = A_2v_2dt$ ก็กำลังไหลออกจากหลอดการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด $A_2$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ภาพที่ 2-8 ส่วนหนึ่งของหลอดการไหลของของไหลที่กำลังไหล

(http://www.il.mahidol.ac.th/e-media/ap-physics2/lesson8_2.html)

เมื่อพิจารณากรณีของของไหลที่บีบอัดไม่ได้ นั่นคือความหนาแน่น $\rho$ มีค่าคงที่ที่ทุกจุดมวล $dm_1$ ของของไหลรูปท่อทรงกระบอกที่กำลังไหลเข้าไปในหลอดการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด $A_1$ ในช่วงเวลา $dt$ คือ $dm_1 = \rho A_1 v_1 dt$ เช่นเดียวกันสำหรับมวล $dm_2$ ของของไหลรูปท่อทรงกระบอกที่กำลังไหลออกจากหลอดการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด $A_2$ จะได้ $dm_2 = \rho A_2 v_2 dt$ ในการไหลแบบราบเรียบ มวลรวมภายในหลอดการไหลต้องมีค่าคงที่ นั่นคือ $dm_1 = dm_2$ จะได้ว่า

$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt \quad \text{หรือ} \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (2\text{-}21)$$

สมการที่ 2-21 นี้เป็น สมการของความต่อเนื่อง (Continuity Equation) สำหรับของไหล ที่บีบอัดไม่ได้ ผลคูณ $Av$ คือ อัตราการไหลเชิงปริมาตร (Volume Flow Rate) $\frac{dV}{dt}$ หรือเรียกว่า อัตราการไหล ซึ่งคือปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นที่ตัดขวางหนึ่งของหลอดการไหล (Flow Tube) ในหนึ่งหน่วยเวลา

$$\frac{dV}{dt} = Av \qquad (2\text{-}22)$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

สามารถวัดอัตราการไหลของของไหลโดยใช้อัตราการไหลเชิงมวล (Mass Flow Rate) ซึ่งหมายถึงมวลของของไหลที่ไหลผ่านพื้นที่ตัดขวางหนึ่งของหลอดการไหลในหนึ่งหน่วยเวลา สามารถคำนวณได้โดยคูณ $\rho$ ด้วยความหนาแน่นของของไหล $\rho$ ดังนี้

$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho A v \qquad (2\text{-}23)$$

สมการของความต่อเนื่อง $A_1 v_1 = A_2 v_2$ แสดงให้เห็นว่าอัตราการไหลมีค่าคงที่ที่ทุกจุดในหลอดการไหล เมื่อพื้นที่หน้าตัดของหลอดการไหลมีขนาดลดลง ของไหลจะไหลได้เร็วขึ้น (อัตราเร็วของของไหลมากขึ้น) และในทางกลับกัน เมื่อพื้นที่หน้าตัดของหลอดการไหล มีขนาดเพิ่มขึ้น ของไหลจะไหลได้ช้าลง (อัตราเร็วของของไหลน้อยลง) ตัวอย่างที่มีให้เห็นในธรรมชาติ คืออัตราเร็วของน้ำในแม่น้ำ ในบริเวณที่ลึกพื้นที่หน้าตัดของแม่น้ำมีขนาดใหญ่ จึงทำให้กระแสน้ำไหลได้ช้ากว่าในบริเวณที่ตื้นกว่าซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดเล็กกว่า

สำหรับของไหลที่บีบอัดได้ ความหนาแน่นของของไหลไม่เท่ากันที่ตำแหน่งต่าง ๆ กัน ถ้า $\rho_1$ และ $\rho_2$ คือความหนาแน่นของของไหลที่บริเวณที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ต้องใช้ความสัมพันธ์

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad (2\text{-}24)$$

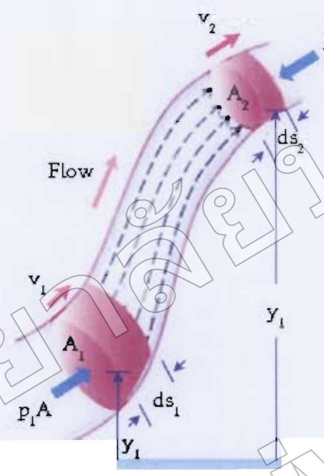
**สมการของแบร์นูลลี (Bernoulli's Equation)**

จากสมการของความต่อเนื่อง อัตราเร็วของการไหล สามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามเส้นทางการไหล ความดันก็สามารถเปลี่ยนแปลงได้เช่นกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสูง (หรือความลึก) เช่นเดียวกันกับในของไหลสถิต และความดันก็ขึ้นอยู่กับอัตราเร็วของการไหลด้วย จึงต้องหาความสัมพันธ์ระหว่างความดัน อัตราเร็วของการไหลและความสูง สำหรับของไหลอุดมคติที่บีบอัดไม่ได้ (Ideal and Incompressible Fluid) และการไหลเป็นแบบราบเรียบ

จากสมการของความต่อเนื่อง เมื่อมีของไหลที่บีบอัดไม่ได้ไหลอยู่ภายในท่อ ซึ่งมีขนาดของพื้นที่หน้าตัดแต่ละบริเวณเปลี่ยนแปลงไป อัตราเร็วของการไหล ก็จะเปลี่ยนแปลงไป นั่นคือแต่ละส่วนของของไหลจะต้องมีความเร่ง หรือความหน่วง แล้วแต่กรณี ของไหลที่อยู่รอบ ๆ ออกแรงกระทำให้เกิดความเร่งนี้ นั่นหมายความว่า ความดันจะต้องมีค่าต่างกันที่ตำแหน่งต่าง ๆ กัน เพราะถ้าความดันเท่ากันหมดทุกที่ แรงสุทธิที่กระทำกับทุก ๆ ส่วนของของไหลจะเป็นศูนย์ ทำให้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ไม่เกิดความเร่ง หรืออัตราเร็วจะคงที่ที่ทุกจุดซึ่งขัดแย้งกับข้างต้น เมื่อของไหลส่วนหนึ่งมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้น คือ ไหลเร็วขึ้น มันจะต้องเคลื่อนที่มาจากบริเวณที่มีความดันมากกว่า มายังบริเวณที่มีความดันน้อยกว่า เพื่อที่จะทำให้มีแรงสุทธิขนาดหนึ่งในการเร่ง สรุปได้ว่าเมื่อพื้นที่หน้าตัดของหลอดการไหลมีการเปลี่ยนขนาด ความดันจะต้องมีค่าเปลี่ยนไปด้วยถึงแม้ว่าทั้งสองบริเวณจะอยู่ที่ระดับสูงเดียวกัน ถ้ามันอยู่คนระดับก็จะยิ่งช่วยเพิ่มความแตกต่างระหว่างความดันที่สองบริเวณ




ภาพที่ 2-9 หลอดการไหลของของไหลที่กำลังไหล

(http://www.il.mahidol.ac.th/e-media/ap-physics2/lesson8_3.html)

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

เมื่อพิจารณาที่มาของสมการของแบร์นูลลี โดยใช้ทฤษฎีของงานและพลังงาน ในการพิจารณาของไหลที่กำลังไหลในหลอดการไหล ภาพที่ 2-9 ของไหลกำลังไหลจากบริเวณที่ 1 ไปยังบริเวณที่ 2 ที่อยู่สูงกว่า อัตราเร็วของการไหลที่บริเวณที่ 1 และ 2 คือ $v_1$ และ $v_2$ ตามลำดับ ในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ $dt$ ของไหลที่บริเวณที่ 1 เคลื่อนที่ขึ้นได้ระยะทาง $ds_1 = v_1 dt$ และของไหลที่บริเวณที่ 2 เคลื่อนที่ขึ้นได้ระยะทาง $ds_2 = v_2 dt$ ถ้าพื้นที่หน้าตัดที่บริเวณที่ 1 และ 2 คือ $A_1$ และ $A_2$ ตามลำดับ จากสมการของความต่อเนื่อง จะได้ว่าสำหรับของไหลที่บีบอัดไม่ได้ (ความหนาแน่นคงที่) ปริมาตรของของไหล $dV$ ที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดใด ๆ ในช่วงเวลา $dt$ (อัตราการไหล) จะมีค่าคงที่ นั่นคือ

$$\frac{dV}{dt} = A_1 v_1 = A_2 v_2 \text{ หรือ } dV = A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$$

จะได้ $$A_1 ds_1 = A_2 ds_2 \tag{2-25}$$

พิจารณางานที่ทำบนส่วนของของไหลนี้ในช่วงระยะเวลา $dt$ ถ้าความดันที่บริเวณที่ 1 และ 2 คือ $P_1$ และ $P_2$ ตามลำดับ แรงที่ทำบนพื้นที่หน้าตัดของบริเวณที่ 1 คือ $P_1A_1$ และที่บริเวณที่ 2 คือ $P_2A_2$ ดังนั้นงานสุทธิ $dW$ ที่ทำบนส่วนของของไหล เมื่อของไหลเคลื่อนที่คือ

$$dW = P_1A_1ds_1 - P_2A_2ds_2 = (P_1 - P_2)dV \tag{2-26}$$

เทอมที่สองของสมการที่ 2-26 มีเครื่องหมายเป็นลบเนื่องจากแรงที่ทำที่บริเวณที่ 2 มีทิศตรงข้ามกับทิศของการเคลื่อนที่ของของไหล (ของไหลพยายามเคลื่อนที่ต้านความดันเนื่องจากของไหลด้านขวาที่บริเวณที่ 2)

งานที่ทำ $dW$ จะเท่ากับพลังงานกลสุทธิที่เปลี่ยนไป โดยที่พลังงานกลสุทธิ คือ ผลรวมของพลังงานจลน์กับพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง พิจารณาที่บริเวณที่ 1 ปริมาตรของของไหลที่เคลื่อนที่ภายในช่วงเวลา $dt$ คือ $A_1ds_1$ นั่นหมายถึงมวลของของไหลปริมาตรนี้คือ $\rho A_1ds_1$ ดังนั้นจะมีพลังงานจลน์เท่ากับ $\frac{1}{2}(\rho A_1ds_1)v_1^2$ ในทำนองเดียวกัน ที่บริเวณที่ 2 ของไหลในส่วนนั้นมีพลังงานจลน์เท่ากับ $\frac{1}{2}(\rho A_2ds_2)v_2^2$ ดังนั้นพลังงานจลน์สุทธิที่เปลี่ยนไปมีค่าเป็น

$$dK = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2) \tag{2-27}$$

เมื่อพิจารณาพลังงานศักย์ ที่บริเวณที่ 1 พลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงมีค่าเป็น $dm \cdot gy_1 = \rho dV \cdot gy_1$ และที่บริเวณที่สองมีค่าเป็น $dm \cdot gy_2 = \rho dV \cdot gy_2$ ดังนั้นพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่เปลี่ยนไปคือ

$$dU = \rho dVg(y_2 - y_1) \tag{2-28}$$

เนื่องจากงานที่ทำ $dW$ จะเท่ากับพลังงานกลสุทธิที่เปลี่ยนไป นั่นคือ $dW = dK + dU$ จะได้ว่า

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$(P_1 - P_2)dV = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho dVg(y_2 - y_1) \qquad (2\text{-}29)$$

หรือ $$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \qquad (2\text{-}30)$$

สมการที่ 2-30 นี้คือ สมการของแบร์นูลลี กล่าวว่า งานที่ทำบนปริมาตรหนึ่งหน่วยของของไหลโดยของไหลรอบ ๆ จะเท่ากับผลรวมของพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนไปกับพลังงานศักย์ที่เปลี่ยนไปต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ที่เกิดขึ้นระหว่างการไหล ซึ่งสามารถเปลี่ยนสมการของแบร์นูลลีในรูปของความดันได้ โดยเทอมแรกของสมการด้านขวาคือผลต่างความดันที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของอัตราเร็วของการไหล เทอมที่สองคือ ผลต่างความดันที่เกิดจากน้ำหนักของของไหล กับผลต่างความสูงที่สองบริเวณ สามารถเขียนสมการที่ 2-30 ใหม่ได้ดังนี้

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (2\text{-}31)$$

ตัวเลข 1 และ 2 แทนตำแหน่งสองตำแหน่งใด ๆ ในหลอดการไหล ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant} \qquad (2\text{-}32)$$

สมการของแบร์นูลลีมีประโยชน์มากในการแก้ปัญหาการไหลในลักษณะต่าง ๆ เพื่อที่จะคำนวณหาความดันหรืออัตราเร็วของการไหลที่บริเวณต่าง ๆ ในลำของของไหลหนึ่ง ๆ แต่ต้องระลึกไว้ว่าสมการของแบร์นูลลีใช้ได้เฉพาะกับของไหลอุดมคติที่บีบอัดไม่ได้และไหลแบบราบเรียบ และไม่คำนึงถึงความหนืดของของไหล

**ความหนืด (Viscosity)**

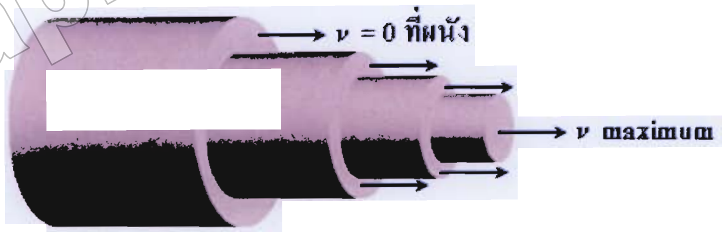
ความหนืด คือ ความเสียดทานภายในของของไหล แรงหนืด (Viscous Force) เป็นแรงต้านการเคลื่อนที่ของของไหลส่วนหนึ่งกับอีกส่วนหนึ่งที่อยู่ติดกัน ความหนืดมีความสำคัญต่อการไหลของของไหลในท่อ การไหลของเลือดในเส้นเลือด การหล่อลื่นของเครื่องยนต์บางส่วน และเหตุการณ์อื่น ๆ อีกมากมาย

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ของไหลที่มีความหนืด (Viscous Fluid) จะเกาะติดกับของแข็งที่สัมผัสอยู่มีชั้นบาง ๆ (Thin Boundary Layer) ของของไหลที่ติดกับพื้นผิวของแข็ง ซึ่งของไหลในชั้นนี้ แทบจะไม่มีการเคลื่อนที่ นี่เป็นสาเหตุว่าทำไมฝุ่นถึงยังเกาะติดอยู่กับใบพัดได้ทั้ง ๆ ที่ใบพัดนั้นกำลังหมุนอยู่ หรือทำไมไม่สามารถขจัดฝุ่นออกจากรถแม้จะราดน้ำใส่

ภาพที่ 2-10 การไหลของของไหลอุดมคติ (ไม่มีความหนืด)
(http://www.il.mahidol.ac.th/e-media/ap-physics2/lesson8_4.html)

ของไหลอุดมคติเป็นของไหลที่ไม่มีความหนืดระหว่างชั้นของของไหล ทำให้ทุก ๆ ชั้นของของไหลอุดมคติเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากันบนพื้นที่หน้าตัดเดียวกันดังภาพที่ 2-10 แม้กระทั่งชั้นของของไหลที่อยู่ติดกับผนัง ของไหลอุดมคติเป็นของไหลที่ไม่มีความหนืดระหว่างชั้น




ภาพที่ 2-11 การไหลของของไหลที่มีความหนืด
(http://www.il.mahidol.ac.th/e-media/ap-physics2/lesson8_4.html)

เมื่อของไหลมีความหนืด ชั้นของของไหลแต่ละชั้นจะมีความเร็วต่างกัน ดังแสดงในภาพที่ 2-11 ของไหลที่ตรงกลางท่อจะมีความเร็วมากที่สุด ในทางตรงกันข้าม ของไหลที่อยู่ในชั้นติดกับผนังท่อจะ ไม่เคลื่อนที่เลย เนื่องจากถูกยึดไว้ด้วยแรงระหว่างโมเลกุล แรงเหล่านี้มีขนาดใหญ่

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

มากจนกระทั่งถ้าผนังแข็งเคลื่อนที่ ของไหลที่อยู่ในชั้นที่ติดกับผนังก็จะเคลื่อนที่ตามไปด้วย และถือว่าของไหลหยุดนิ่งเทียบกับผนัง

การศึกษาการไหลของของไหลที่มีความหนืดอย่างง่าย คือ การเคลื่อนที่ของของไหลระหว่างแผ่นระนาบสองแผ่นที่วางขนานกัน พิจารณาภาพที่ 2-12 ให้แผ่นระนาบด้านล่างอยู่นิ่งกับที่ แล้วออกแรง $F$ ดึงให้แผ่นระนาบด้านบนเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็วคงที่ $\vec{v}$ ของไหลส่วนที่ติดอยู่กับแผ่นระนาบใดจะมีความเร็วเท่ากับแผ่นระนาบนั้น อัตราเร็วของของไหลแต่ละชั้นจะต่างกัน และค่อย ๆ เปลี่ยนจาก $v$ ซึ่งคืออัตราเร็วของชั้นของไหลที่อยู่บนสุดมายังศูนย์ ซึ่งคืออัตราเร็วของชั้นของไหลที่อยู่ล่างสุด การไหลแบบนี้เรียกว่า การไหลแบบราบเรียบ เนื่องจากชั้นแต่ละชั้นเรียกว่า Laminar

ภาพที่ 2-12 ของไหลที่มีความหนืดอยู่ระหว่างแผ่นระนาบสองแผ่น
(http://www.il.mahidol.ac.th/e-media/ap-physics2/lesson8_4.html)

ส่วนของของไหลส่วนหนึ่งที่มีรูปร่างตาม abcd ณ เวลาหนึ่งดังแสดงในภาพที่ 2-12 ที่เวลาถัดมาจะเปลี่ยนรูปร่างไปเป็นแบบ abc'd' และจะมีรูปร่างบิดเบี้ยวมากขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปตราบใดที่แผ่นระนาบด้านบนยังเคลื่อนที่อยู่ นั่นคือของไหลอยู่ในสภาวะที่มีความเครียด (Shear Strain) เพิ่มขึ้น (ความเครียดคือเศษส่วนการเปลี่ยนรูปที่เกิดจากความเค้น) ถ้า $A$ คือพื้นที่ของแผ่นระนาบแต่ละแผ่น อัตราส่วนของแรงที่ใช้ดึงแผ่นระนาบต่อพื้นที่ของผิวที่แรงกระทำ $F / A$ คือความเค้น (Shear Stress) ที่ของไหลได้รับ (ความเค้นเป็นปริมาณที่วัดกำลังของสิ่งที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนรูป)

ความเครียดเป็นอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงขนาดต่อขนาดหรือความยาวเดิมในของแข็ง ความเครียดจะแปรผันตรงกับความเค้น แต่ในของไหลความเครียดจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต ตราบใดที่มีความเค้นเกิดขึ้นในของไหล หรือมีสิ่งที่ทำให้ของไหลเกิดการเปลี่ยนรูปสำหรับของไหลนั้น หากพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเครียด (Rate of Change

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

of Strain หรืออาจเรียกว่า Strain Rate) ซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาด dd' เทียบกับเวลา (ในที่นี้คืออัตราเร็วของการเคลื่อนที่ของแผ่นระนาบบน) หารด้วย $l$ นั่นคือ

$$\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด} = \text{Strain Rate} = \frac{v}{l} \quad (2\text{-}33)$$

และใช้อักษรกรีก $\eta$ (อ่านว่า อีต้า) แทนความหนืดของของไหล นิยามของความหนืดคือ อัตราส่วนของความเค้นต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด ดังนี้

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} \quad (2\text{-}34)$$

จัดสมการที่ 2-34 ใหม่ จะได้ว่าแรงที่ต้องใช้ในการทำให้ของไหลไหลตามกรณีดังภาพที่ 2-12 แปรผันตรงกับอัตราเร็ว นั่นคือ

$$F = \eta A \frac{v}{l} \quad (2\text{-}35)$$

ของไหลที่ไหลได้สะดวก เช่นน้ำหรือแก๊สโซลีน จะมีความหนืดน้อยกว่าของไหลที่ไหลได้ยากกว่า เช่น น้ำผึ้งหรือน้ำมันเครื่อง ความหนืดของของไหลทุกชนิดมีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ ความหนืดของแก๊สจะเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นแต่ความหนืดของของเหลวจะน้อยลงเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ยกตัวอย่างเช่น เมื่อกวนน้ำผึ้งในหม้อจะสามารถกวนได้ง่ายกว่าเมื่อนำน้ำผึ้งมาตั้งไฟ

พิจารณาจากนิยามของความหนืดจะได้หน่วยของความหนืดในระบบ SI เป็นนิวตันวินาทีต่อตารางเมตร ($N \cdot s/m^2$) หรือปาสคาลวินาที ($Pa \cdot s$) ในระบบ cgs จะใช้หน่วยดายน์วินาทีต่อตารางเซนติเมตร ($dyn \cdot s/cm^2$) ซึ่งมีชื่อเรียกว่า "ปัว" (Poise) โดยเรียกตามชื่อนักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศส Jean Louis Marie Poiseuille โดยที่ 1 poise = 0.1 $Pa \cdot s$ อาจพบหน่วยในระดับเซนติปัว (Centipoises) และไมโครปัว (Micropoise) ความหนืดของน้ำที่ 0°C มีค่า 1.79 เซนติปัว ที่ 100°C มีค่า 0.28 เซนติปัว ความหนืดของน้ำมันหล่อลื่นมีค่าระหว่าง1 ถึง 10 ปัว และความหนืดของอากาศที่ 20°C มีค่า 181 ไมโครปัว

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

## งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

David, Aaron, and Michael (2005) ได้ทำการทดลองเพื่อศึกษาสมการของแบร์นูลลี โดยนำขวดน้ำพลาสติกมาตัดบริเวณก้นขวดออกและคว่ำปากขวดลงในแนวดิ่ง และทำการทดลองโดยเติมน้ำใส่ในขวดพลาสติกจนเต็มแล้วเปิดปากขวดให้น้ำไหลออก บันทึกเวลาที่น้ำไหลออกจนหมด ซึ่งด้านบนของชุดทดลองจะมีเซนเซอร์จับการเคลื่อนไหวเพื่อบันทึกความเร็วของผิวน้ำด้านบนด้วย จากการทดลองพบว่า เมื่อเพิ่มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของปากขวดจะทำให้เวลาที่น้ำไหลออกจนหมดลดลง นอกจากนี้ยังพบว่าเวลาในการไหลของน้ำยังขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำในขวดพลาสติก เส้นผ่านศูนย์กลางของขวดน้ำพลาสติกอีกด้วย

John and Chinthaka (2011) ได้สร้างสรรค์การทดลองที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ โดยใช้เส้นทางการเดินของน้ำที่พุ่งออกจากสายยาง โดยการนำปลายของสายยางฉีดน้ำติดบนขาตั้งที่สูงจากพื้น 1.3 เมตร ติดตั้งอุปกรณ์วัดมุมไว้บริเวณปลายของสายยาง เมื่อเปิดให้น้ำพุ่งออกจากสายยาง จึงวัดระยะที่น้ำตกถึงพื้น (วัดบริเวณกึ่งกลางของน้ำที่ตกลงบนพื้น) ก็จะสามารถคำนวณความเร็วต้นของน้ำได้ซึ่งผลที่ได้สอดคล้องกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีนอกจากนี้ยังสามารถคำนวณหาความเร็วต้นของน้ำโดยศึกษาจากอัตราการไหลของน้ำ ซึ่งผลที่ได้ก็สอดคล้องกับค่าทางทฤษฎีเช่นกัน

Yajun (2012) ได้นำเสนอการทดลองเกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ โดยใช้กล้องดิจิตอลและคอมพิวเตอร์บันทึกภาพเส้นทางการเดินของน้ำที่เคลื่อนที่แบบ โพรเจกไทล์ และคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำโดยใช้ตำแหน่งของพิกเซลของภาพ ซึ่งจะทำให้ทราบการกระจัดของสายน้ำทั้งแกน x และแกน y จากนั้นทำการคำนวณ โดยใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้ค่าออกมาเท่ากับ 9.3 $m/s^2$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University