บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ที่ประกอบไปด้วยบทนิยามและแนวคิดรวมทั้งงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์สำหรับสมการซิเบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation) (Wazwaz, 2006) และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญสำหรับงานวิจัยนี้อย่างมาก

ความรู้พื้นฐาน

วรรณ์ทนา ภาณุพินทุ (2549) ปัญหาต่าง ๆ ที่เราพบในชีวิตประจำวันนั้นสามารถพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ ที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน อัตราการเพิ่มของประชากร ปัญหาของการนำความร้อนในแท่งโลหะ หรือแผ่นโลหะ การหาประจุหรือกระแสในวงจรไฟฟ้า การสั่นของเส้นลวด อัตราการสลายตัวของกัมมันตภาพรังสี เป็นต้น จะเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เป็นพื้นฐานที่สำคัญทั้งในสาขาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เพราะว่ากฎเกณฑ์และปัญหาต่าง ๆ ในสาขาวิชาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสิ้น

นิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function) รวมอยู่ด้วย ซึ่งอนุพันธ์ที่ปรากฏจะมีเพียงหนึ่งหรือมากกว่าก็ได้ แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

นิยาม 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)

นิยาม 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

สำหรับในงานวิจัยฉบับนี้เรามุ่งเน้นที่การศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเป็นสมการที่มีตัวแปรอิสระหลายตัว โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ สมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นและสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น โดยมีรูปแบบและการเขียนสัญลักษณ์ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.4 ให้ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ n ตัว ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) อนุพันธ์ของ u เทียบกับ x_i เขียนสัญลักษณ์

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{หรือ} \quad u_{x_i}$$

กำหนดค่าดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - u(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

ถ้าลิมิตทางขวามือมีค่าเกิดขึ้น

จากนิยามจะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อยเป็นค่าลิมิต เมื่อตัวแปรอิสระหนึ่งตัวมีค่าเปลี่ยนไป ซึ่งค่าลิมิตจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรอิสระใด เราจะให้ตัวแปรอิสระอื่นเป็นค่าคงที่ แล้วทำการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรเหมือนกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระตัวแปรเดียว สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับอนุพันธ์ย่อยเป็นดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ } t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ } x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ } x$$

โดยเราจะหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ x ก่อน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาหาอนุพันธ์เทียบกับ x อีกครั้ง

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{xt} \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ } x \text{ และ } t$$

โดยเราจะหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ x ก่อน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาหาอนุพันธ์เทียบ t อีกครั้ง

นิยาม 2.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปรปรากฏอยู่ในสมการ โดยที่สมการมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังนี้

$$P(x,y,z,t:u,u_x,u_y,u_z,u_t,u_{xx},...)=0 \tag{2.1}$$

เมื่อ x,y,z,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ

$$u_x,u_y,u_z,u_t,u_{xx},u_{yy},u_{zz},u_{tt},u_{xy},u_{xz},...$$

เป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับต่าง ๆ ของ u

นิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) จะเรียกว่าเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น (linear partial differential equation) ถ้าฟังก์ชัน P มีสภาพเชิงเส้นในแต่ละตัวแปร $u,u_x,u_y,...$ และถ้าสัมประสิทธิ์ของ u และอนุพันธ์ของ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเท่านั้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นจะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation)

ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สามารถหาคำตอบของสมการได้ง่ายตามวิธีการต่าง ๆ เช่น วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ ใช้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ เป็นต้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จะไม่มีรูปแบบวิธีการที่แน่นอนในการหาคำตอบของสมการ สามารถเลือกใช้วิธีการหาคำตอบได้หลายวิธี ซึ่งหลักการเลือกใช้นั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบเฉพาะของแต่ละสมการ เช่น วิธีเอ็กซ์โพเนเชียลฟังก์ชัน วิธีไซน์-โคไซน์ วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน วิธีการแปลงเชิงเส้นคู่ วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เป็นต้น โดยสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 2 แบบ จะถูกจำแนกตามอันดับสูงสุดของฟังก์ชันไม่ทราบค่า

วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

เกนจิและอับดุลลาซาเด (Ganji & Abdollahzadeh, 2008) ได้สรุปขั้นตอนของวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ซึ่งถูกนำเสนอโดยมาลเฟลด (Malflied, 1992) และมีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง ดังต่อไปนี้

1. พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้น

$$P\left(u,u_t,u_x,u_{xx},...\right)=0 \tag{2.2}$$

2. หาคำตอบของสมการ (2.2) โดยกำหนดตัวแปรคลื่นเดี่ยว $\xi = \alpha(x - \beta t)$ ดังนั้นจะได้

$$u(x,t) = U(\xi) \tag{2.3}$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว β ด้วยข้อตกลงนี้เราจะได้

$$\frac{d}{dt} = -\alpha\beta \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \alpha \frac{d}{d\xi} \tag{2.4}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \alpha^3 \frac{d^3}{d\xi^3}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ อีก ซึ่งในที่นี้ $\frac{d}{dt}$ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่ แสดงรายละเอียดได้ ดังนี้

จากสมการตั้งต้น

$$u(x,t) = U(\xi)$$

โดยการใช้สัญลักษณ์ u แทน $u(x,t)$ และใช้สัญลักษณ์ U แทน $U(\xi)$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\xi = \alpha(x - \beta t)$$

ดังนั้น

$$\frac{du}{dt}=\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d}{dt}(\alpha x-\alpha\beta t)$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot\left[\frac{d}{dt}(\alpha x)-\frac{d}{dt}(\alpha\beta t)\right]$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot\left[\alpha\frac{d}{dt}(x)-\alpha\beta\frac{d}{dt}(t)\right]$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot(0-\alpha\beta)$$

$$=-\alpha\beta\frac{dU}{d\xi}$$

และสามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตาม u เทียบกับตัวแปรอิสระ x ได้ดังนี้

$$\frac{du}{dx}=\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d}{dx}(\alpha x-\alpha\beta t)$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot\left[\alpha\frac{d}{dx}(x)-\alpha\beta\frac{d}{dx}(t)\right]$$

$$=\frac{dU}{d\xi}\cdot(\alpha-0)$$

$$=\alpha\frac{dU}{d\xi}$$

เมื่อแทนสมการ (2.4) แล้วจะทำให้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสมการ (2.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0 \tag{2.5}$$

3. ถ้าทุกพจน์ของผลลัพธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีอนุพันธ์ของ ξ แล้วเราจะสามารถหาอนุพันธ์สมการนี้ได้ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการหาอนุพันธ์เป็นศูนย์ จะทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จัดรูปเรียบร้อยแล้ว

4. ในขั้นนี้เราจะกำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \sec h(\xi) \tag{2.6}$$

ผลจากการกำหนดข้างต้น เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้โดยอาศัยทฤษฎีพื้นฐาน

$$\cos h^2(\xi) - \sin h^2(\xi) = 1$$

ซึ่งหาอนุพันธ์ได้โดย

$$Y' = \sec h'(\xi) = -\sec h(\xi) \tan h(\xi) = -\sec h(\xi)\sqrt{1 - \sec h^2(\xi)}$$

$$\sec h''(\xi) = \sec h(\xi) \tan h^2(\xi) - \sec h^3(\xi) = \sec h(\xi)(1 - \sec h^2(\xi)) - \sec h^3(\xi)$$

จาก $Y' = -Y\sqrt{1 - Y^2}$ และกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{dY}\frac{dY}{d\xi} = -Y\sqrt{1 - Y^2}\,\frac{d}{dY}$$

ทำให้เราหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = -Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d}{dY}$$

(2.7)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -Y\sqrt{1-Y^2}\left(-\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d}{dY} + \frac{Y^2\dfrac{d}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d^2}{dY^2}\right)$$

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

5. กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{2.8}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้เพื่อแทนในสมการ (2.7) และ (2.8) ในสมการ (2.5) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y

6. พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์ เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $a_k\,(k=0,\ldots,M)$, α และ β เมื่อหา M ซึ่งจะเป็นจำนวนเต็มบวกได้แล้ว และใช้ M นี้กับสมการ (2.8) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

เกนจิและอับดุลลาซาเด (Ganji & Abdollahzadeh, 2008) ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับสมการเคดีวีอันดับ 7 ของ แล็กซ์ (Lax's seventh-order KdV) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_t + (35u^4 + 70(u^2u_{xx} + uu_x^2) + 7(2uu_{xxx} + 3u_{xx}^2 + 4u_xu_{xxx}) + u_{xxxxxx})_x = 0 \tag{2.9}$$

ใช้สมการ (2.3) และ (2.4)

ให้ $u(x,t) = U(\xi)$

เมื่อ $\xi = \alpha(x - \beta t)$

ดังนั้น จะได้

$$\frac{d}{dt} = -\alpha\beta \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \alpha \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \alpha^3 \frac{d^3}{d\xi^3}$$

เปลี่ยนสมการที่ (2.9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$\begin{aligned} &-\beta U' + 140U^3U' + 280\alpha^2 UU'U'' + 70\alpha^2 U^2 U''' + 70\alpha^2 U'^3 \\ &+ 42\alpha^4 U'U^{(4)} + 14\alpha^4 UU^{(5)} + 70\alpha^4 U''U''' + \alpha^6 U^{(7)} = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \quad \text{เมื่อ} \quad Y = \operatorname{sech}(\xi) \tag{2.11}$$

จากสมการ (2.7) จะได้

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = -Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY}$$

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = -Y\sqrt{1-Y^2}\left(-\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY} + \frac{Y^2\,\dfrac{dS}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d^2S}{dY^2}\right)$$

$$\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3} = -Y\sqrt{1-Y^2}\left(1-6Y^2\frac{dS}{dY} + (3Y-6Y^2)\frac{d^2S}{dY^2} + Y^2(1-Y^2)\frac{d^3S}{dY^3}\right) \qquad (2.12)$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ หาได้ในทำนองเดียวกัน
จาก (2.11) จะได้

$$S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + ... + a_M Y^M$$

$$S'(Y) = \sum_{k=0}^{M} k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + ... + M a_M Y^{M-1}$$

$$S''(Y) = \sum_{k=0}^{M} k\left(k-1\right) a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 Y + ... + M\left(M-1\right) a_M Y^{M-2}$$

$$S'''(Y) = \sum_{k=0}^{M} k(k-1)(k-2) a_k Y^{k-3}$$
$$= 6a_3 + 24a_4 Y + .. + M(M-1)(M-2) a_M Y^{M-3} \qquad (2.13)$$

แทน (2.12) และ (2.13) โดยเงื่อนไข (2.11) ในสมการ (2.10) เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{M+8} ที่ปรากฏในพจน์ $U^{(7)}$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้นกับ Y^{4M+2} ในพจน์ U^3U' ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด ของสมการ (2.10) จะได้

$$M + 8 = 4M + 2$$

นั่นคือ $$M = 2$$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (2.11) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{2.14}$$

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S'(Y) = a_1 + 2a_2 Y$$

$$S''(Y) = 2a_2$$

$$S'''(Y) = S^{(4)}(Y) = S^{(5)}(Y) = S^{(6)}(Y) = S^{(7)}(Y) = 0$$

แทนค่า (2.14) และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ลงในสมการ (2.10) แล้วพิจารณาสัมประสิทธิ์แต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0, a_1, a_2, α และ β ดังนี้

$$Y^0 \ : -14\alpha^4 a_0 a_1 - 140 a_0^3 a_1 - 70\alpha^2 a_0^2 a_1 - \alpha^6 a_1 + \beta a_1 = 0,$$

$$Y^1 \ : \begin{aligned} &-420\alpha^2 a_1^2 a_0 - 128\alpha^6 a_2 - 126\alpha^4 a_1^2 - 448\alpha^4 a_0 a_2 - 280 a_2 a_0^3 \\ &+ 2\beta a_2 - 560\alpha^2 a_2 a_0^2 - 420 a_0^2 a_1^2 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^2 \ : \begin{aligned} &-2940\alpha^4 a_0 a_1 a_2 + 140 a_0^3 a_1 + 490\alpha^2 a_0^2 a_1 - 420 a_0 a_1^3 + 854\alpha^4 a_0 a_1 \\ &-1260 a_0^2 a_2 a_1 - 2058\alpha^4 a_1 a_0 - \beta a_1 - 420\alpha^2 a_1^3 + 547\alpha^6 a_1 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^3 \ : \begin{aligned} &7168\alpha^4 a_0 a_2 - 2\beta a_2 + 280 a_0^3 a_2 - 4032\alpha^4 a_2^2 + 420 a_0^2 a_1^2 \\ &-1680 a_0 a_1^2 a_2 + 2366\alpha^4 a_1^2 + 2240\alpha^2 a_0^2 a_2 - 3080\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ &-140 a_1^4 - 840 a_2^2 a_0^2 + 8192\alpha^6 a_2 + 1820\alpha^2 a_1^2 a_0 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^4 \ : \begin{aligned} &-700 a_2 a_1^3 - 2520\alpha^4 a_1 a_0 + 21238\alpha^4 a_1 a_2 - 5950\alpha^2 a_2^2 a_1 \\ &+9940\alpha^2 a_0 a_2 a_1 + 1260 a_1 a_0^2 a_2 - 420\alpha^2 a_0^2 a_1 + 420 a_0 a_1^3 \\ &+1470\alpha^2 a_1^3 - 2100 a_2^2 a_0 a_1 - 4746\alpha^6 a_1 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^5 : \begin{array}{l} -5768\alpha^4 a_1^2 - 48384\alpha^6 a_2 - 1400\alpha^2 a_0 a_1^2 + 9380\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ -1680\alpha^2 a_0^2 a_2 + 1680 a_1^2 a_0 a_2 - 3360\alpha^2 a_2^3 - 1260 a_2^2 a_1^2 \\ -840 a_0 a_2^3 - 16800\alpha^4 a_0 a_2 + 30912\alpha^4 a_2^2 + 840 a_0^2 a_2^2 + 10080\alpha^2 a_0 a_2^2 \\ +140 a_1^4 = 0, \end{array}$$

$$Y^6 : \begin{array}{l} 700 a_1^3 a_2 - 980 a_1 a_2^3 + 9240\alpha^6 a_1 + 16730\alpha^2 a_1 a_2^2 + 2100 a_0 a_1 a_2^2 \\ -43876\alpha^4 a_1 a_2 - 1050\alpha^2 a_1^3 - 7000\alpha^2 a_2 a_1 a_0 + 1680\alpha^4 a_0 a_1 = 0, \end{array}$$

$$Y^7 : \begin{array}{l} -6720\alpha^2 a_0 a_2^2 - 280 a_2^4 + 840 a_0 a_2^3 - 6300\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ +80460\alpha^6 a_2 + 10080\alpha^4 a_0 a_2 + 1260 a_1^2 a_2^2 + 8960\alpha^2 a_2^3 \\ -57120\alpha^4 a_2^2 + 3528\alpha^4 a_1^2 = 0, \end{array}$$

$$Y^8 : -10780\alpha^2 a_1 a_2^2 + 24696\alpha^4 a_1 a_2 - 5040\alpha^6 a_1 + 980 a_1 a_2^3 = 0,$$

$$Y^9 : 30240\alpha^4 a_2^2 - 5600\alpha^2 a_2^3 + 250 a_2^4 - 40320\alpha^6 a_2 = 0 \tag{2.15}$$

แก้ระบบสมการ (2.15) จะได้

$$\begin{aligned} \beta &= 64\alpha^6 + 224\alpha^4 a_0 + 140 a_0^3 + 280\alpha^2 a_0^2 \ , \\ a_1 &= 0 \ , \\ a_2 &= 2\alpha^2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

ในสมการ (2.16) เลือก $a_0 = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} \beta &= 64\alpha^6 \\ a_1 &= 0 \ , \ a_2 = 2\alpha^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

แทนค่าตัวแปร β, a_1 และ a_2 จากสมการ (2.17) ในสมการ (2.14) จะได้คำตอบแม่นตรงของสมการคลื่นที่อยู่ในรูป

$$u = 2\left[\alpha \sec h(\alpha(x - 64\alpha^6 t)\right]^2$$

วาซวาซ (Wazwaz, 2007) ได้หาผลเฉลยของสมการโคโนเปลเช็งโก-ดูโบรสกี (2+1) มิติ (the (2+ 1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equation) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_x v = 0$$

$$u_y = v_x \tag{2.18}$$

ใช้สมการ (2.3) และ (2.4)

ให้ $u(x, y, t) = U(\mu\xi)$

และ $v(x, y, t) = V(\mu\xi)$

เมื่อ $\xi = x + y - ct$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{d}{dt} = -c\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}$$

เปลี่ยนสมการ (2.18) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-cU' - U''' - 3b(U^2)' + \frac{1}{2}a^2(U^3)' - 3V' + 3aU'V = 0 \qquad (2.19)$$

เนื่องจาก $U' = V'$

อินทิเกรตในของสมการ $U' = V'$ และให้ค่าคงที่เป็นศูนย์จะได้

$$U = V \qquad (2.20)$$

แทนค่า (2.20) ใน (2.19) แล้วอินทิเกรตจะได้

$$(c+3)U + 3(b - \frac{a}{2})U^2 - \frac{1}{2}a^2U^3 + U'' = 0 \qquad (2.21)$$

กำหนด $U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k$

(2.22)

เมื่อ $Y = \mathrm{sec}\,h(\mu\xi)$

จะหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = -\mu Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY}$$

(2.23)

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = -\mu^2 Y\sqrt{1-Y^2}\left(-\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY} + \frac{Y^2\frac{dS}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d^2S}{dY^2}\right)$$

และ $$S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k=a_0+a_1Y+a_2Y^2+...+a_MY^M$$

$$S'(Y)=\sum_{k=0}^{M}ka_kY^{k-1}=a_1+2a_2Y+3a_3Y^2+...+Ma_MY^{M-1}$$

$$S''(Y)=\sum_{k=0}^{M}k\left(k-1\right)a_kY^{k-2}=2a_2+6a_3Y+...+M\left(M-1\right)a_MY^{M-2} \quad (2.24)$$

แทน (2.23) และ (2.24) โดยเงื่อนไข (2.22) ในสมการ (2.21) เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์ มาเปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์กำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{M+2} ที่ปรากฏขึ้นในพจน์ U'' ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้น กับ Y^{3M} ในพจน์ U^3 ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด ของสมการ (2.10) จะได้

$$M+2=3M$$

นั่นคือ $$M=1$$

แทนค่า $M=1$ ในสมการ (2.22) จะได้

$$S(Y)=a_0+a_1Y$$

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้ $$S'(Y)=a_1 \quad (2.25)$$

แทนค่า (2.25) ลงในสมการ (2.21) แล้วพิจารณาสัมประสิทธ์แต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0, a_1, μ และ c ดังนี้

$$Y^0 \ : \quad a_1(a^2a_1^2+4\mu^2)=0,$$

$$Y^1 \ : \quad {a_1}^2(-6b+3a+3a^2a_0)=0,$$

$$Y^2 \ : \quad a_1(-2c - 12ba_0 - 6 + 6aa_0 - 2\mu^2 + 3a^2 a_0) = 0\,,$$

$$Y^3 \ : \quad -2ca_0 - 6ba_0^2 + 3aa_0^2 + a^2 a_0^3 - 6a_0 = 0 \tag{2.26}$$

แก้ระบบสมการ (2.26) จะได้

$$a_0 = \frac{(2b-a)}{a^2}\ ,$$

$$a_1 = \pm\frac{\sqrt{2}(a-2b)}{a^2}\ ,$$

$$\mu = i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a-2b}{a}\ , \qquad i^2 = -1 \tag{2.27}$$

$$c = \frac{4(ab-a^2-b^2)}{a^2}$$

แทนค่า (2.27) โดยเงื่อนไข (2.22) ลงในสมการ (2.25) ทำให้เราได้สมการทำนายเป็น

$$u(x,y,t) = \frac{(2b-a)}{a^2}\left(1 \pm \sqrt{2}\sec\left[\frac{a-2b}{\sqrt{2}a}\left(x + y + \frac{4(ab-a^2-b^2)}{a^2}t\right)\right]\right)$$

และ (2.28)

$$u(x,y,t) = \frac{(2b-a)}{a^2}\left(1 \pm \sqrt{2}\csc\left[\frac{a-2b}{\sqrt{2}a}\left(x + y + \frac{4(ab-a^2-b^2)}{a^2}t\right)\right]\right)$$

วาซวาซ (Wazwaz, 2007) ได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์-ไฮเพอร์โบลิกโคแทนเจนต์ และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ สำหรับสมการจูเลนต์-มิโอเดก (Jaulent–Miodek equation) ที่มีรูปแบบ

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2}vv_{xxx} + \frac{9}{2}v_x v_{xx} - 6uu_x - 6uvv_x - \frac{3}{2}u_x v^2 = 0$$

$$v_t + v_{xxx} - 6u_x v - 6uv_x - \frac{15}{2}v_x v^2 = 0 \tag{2.28}$$

ในทำนองเดียวกันกับการหาผลเฉลยระบบสมการ (2.18) งานวิจัยนี้ทำให้ได้ผลเฉลยแม่นตรงของคลื่นโซลิทอรี่ $u(x,t)$ และ $v(x,t)$ ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ไม่ใช่เป็นเพียงสมการทำนาย ดังนี้

$$u_1(x,t) = \frac{1}{8}\gamma^2\left(1 - 4\sec h^2\left[\frac{1}{2}\gamma(x + \frac{1}{2}\gamma^2 t)\right]\right)$$

$$v_1(x,t) = \gamma \sec h\left[\frac{1}{2}\gamma(x + \frac{1}{2}\gamma^2 t)\right] \tag{2.29}$$

และ

$$u_2(x,t) = \frac{1}{4}(\gamma^2 - \beta^2) - \frac{1}{2}\beta\gamma \sec h\left[\gamma\left(x + \frac{1}{2}(6\beta^2 + \gamma^2)t\right)\right] - \frac{3}{4}\gamma^2 \sec h^2\left[\gamma\left(x + \frac{1}{2}(6\beta^2 + \gamma^2)t\right)\right]$$

$$v_2(x,t) = \beta + \gamma \sec h\left[\gamma\left(x + \frac{1}{2}(6\beta^2 + \gamma^2)t\right)\right] \tag{2.30}$$

จากการค้นคว้าในส่วนนี้ทำให้ทราบว่าวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ

งานวิจัยเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการซิเบอร์-ชาแบท

วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

ได้นำเสนอโดยวาซวาซ (Wazwaz, 2005) ได้สรุปขั้นตอนของวิธีไฮเพอร์โบลิก-แทนเจนต์ ดังต่อไปนี้

พิจารณาให้ตัวแปร x และ t เป็นตัวแปรในกลุ่มเดียวกันก่อนโดยพิจารณาให้ทั้งสองตัวแปรนี้ในรูปของตัวแปรเดียวซึ่งเป็นตัวแปรคลื่น คือ $\xi = x\text{-}ct$ การพิจารณาให้ตัวแปรคลื่นนี้ก็เพื่อจะแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีตัวแปรอิสระสองตัวแปรคือ

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \ldots) = 0 \tag{2.31}$$

ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$Q(u, u', u'', u''' \ldots) = 0 \tag{2.32}$$

ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้สามารถหาปริพันธ์ได้ทุกพจน์ถ้าหากพจน์เหล่านั้นมีอนุพันธ์ และโดยปกติแล้วในการหาผลเฉลยที่ระบุเฉพาะนั้น จะพิจารณาให้ ค่าคงตัวปริพันธ์นั้นเป็นศูนย์ อย่างไรก็ตามค่าคงตัวปริพันธ์ที่ไม่เป็นศูนย์จะสามารถทำได้เช่นเดียวกัน วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนนั้นจะขึ้นอยู่กับสมมติฐานเบื้องต้นที่ว่า คำตอบคลื่นเคลื่อนที่สามารถแสดงในพจน์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทน ดังนั้นจึงกำหนดตัวแปรอิสระใหม่เป็น

$$Y = \tanh(\mu\xi) \tag{2.33}$$

ซึ่งจะทำให้ได้อนุพันธ์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \mu(1-Y^2)\frac{d}{dY} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= \mu^2(1-Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

จะได้ผลเฉลยในรูปอนุกรมจำกัดใน Y ในรูป

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \text{ เมื่อ } \quad Y = \tanh(\mu\xi) \tag{2.35}$$

ซึ่งผลเฉลยนี้จะได้เป็นคลื่นเดี่ยวและคลื่นซ้อนกัน ตัวแปรเสริม M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งหาได้โดยการดุล Y^M ที่เป็นอนุพันธ์สูงที่สุดกับส่วนที่เหมือนกันที่อยู่ในพจน์ไม่เชิงเส้น ดังนั้น ตัวแปรเสริมอื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์สำหรับสมการซิเบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation)

วาซวาซ (Wazwaz, 2006) ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์สำหรับการหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการซิเบอร์-ชาแบท ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_{xt} + pe^{u} + qe^{-u} + re^{-2u} = 0 \tag{2.36}$$

พิจารณารูปทั่วไปของสมการซิเบอร์-ชาแบท (2.36) และกำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้

$$u(x,t) = U(\xi) \tag{2.37}$$

ซึ่งสามารถแปลงไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดย

จาก $\xi = x\text{-}ct$

$$u_x = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}$$

$$u_{xt} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(-c\frac{du}{d\xi}\right) = -cu_{\xi\xi} \tag{2.38}$$

แทนค่าอนุพันธ์ (2.38) ในสมการ (2.36) จะได้

$$-cu_{\xi\xi} + pe^{u} + qe^{-u} + re^{-2u} = 0 \tag{2.39}$$

กำหนดให้

$$\upsilon = e^{u} \tag{2.40}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$u = \ln \upsilon \tag{2.41}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{\upsilon}\upsilon' \\ u'' &= \frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

แทนค่าอนุพันธ์ (2.42) ในสมการ (2.39) จะได้

$$-c\left(\frac{1}{\upsilon}\upsilon'' - \frac{1}{\upsilon^2}(\upsilon')^2\right) + p\upsilon + q\left(\frac{1}{\upsilon}\right) + r\left(\frac{1}{\upsilon^2}\right) = 0 \tag{2.43}$$

คูณสมการ (2.43) ด้วย υ^2 ตลอดสมการจะได้

$$-c\left(\upsilon\upsilon'' - (\upsilon')^2\right) + p\upsilon^3 + q\upsilon + r = 0 \tag{2.44}$$

จาก (2.44) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $-c\upsilon\upsilon''$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุดคือ $p\upsilon^3$ มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (2.35) และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k=a_0+a_1Y+a_2Y^2+\ldots+a_MY^M$$

$$\frac{dS}{dY}=\sum_{k=0}^{M}ka_kY^{k-1}=a_1+2a_2Y+3a_3Y^2+\ldots+Ma_MY^{M-1} \tag{2.45}$$

$$\frac{d^2S}{dY^2}=\sum_{k=0}^{M}k(k-1)a_kY^{k-2}=2a_2+6a_3Y+\ldots+M(M-1)a_MY^{M-2}$$

แทน (2.45) และ (2.34) โดยเงื่อนไข (2.35) ในสมการ (2.43) เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ $Y^MY^4Y^{M-2}$ ที่ปรากฏในพจน์ $\upsilon\upsilon''$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้นกับ Y^{3M} ในพจน์ υ^3 ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด ของสมการ (2.43) จะได้

$$3M=M+4+M-2$$

$$M=2$$

แทนค่า $M=2$ ในสมการ (2.35) จะได้

$$S(Y)=a_0+a_1Y+a_2Y^2 \tag{2.46}$$

และ

$$\frac{dS}{dY}=a_1+2a_2Y$$

$$\frac{d^2S}{dY^2}=2a_2 \tag{2.47}$$

แทนค่า (2.47) และ (2.46) ในสมการ (2.44) โดยการกำหนดให้ $p = q = r = 1$ จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0, a_1, a_2 และ μ ดังนี้

$$Y^6 : -2c\mu^2 a_2{}^2 + a_2{}^3 = 0$$

$$Y^5 : 3a_1 a_2{}^2 - 4c\mu^2 a_1 a_2 = 0$$

$$Y^4 : 3a_0 a_2{}^2 - 6c\mu^2 a_0 a_2 - c\mu^2 a_1{}^2 + 3a_1{}^2 a_2 = 0$$

$$Y^3 : 6a_0 a_1 a_2 - 2c\mu^2 a_0 a_1 + a_1{}^3 + 2c\mu^2 a_1 a_2 = 0 \qquad (2.48)$$

$$Y^2 : 3a_0 a_1{}^2 + 8c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0{}^2 a_2 + a_2 + 2c\mu^2 a_2{}^2 = 0$$

$$Y^1 : 2c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0{}^2 a_1 + a_1 + 2c\mu^2 a_1 a_2 = 0$$

$$Y^0 : a_0 - 2c\mu^2 a_0 a_2 + a_0{}^3 + c\mu^2 a_1{}^2 + 1 = 0$$

ทำการคำนวณ เพื่อหาสัมประสิทธิ์ จะได้

$$a_0 = \frac{\gamma}{12\alpha}$$

$$a_1 = 0 \qquad (2.49)$$

$$a_2 = \frac{\gamma^2 - 15\gamma\alpha - 36\alpha^2}{36\alpha^2}$$

$$\mu = \frac{1}{12\alpha}\sqrt{-\frac{2(\gamma^2 - 15\gamma\alpha - 36\alpha^2)}{c}}$$

เมื่อ $\alpha = \left(188 + 12\sqrt{93}\right)^{\frac{1}{3}}$

และ $\gamma = \alpha^2 + 2\alpha + 28$

เนื่องจาก $\gamma^2 - 15\gamma\alpha + 36\alpha^2 = \alpha^4 - 11\alpha^3 - 6\alpha^2 - 308\alpha + 784 < 0$ โดยคำนวณค่าของ α

จาก $u(x,t) = \ln \upsilon(x,t)$ โดยการแทนค่า (2.49) ในสมการ (2.46) ในเงื่อนไข

$$Y = \sec h(\mu\xi)$$

และ $$\xi = x\text{-}ct$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{\frac{\gamma}{12\alpha} + \frac{\gamma^2 - 15\gamma\alpha - 36\alpha^2}{36\alpha^2}\tanh^2\left[\mu(x - ct)\right]\right\},\ c < 0 \tag{2.50}$$

และ

$$u(x,t) = \ln\left\{\frac{\gamma}{12\alpha} + \frac{\gamma^2 - 15\gamma\alpha - 36\alpha^2}{36\alpha^2}\coth^2\left[\mu(x - ct)\right]\right\},\ c < 0 \tag{2.51}$$

โดย μ มีค่าดังสมการ (2.49)

สำหรับ $c > 0$ จะได้ผลเฉลยเป็น

$$u(x,t) = \ln\left\{\frac{\gamma}{12\alpha} - \frac{\gamma^2 - 15\gamma\alpha - 36\alpha^2}{36\alpha^2}\tan^2\left[\overline{\mu}(x - ct)\right]\right\},\ c > 0 \tag{2.52}$$

และ

$$u(x,t) = \ln\left\{\frac{\gamma}{12\alpha} - \frac{\gamma^2 - 15\gamma\alpha - 36\alpha^2}{36\alpha^2}\cot^2\left[\overline{\mu}(x - ct)\right]\right\},\ c > 0 \tag{2.53}$$

เมื่อ $\overline{\mu} = \dfrac{1}{12\alpha}\sqrt{-\dfrac{2(\alpha^4 - 11\alpha^3 - 6\alpha^2 - 308\alpha + 784)}{c}}$

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในส่วนนี้ทำให้ทราบว่าวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์สำหรับสมการซิเบอร์-ชาแบท เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น และระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ทำให้เกิดแนวทางในการที่จะนำไปสู่การศึกษาปัญหาสมการซิเบอร์-ชาแบท ในครั้งนี้ด้วย