บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบต่างๆ โดยระบบที่จะนำเสนอในบทนี้ ได้แก่ ระบบเชิงเส้น ระบบนิวทรอล และในตอนท้ายจะนำเสนอความรู้พื้นฐาน ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่ใช้ในงานวิจัยนี้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยของผู้วิจัยท่านอื่นๆ เพื่อนำเทคนิคและวิธีการหาเสถียรภาพมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัย โดยมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. ตัวอย่างของระบบเชิงเส้นที่ใช้ศึกษาใน Wu et al. (2003) มีรูปแบบคือ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+\Delta A(t))x(t) + (B+\Delta B(t))x(t-d(t)) \\ \qquad + f(t,x(t)) + g(t,x(t-d(t))), t>0 \\ x(t) = \phi(t),\ t\in[-\tau,0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t)\in\Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A,B\in\Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\tau,0]$

$d(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$0\le d(t)\le\tau, \dot{d}(t)\le\mu<1$ ซึ่ง τ,μ เป็นค่าคงตัว

$\Delta A(t)$ และ $\Delta B(t)$ คือ รูปแบบของตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\Delta A(t)=D_1F_1(t)E_1$ และ $\Delta B(t)=D_2F_2(t)E_2$

$D_1, D_2,\ E_1$ และ E_2 เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวที่มีมิติที่เหมาะสม

$F_1(t), F_2(t)$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงและแปรผันตามเวลาที่ไม่ทราบค่าโดยสอดคล้องกับ $\|F_1(t)\|\le 1, \|F_2(t)\|\le 1,\ \forall t>0$

f,g เป็นฟังก์ชันไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาและมีขอบเขตคือ $\|f(t,x(t))\|\le\alpha\|x(t)\|$ และ $\|g(t,x(t-d(t)))\|\le\beta\|x(t-d(t))\|$ โดย α,β เป็นจำนวนบวก

1.1 Park (1999) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว โดยผ่านทฤษฎีไลปูนอฟรวมกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและอสมการของ Park

1.2 Lin (2003) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา โดยผ่านทฤษฎีไลปูนอฟรวมกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

1.3 Wu et al. (2003) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาและมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการของ Park และ s-procedure เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

1.4 Park and Kwon (2005) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบเชิงเส้นที่มีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการปริพันธ์ และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพื่อเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

1.5 Kwon and Park (2006) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวไม่แน่นอน โดยใช้ประโยชน์จากการแปลงตัวแบบซึ่งมีการกำหนดตัวแปรอิสระในตัวดำเนินการเพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

1.6 Kwon and Park (2008) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ และการแปลงในรูปของ descriptor model รวมทั้งใช้อสมการปริพันธ์

1.7 Shao (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา โดยมีตัวหน่วง $d(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่แปรผันตามเวลาซึ่งมีเงื่อนไข ดังนี้

$$0 \le h_1 \le d(t) \le h_2$$

โดยที่ h_1, h_2 เป็นค่าคงตัว ที่ถูกเรียกว่าช่วงของตัวหน่วง (interval delay) โดยประยุกต์ใช้อสมการปริพันธ์และทฤษฎีไลปูนอฟ เพื่อหาเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับที่ดีกว่าเงื่อนไขอันก่อนหน้า

1.8 Thuy (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวและมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการโคชี (Cauchy inequality) และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

1.9 Kwon et al. (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวไม่แน่นอน โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการโคชี และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

1.10 Botmart et al. (2011) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา ซึ่งมีตัวหน่วง $h(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขดังนี้

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2$$

โดยที่ h_1, h_2 เป็นค่าคงตัว โดยใช้สูตรไลนิช-นิวตัน ทฤษฎีไลปูนอฟและอสมการโคชี เพื่อให้ได้เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

2. ตัวอย่างของระบบนิวทรอลที่ใช้ศึกษาใน Pinjai and Mukdasai (2011) มีรูปแบบคือ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - C\dot{x}(t - r(t)) = A(t)x(t) + B(t)x(t - h(t)) + f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t - h(t))) \\ \qquad + D(t) \displaystyle\int_{t-g(t)}^{t} x(s), \quad t \ge 0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \dot{x}(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \forall \theta \in [-\max\{r, h, g\}, 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A, B, C, D \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$r(t)$ เป็นตัวหน่วงนิวทรอลมีเงื่อนไขดังนี้

$$0 \le r(t) \le r, \ \dot{r}(t) \le \delta < 1$$

$h(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลามีเงื่อนไขดังนี้

$$0 \le h(t) \le h, \ \dot{h}(t) \le \mu < +\infty$$

$g(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบแจกแจงมีเงื่อนไขดังนี้ (distributed time-varying delays)

$$0 \le g(t) \le g$$

h, r, g, μ และ δ เป็นจำนวนบวก

$$A(t) = (A + \Delta A(t)), \ B(t) = (B + \Delta B(t)), \ D(t) = (D + \Delta D(t))$$

$\phi(t), \varphi(t) \in C[(-\max(r, h, g), 0), \Re^n]$ คือเงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\max(r, h, g), 0]$

$\|\phi\| = \sup_{s\in[\max(r,h,g),0]}$ และ $\|\varphi\| = \sup_{s\in[\max(r,h,g),0]}$

$\Delta A(t), \Delta B(t)$ และ $\Delta D(t)$ คือ รูปแบบของตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาที่สอดคล้องกับ

$$[\Delta A(t), \Delta B(t)] = EF(t)[N_1, N_2, N_3]$$

E, N_1, N_2 และ N_3 เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวที่มีมิติที่เหมาะสม

$F(t)$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงและแปรผันตามเวลาที่ไม่ทราบค่าโดยสอดคล้องกับ

$$F(t)^{\mathrm{T}} F(t) \le I \ , \forall t > 0$$

f_1, f_2 เป็นฟังก์ชันไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาและมีขอบเขต คือ $\|f_1(t, x(t))\| \le \beta_1 \|x(t)\|$ และ $\|f_2(t, x(t-h(t))\| \le \beta_2 \|x(t-h(t))\|$ โดย β_1, β_2 เป็นจำนวนบวก

2.1 Park (2002) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา 2 ตัวที่แตกต่างกัน โดยใช้อสมการของ Park ทฤษฎีไลปูนอฟ และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

2.2 Kharitonov et al. (2005) ได้เสนอการประมาณค่าแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและอสมการโคชี

2.3 Mei-qin (2006) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลที่มีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟและอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

2.4 Fang et al. (2008) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้การแปลงตัวแบบ อสมการปริพันธ์และอสมการโคชี

2.5 Yu and Lien (2008) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลซึ่งมีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา โดยมีตัวหน่วง $h(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่แปรผันตามเวลามีเงื่อนไขดังนี้

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2$$

โดยที่ h_1, h_2 เป็นค่าคงตัวและประยุกต์ใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ สูตรไลนิช-นิวตันและคำตอบศูนย์ เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

2.6 Li and Liu (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่ขึ้นกับตัวหน่วงของระบบนิวทรอล โดยใช้เทคนิคอสมการของ Park และสูตรไลนิช-นิวตันในการประมาณค่าฟังก์ชันไลปูนอฟ เพื่อหาเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

2.7 Qiu and Cui (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ การแปลงตัวแบบ และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

2.8 Qiu et al. (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงต่างกัน 2 ตัว โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการปริพันธ์ และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพื่อหาเสถียรเชิงเส้นกำกับ

2.9 Wang and Song (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา และมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการปริพันธ์ และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

2.10 Pinjai and Mukdasai (2011) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง โดยใช้การแปลงตัวแบบในรูป descriptor model และใช้เทคนิคการแบ่ง (decomposition) สัมประสิทธิ์ของเมทริกซ์ และทฤษฎีไลปูนอฟ

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ มีการใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น การแปลงตัวแบบในรูป descriptor model อสมการปริพันธ์ อสมการโคชี สูตรไลนิช-นิวตัน อสมการของ Park เทคนิคการแบ่งของสัมประสิทธิ์ของเมทริกซ์ คำตอบศูนย์ และ s-procedure โดยงานวิจัยนี้จะได้นำทฤษฎีไลปูนอฟ อสมการ Park อสมการปริพันธ์ และสูตรไลนิช-นิวตัน มาประยุกต์ใช้เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลดังระบบสมการ (3.1) และ (3.2)

สัญลักษณ์

$\Re^n$ แทนปริภูมิจำนวนจริง n มิติ

$\Re^{n\times n}$ แทนเมทริกซ์จำนวนจริง $n\times n$ มิติ

A^{T} แทนเมทริกซ์สลับเปลี่ยน A

$\|A\|$ แทน สเปกตรัม นอร์ม (Spectral norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย $\|A\| = \lambda_{\max}^{1/2}(A^{\mathrm{T}}A)$

$\lambda_{\max}$ แทนค่าเจาะจงที่มากที่สุด

$\|x_t\|$ แทน ยูคลิเดียน นอร์มของเวกเตอร์ โดยที่ $x_t := \{x(t_0+\theta) : \theta \in [-\tau, 0]\}$

$P > 0$ แทนเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive-definite symmetric)

$P \geq 0$ แทนเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (positive-semidefinite symmetric)

$P < 0$ แทนเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นเมทริกซ์ลบแน่นอน (negative-definite symmetric)

$P \leq 0$ แทนเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นเมทริกซ์กึ่งลบแน่นอน (negative-semidefinite symmetric)

I แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ซึ่งมิติเหมาะสม

* แทนสมาชิกของเมทริกซ์สมมาตร

ความรู้พื้นฐาน

ชนิดของเมทริกซ์และฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ (กึ่ง) บวกแน่นอน (Leon, 2002, p. 309)
ให้ A เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง เมทริกซ์ A เป็นบวกแน่นอน (positive-definite) ถ้า $x^{\mathrm{T}} A x > 0$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $x \in \Re^n - \{0\}$ และเมทริกซ์ A เป็นกึ่งบวกแน่นอน (positive semidefinite) ถ้า $x^{\mathrm{T}} A x \geq 0$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $x \in \Re^n - \{0\}$

บทนิยาม 2.2 เมทริกซ์ (กึ่ง) ลบแน่นอน (Leon, 2002, p. 309)
ให้ A เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง เมทริกซ์ A เป็นลบแน่นอน (negative-definite) ถ้า $x^{\mathrm{T}} A x < 0$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $x \in \Re^n - \{0\}$ และเมทริกซ์ A เป็นกึ่งลบแน่นอน (negative semidefinite) ถ้า $x^{\mathrm{T}} A x \leq 0$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $x \in \Re^n - \{0\}$

บทตั้ง 2.1 เมทริกซ์สมมาตรเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (บวกแน่นอน) ก็ต่อเมื่อ
ทุกค่าเจาะจง (eigenvalues) ของเมทริกซ์สมมาตรมีค่าเป็นบวก (Barnett & Cameron, 1985, p. 177)

บทตั้ง 2.2 เมทริกซ์สมมาตรเป็นเมทริกซ์กึ่งลบแน่นอน (ลบแน่นอน) ก็ต่อเมื่อ
ทุกค่าเจาะจง (eigenvalues) ของเมทริกซ์สมมาตรมีค่าเป็นลบ (Barnett & Cameron, 1985, p. 178)

บทนิยาม 2.3 ฟังก์ชัน (กึ่ง) บวกแน่นอน (Leon, 2002, p. 309)
ให้ฟังก์ชัน $f(x) \in \Re$ จะเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่าเป็นบวกแน่นอน ถ้า $f(\bar{0}) = 0, \bar{0} \in \Re^n$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in \Re^n - \{0\}$ และฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นกึ่งบวกแน่นอน ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \Re^n - \{0\}$

บทนิยาม 2.4 ฟังก์ชัน (กึ่ง) ลบแน่นอน (Leon, 2002, p. 309)
ให้ฟังก์ชัน $f(x) \in \Re$ จะเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่าเป็นลบแน่นอน ถ้า $f(\bar{0}) = 0, \bar{0} \in \Re^n$ และ $f(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in \Re^n - \{0\}$ และฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นกึ่งลบแน่นอน ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in \Re^n - \{0\}$

บทนิยาม 2.5 ผลคูณภายใน (Leon, 2002, p. 260)
ให้ F เป็นสนามจำนวนจริงและ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F ให้ x และ y เป็นเวกเตอร์ใน V ผลคูณภายใน (inner product) ของ x และ y จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $< x, y >$ และเป็นสเกลาร์ในสนาม F ที่มีคุณสมบัติดังนี้

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ x, y และ z ใน V และสเกลาร์ c ใน F

(1) $< x,x > \; > 0$ ถ้า $x \neq 0$

(2) $< cx, y > \; = c < x, y >$

(3) $< x + y, z > = < x, y > + < y, z >$

(4) $< x, y > = < y, x >$

ทฤษฎีไลปูนอฟ (Lyapunov theory)

พิจารณาระบบสมการอนุพันธ์สามัญ

$$\dot{x}(t) = f(t,x)\ ,\ x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

โดยที่ $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \Re^n$ และ $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Re \times \Re^n \rightarrow \Re^n$

ทฤษฎีบท 2.1 ไลปูนอฟ (Barnett & Cameron, 1985, p. 204)
ให้ D เป็นโดเมนบน $\Re^n$ โดยที่ $\overline{0} \in D$, $V : D \subseteq \Re^n \rightarrow \Re$ เรากล่าวได้ว่า $V(x)$ เป็นฟังก์ชันไลปูนอฟของระบบสมการ (2.1) ถ้าสอดคล้องเงื่อนไข ดังนี้

1) $V(x)$ ต่อเนื่องบน $D \subseteq \Re^n$
2) $V(x)$ เป็นบวกแน่นอน โดยที่ $V(\overline{0}) = 0$ และ $V(x(k)) > 0$ สำหรับ $x(k) \neq \overline{0}$
3) $\dot{V}(x)$ เป็นฟังก์ชันที่เป็นกึ่งลบแน่นอน

บทตั้ง 2.3 พิจารณาระบบที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา (Gu & Kharitonov, 2003)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]$$

ถ้ามีฟังก์ชันไลปูนอฟ $V(t, x_t)$ และ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ สำหรับทุก $x(t)$ ของระบบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$i)\qquad \lambda_1 \|x(t)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq \lambda_2 \|x_t\|^2$

$ii)\qquad \dot{V}(t, x_t) \leq 0$

แล้วระบบจะมีขอบเขต (i.e., มี $N > 0$ ที่ทำให้ $\|x(t,\phi)\| \leq N\|\phi\|, \forall t \geq 0$)

บทนิยาม 2.6 จุดสมดุล (Barnett & Cameron, 1985, p. 169)

ให้จุด $\bar{x}$ เป็นจุดสมดุล (equilibrium point) ของระบบสมการ (2.1) ถ้า $f(t,\bar{x}) = \bar{0}, \forall t \ge t_0$

หมายเหตุ ในที่นี้เราสามารถสมมุติให้ $\bar{0}$ เป็นจุดสมดุลของระบบสมการ (2.1)

บทนิยาม 2.7 เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Barnett & Cameron, 1985, p. 205)

จุดสมดุลของระบบสมการ (2.1) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable, A.S.) ถ้ามีไลปูนอฟฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นลบแน่นอน

บทนิยาม 2.8 เสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (Botmart et al., 2011)

ให้ $\alpha > 0$ จุดสมดุลของระบบสมการ (2.1) เป็นจุดที่เสถียรแบบเลขชี้กำลัง(α -exponentially stable) ถ้ามีจำนวนเต็มบวก K ที่ทำให้ทุก $x(t,\phi)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\|x(t,\phi)\| \le Ke^{-\alpha t}\|\phi\|, \forall t > 0$$

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบท 2.2 สูตรไลนิช-นิวตัน (Ramakrishnan & Ray, 2011)

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่นิยามบท $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

บทตั้ง 2.4 เชอร์คอมพลีเมนต์ (Schur Complement) (Kwon & Park, 2008)

ให้ Q,S และ $R \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรและเป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว โดยที่ $R > 0,\ Q = Q^{\mathrm{T}}$ และ $R = R^{\mathrm{T}}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Q & S^{\mathrm{T}} \\ S & -R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow Q + SR^{-1}S^{\mathrm{T}} < 0$$

บทตั้ง 2.5 อสมการปริพันธ์ (Gu, 2000)

สำหรับทุก ๆ M เป็นเมทริกซ์สมมาตรและเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน $\gamma > 0$ และ $\omega : [0, \gamma] \rightarrow \Re^n$ โดยที่ปริพันธ์ของเมทริกซ์ทั้งหมดกำหนดดีแล้ว (well defined) จะได้ว่า

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right)^{\mathrm{T}} M \left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right) \le \gamma \int_0^\gamma \omega^{\mathrm{T}}(s) M \omega(s) ds$$

บทตั้ง 2.6 อสมการของ Park (Park, 1999)

กำหนดให้ $a(\gamma) \in \Re^n$ และ $b(\gamma) \in \Re^n$ สำหรับทุก $\gamma \in \Omega$ แล้ว สำหรับทุกเมทริกซ์บวกแน่นอน $X \in \Re^{n \times n}$ และมีเมทริกซ์ $M \in \Re^{n \times n}$ ที่ทำให้อสมการข้างล่างนี้เป็นจริง

$$-2\int_\Omega b^{\mathrm{T}}(\gamma) a(\gamma) d\gamma \le \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\gamma) \\ b(\gamma) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & XM \\ M^{\mathrm{T}} X & (M^{\mathrm{T}} X + I) X^{-1} (XM + I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\gamma) \\ b(\gamma) \end{bmatrix} d\gamma$$

บทนิยาม 2.9 การรวมกันแบบคอนเวกซ์ (convex combination) (Hiriart-Urruty & Lemarechal, 2001, p. 27)

การรวมกันแบบคอนเวกซ์ของเวกเตอร์ในเซต S นิยามโดย

$$s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_n s_n$$

โดยที่ $n \in \mathrm{N}, s_i \in S \ \forall i, \lambda_i \in \Re^+ \ \forall i$ และ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$