บทที่ 5
อภิปรายและสรุปผล

ในงานวิจัยนี้ได้หาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล ซึ่งเป็นระบบที่ใช้ในทางวิศวกรรมศาสตร์ กระบวนการทางเคมี โมเดลประชากร ระบบสมดุลทางชีววิทยา และระบบทางเศรษฐศาสตร์ ทั้งนี้ระบบพลวัตโดยทั่วไปมักประสบปัญหาไม่มีเสถียรภาพอันเนื่องจากตัวหน่วงที่มีขนาดเล็ก โดยในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่จะหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่สามารถขยายค่าของตัวหน่วงเป็นสำคัญ เนื่องจากค่าของตัวหน่วงที่เพิ่มขึ้นแสดงว่าระบบนั้น ๆ ยังคงมีเสถียรภาพได้อีกช่วงเวลาหนึ่งเมื่อระบบประสบปัญหาไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้นการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงจึงมีความสำคัญมากในทางทฤษฎีและปฏิบัติ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล 2 ส่วนด้วยกัน คือ

1. เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว
2. เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

อภิปรายผล

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวที่ได้ในทฤษฎีบทที่ 1 หาได้จากการเปลี่ยนตัวแปรและการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟรวมทั้งประยุกต์ใช้สูตรไลบนิซ-นิวตัน อสมการของ park อสมการปริพันธ์ และทฤษฎีไลปูนอฟ จากนั้นได้ทดสอบเงื่อนไขที่ได้โดยนำมาประยุกต์ใช้กับตัวอย่างที่ 1 จะให้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงมากกว่างานวิจัยของ Li and Liu (2009) โดยค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงแสดงถึงช่วงเวลาที่ระบบยังคงมีเสถียรภาพอยู่หลังจากที่ระบบถูกรบกวนเสถียรภาพ ยกตัวอย่างเช่น ขณะที่เราใช้งานคอมพิวเตอร์อยู่นั้นอาจเกิดไฟฟ้ากระชาก แต่ระบบคอมพิวเตอร์จะยังคงใช้งานได้ต่อ (มีเสถียรภาพ) ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง โดยเวลานี้จะขึ้นกับค่าของตัวหน่วง ซึ่งค่าขอบบนของตัวหน่วงยิ่งมากทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้นานขึ้น

จากนั้นได้นำเงื่อนไขจากทฤษฎีบทที่ 1 มาประยุกต์ใช้ในตัวอย่างที่ 2 จะให้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ขึ้นกับค่าอัตราการลู่เข้า α ในค่าต่าง ๆ ซึ่งมากกว่าในงานวิจัยของ Shu et al. (2009) และจากทั้งสองตัวอย่าง ยังพบว่าเมื่อระบบมีค่าอัตราการลู่เข้า α มากขึ้น ระบบก็จะลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วขึ้นแต่ทำให้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงลดน้อยลง จากตัวอย่างทั้งสองแสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขที่ได้ในทฤษฎีบทที่ 1 มีประสิทธิภาพมากกว่าในงานวิจัยของ Li and Liu (2009) และ Shu et al. (2009)

การหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว ที่หาได้ในทฤษฎีบทที่ 2 ดำเนินการด้วยการเปลี่ยนตัวแปร และสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ รวมทั้งประยุกต์ใช้สูตรไลนิช-นิวตัน อสมการของ park อสมการปริพันธ์ และทฤษฎีไลปูนอฟ จากการนำเงื่อนไขที่ได้มาประยุกต์ได้กับตัวอย่าง 1 โดยให้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงตามตารางที่ 2 พบว่าเมื่อระบบมีค่าอัตราการลู่เข้า α มากขึ้น ระบบก็จะลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วขึ้นและทำให้ระบบมีค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงน้อยลงเช่นเดียวกันกับทฤษฎีบทที่ 1 ซึ่งทำให้การหน่วงเวลาให้ระบบยังคงมีเสถียรภาพอยู่น้อยลงด้วยเมื่อระบบเกิดปัญหาความไม่มีเสถียรภาพขึ้น และในตารางที่ 3-5 พบว่าเมื่อค่าของ μ เพิ่มขึ้น $(\dot{h}(t) < \mu < 1)$ ค่าของ τ จะต้องมีค่าลดลงจึงจะทำให้ค่าตัวหน่วง h_1 มีค่าใกล้เคียงกับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 แต่อย่างไรก็ตามในตัวอย่างนี้ ไม่ได้มีการเปรียบค่าขอบเขตบนของตัวอย่างนี้กับกับงานวิจัยอื่น ๆ เนื่องจากไม่สามารถหางานวิจัยอื่น ๆ ของระบบเดียวกันมาเปรียบเทียบได้

นอกจากนี้ยังนำเงื่อนไขนี้มาประยุกต์กับระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว 2 ตัว ดังตัวอย่างที่ 2 และประยุกต์กับระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเป็นช่วง ผลที่ได้ในตัวอย่างที่ 2 พบว่าค่าของอัตราการลู่เข้า α มากกว่างานวิจัยของ Shu et al. (2009) โดยอัตราการลู่เข้า α เป็นค่าที่แสดงการลู่เข้าสู่คำตอบของระบบ ซึ่งถ้าค่าอัตราการลู่เข้า α มีค่ามากก็แสดงว่าระบบนั้นลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็ว และในตัวอย่างที่ 3 พบว่าค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ได้จากเงื่อนไขตามทฤษฎีบทที่ 2 ให้ค่าที่มากกว่างานวิจัยของ Amri et al. (2009) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเงื่อนไขจากทฤษฎีบทที่ 2 มีประสิทธิภาพมากกว่าในงานวิจัยของ Shu et al. (2009) และ Amri et al. (2009) และจากตารางที่ 9 พบว่าเมื่อค่าอัตราการลู่เข้า α มีค่ามากขึ้นจะทำให้มีค่า μ เพิ่มขึ้นที่ทำให้ค่าตัวหน่วง h_1 มีค่าใกล้เคียงกับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ทั้งนี้ในตัวอย่างที่ 3 ได้แสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลสามารถประยุกต์กับระบบเชิงเส้นได้

ทั้งนี้ในการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบพลวัตมักมีการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟที่มีฟังก์ชันเลขชี้กำลังประกอบอยู่ด้วย แต่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไลปูนอฟในรูปแบบดังกล่าวมีความซับซ้อนขึ้น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงทำการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อช่วยลดความซับซ้อนดังกล่าว และใช้ทฤษฎีไลปูนอฟเพื่อให้ได้มาซึ่งเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล

สรุปผล

จากการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล พบเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวในทฤษฎีบทที่ 1 และพบเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัวในทฤษฎีบทที่ 2 ตามลำดับดังนี้

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคง ตัว

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้ค่าคงตัว α และ $\bar{\tau} > 0$ ระบบสมการ (4.1) เป็นระบบนิวทรอลที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังที่มีอัตราการลู่เข้า α ถ้ามีเมทริกซ์สมมาตรและเป็นบวกแน่นอน P, Q_1, Q_2, N, W, R_1 และ R_2 ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \bar{\tau}(W+P)^T \\ * & Z_{22} & Z_{14} & 0 \\ * & * & Z_{33} & 0 \\ * & * & * & -N \end{bmatrix} < 0$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= P(A+B) + (A+B)^{\mathrm{T}} P + WB + B^{\mathrm{T}} W + Q_1 + A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} NBA + A^{\mathrm{T}} Q_2 A \\
&\quad + \bar{\tau}^2 R_1 + A^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 A - R_2 \\
Z_{12} &= -WB + A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} NBB + A^{\mathrm{T}} Q_2 B + A^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 B + R_2 \\
Z_{13} &= PC + A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} NBC + A^{\mathrm{T}} Q_2 C + A^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 C \\
Z_{22} &= -Q_1 + B^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} NBB + B^{\mathrm{T}} Q_2 B + B^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 B - R_2 \\
Z_{23} &= B^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} NBC + B^{\mathrm{T}} Q_2 C + B^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 C \\
Z_{33} &= -Q_2 + C^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} NBC + C^{\mathrm{T}} Q_2 C + C^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 C
\end{aligned}$$

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนดให้ค่าคงตัว α และ $\bar{\tau} > 0, h_2 > h_1 > 0, \mu < 1, B_1 = \bar{B}e^{\alpha h_1}, B_2 = \bar{B}e^{\alpha h_2}$ ระบบสมการ (4.19) เป็นระบบนิวทรอลที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังที่มีอัตราการลู่เข้า α ถ้ามีเมทริกซ์สมมาตรและเป็นบวกแน่นอน $P, Q_1, Q_2, Q_3, R, T, N$ และ W ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\Phi_1 = \Phi - [0\ I\ 0\ 0\ 0\ -I\ 0]^{\mathrm{T}} T [0\ I\ 0\ 0\ 0\ -I\ 0] < 0$$
$$\Phi_2 = \Phi - [0\ I\ 0\ 0\ -I\ 0\ 0]^{\mathrm{T}} T [0\ I\ 0\ 0\ -I\ 0\ 0] < 0$$

และ

$$\Phi = \begin{bmatrix} Y_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & R & R & h_2(W+P)^{\mathrm{T}} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & T & T & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R-T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R-T & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -N \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$Y_{11} = P(A+B_2) + (A+B_2)^{\mathrm{T}} P + WB_2 + B_2^{\mathrm{T}} W + Q_1 + Q_2 + \frac{A^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 A}{1-\mu} + A^{\mathrm{T}} Q_3 A$$
$$+ A^{\mathrm{T}} h_1^2 RA + A^{\mathrm{T}} h_2^2 RA + A^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TA - 2R_2$$

$$\Phi_{12} = -WB_1 + \frac{A^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 B_2}{1-\mu} + A^{\mathrm{T}} Q_3 B_2 + A^{\mathrm{T}} h_1^2 R B_2 + A^{\mathrm{T}} h_2^2 R B_2 + A^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 T B_2$$

$$\Phi_{13} = -PC - \frac{A^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 C}{1-\mu} - A^{\mathrm{T}} Q_3 C - A^{\mathrm{T}} h_1^2 RC - A^{\mathrm{T}} h_2^2 RC - A^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{14} = PD + \frac{A^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + A^{\mathrm{T}} Q_3 D + A^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + A^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + A^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{22} = -(1-\mu) Q_1 + \frac{B_2^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 B_2}{1-\mu} + B_2^{\mathrm{T}} Q_3 B_2 + B_2^{\mathrm{T}} h_1^2 R B_2 + B_2^{\mathrm{T}} h_2^2 R B_2$$
$$+ B_2^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 T B_2 - 2T$$

$$\Phi_{23} = -\frac{B_1^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 C}{1-\mu} - B_1^{\mathrm{T}} Q_3 C - B_1^{\mathrm{T}} h_1^2 RC - B_1^{\mathrm{T}} h_2^2 RC - B_1^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{24} = \frac{B_2^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + B_2^{\mathrm{T}} Q_3 D + B_2^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + B_2^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + B_2^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{33} = -Q_2 + \frac{C^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 C}{1-\mu} + C^{\mathrm{T}} Q_3 C + C^{\mathrm{T}} h_1^2 RC + C^{\mathrm{T}} h_2^2 RC + C^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{34} = -\frac{C^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 D}{1-\mu} - C^{\mathrm{T}} Q_3 D - C^{\mathrm{T}} h_1^2 RD - C^{\mathrm{T}} h_2^2 RD - C^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{44} = \frac{D^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + D^{\mathrm{T}} Q_3 D + D^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + D^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + D^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD - Q_3$$

ข้อเสนอแนะ

เราสามารถนำวิธีที่ใช้ในการวิจัยนี้ไปประยุกต์ใช้เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบอื่น ๆ ได้ เช่น ระบบที่มีตัวแน่นอนไม่เชิงเส้น ระบบที่มีตัวควบคุม ฯลฯ