บทที่ 4
ผลการวิจัย

จากการหาผลเฉลยสมการซิเบอร์-ชาแบท โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ได้ผลเฉลย ดังนี้

สมการซิเบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation)

พิจารณารูปทั่วไปของสมการซิเบอร์-ชาแบท ดังนี้

$$u_{xt} + pe^{u} + qe^{-u} + re^{-2u} = 0 \tag{4.1}$$

เมื่อ p, q และ r เป็นค่าคงที่

โดยการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว c เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดย จาก $\xi = x\text{-}ct$

$$u_x = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}$$

$$u_{xt} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(-c\frac{du}{d\xi}\right) = -cu_{\xi\xi} \tag{4.2}$$

แทนค่าอนุพันธ์ (4.2) ในสมการ (4.1) จะได้

$$-cu_{\xi\xi} + pe^{u} + qe^{-u} + re^{-2u} = 0 \tag{4.3}$$

กำหนดให้

$$\upsilon = e^{u} \tag{4.4}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$u = \ln \upsilon \tag{4.5}$$

จะได้ว่า

$$u' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'$$

$$u'' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2 \tag{4.6}$$

แทนค่าอนุพันธ์ (4.6) ในสมการ (4.3) จะได้

$$-c\left(\frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2\right) + p\upsilon + q\left(\frac{1}{\upsilon}\right) + r\left(\frac{1}{\upsilon^2}\right) = 0 \tag{4.7}$$

โดยการจัดรูปใหม่

$$-c\left(\upsilon\upsilon'' - (\upsilon')^2\right) + p\upsilon^3 + q\upsilon + r = 0 \tag{4.8}$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.9}$$

โดยที่ $Y = \sec h(\xi)$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dU}{d\xi} = -\mu Y\sqrt{1 - Y^2}\,\frac{dS}{dY}$$

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} = \mu^2\left(\left(Y - 2Y^3\right)\frac{dS}{dY} + \left(Y^2 - Y^4\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right) \tag{4.10}$$

จากสมการ (4.8) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $\upsilon\upsilon''$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ υ^3 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (4.9) และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
S(Y) &= \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \ldots + a_M Y^M \\
\frac{dS}{dY} &= \sum_{k=0}^{M} k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + \ldots + M a_M Y^{M-1} \\
\frac{d^2 S}{dY^2} &= \sum_{k=0}^{M} k(k-1) a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 Y + \ldots + M(M-1) a_M Y^{M-2}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

จากสมการ (4.10) และ (4.11) ดังนั้นจะได้

พจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $\upsilon\upsilon''$ มีรูปแบบเป็น

$$
\left[\sum_{k=0}^{M} a_k Y^k\right] \bullet \mu^2 \left[\left(Y - 2Y^3\right)\frac{dS}{dY} + \left(Y^2 - Y^4\right)\frac{d^2 S}{dY^2}\right] \tag{4.12}
$$

และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ υ^3 มีรูปแบบเป็น

$$
\left[\sum_{k=0}^{M} a_k Y^k\right]^3 = \left(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \ldots + a_M Y^M\right)^3 \tag{4.13}
$$

เทียบเลขชี้กำลัง $Y^M Y^4 Y^{M-2}$ ในสมการ (4.12) และ Y^{3M} ในสมการ (4.13) จะได้

$$
3M = M + 4 + M - 2
$$

$$
M = 2
$$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (4.9) จะได้

$$
\upsilon(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{4.14}
$$

และ

$$\frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y$$

$$\frac{d^2S}{dY^2} = 2a_2 \tag{4.15}$$

แทนค่า (4.14) และ (4.15) ในสมการ (4.8) โดยกำหนดให้ $p = q = r = 1$ จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned}&\left(a_0^{\,3} + a_0 + 1\right) + \left(-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^{\,2} a_1 + a_1\right)Y + \left(-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^{\,2} a_2 + 3a_0 a_1^{\,2} + a_2\right)Y^2 \\ &+ \left(2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^{\,3}\right)Y^3 + \left(6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^{\,2} + 3a_0 a_2^{\,2} + 3a_1^{\,2} a_2\right)Y^4 \\ &+ \left(4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^{\,2}\right)Y^5 + \left(2c\mu^2 a_2^{\,2} + a_2^{\,3}\right)Y^6 = 0\end{aligned} \tag{4.16}$$

เทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y จะได้

$$\begin{aligned}&\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^6 : 2c\mu^2 a_2^{\,2} + a_2^{\,3} = 0 \\ &\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^5 : 4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^{\,2} = 0 \\ &\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^4 : 6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^{\,2} + 3a_0 a_2^{\,2} + 3a_1^{\,2} a_2 = 0 \\ &\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^3 : 2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^{\,3} = 0 \\ &\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^2 : -4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^{\,2} a_2 + 3a_0 a_1^{\,2} + a_2 = 0 \\ &\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^1 : -c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^{\,2} a_1 + a_1 = 0 \\ &\text{สัมประสิทธิ์ของ} \quad Y^0 : a_0^{\,3} + a_0 + 1 = 0\end{aligned} \tag{4.17}$$

แก้ระบบสมการ (4.17) จะทำให้ได้ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2, c และ μ ดังนี้

$$a_0 = -\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{\alpha} \tag{4.18}$$

$$c = -\frac{1}{4}\frac{\left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)^2 + 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{6}{\alpha}}{\mu^2}$$

โดยการจัดรูปสมการ (4.18) จะได้

$$a_0 = -\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha}$$

$$a_1 = 0 \tag{4.19}$$

$$a_2 = \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2}$$

$$\mu = \frac{1}{12\alpha}\sqrt{-\frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{c}}$$

เมื่อ $\alpha = \left(108 + 12\sqrt{93}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\gamma = \alpha^2 + 18\alpha - 12$$

เนื่องจาก $\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2 = \alpha^4 + 18\alpha^3 + 12\alpha^2 - 216\alpha + 144 > 0$ โดยคำนวณค่าของ α จาก $u(x,t) = \ln \upsilon(x,t)$ แทนค่า (4.19) ในสมการ (4.14) โดยเงื่อนไข

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi)$$

และ $\xi = x\text{-}ct$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{-\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2}\sec h^2\left[\mu(x-ct)\right]\right\}, \;\; c<0 \tag{4.20}$$

โดย μ มีค่าดังสมการ (4.19)

$$u(x,t) = \ln\left\{-\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} - \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2}\sec^2\left[\bar{\mu}(x-ct)\right]\right\}, \;\; c>0 \tag{4.21}$$

เมื่อ $\bar{\mu} = \frac{1}{12\alpha}\sqrt{\frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{c}}$

สมการหลุยวิว (The Liouville equation)

กำหนดให้ $q = r = 0, p = 1$ ในสมการซิเบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้

$$-cu_{\xi\xi} + e^u = 0 \tag{4.22}$$

โดยกำหนด

$$u = \ln \upsilon \tag{4.23}$$

จะได้ว่า

$$u' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'$$

$$u'' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2 \tag{4.24}$$

แทนค่าอนุพันธ์ (4.24) ในสมการ (4.22) จะได้

$$-c\left(\upsilon\upsilon'' - (\upsilon')^2\right) + \upsilon^3 = 0 \tag{4.25}$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.26}$$

โดยที่ $Y = \sec h(\xi)$

แทนค่า (4.10) และ (4.11) ในสมการ (4.25) แล้วนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด คือ $\upsilon\upsilon''$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด คือ υ^3 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งจะได้ $M = 2$ แทนค่า $M = 2$ สมการ (4.26) จะได้

$$\upsilon(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{4.27}$$

และ

$$\frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y$$

$$\frac{d^2S}{dY^2} = 2a_2 \tag{4.28}$$

แทนค่า (4.27) และ (4.28) ในสมการ (4.25) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\left(a_0^{\ 3}\right) + \left(-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^{\ 2} a_1\right)Y + \left(-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^{\ 2} a_2 + 3a_0 a_1^{\ 2}\right)Y^2$$

$$+\left(2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^{\ 3}\right)Y^3 + \left(6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^{\ 2} + 3a_0 a_2^{\ 2} + 3a_1^{\ 2} a_2\right)Y^4$$

$$+\left(4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^{\ 2}\right)Y^5 + \left(2c\mu^2 a_2^{\ 2} + a_2^{\ 3}\right)Y^6 = 0 \tag{4.29}$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (4.29) จะได้

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0 \qquad (4.30)$$
$$a_2 = -2c\mu^2$$

จาก $u(x,t) = \ln \upsilon(x,t)$ โดยการแทนค่า (4.30) ในสมการ (4.27) โดยเงื่อนไข

$$Y = \sec h(\mu\xi)$$

และ $\xi = x\text{-}ct$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\{-2c\mu^2 \sec h^2[\mu(x-ct)]\}, \quad \mu > 0, c < 0 \qquad (4.31)$$

สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน (The sinh-Gordon equation)

กำหนดให้ $r = 0, q = -1, p = 1$ ในสมการซิเบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้เป็นสมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน

$$-cu_{\xi\xi} + e^u - e^{-u} = 0 \qquad (4.32)$$

โดยกำหนด

$$u = \ln \upsilon \qquad (4.33)$$

จะได้ว่า

$$u' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'$$

(4.34)

$$u'' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2$$

แทนค่าอนุพันธ์ (4.34) ในสมการ (4.32) จะได้

$$-c\left(\upsilon\upsilon'' - (\upsilon')^2\right) + \upsilon^3 - \upsilon = 0 \tag{4.35}$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.36}$$

โดยที่ $Y = \sec h(\xi)$

แทนค่า (4.10) และ (4.11) ในสมการ (4.35) แล้วนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด คือ $\upsilon\upsilon''$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด คือ υ^3 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งจะได้ $M = 2$ แทนค่า $M = 2$ สมการ (4.36) จะได้

$$\upsilon(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{4.37}$$

และ

$$\frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y$$

$$\frac{d^2S}{dY^2} = 2a_2 \tag{4.38}$$

แทนค่า (4.37) และ (4.38) ในสมการ (4.35) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\left(a_0^3 - a_0\right) + \left(-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1 - a_1\right)Y + \left(-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 - a_2\right)Y^2$$

$$+\left(2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3\right)Y^3 + \left(6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^2 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2\right)Y^4$$

$$+\left(4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^{\,2}\right)Y^5 + \left(2c\mu^2 a_2^{\,2} + a_2^{\,3}\right)Y^6 = 0 \tag{4.39}$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (4.39) จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -1 \\ \mu &= \frac{1}{\sqrt{2c}}, c > 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

จาก $u(x,t) = \ln \upsilon(x,t)$ โดยการแทนค่า (4.40) ในสมการ (4.37) โดยเงื่อนไข

$$Y = \sec h(\mu\xi)$$

และ $\xi = x\text{-}ct$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{1 - \sec h^2\left[\frac{1}{\sqrt{2c}}(x - ct)\right]\right\}, \;\; c > 0 \tag{4.41}$$

สมการดอด-บูลลอจ-มิคฮาลอฟ (The Dodd-Bullough-Mikhailov equation)

กำหนดให้ $p = 1, q = 0, r = 1$ ในสมการซิเบอร์-ชาแบทโดยตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้เป็นสมการดอด-บูลลอจ-มิคฮาลอฟ

$$-cu_{\xi\xi} + e^{u} + e^{-2u} = 0 \tag{4.42}$$

โดยกำหนด

$$u = \ln \upsilon \tag{4.43}$$

จะได้ว่า

$$u' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'$$

$$u'' = \frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2 \tag{4.44}$$

แทนค่าอนุพันธ์ (4.44) ใน (4.42) จะได้

$$-c\left(\upsilon\upsilon'' - (\upsilon')^2\right) + \upsilon^3 + 1 = 0 \tag{4.45}$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.46}$$

โดยที่ $Y = \sec h(\xi)$

แทนค่า (4.10) และ (4.11) ในสมการ (4.45) แล้วนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด คือ $\upsilon\upsilon''$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด คือ υ^3 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งจะได้ $M = 2$ แทนค่า $M = 2$ สมการ (4.46) จะได้

$$\upsilon(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{4.47}$$

และ

$$\frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y$$

$$\frac{d^2S}{dY^2} = 2a_2 \tag{4.48}$$

แทนค่า (4.47) และ (4.48) ในสมการ (4.45) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\left(a_0^{\,3} + 1\right) + \left(-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^{\,2} a_1\right)Y + \left(-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^{\,2} a_2 + 3a_0 a_1^{\,2}\right)Y^2$$

$$+\left(2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^{\ 3}\right)Y^3 + \left(6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^{\ 2} + 3a_0 a_2^{\ 2} + 3a_1^{\ 2} a_2\right)Y^4$$

$$+\left(4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^{\ 2}\right)Y^5 + \left(2c\mu^2 a_2^{\ 2} + a_2^{\ 3}\right)Y^6 = 0 \qquad (4.49)$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (4.49) จะได้

$$a_0 = -1$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = -\frac{3}{2}$$
$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{c}}, c < 0 \qquad (4.50)$$

จาก $u(x,t) = \ln \upsilon(x,t)$ โดยการแทนค่า (4.50) ในสมการ (4.47) โดยเงื่อนไข

$$Y = \sec h(\mu\xi)$$

และ $\xi = x\text{-}ct$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{-1 - \frac{3}{2}\sec h^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{c}}(x - ct)\right]\right\}, c < 0 \qquad (4.51)$$

จากผลเฉลยที่ได้แสดงว่าสามารถใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ หาผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของสมการซิเบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่ผู้วิจัยศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ