บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในบทนี้ จะนำเสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวและระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น อสมการของ park และอสมการปริพันธ์ ในการหาเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล ซึ่งในบทนี้ แบ่งออกเป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ

1. เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว
2. เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

ในตอนท้ายจะนำเสนอตัวอย่างการนำเงื่อนไขที่หาได้ไปประยุกต์ใช้จริง และแสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขที่ได้จากงานวิจัยนี้มีประสิทธิภาพดีกว่าเงื่อนไขของงานวิจัยที่ผ่านมา

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว

พิจารณาระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวดังระบบสมการ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-\tau) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \;\; ,t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{4.1}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\tau > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\|\overline{C}\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้น โดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\tau, 0]$

เพื่อความสะดวกในการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบสมการ (4.1) เราจะหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบที่สมมูลกับระบบสมการ (4.1) โดยกำหนดให้

$$z(t) = e^{\alpha t}x(t), \; \alpha > 0$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\dot{z}(t) = e^{\alpha t}\dot{x}(t) + \alpha e^{\alpha t}x(t)$$

และจาก $\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-\tau) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau)$ จะได้สมการที่สมมูลกับระบบสมการ (4.1) คือ

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) + C\dot{z}(t-\tau) \tag{4.2}$$

โดยที่ $A = (\overline{A} + \alpha I),\ B = e^{\alpha\tau}(\overline{B} - \alpha\overline{C}), C = \overline{C}e^{\alpha\tau}$

ทฤษฏีบทที่ได้จากการหาเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลของระบบสมการ (4.1) ดังนี้

ทฤษฏีบทที่ 1 กำหนดให้ค่าคงตัว α และ $\overline{\tau} > 0$ ระบบสมการ (4.1) เป็นระบบนิวทรอลที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังที่มีอัตราการลู่เข้า α ถ้ามีเมทริกซ์สมมาตรและเป็นบวกแน่นอน P, Q_1, Q_2, N, W, R_1 และ R_2 ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \overline{\tau}(W+P)^T \\ * & Z_{22} & Z_{14} & 0 \\ * & * & Z_{33} & 0 \\ * & * & * & -N \end{bmatrix} < 0 \tag{4.3}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= P(A+B) + (A+B)^{\mathrm{T}}P + WB + B^{\mathrm{T}}W + Q_1 + A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBA + A^{\mathrm{T}}Q_2A \\
&\quad + \overline{\tau}^2R_1 + A^{\mathrm{T}}\overline{\tau}^2R_2A - R_2 \\
Z_{12} &= -WB + A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBB + A^{\mathrm{T}}Q_2B + A^{\mathrm{T}}\overline{\tau}^2R_2B + R_2 \\
Z_{13} &= PC + A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC + A^{\mathrm{T}}Q_2C + A^{\mathrm{T}}\overline{\tau}^2R_2C \\
Z_{22} &= -Q_1 + B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBB + B^{\mathrm{T}}Q_2B + B^{\mathrm{T}}\overline{\tau}^2R_2B - R_2 \\
Z_{23} &= B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC + B^{\mathrm{T}}Q_2C + B^{\mathrm{T}}\overline{\tau}^2R_2C \\
Z_{33} &= -Q_2 + C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC + C^{\mathrm{T}}Q_2C + C^{\mathrm{T}}\overline{\tau}^2R_2C
\end{aligned}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\tau \in [0, \overline{\tau}]$ และเลือกฟังก์ชันไลปูนอฟ : $V(z_t) = \sum_{i=1}^{6} V_i$

เมื่อ

$$V_1(z_t) = z^T(t)Pz(t) \tag{4.4}$$

$$V_2(z_t) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)dsd\beta \tag{4.5}$$

$$V_3(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)Q_1 z(s)ds \tag{4.6}$$

$$V_4(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)Q_2\dot{z}(s)ds \tag{4.7}$$

$$V_5(z_t) = \tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)R_1 z(s)dsd\beta \tag{4.8}$$

$$V_6(z_t) = \tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)dsd\beta \tag{4.9}$$

พิจารณาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $V_i(z_t),\ i = 1,2,...,6$ ที่สอดคล้องกับสมการ (4.2) จะได้

$$\dot{V}_1(z_t) = 2z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)$$

ประยุกต์ใช้สูตรไลบนิช-นิวตันสมการที่ (4.2) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{z}(t) = (A+B)z(t) - B\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds + C\dot{z}(t-\tau) \tag{4.10}$$

และแทนสมการที่ (4.10) ลงใน $\dot{V}_1(z_t)$ จะได้

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(z_t) &= 2z^{\mathrm{T}}(t)P[(A+B)z(t) - B\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds + C\dot{z}(t-\tau)]\\ &= 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)PB\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds + 2z^{\mathrm{T}}(t)PC\dot{z}(t-\tau)\end{aligned} \tag{4.11}$$

และจากบทตั้ง 2.6 เมื่อกำหนดให้ $a(\gamma) = B\dot{z}(s)$ และ $b(\gamma) = Pz(t)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}-2\int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(t)PB\dot{z}(s)ds &\le \int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix} B\dot{z}(s)\\ Pz(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & XM\\ M^{\mathrm{T}}X & (XM+I)^{\mathrm{T}}X^{-1}(XM+I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B\dot{z}(s)\\ Pz(t)\end{bmatrix}ds\\ &= \int_{t-\tau}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds + 2z^{\mathrm{T}}(t)PM^{\mathrm{T}}XB\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds\\ &\quad + \tau\, z^{\mathrm{T}}(t)P(M^{\mathrm{T}}X+I)X^{-1}(XM+I)Pz(t)\end{aligned} \tag{4.12}$$

นำอสมการที่ (4.12) แทนในสมการที่ (4.11) และเลือก $W = PM^{\mathrm{T}}X$ และ $N = \bar{\tau}\,X$ ดังนั้นได้

$$\dot{V}_1(z_t) \le 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds + 2z^{T}(t)PM^{\mathrm{T}}XB\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds$$
$$+\tau z^{\mathrm{T}}(t)P(M^{\mathrm{T}}X+I)X^{-1}(XM+I)Pz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PC\dot{z}(t-\tau)$$
$$= 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)WB[z(t)-z(t-\tau)] + \int_{t-\tau}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$
$$+ z^{T}(t)(W+P)\bar{\tau}^{2}N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PC\dot{z}(t-\tau)$$
$$= 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)WBz(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)WBz(t-\tau) \tag{4.13}$$
$$+\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds + z^{\mathrm{T}}(t)(W+P)\bar{\tau}^{2}N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}z(t)$$

สำหรับอนุพันธ์ของ $V_2(z_t)$ จะได้

$$\dot{V}_2(z_t) = \tau\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(t) - \int_{t-\tau}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$
$$= [Az(t)+Bz(t-\tau)+C\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}\tau B^{\mathrm{T}}XB[Az(t)+Bz(t-\tau)C\dot{z}(t-\tau)] \tag{4.14}$$
$$-\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$

อนุพันธ์ของ $V_3(z_t)$ และ $V_4(z_t)$ สอดคล้องกับ

$$\dot{V}_3(z_t) = z^{\mathrm{T}}(t)Q_1z(t) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_1z(t-\tau) \tag{4.15}$$

$$\dot{V}_4(z_t) = \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)Q_2\dot{z}(t) - \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2\dot{z}(t-\tau)$$
$$= [Az(t)+Bz(t-\tau)+C\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}Q_2[Az(t)+Bz(t-\tau)+C\dot{z}(t-\tau)] \tag{4.16}$$
$$-\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2\dot{z}(t-\tau)$$

อนุพันธ์ของ $V_5(z_t)$ และ $V_6(z_t)$ สอดคล้องกับ

$$\dot{V}_5(z_t) = \tau^2 z^{\mathrm{T}}(t)R_1z(t) - \tau\int_{t-\tau}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)R_1z(s)ds$$

$$\dot{V}_6(z_t) = \tau^2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R_2\dot{z}(t) - \tau\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)ds$$

โดยบทตั้ง 2.5 เราจะได้ว่า

$$-\int_{t-\tau}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)R_1z(s)ds \le -\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)dsR_1\int_{t-\tau}^{t}z(s)ds$$

ดังนั้น

$$\dot{V}_5(z_t) \le \bar{\tau}^2 z^{\mathrm{T}}(t)R_1 z(t) - \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)dsR_1 \int_{t}^{t} z(s)ds \tag{4.17}$$

และโดยบทตั้ง 2.5 และสูตรนิวตัน-ไลนิช จะได้

$$\begin{aligned}
-\tau \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)ds &\le -\left[\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds\right]^{\mathrm{T}} R_2 \left[\int_{t-\tau}^{t}\dot{z}(s)ds\right] \\
&= -[z(t)-z(t-\tau)]^{\mathrm{T}} R_2 [z(t)-z(t-\tau)] \\
&= -z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t-\tau) \\
&\quad - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2 z(t-\tau)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\dot{V}_6(z_t) &= \tau^2 \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R_2\dot{z}(t) - z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t-\tau) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2 z(t-\tau) \\
&\le [Az(t)+Bz(t-\tau)+C\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}} \bar{\tau}^2 R_2 [Az(t)+Bz(t-\tau)+C\dot{z}(t-\tau)] \\
&\quad - z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t-\tau) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2 z(t-\tau)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

จากสมการที่ (4.13)-(4.18) จะได้

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) \le\ & 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)WBz(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)WBz(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t)(W+P)\bar{\tau}^2 N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}} z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PC\dot{z}(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBAz(t) + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBBz(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC\dot{z}(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBAz(t) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBBz(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC\dot{z}(t-\tau) \\
& + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBAz(t) + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBBz(t-\tau) \\
& + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC\dot{z}(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t)Q_1 z(t) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_1 z(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}Q_2 Az(t) + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}Q_2 Bz(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}Q_2 C\dot{z}(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}Q_2 Az(t) + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}Q_2 Bz(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}Q_2 C\dot{z}(t-\tau) \\
& + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}Q_2 Az(t) + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}Q_2 Bz(t-\tau) + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}Q_2 C\dot{z}(t-\tau) \\
& - \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2\dot{z}(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t)\bar{\tau}^2 R_1 z(t) - \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)dsR_1 \int_{t-\tau}^{t} z(s)ds \\
& + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 Az(t) + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 Bz(t-\tau) + z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 C\dot{z}(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 Az(t) + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 Bz(t-\tau) \\
& + z^{\mathrm{T}}(t-\tau)B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 C\dot{z}(t-\tau) + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 Az(t) \\
& + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 Bz(t-\tau) + \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2 R_2 C\dot{z}(t-\tau) \\
& - z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)R_2 z(t-\tau) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2 z(t-\tau)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= z^{\mathrm{T}}(t)[P(A+B)+(A+B)^{\mathrm{T}}P+WB+B^{\mathrm{T}}W+Q_1+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBA+A^{\mathrm{T}}Q_2A \\
&\quad +(W+P)\bar{\tau}^2N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}+\bar{\tau}^2R_1+A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2A-R_2]z(t) \\
&\quad +2z^{\mathrm{T}}(t-\tau)[-WB+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBB+A^{\mathrm{T}}Q_2B+A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2B+R_2]z(t) \\
&\quad +2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[PC+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC+A^{\mathrm{T}}Q_2C+A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2C]z(t) \\
&\quad +z^{\mathrm{T}}(t-\tau)[B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBB-Q_1+B^{\mathrm{T}}Q_2B+B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2B-R_2]z(t-\tau) \\
&\quad +2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC+B^{\mathrm{T}}Q_2C+B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2C]z(t-\tau) \\
&\quad +\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC+C^{\mathrm{T}}Q_2C-Q_2+C^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2C]\dot{z}(t-\tau) \\
&\quad -\int_{t-\tau}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)dsR_1\int_{t-\tau}^{t}z(s)ds \\
&= \eta^{\mathrm{T}}\Omega^{*}\eta
\end{aligned}
$$

โดยที่ $\eta = [z(t)\ z(t-\tau)\ \dot{z}(t-\tau)\ \int_{t-\tau}^{t}z(s)ds]^{\mathrm{T}}$ และ $\Omega^{*} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & 0 \\ * & Z_{22} & Z_{23} & 0 \\ * & * & Z_{33} & 0 \\ * & * & * & Z_{44} \end{bmatrix}$ ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
Z_{11} &= P(A+B)+(A+B)^{\mathrm{T}}P+WB+B^{\mathrm{T}}W+Q_1+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBA+A^{\mathrm{T}}Q_2A \\
&\quad +\bar{\tau}^2(W+P)N^{-1}(W+P)^{T}+\bar{\tau}^2R_1+A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2A-R_2 \\
Z_{12} &= -WB+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBB+A^{\mathrm{T}}Q_2B+A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2B+R_2 \\
Z_{13} &= PC+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC+A^{\mathrm{T}}Q_2C+A^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2C \\
Z_{22} &= -Q_1+B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBB+B^{\mathrm{T}}Q_2B+B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2B-R_2 \\
Z_{23} &= B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC+B^{\mathrm{T}}Q_2C+B^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2C \\
Z_{33} &= -Q_2+C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}NBC+C^{\mathrm{T}}Q_2C+C^{\mathrm{T}}\bar{\tau}^2R_2C \\
Z_{44} &= -R_1
\end{aligned}
$$

ถ้า $\Omega^{*} < 0$ จะได้ว่า $\dot{V}(z_t) < 0$ และโดยบทตั้ง 2.4 จะได้ว่า $\dot{V}(z_t) < 0$ สมมูลกับอสมการ (4.3) และจากไลปูนอฟข้างต้น จะได้ว่า

$$\lambda_1\|z(t)\|^2 \le V(t,z_t) \le \lambda_2\|z_t\|^2$$

โดยที่

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(P)$$

และ

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}(P)+\bar{\tau}^2\lambda_{\max}(B^{\mathrm{T}}XB)+\bar{\tau}\lambda_{\max}(Q_1)+\bar{\tau}\lambda_{\max}(Q_2)+\bar{\tau}^3\lambda_{\max}(R_1)+\bar{\tau}^3\lambda_{\max}(R_2)$$

โดยบทตั้ง 2.8 จะมี $K > 0$ ที่ทำให้

$$\|z(t,\phi)\| \le K\|\phi\|, \forall t \ge 0$$

จากการเปลี่ยนตัวแปร $z(t) = e^{\alpha t} x(t),\ \alpha > 0$ จะได้ว่า

$$\|x(t,\phi)\| \le K\|\phi\| e^{-\alpha t}, \forall t \ge 0$$

ดังนั้นระบบสมการ (4.1) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

พิจารณาระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว ดังระบบสมการ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \ ,t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\max\{\tau, h_2\}, 0] \end{cases} \tag{4.19}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\tau > 0$ เป็นตัวหน่วงมีค่าคงตัว

$\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\max\{\tau, h_2\}, 0]$

$\|\overline{C}\| < 1$ และ $h(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2,\ \dot{h}(t) \le \mu < 1$

h_1, h_2, μ เป็นค่าคงตัว

เพื่อความสะดวกในการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบสมการ (4.19) เราจะหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบที่สมมูลกับระบบสมการ (4.19) โดยกำหนดให้

$$z(t) = e^{\alpha t} x(t),\ \alpha > 0$$

ดังนั้นจะได้

$$\dot{z}(t) = e^{\alpha t}\dot{x}(t) + \alpha e^{\alpha t} x(t)$$

และจาก $\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau)$ จะได้สมการที่สมมูลกับระบบสมการ (4.19) คือ

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h(t)) - Cz(t-\tau) + D\dot{z}(t-\tau) \tag{4.20}$$

โดยที่ $A=(\overline{A}+\alpha I), B=\overline{B}e^{\alpha h(t)},\ \ C=\alpha e^{\alpha\tau}\overline{C},\ D=\overline{C}e^{\alpha\tau}$

ทฤษฎีบทที่ได้จากการหาเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลของระบบสมการ (4.19) ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนดให้ค่าคงตัว α และ $\overline{\tau}>0, h_2>h_1>0, \mu<1, B_1=\overline{B}e^{\alpha h_1}, B_2=\overline{B}e^{\alpha h_2}$ ระบบสมการ (4.19) เป็นระบบนิวทรอลที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังที่มีอัตราการลู่เข้า α ถ้ามีเมทริกซ์สมมาตรและเป็นบวกแน่นอน P,Q_1,Q_2,Q_3,R,T,N และ W ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\Phi_1=\Phi-[0\ I\ 0\ 0\ 0-I\ 0]^{\mathrm{T}}T[0\ I\ 0\ 0\ 0-I\ 0]<0 \tag{4.21}$$

$$\Phi_2=\Phi-[0\ I\ 0\ 0-I\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}T[0\ I\ 0\ 0-I\ 0\ 0]<0 \tag{4.22}$$

และ

$$\Phi=\begin{bmatrix} Y_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & R & R & h_2(W+P)^{\mathrm{T}} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & T & T & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R-T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R-T & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -N \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

โดยที่

$$Y_{11}=P(A+B_2)+(A+B_2)^{\mathrm{T}}P+WB_2+B_2^{\mathrm{T}}W+Q_1+Q_2+\frac{A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2A}{1-\mu}+A^{\mathrm{T}}Q_3A$$
$$+A^{\mathrm{T}}h_1^2RA+A^{\mathrm{T}}h_2^2RA+A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TA-2R_2$$

$$\Phi_{12}=-WB_1+\frac{A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2B_2}{1-\mu}+A^{\mathrm{T}}Q_3B_2+A^{\mathrm{T}}h_1^2RB_2+A^{\mathrm{T}}h_2^2RB_2+A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TB_2$$

$$\Phi_{13}=-PC-\frac{A^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1C}{1-\mu}-A^{\mathrm{T}}Q_3C-A^{\mathrm{T}}h_1^2RC-A^{\mathrm{T}}h_2^2RC-A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TC$$

$$\Phi_{14}=PD+\frac{A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D}{1-\mu}+A^{\mathrm{T}}Q_3D+A^{\mathrm{T}}h_1^2RD+A^{\mathrm{T}}h_2^2RD+A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TD$$

$$\Phi_{22} = -(1-\mu)Q_1 + \frac{B_2^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 B_2}{1-\mu} + B_2^{\mathrm{T}} Q_3 B_2 + B_2^{\mathrm{T}} h_1^2 R B_2 + B_2^{\mathrm{T}} h_2^2 R B_2$$
$$+ B_2^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 T B_2 - 2T$$

$$\Phi_{23} = -\frac{B_1^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 C}{1-\mu} - B_1^{\mathrm{T}} Q_3 C - B_1^{\mathrm{T}} h_1^2 RC - B_1^{\mathrm{T}} h_2^2 RC - B_1^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{24} = \frac{B_2^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + B_2^{\mathrm{T}} Q_3 D + B_2^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + B_2^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + B_2^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{33} = -Q_2 + \frac{C^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 C}{1-\mu} + C^{\mathrm{T}} Q_3 C + C^{\mathrm{T}} h_1^2 RC + C^{\mathrm{T}} h_2^2 RC + C^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{34} = -\frac{C^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 D}{1-\mu} - C^{\mathrm{T}} Q_3 D - C^{\mathrm{T}} h_1^2 RD - C^{\mathrm{T}} h_2^2 RD - C^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{44} = \frac{D^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + D^{\mathrm{T}} Q_3 D + D^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + D^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + D^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 TD - Q_3$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ และเลือกฟังก์ชันไลปูนอฟ : $V(z_t) = \sum_{i=1}^{8} V_i$

เมื่อ

$$V_1(z_t) = z^T(t) P z(t) \tag{4.24}$$

$$V_2(z_t) = \frac{1}{1-\mu} \int_{t-h(t)}^{t} (h(t) - t + s) \dot{z}^{\mathrm{T}}(s) B^{\mathrm{T}} X B \dot{z}(s) ds \tag{4.25}$$

$$V_3(z_t) = \int_{t-h(t)}^{t} z^{\mathrm{T}}(s) Q_1 z(s) ds \tag{4.26}$$

$$V_4(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s) Q_2 z(s) ds \tag{4.27}$$

$$V_5(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s) Q_3 \dot{z}(s) ds \tag{4.28}$$

$$V_6(z_t) = h_1 \int_{-h_1}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s) R \dot{z}(s) ds d\theta \tag{4.29}$$

$$V_7(z_t) = h_2 \int_{-h_2}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s) R \dot{z}(s) ds d\theta \tag{4.30}$$

$$V_8(z_t) = (h_2 - h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s) T \dot{z}(s) ds d\theta \tag{4.31}$$

อนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $V_i(z_t),\ i = 1, 2, \ldots, 8$ ที่สอดคล้องกับสมการ (4.20) จะได้

$$\dot{V}_1(z_t) = 2z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)$$

จากสูตรไลบนิช-นิวตัน สมการที่ (4.20) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{z}(t) = (A+B)z(t) - B\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}(s)ds - Cz(t-\tau) + D\dot{z}(t-\tau) \tag{4.32}$$

แทนสมการที่ (4.32) ลงใน $\dot{V}_1(z_t)$ จะได้

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(z_t) &= 2z^{\mathrm{T}}(t)P[(A+B)z(t) - B\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}(s)ds - Cz(t-\tau) + D\dot{z}(t-\tau)] \\ &= 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)PB\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}(s)ds - 2z^{\mathrm{T}}(t)PCz(t-\tau) \\ &\quad + 2PD\dot{z}(t-\tau)\end{aligned} \tag{4.33}$$

และจากบทตั้ง 2.6 เมื่อกำหนดให้ $a(\gamma) = B\dot{z}(s)$ และ $b(\gamma) = Pz(t)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}-2\int_{t-h(t)}^{t}z^{\mathrm{T}}(t)PB\dot{z}(s)ds &\le \int_{t-h(t)}^{t}\begin{bmatrix}B\dot{z}(s)\\ Pz(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}X & XM\\ M^{\mathrm{T}}X & (XM+I)^{\mathrm{T}}X^{-1}(XM+I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\dot{z}(s)\\ Pz(t)\end{bmatrix}ds \\ &= \int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds + 2z^{\mathrm{T}}(t)PM^{\mathrm{T}}XB\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}(s)ds \\ &\quad + h_2\, z^{\mathrm{T}}(t)P(M^{\mathrm{T}}X+I)X^{-1}(XM+I)Pz(t)\end{aligned} \tag{4.34}$$

นำอสมการที่ (4.34) แทนในสมการที่ (4.33) และเลือก $W = PM^{\mathrm{T}}X$ และ $N = h_2X$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(z_t) &\le 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + \int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds + 2z^{T}(t)PM^{\mathrm{T}}XB\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}(s)ds \\ &\quad + h_2\, z^{\mathrm{T}}(t)P(M^{\mathrm{T}}X+I)X^{-1}(XM+I)Pz(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)PCz(t-\tau) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PD\dot{z}(t-\tau) \\ &= 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)WB[z(t) - z(t-h(t))] + \int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds \\ &\quad + z^{T}(t)(W+P)h_2^2N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}z(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)PCz(t-\tau) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PD\dot{z}(t-\tau) \\ &= 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B)z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)WBz(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)WBz(t-h(t)) - 2z^{\mathrm{T}}(t)PCz(t-\tau) \\ &\quad + \int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds + z^{\mathrm{T}}(t)(W+P)h_2^2N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PD\dot{z}(t-\tau)\end{aligned}$$

(4.35)

สำหรับอนุพันธ์ของ $V_2(z_t)$ จะได้

$$\dot{V}_2(z_t)=\frac{h(t)}{1-\mu}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(t)-\frac{(1-\dot{h}(t))}{1-\mu}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$
$$\le\frac{1}{1-\mu}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}h_2XB\dot{z}(t)-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$
$$=\frac{1}{1-\mu}[Az(t)+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}h_2XB[Az(t)$$
$$+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)]-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds \tag{4.36}$$

อนุพันธ์ของ $V_3(z_t)$, $V_4(z_t)$ และ $V_5(z_t)$ สอดคล้องกับ

$$\dot{V}_3(z_t)=z^{\mathrm{T}}(t)Q_1z(t)-(1-\dot{h}(t))z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Q_1z(t-h(t))$$
$$\le z^{\mathrm{T}}(t)Q_1z(t)-(1-\mu)z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Q_1z(t-h(t)) \tag{4.37}$$

$$\dot{V}_4(z_t)=z^{\mathrm{T}}(t)Q_2z(t)-z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2z(t-\tau) \tag{4.38}$$

$$\dot{V}_5(z_t)=\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)Q_3\dot{z}(t)-\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_3\dot{z}(t-\tau)$$
$$=[Az(t)+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}Q_3[Az(t)+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)$$
$$+D\dot{z}(t-\tau)]-\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_3\dot{z}(t-\tau) \tag{4.39}$$

อนุพันธ์ของ $V_6(z_t)$ และ $V_7(z_t)$ สอดคล้องกับ

$$\dot{V}_6(z_t)=h_1^{\,2}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{z}(t)-h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)ds$$
$$\dot{V}_7(z_t)=h_2^{\,2}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{z}(t)-h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)ds$$

โดยบทตั้ง 2.5 เราจะได้ว่า

$$-h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)ds\le-\left[\int_{t-h_1}^{t}\dot{z}(s)ds\right]^{\mathrm{T}}R\left[\int_{t-h_1}^{t}\dot{z}(s)ds\right]$$
$$=-[z(t)-z(t-h_1)]^{\mathrm{T}}R[z(t)-z(t-h_1)]$$
$$=-z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t)+2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_1)$$
$$-z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Rz(t-h_1)$$

ดังนั้น

$$\dot{V}_6(z_t) \le h_1^{\,2}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{z}(t) - z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_1) - z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Rz(t-h_1) \tag{4.40}$$

และโดยบทตั้ง 2.5 และสูตรนิวตัน-ไลนิช เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} -h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)ds &\le -\left[\int_{t-h_2}^{t}\dot{z}(s)ds\right]^{\mathrm{T}} R\left[\int_{t-h_2}^{t}\dot{z}(s)ds\right] \\ &= -[z(t)-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}R[z(t)-z(t-h_2)] \\ &= -z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_2) \\ &\quad - z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Rz(t-h_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \dot{V}_7(z_t) &\le h_2^2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{z}(t) - z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_2) - z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Rz(t-h_2) \\ &= [Az(t)+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}h_2^2R[Az(t)+Bz(t-h(t)) \\ &\quad -Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)] - z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_2) - z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Rz(t-h_2) \end{aligned} \tag{4.41}$$

อนุพันธ์ของ $V_8(z_t)$ สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} \dot{V}_8(z_t) &= (h_2-h_1)^2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)T\dot{z}(t) - (h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)T\dot{z}(t)ds \\ &= [Az(t)+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2T[Az(t)+Bz(t-h(t)) \\ &\quad -Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)] - (h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h_1}z^{\mathrm{T}}(s)Tz(s)ds \end{aligned}$$

และเนื่องจาก

$$\begin{aligned} -(h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds &= -(h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds - (h_2-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds \\ &= -(h_2-h(t))\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds - (h(t)-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds \\ &\quad -(h(t)-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds - (h_2-h(t))\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} -(h_2-h(t))\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds &\le -[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}(s)ds]^{\mathrm{T}}T[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}(s)ds] \\ &= -[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)] \end{aligned}$$

$$= -z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h(t)) + 2z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h_2)$$
$$- z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Tz(t-h_2)$$

และ

$$-(h(t)-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds \le -[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{z}(s)ds]^{\mathrm{T}}T[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{z}(s)ds]$$
$$= -[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]$$
$$= -z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h_1) + 2z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h(t))$$
$$- z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h(t))$$

กำหนดให้ $\beta = \dfrac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}$ ซึ่ง $\beta \le 1$ ดังนั้น

$$-(h_2-h(t))\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds = -\beta\int_{t-h(t)}^{t-h_1}(h_2-h_1)\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds$$
$$\le -\beta\int_{t-h(t)}^{t-h_1}(h(t)-h_1)\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds$$
$$\le -\beta[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]$$

และ

$$-(h(t)-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds = -(1-\beta)\int_{t-h_2}^{t-h(t)}(h_2-h_1)\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds$$
$$\le -(1-\beta)\int_{t-h_2}^{t-h(t)}(h_2-h(t))\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds$$
$$\le -(1-\beta)[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)]$$

จะได้

$$-(h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)ds \le -[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)]$$
$$-[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]$$
$$-\beta[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]$$
$$-(1-\beta)[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)]$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\dot{V}_8(z_t) \le{}& (h_2-h_1)^2[Az(t)+Bz(t-h(t))-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}T[Az(t)+Bz(t-h(t))\\ &-Cz(t-\tau)+D\dot{z}(t-\tau)] - z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h(t)) + 2z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h_2)\\ &- z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Tz(t-h_2) - z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h_1) + 2z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h(t))\\ &- z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h(t)) - \beta[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]\\ &-(1-\beta)[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)]\end{aligned} \tag{4.42}$$

จากสมการที่ (4.35)-(4.42) และจาก $B = \overline{B}e^{\alpha h(t)}, h_1 \le h(t) \le h_2$ และกำหนดให้

$B_1 = \overline{B}e^{\alpha h_1}, B_2 = \overline{B}e^{\alpha h_2}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) \le{}& 2z^{\mathrm{T}}(t)P(A+B_2)z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t)WB_2z(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)WB_1z(t-h(t)) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t)(W+P)h_2^2N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}z(t) - 2z^{\mathrm{T}}(t)PCz(t-\tau) + 2z^{\mathrm{T}}(t)PD\dot{z}(t-\tau) \\
&+ \frac{z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2Az(t)}{1-\mu} + \frac{z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2B_2z(t-h(t))}{1-\mu} - \frac{z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1Cz(t-\tau)}{1-\mu} \\
&+ \frac{z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D\dot{z}(t-\tau)}{1-\mu} + \frac{z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2Az(t)}{1-\mu} \\
&+ \frac{z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2B_2z(t-h(t))}{1-\mu} - \frac{z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1Cz(t-\tau)}{1-\mu} \\
&+ \frac{z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D\dot{z}(t-\tau)}{1-\mu} - \frac{z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1Az(t)}{1-\mu} \\
&- \frac{z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1B_1z(t-h(t))}{1-\mu}) + \frac{z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2Cz(t-\tau)}{1-\mu} \\
&+ \frac{\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)D^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D\dot{z}(t-\tau)}{1-\mu} + z^{\mathrm{T}}(t)Q_1z(t) - (1-\mu)z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Q_1z(t-h(t)) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t)Q_2z(t) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2z(t-\tau) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Az(t) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]B_2z(t-h(t)) \\
&- z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Cz(t-\tau) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]D\dot{z}(t-\tau) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_2^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Az(t) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_2^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]B_2z(t-h(t)) \\
&- z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_1[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Cz(t-\tau) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t-h(t))B_2^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]D\dot{z}(t-\tau) \\
&- z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Az(t) \\
&- z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]B_1z(t-h(t)) \\
&+ z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Cz(t-\tau) \\
&- z^{\mathrm{T}}(t-\tau)C^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]D\dot{z}(t-\tau) \\
&+ \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)D^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Az(t) \\
&+ \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)D^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]B_2z(t-h(t)) \\
&- \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)D^{\mathrm{T}}[Q_3 + (h_1^2+h_2^2)R + (h_2-h_1)^2T]Cz(t-\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)D^{\mathrm{T}}[Q_3+(h_1^2+h_2^2)R+(h_2-h_1)^2T]D\dot{z}(t-\tau)-\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_3\dot{z}(t-\tau)\\
&-2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t)+2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_1)-z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Rz(t-h_1)+2z^{\mathrm{T}}(t)Rz(t-h_2)\\
&-z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Rz(t-h_2)-z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h(t))+2z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h_2)\\
&-z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Tz(t-h_2)-z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h_1)+2z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h(t))\\
&-z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Tz(t-h(t))-\beta[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]\\
&-(1-\beta)[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=z^{\mathrm{T}}(t)[P(A+B_2)+(A+B_2)^{\mathrm{T}}P+WB_2+B_2^{\mathrm{T}}W+Q_1+Q_2+\frac{A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2A}{1-\mu}+A^{\mathrm{T}}Q_3A\\
&+(W+P)h_2^2N^{-1}(W+P)^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}h_1^2RA+A^{\mathrm{T}}h_2^2RA+A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TA-2R]z(t)\\
&+2z^{\mathrm{T}}(t-h(t))[-WB_1+\frac{A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2B_2}{1-\mu}+A^{\mathrm{T}}Q_3B_2+A^{\mathrm{T}}h_1^2RB_2+A^{\mathrm{T}}h_2^2RB_2\\
&+A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TB_2]z(t)+2z^{\mathrm{T}}(t-\tau)[-PC-\frac{A^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1C}{1-\mu}-A^{\mathrm{T}}Q_2C-A^{\mathrm{T}}h_1^2RC\\
&-A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TC]z(t)+2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[PD+\frac{A^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D}{1-\mu}+A^{\mathrm{T}}Q_3D+A^{\mathrm{T}}h_1^2RD\\
&+A^{\mathrm{T}}h_2^2RD+A^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TD]z(t)+2z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Rz(t)+2z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Rz(t)\\
&+z^{\mathrm{T}}(t-h(t))[\frac{B_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2B_2}{1-\mu}-(1-\mu)Q_1+B_2^{\mathrm{T}}Q_3B_2+B_2^{\mathrm{T}}h_1^2RB_2+B_2h_2^2RB_2\\
&+B_2^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TB_2-2T]z(t-h(t))+2z^{\mathrm{T}}(t-\tau)[-\frac{B_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1C}{1-\mu}-B_1^{\mathrm{T}}Q_3C-B_1^{\mathrm{T}}h_1^2RC\\
&-B_1^{\mathrm{T}}h_2^2RC-B_1^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TC]z(t-h(t))+2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[\frac{B_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D}{1-\mu}+B_2^{\mathrm{T}}Q_3D\\
&+B_2^{\mathrm{T}}h_1^2RD+B_2^{\mathrm{T}}h_2^2RD+B_2^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TD]z(t-h(t))+2z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h(t))\\
&+2z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Tz(t-h(t))+z^{\mathrm{T}}(t-\tau)[\frac{C^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2C}{1-\mu}+C^{\mathrm{T}}Q_3C-Q_2+C^{\mathrm{T}}h_1^2RC\\
&+C^{\mathrm{T}}h_2^2RC+C^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TC]z(t-\tau)+2\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)][-\frac{C^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}NB_1D}{1-\mu}-C^{\mathrm{T}}Q_3D\\
&-C^{\mathrm{T}}h_1^2RD-C^{\mathrm{T}}h_2^2RD-C^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TD]z(t-\tau)+\dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[\frac{D^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}NB_2D}{1-\mu}\\
&+D^{\mathrm{T}}Q_3D+D^{\mathrm{T}}h_1^2RD+D^{\mathrm{T}}h_2^2RD+D^{\mathrm{T}}(h_2-h_1)^2TD-Q_3]\dot{z}(t-\tau)\\
&-z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Rz(t-h_1)-z^{\mathrm{T}}(t-h_1)Tz(t-h_1)-z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Rz(t-h_2)\\
&-z^{\mathrm{T}}(t-h_2)Tz(t-h_2)-\beta[z(t-h_1)-z(t-h(t))]^{\mathrm{T}}T[z(t-h_1)-z(t-h(t))]\\
&-(1-\beta)[z(t-h(t))-z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}T[z(t-h(t))-z(t-h_2)]
\end{aligned}
$$

$$= \zeta^{\mathrm{T}} \Phi^* \zeta - \beta[z(t-h_1) - z(t-h(t))]^{\mathrm{T}} T[z(t-h_1) - z(t-h(t))]$$
$$- (1-\beta)[z(t-h(t)) - z(t-h_2)]^{\mathrm{T}} T[z(t-h(t)) - z(t-h_2)]$$
$$= \zeta^{\mathrm{T}}(t)[(1-\beta)\Phi_1^* + \beta\Phi_2^*]\zeta(t)$$

โดยที่ $\zeta = [z(t) \; z(t-h(t)) \; z(t-\tau) \; \dot{z}(t-\tau) \; z(t-h_1) \, z(t-h_2)]^{\mathrm{T}}$

และ $\Phi_1^* = \Phi^* - [0 \; I \; 0 \; 0 \; 0 \; -I]^{\mathrm{T}} T [0 \; I \; 0 \; 0 \; 0 \; -I]$

$\Phi_2^* = \Phi^* - [0 \; I \; 0 \; 0 \; -I \; 0]^{\mathrm{T}} T [0 \; I \; 0 \; 0 \; -I \; 0]$

และ $$\Phi^* = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & R & R \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & T & T \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R-T & 0 \\ * & * & * & * & * & -R-T \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\Phi_{11} = P(A+B_2) + (A+B_2)^{\mathrm{T}} P + WB_2 + B_2^{\mathrm{T}} W + Q_1 + Q_2 + \frac{A^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 A}{1-\mu} + A^{\mathrm{T}} Q_3 A$$
$$+ h_2^2 (W+P) N^{-1} (W+P)^T + A^{\mathrm{T}} h_1^2 RA + A^{\mathrm{T}} h_2^2 RA + A^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TA - 2R_2$$

$$\Phi_{12} = -WB_1 + \frac{A^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 B_2}{1-\mu} + A^{\mathrm{T}} Q_3 B_2 + A^{\mathrm{T}} h_1^2 RB_2 + A^{\mathrm{T}} h_2^2 RB_2 + A^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TB_2$$

$$\Phi_{13} = -PC - \frac{A^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 C}{1-\mu} - A^{\mathrm{T}} Q_3 C - A^{\mathrm{T}} h_1^2 RC - A^{\mathrm{T}} h_2^2 RC - A^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{14} = PD + \frac{A^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + A^{\mathrm{T}} Q_3 D + A^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + A^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + A^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{22} = -(1-\mu) Q_1 + \frac{B_2^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 B_2}{1-\mu} + B_2^{\mathrm{T}} Q_3 B_2 + B_2^{\mathrm{T}} h_1^2 RB_2 + B_2^{\mathrm{T}} h_2^2 RB_2$$
$$+ B_2^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TB_2 - 2T$$

$$\Phi_{23} = -\frac{B_1^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 C}{1-\mu} - B_1^{\mathrm{T}} Q_3 C - B_1^{\mathrm{T}} h_1^2 RC - B_1^{\mathrm{T}} h_2^2 RC - B_1^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{24} = \frac{B_2^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + B_2^{\mathrm{T}} Q_3 D + B_2^{\mathrm{T}} h_1^2 RD + B_2^{\mathrm{T}} h_2^2 RD + B_2^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TD$$

$$\Phi_{33} = -Q_2 + \frac{C^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 C}{1-\mu} + C^{\mathrm{T}} Q_3 C + C^{\mathrm{T}} h_1^2 RC + C^{\mathrm{T}} h_2^2 RC + C^{\mathrm{T}} (h_2-h_1)^2 TC$$

$$\Phi_{34} = -\frac{C^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} N B_1 D}{1-\mu} - C^{\mathrm{T}} Q_3 D - C^{\mathrm{T}} h_1^2 R D - C^{\mathrm{T}} h_2^2 R D - C^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 T D$$

$$\Phi_{44} = \frac{D^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} N B_2 D}{1-\mu} + D^{\mathrm{T}} Q_3 D + D^{\mathrm{T}} h_1^2 R D + D^{\mathrm{T}} h_2^2 R D + D^{\mathrm{T}} (h_2 - h_1)^2 T D - Q_3$$

เนื่องจาก $\beta = \dfrac{h_2 - h(t)}{h_2 - h_1}$ ดังนั้น $0 \le \beta \le 1$ และ $(1-\beta)\Phi_1^* + \beta\Phi_2^*$ เป็นการรวมกันแบบคอนเวกซ์ (convex combination) ของ Φ_1^* และ Φ_2^* ดังนั้น $(1-\beta)\Phi_1^* + \beta\Phi_2^* < 0$ สมมูลกับ $\Phi_1^* < 0$ และ $\Phi_2^* < 0$

ถ้า $\Phi^* < 0$ จะได้ว่า $\dot{V}(z_t) < 0$ และโดยบทตั้ง 2.4 จะได้ว่า $\dot{V}(z_t) < 0$ สมมูลกับอสมการ (4.23) และจะได้สมการ (4.21) กับสมการ (4.22) ตามลำดับ และจากไลปูนอฟจะได้

$$\lambda_1 \|z(t)\|^2 \le V(t, z_t) \le \lambda_2 \|z_t\|^2$$

โดยที่

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(P)$$

และ

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}(P) + \frac{h_2}{1-\mu}\lambda_{\max}(B^{\mathrm{T}} X B) + h_2 \lambda_{\max}(Q_1) + \bar{\tau}\lambda_{\max}(Q_2) + \bar{\tau}\lambda_{\max}(Q_3)$$
$$+ h_1^3 \lambda_{\max}(R) + h_2^3 \lambda_{\max}(R) + (h_2 - h_1)^3 \lambda_{\max}(T)$$

โดยบทตั้ง 2.3 จะมี $K > 0$ ที่ทำให้

$$\|z(t,\phi)\| \le K\|\phi\|, \forall t \ge 0$$

จากการเปลี่ยนตัวแปร $z(t) = e^{\alpha t} x(t),\ \alpha > 0$ จะได้ว่า

$$\|x(t,\phi)\| \le K\|\phi\| e^{-\alpha t}, \forall t \ge 0$$

ดังนั้นในระบบสมการ (4.19) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ในส่วนต่อไปจะนำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงว่าเงื่อนไขที่หาได้สามารถนำไปใช้ได้จริงและมีประสิทธิภาพ โดยตัวอย่าง 1 และ 2 แสดงผลการประยุกต์ใช้เงื่อนไขที่ได้ของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว และตัวอย่าง 3 เป็นตัวอย่างการประยุกต์ใช้เงื่อนไขกับระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา

ตัวอย่าง 1 พิจารณาระบบสมการ (4.1) ที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวโดยที่

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.2\\ 0.1 & -0.9\end{bmatrix},\ \bar{B}=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.2\\ -0.1 & -1.1\end{bmatrix},\ \bar{C}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0.2 & -0.1\end{bmatrix}$$

ผลที่ได้ คำตอบเชิงตัวเลขที่ทำให้อสมการ (4.3) เป็นจริง หาได้โดยใช้ LMI toolbox ในโปรแกรม MATLAB จากการวิเคราะห์คำตอบเชิงตัวเลข พบว่าระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวดังระบบสมการ (4.1) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังโดยค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง τ สำหรับค่าอัตราการลู่เข้า α ค่าต่างๆ แสดงในตารางที่ 1

ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง τ ในตารางที่ 1 ชี้ให้เห็นว่าค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง τ ที่ได้จากเงื่อนไขในงานวิจัยนี้ดีกว่าค่าขอบเขตบนที่ได้จากเงื่อนไขของ Li and Liu (2009) ในกรณีที่ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ $(\alpha = 0)$ โดยค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 1 มีค่าอนันต์เมื่อเทียบกับค่า 1.6010 ในงานของ Li and Liu (2009) สำหรับกรณีที่ระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังซึ่งงานวิจัยของ Li and Liu (2009) ไม่สามารถทำได้ แต่ในงานวิจัยนี้พบว่าค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงแปรผกผันกับค่าอัตราการลู่เข้า นั่นคือ ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงมีค่าลดลงเมื่ออัตราการลู่เข้าเพิ่มขึ้นโดยพบอัตราการลู่เข้าสูงสุดที่ 1.7 และได้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ 0.95

อย่างไรก็ตามเงื่อนไขที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 2 ก็สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้กับตัวอย่างนี้ เมื่อกำหนดเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ตามตัวอย่าง 1 ระบบสมการ (4.14) จะมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง โดยผลที่ได้แสดงในตารางที่ 2-5

จากตารางที่ 2 แสดงค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ในทฤษฎีบทที่ 2 เมื่อกำหนดค่า $h_1 = 0, \mu = 0.01$ และ $\tau = 0.1$ โดยพบว่ากรณีระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ $(\alpha = 0)$ ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่ได้นั้นมีค่าอนันต์และกรณีที่ระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังพบค่าอัตราการลู่เข้าตั้งแต่ $\alpha = 0.1$ ถึง $\alpha = 3$ ซึ่งจะให้ค่าขอบเขตบน h_2 ของตัวหน่วงค่าต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 2

จากตารางที่ 3 แสดงค่าของขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าตัวหน่วง h_1 ค่าต่าง ๆ ที่ $\mu = 0.1$ ในทฤษฎีบทที่ 2 โดยพบว่าในกรณี $\tau = 0.5, 1, 1.5$ ค่าของ h_1 จะใกล้เคียงกับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่ค่า 4.319, 4.131 และ 3.198 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อค่า τ มากขึ้น ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 มีค่าน้อยลง

ส่วนตารางที่ 4 แสดงค่าของขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าตัวหน่วง h_1 ค่าต่าง ๆ ที่ $\mu = 0.5$ ในทฤษฎีบทที่ 2 โดยจากตารางพบว่าโดยพบว่าในกรณี $\tau = 0.1, 0.5, 0.7$ ค่าของ h_1 จะใกล้เคียงกับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่ค่า 4.025, 4.025 และ 3.974 ตามลำดับ ซึ่งในตารางนี้จะมีค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่เท่ากันอยู่ 2 ค่าคือ ที่ $\tau = 0.1, 0.5$

และตารางที่ 5 แสดงค่าของขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าตัวหน่วง h_1 ค่าต่าง ๆ ที่ $\mu = 0.9$ ในทฤษฎีบทที่ 2 โดยพบว่าในกรณี $\tau = 0.1, 0.15, 0.2$ ค่าของ h_1 จะใกล้เคียงกับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่ค่า 3.156, 3.114 และ 3.058 ตามลำดับ จากค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่แสดงในตารางที่ 3-5 แสดงให้เห็นว่าค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 จะมีค่าน้อยลงเมื่อ τ มีค่าเพิ่มขึ้นและพบว่าแต่ละค่าของตัวหน่วง h_1 จะให้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ใกล้เคียงหรือเท่ากัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าค่าของตัวหน่วง $h_1 \to h_2$ เมื่อ μ มีค่าน้อย ๆ แต่สำหรับ $\mu = 0.9$ พบว่าค่าตัวหน่วง h_1 ไม่สามารถเพิ่มค่าตัวหน่วง h_1 ให้เข้าใกล้เคียง ค่าตัวหน่วง h_2 ได้

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง τ สำหรับค่าอัตราการลู่ข้า α ที่แตกต่างกัน ระหว่างงานวิจัยของ (Li & Liu, 2009) และผลจากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1

α	0	0.1	0.4	0.7	1.0	1.3	1.7
τ (Li & Liu, 2009)	1.6010	-	-	-	-	-	-
τ (ทฤษฎีบทที่ 1)	∞	16.0860	4.0220	2.2980	1.6090	1.2360	0.9500

ตารางที่ 2 แสดงค่าของขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าอัตราการลู่เข้า α ค่าต่าง ๆ ในทฤษฎีบทที่ 2

α	0	0.1	0.5	1.0	1.5	2	2.5	3
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	∞	44.350	8.870	4.425	2.946	2.207	1.763	1.467

ตารางที่ 3 แสดงค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่า h_1 ค่าต่าง ๆ ที่ $\mu = 0.1$ จากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2

$\alpha = 1, \tau = 0.5$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4.2$	$h_1 = 4.319$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	4.319	4.319	4.319	4.319	4.319	-
$\alpha = 1, \tau = 1$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$	$h_1 = 4.131$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	4.131	4.131	4.131	4.131	4.131	-
$\alpha = 1, \tau = 1.5$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 2.5$	$h_1 = 3$	$h_1 = 3.189$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189	-

ตารางที่ 4 แสดงค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่า h_1 ค่าต่าง ๆ ที่ $\mu = 0.5$ จากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2

$\alpha = 1, \tau = 0.1$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$	$h_1 = 4.025$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	4.025	4.025	4.025	4.025	4.025	-
$\alpha = 1, \tau = 0.5$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$	$h_1 = 4.025$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	4.025	4.025	4.025	4.025	4.025	-
$\alpha = 1, \tau = 0.7$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 3.9$	$h_1 = 3.975$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	3.975	3.975	3.975	3.975	3.974	-

ตารางที่ 5 แสดงค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่า h_1 ค่าต่าง ๆ ที่ $\mu = 0.9$ จากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2

$\alpha = 1, \tau = 0.1$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 2$	$h_1 = 2.5$	$h_1 = 3$	$h_1 = 3.279$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	3.279	3.279	3.279	3.208	3.156	-
$\alpha = 1, \tau = 0.15$	$h_1 = 0$	$h_1 = 5$	$h_1 = 10$	$h_1 = 2.5$	$h_1 = 3$	$h_1 = 3.273$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	3.273	3.273	3.273	3.190	3.114	-
$\alpha = 1, \tau = 0.2$	$h_1 = 0$	$h_1 = 3$	$h_1 = 7$	$h_1 = 2.5$	$h_1 = 3$	$h_1 = 3.268$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	3.268	3.268	3.268	3.142	3.058	-

ตัวอย่าง 2 พิจารณาระบบสมการ (4.1) ที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว กำหนดโดย

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0.1 & -2\end{bmatrix},\ \overline{B}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.1\\ 0.3 & -1\end{bmatrix},\ \overline{C}=\begin{bmatrix}-0.3 & 0\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix}$$

ผลที่ได้ จากการหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยใช้ LMI toolbox ในโปรแกรม MATLAB เราพบค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง τ สำหรับค่าเลขชี้กำลัง α ค่าต่าง ๆ แสดงได้ดังตารางที่ 6 ซึ่งได้เปรียบเทียบค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ได้จากงานวิจัยของ Shu et al. (2009) และจากทฤษฎีบทที่ 1 จากตารางที่ 6 จะพบว่าค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 1 ให้ค่ามากกว่าค่าจาก Shu et al. (2009) อย่างเห็นได้ชัดสำหรับค่าอัตราการลู่เข้าระหว่าง $\alpha = 0.1478$ ถึง $\alpha = 0.8455$ นอกจากนั้นเมื่อค่าอัตราการลู่เข้าเพิ่มขึ้นมากกว่า 1 เงื่อนไขที่ได้จาก Shu et al. (2009) ก็ไม่สามารถใช้ได้ สำหรับเงื่อนไขที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถพบอัตราการลู่เข้าสูงสุดที่ $\alpha = 1.2$ และมีค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ 1.003

นอกจากนั้นเมื่อใช้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ตามตัวอย่าง 2 กับระบบสมการ (4.19) และเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2 พบว่าระบบสมการ (4.19) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง และให้ค่าอัตราการลู่เข้าของค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h และ τ ดังแสดงในตารางที่ 7

จากตารางที่ 7 แสดงการเปรียบเทียบค่าอัตราการลู่เข้าของขอบเขตบนของตัวหน่วง h และ τ ค่าต่างๆ ที่ได้จากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2 และในงานวิจัยของ Shu et al. (2009) โดยกำหนดให้ $\dot{h}(t)=0, h(t)=h$ ซึ่งพบว่าค่าอัตราการลู่เข้าของขอบเขตบนของตัวหน่วงในทฤษฎีบทที่ 2 มากกว่าในงานวิจัยของ Shu et al. (2009) ดังแสดงในตารางที่ 7

ตารางที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง τ สำหรับค่าอัตราการลู่เข้า α ที่แตกต่างกัน ระหว่างงานวิจัยของ Shu et al. (2009) และผลจากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1

α	0.1478	0.1906	0.2727	0.4660	0.8455	1.0	1.2
τ (Shu et al., 2009)	2.5	2	1.5	1	0.5	-	-
τ (ทฤษฎีบทที่ 1)	8.1450	6.3160	4.4140	2.5830	1.4230	1.2030	1.0030

ตารางที่ 7 แสดงการเปรียบเทียบค่าอัตราการลู่เข้า α สำหรับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h และ τ ระหว่างงานวิจัยของ Shu et al. (2009) และผลจากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2

α		$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 1.5$	$\tau = 2$	$\tau = 2.5$
$h = 0.5$	(Shu et al., 2009)	0.8455	0.7640	0.5971	0.4731	0.3902
	(ทฤษฎีบทที่ 2)	2.4060	1.2030	0.8020	0.6010	0.4810
$h = 1$	(Shu et al., 2009)	0.5391	0.4660	0.3997	0.3449	0.3010
	(ทฤษฎีบทที่ 2)	2.3990	1.2030	0.8020	0.6010	0.4810
$h = 1.5$	(Shu et al., 2009)	0.3186	0.2960	0.2727	0.2505	0.2294
	(ทฤษฎีบทที่ 2)	2.3390	1.2020	0.8020	0.6010	0.4810
$h = 2$	(Shu et al., 2009)	0.2208	0.2111	0.2009	0.1906	0.1804
	(ทฤษฎีบทที่ 2)	2.0920	1.2100	0.8020	0.6010	0.4810
$h = 2.5$	(Shu et al., 2009)	0.1691	0.1641	0.1588	0.1533	0.1478
	(ทฤษฎีบทที่ 2)	1.7470	1.1920	0.8010	0.6010	0.4810

ตัวอย่าง 3 พิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา (กรณี $\overline{C} = 0$ หรือ ไม่มีตัวหน่วง τ) กำหนดโดย

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{B} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ผลที่ได้ จากการหาคำตอบเชิงตัวเลขในทฤษฎีบทที่ 2 โดยใช้ LMI toolbox ในโปรแกรม MATLAB เราพบค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าอัตราการลู่เข้าลง α ค่าต่าง ๆ บนระบบเชิงเส้นโดยกำหนดให้ $h_1 = 0$ ซึ่งแสดงค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ไว้ในตารางที่ 8 และได้เปรียบเทียบผลกับค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงที่ได้จากงานวิจัยของ Amri et al. (2009) จากตารางที่ 8 จะพบว่าค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 2 ให้ค่ามากกว่าค่าที่ได้จากงานวิจัยของ Amri et al. (2009) อย่างเห็นได้ชัด

สำหรับตารางที่ 9 แสดงค่าของขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าตัวหน่วง h_1 ค่าต่าง ๆ บนระบบเชิงเส้นที่ประยุกต์จากทฤษฎีบทที่ 2 จากตารางพบว่าที่ค่า $\alpha = 0.1, 0.3, 1$ แต่ละ

ค่าของตัวหน่วง h_1 จะให้ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 ใกล้เคียงกันที่ค่า 52.778, 17.645 และ 5.293 ตามลำดับ

ตารางที่ 8 แสดงการเปรียบเทียบค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่าอัตราการลู่เข้า α และ μ ค่าต่าง ๆ ระหว่างงานวิจัยของ Amri et al., 2009 และผลจากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2

α		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\mu = 0$	h_2 (Amri et al., 2009)	11.514	3.645	2.173	1.557	1.740
	h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	52.937	17.645	10.587	7.562	5.881
$\mu = 0.5$	h_2 (Amri et al., 2009)	8.08	2.582	1.569	1.131	0.820
	h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	49.505	16.501	9.910	7.071	5.510
$\mu = 0.9$	h_2 (Amri et al., 2009)	1.376	0.744	0.526	0.397	0.262
	h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	41.510	13.833	8.310	5.928	4.611

ตารางที่ 9 แสดงค่าขอบเขตบนของตัวหน่วง h_2 สำหรับค่า h_1 ค่าต่าง ๆ บนระบบเชิงเส้น

$\alpha = 0.1, \mu = 0$	$h_1 = 0$	$h_1 = 15$	$h_1 = 35$	$h_1 = 45$	$h_1 = 51$	$h_1 = 52.937$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	52.937	53.002	53.020	52.997	52.778	-
$\alpha = 0.3, \mu = 0$	$h_1 = 0$	$h_1 = 5$	$h_1 = 10$	$h_1 = 15$	$h_1 = 17$	$h_1 = 17.645$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	17.645	17.667	17.680	17.666	17.593	-
$\alpha = 0.3, \mu = 0.3$	$h_1 = 0$	$h_1 = 3$	$h_1 = 7$	$h_1 = 10$	$h_1 = 15$	$h_1 = 17.056$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	17.056	17.080	17.076	17.076	17.064	-
$\alpha = 1, \mu = 0$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$	$h_1 = 5$	$h_1 = 5.293$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	5.293	5.297	5.301	5.310	5.291	-
$\alpha = 1, \mu = 0.3$	$h_1 = 0$	$h_1 = 1$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$	$h_1 = 5$	$h_1 = 5.116$
h_2 (ทฤษฎีบทที่ 2)	5.116	5.121	5.122	5.122	-	-