บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เครื่องมืออิเลคทรอนิคส์ เครื่องจักรกล คอมพิวเตอร์ และระบบต่างๆ ที่ใช้ทางวิศวกรรมโรงงานส่วนใหญ่เป็นอุปกรณ์ที่มีการใช้งานสม่ำเสมออย่างต่อเนื่อง เพื่อที่ระบบจะทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพเสถียรภาพของระบบจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง แต่อย่างไรก็ตามอาจจะมีปัจจัยที่ทำให้ระบบเกิดหย่อนประสิทธิภาพ เช่น ข้อมูลที่ผิดพลาด (data errors) การเสื่อมลงของระบบ (agaging) เสียงรบกวนจากภายนอก และตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา (Kwon & Park, 2006) ดังนั้นการศึกษาหาเงื่อนไขที่ระบบจะมีเสถียรภาพจึงมีความจำเป็น โดยนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ อันประกอบด้วย ระบบเชิงเส้น (linear systems) ระบบนิวทรอล (neutral systems) ระบบเครือข่ายประสาท (neural networks) ระบบสลับ (switch systems) ระบบที่มีตัวควบคุม (systems with feedback controller) ระบบที่มีตัวไม่แน่นอน (systems with uncertainties) ระบบที่มีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น (systems with nonlinear uncertainties) และมีตัวอย่างการประยุกต์ใช้ของระบบต่าง ๆ ดังนี้ ระบบเชิงเส้นกับด้านชีววิทยา (biological systems) และทฤษฎีควบคุม (control theory) (Liu, 2003) ระบบนิวทรอลถูกประยุกต์ในระบบควบคุมอัตโนมัติ (automatic control) กระบวนการแลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchange processes) และระบบนิเวศวิทยา (population ecology) (Han, 2004) ระบบเครือข่ายประสาทถูกประยุกต์ในกระบวนการรับส่งสัญญาณ (signal processing) การจำรูปแบบ (pattern recognition) กระบวนการประมวลภาพแบบคงที่ (static image processing) การรวมความจำ (associative memory) ปัญหาค่าเหมาะสม (optimization problems) (Shao, 2008) ระบบสลับถูกประยุกต์ในระบบ hybrid ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยหลาย ๆ ระบบ โดยมีการสลับไปมาระหว่างระบบต่าง ๆ (Yu, 2010) ระบบที่มีตัวควบคุมถูกประยุกต์ในการศึกษาทางอุตสาหกรรม (industrial) ทฤษฎีควบคุม (control theory) และระบบการบิน (flight systems) (Chen & Zheng, 2007) ระบบที่มีตัวไม่แน่นอนถูกประยุกต์ในหลายระบบ เพราะทุก ๆ ระบบอาจมีการรบกวนด้วยปัจจัยแวดล้อมอยู่เสมอ

ในงานวิจัยด้านควบคุมมีการศึกษาเสถียรภาพในระบบต่าง ๆ เช่น ระบบเชิงเส้น ระบบนิวทรอล ระบบเครือข่ายประสาท ระบบสลับ ระบบที่มีตัวควบคุม ระบบที่มีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น และระบบที่มีตัวไม่แน่นอน โดยตัวอย่างของแต่ละระบบที่ใช้ในการศึกษามีดังนี้

1. Liu (2003) ได้ศึกษาระบบเชิงเส้น

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) \\ x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-h,0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A, B \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$h > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-h,0]$

ระบบเชิงเส้นสามารถพบได้ในการศึกษาทฤษฎีควบคุม ระบบทางชีววิทยา (Liu, 2003) โดยมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบเชิงเส้น ตัวอย่างเช่น Liu (2003); Kwon and Park (2006); Fridman and Orlov (2009); Shao (2009); Kwon et al. (2010); Botmart et al. (2011) โดย Liu (2003) และ Botmart et al. (2011) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวและตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา Kwon and Park (2006) และ Fridman and Orlov (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวไม่แน่นอน และ Shao (2009) และ Kwon et al. (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา

2. Li & Liu (2009) ได้ศึกษาระบบนิวทรอล

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\dot{x}(t-\tau), \; t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \; \forall\theta \in [-\tau,0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A, B, C \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวและ

$\tau > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\|C\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้น โดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\tau,0]$

ระบบนิวทรอลเป็นระบบที่มีตัวหน่วงอยู่ทั้งตัวแปรเวกเตอร์สถานะ $(x(t-\tau))$ และอนุพันธ์ของตัวแปรเวกเตอร์สถานะ $(\dot{x}(t-\tau))$ และพบได้ในการศึกษาระบบควบคุมอัตโนมัติ กระบวนการแลกเปลี่ยนความร้อนและระบบนิเวศวิทยา (Park & Won, 2000) โดยมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอล ตัวอย่างเช่น Han (2004); Kharitonov et al. (2005); Chen et al. (2008); Fang et al. (2008); Lien et al. (2009); Li and Liu (2009) โดย Han (2004) และ Li and Liu (2009) ได้ศึกษาการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบนิวทรอล Kharitonov et al. (2005) และ Lien et al. (2009) ได้ศึกษาการประมาณเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล และ Chen et al. (2008) และ Fang et al. (2008) ได้ศึกษาการมีเสถียรภาพทนทานแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวก่อกวนไม่เชิงเส้น

3. Li et al. (2006) ได้ศึกษาระบบเครือข่ายประสาท

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + WG(u(t)) + VG(u(t-\tau(t))) + I$$

โดยที่ $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)]^{\mathrm{T}}$ เป็นเวกเตอร์สภาวะของเครือข่ายประสาท

$A = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ เป็นเมทริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกเป็นบวก

$W = (w_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก

$V = (v_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์แสดงค่าของตัวหน่วงที่เชื่อมระหว่างจุดประสาท

$G(u(t)) = [g_1(u_1(t)), g_2(u_2(t)), \ldots, g_n(u_n(t))]^{\mathrm{T}}$ แทนฟังก์ชันเวกเตอร์การกระตุ้นประสาท

$I = [I_1, I_2, \ldots, I_n]^{\mathrm{T}}$ เป็นเวกเตอร์ภายนอกที่นำเข้ามามีค่าคงตัว

$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t)), \ldots, \tau_n(t))^{\mathrm{T}}$ แทนเวกเตอร์ค่าหน่วงที่แปรผันตามเวลาของการส่งสัญญาณ ซึ่ง $0 \le \tau_i(t) \le \bar{\tau} < +\infty$

ระบบเครือข่ายประสาทพบในการศึกษากระบวนการรับส่งสัญญาณ การจำรูปแบบ กระบวนการประมวลภาพแบบคงที่ การรวมความจำ ปัญหาค่าเหมาะสม ซึ่งมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบเครือข่ายประสาท ตัวอย่างเช่น Sun and Feng (2003); Li et al. (2006); Lien and Chung (2007); Lee et al. (2010); Shao (2010); Wang and Song (2010) โดย Sun and Feng (2003) และ Li et al. (2006) ได้เสนอเงื่อนไขการหาเสถียรภาพทนทานแบบเลขชี้กำลังของระบบเครือข่ายประสาทที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา Lien and Chung (2007)

และ Wang and Song (2010) ได้เสนอการประมาณระบบเครือข่ายประสาทที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง และ Lee et al. (2010) และ Shao (2010) ได้เสนอการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบเครือข่ายประสาทที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา

4. Li et al. (2010) ได้ศึกษาระบบสลับ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - C_{\sigma(t)}\dot{x}(t-h(t)) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}x(t-\tau(t)) \\ x_{t_0}(\theta) = x(t_0+\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-\bar{h}, 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\sigma(t):[0,+\infty) \to M = \{1,2,...,m\}$ เป็นการสลับสัญญาณ

$\tau(t)$ แทนตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาของเวกเตอร์สถานะ

$h(t)$ แทนตัวหน่วงนิวทรอลที่แปรผันตามเวลา ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$0 \le \tau(t) \le \tau, \dot{\tau}(t) \le \hat{\tau} < 1,\ 0 \le h(t) \le h,\ \dot{h}(t) \le \hat{h} < 1$

$\tau, \hat{\tau}, h, \hat{h}$ เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก

$\psi(\theta)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\bar{h}, 0]$

$\bar{h} = \max\{\tau, h\}$ $C_k\ (k = 1,2,...,m)$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวที่มีมิติเหมาะสมและรัศมีสเปกตรัมของแต่ละ C_k ที่สอดคล้องกับ $\rho(C_k) < 1$

$A_k, B_k\ (k = 1,2,...,m)$ $C_k\ (k = 1,2,...,m)$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวที่มีมิติเหมาะสม

สัญญาณสลับ $\sigma(t)$ สอดคล้องกับลำดับการสลับคือ $\{x_{t_0}; (i_0, t_0)$ $,...,(i_k, t_k),...$ โดยที่ $i_k \in M, k = 0,1,...\}$ ซึ่งหมายถึงระบบย่อยที่ i_k กำลังถูกใช้งาน

ระบบสลับเป็นส่วนหนึ่งของระบบ hybrid ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อย ๆ หลาย ๆ ระบบ และทำการสลับไปมาระหว่างระบบต่าง ๆ ซึ่งมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบสลับ ตัวอย่างเช่น Zhang et al. (2007); Liu et al. (2008); Liu et al. (2009); Yu (2009); Li et al. (2010); Xiong et al. (2010) โดย Zhang et al. (2007) และ Xiong et al. (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบสลับแบบนิวทรอล Liu et al. (2008) และ Liu et al. (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบสลับที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา และ Yu (2009)

และ Li et al. (2010) ได้เสนอการออกแบบสัญญาณสลับสำหรับเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล

5. Chen & Zheng (2007) ได้ศึกษาระบบนิวทรอลที่มีตัวควบคุม

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t-\tau) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h_1) + B(t)u(t) \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h,\ 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A_0(t), A_1(t), B(t), C(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่แปรผันตามเวลา

A_0, A_1, B, C เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$u(t) \in \Re^m$ เป็นตัวควบคุม

$u(t) = Kx(t), K \in \Re^{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$h_1 > 0, \tau > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$h = \max\{h_1, \tau\}$

$\phi(t)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[0, h]$

$\|\phi\| = \max_{s\in[-h,0]}\|\phi(s)\|$

$A_0(t) = A_0 + \Delta A_0(t), A_1(t) = A_1 + \Delta A_1(t)$

$B(t) = B + \Delta B(t), C(t) = C + \Delta C(t)$

$\Delta A_0(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t)$ และ $\Delta C(t)$ คือ รูปแบบของตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาที่สอดคล้องกับ

$$\left[\Delta A_0(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t), \Delta C(t)\right] = DF(t)\left[E_1,\ E_2,\ E_3, E_4\right]$$

$D,\ E_1, E_2, E_3$ และ E_4 เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวที่มีมิติที่เหมาะสม

$F(t)$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงและแปรผันตามเวลาที่ไม่ทราบค่าโดยสอดคล้องกับ

$$F(t)^{\mathrm{T}} F(t) \le I\ , \forall t > 0$$

ระบบที่มีตัวควบคุมพบทั่วไปในทางอุตสาหกรรม ทฤษฎีควบคุม และระบบการบิน ซึ่งมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบที่มีตัวควบคุม ตัวอย่างเช่น Jiang and Han (2005); Xang et al. (2006); Chen and Zheng (2007); Jiang and Han (2009); Yu et al. (2009); Haoussi and Tissir (2010) โดย Chen and Zheng (2007) และ Jiang and Han (2005) และ Jiang and Han (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวควบคุม Xang et al. (2006) และ Yu et al. (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวควบคุม และ Haoussi and Tissir (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบนิวทรอลที่มีตัวควบคุม

6. Thuy (2009) ได้ศึกษาระบบเชิงเส้นที่มีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + f(t, x(t)) + f_1(t, x(t-h)) \\ x_0(0) = \phi(\theta) \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A, A_1 \in \Re^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$h > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0(\theta) = \phi(\theta) \in C([-h, 0], \Re^n)$

f, f_1 เป็นฟังก์ชันไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาและมีขอบเขต

คือ $\|f(t, x(t))\| \le \alpha \|x(t)\|$ และ $\|f_1(t, x(t-h))\| \le \alpha_1 \|x(t-h)\|$ โดย α, α_1 เป็นจำนวนบวก

ระบบที่มีตัวแปรไม่เชิงเส้นพบในกระบวนการในทางอุตสาหกรรม (Mei-Qin, 2006) โดยมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบที่มีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น Han (2004); Park (2005); Park and Kwon (2005); Mei-qin (2006); Wang and Song (2010) Rakkiyappan et al. (2011) โดย Han (2004) และ Park and Kwon (2005) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบเชิงเส้นที่มีตัวแปรไม่เชิงเส้น Park (2005) และ Wang and Song (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาและมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น และ Mei-qin (2006) และ Rakkiyappan et al. (2011) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลชนิดที่มีตัวหน่วงไม่เชิงเส้น

7. De-Yin and Chao-Yong (2008) ได้ศึกษาระบบนิวทรอลที่มีตัวไม่แน่นอน

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - C\dot{x}(t-h) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))x(t-h), t > 0 \\ x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ ถูกเรียกว่าเวกเตอร์สถานะ

$A, B, C \in \Re^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

h เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\phi(t)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-h, 0]$

$\Delta A(t)$ และ $\Delta B(t)$ คือ รูปแบบของตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาที่สอดคล้องกับ

$$\left[\Delta A(t), \Delta B(t) \right] = DF(t)\left[E_1, E_2\right]$$

D, E_1, และ E_2 เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัวที่มีมิติที่เหมาะสม

$F(t)$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงและแปรผันตามเวลาที่ไม่ทราบค่าโดยสอดคล้องกับ

$$F(t)^{\mathrm{T}} F(t) \le I, \forall t > 0$$

ตัวไม่แน่นอนพบได้ในระบบพลวัตต่าง ๆ ตัวอย่างของตัวไม่แน่นอน เช่น ข้อมูลที่ผิดพลาด การเสื่อมลงของระบบ และเสียงรบกวนจากภายนอก โดยมีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบที่มีตัวไม่แน่นอน ตัวอย่างเช่น Chen et al. (2008); De-Yin and Chao-Yong (2008); Pinjai and Mukdasai (2011) โดย Chen et al. (2008) และ De-Yin and Chao-Yong (2008) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบนิวทรอลที่มีตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาและมีตัวก่อกวนไม่เชิงเส้น และ Pinjai and Mukdasai (2011) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวไม่แน่นอนที่แปรผันตามเวลาแบบไม่ต่อเนื่องและมีตัวก่อกวนไม่เชิงเส้น

การศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วนั้นมีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาเป็นส่วนประกอบสำคัญ (Liu, 2003) ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลามักเป็นต้นเหตุที่สำคัญที่ทำให้เกิดความไม่มีเสถียรภาพซึ่งพบได้ในทางวิศวกรรมศาสตร์ กระบวนการทางเคมี โมเดลประชากร ระบบสมดุลทางชีววิทยา และระบบทางเศรษฐศาสตร์ (Kwon & Park,

2006) ดังนั้นการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาจึงมีความสำคัญมากในทางทฤษฎีและปฏิบัติ

โดยในช่วงหลายปีที่ผ่านมามีผู้วิจัยจำนวนมากได้วิเคราะห์เสถียรภาพของระบบต่าง ๆ พบว่าทฤษฎีที่ได้สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ ทฤษฎีที่ขึ้นกับตัวหน่วง (Han, 2004; Chen et al., 2008; Botmart et al., 2011) และทฤษฎีที่ไม่ขึ้นกับตัวหน่วง (Park & Won, 1999; He et al., 2001; Zhang & Cao, 2007) ซึ่งในปี ค.ศ. 2004 Cao and He ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่ไม่ขึ้นกับตัวหน่วงที่อยู่ในรูปสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีเมเชอร์ (Measures theory) ค่าเจาะจงและนอร์มของเมทริกซ์หรือเงื่อนไขของเฮอร์วิทเมทริกซ์ (Hurwitz matrix) แต่งานวิจัยของ Cao and He (2004) ไม่ได้ใช้ข้อมูลของตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาซึ่งทำให้เงื่อนไขที่ได้รับไม่เหมาะสมนักโดยเฉพาะเมื่อค่าของตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลามีขนาดเล็ก (Park, 2002)

ในการหาเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นนั้นนักวิจัยมักจะนิยมหาเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Park, 2002; Li & Liu, 2009; Shao, 2009) และเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (Lin, 2003; Kwon & Park, 2006; 2008) ซึ่งการหาเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ สามารถที่จะเริ่มต้นจากการศึกษาบนระบบนิวทรอลได้เพราะระบบนิวทรอลเป็นระบบที่มีตัวหน่วงอยู่ทั้งเวกเตอร์สถานะ $(x(t-\tau))$ และอนุพันธ์ของเวกเตอร์สถานะ $(\dot{x}(t-\tau))$ ซึ่งสามารถประยุกต์ระบบให้มีความซับซ้อนขึ้นได้ เช่น ประยุกต์ใส่ตัวควบคุม ตัวไม่แน่นอน ฯลฯ ซึ่งพบในงานวิจัยของ Chen and Zheng (2007); Yu (2009); Haoussi and Tissir (2010); Wang and Song (2010) โดย Chen and Zheng (2007) และ Haoussi and Tissir (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบนิวทรอลที่มีตัวควบคุม Yu (2009) ได้เสนอการออกแบบสัญญาณสลับของระบบนิวทรอลเพื่อให้มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง และ Wang and Song (2010) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพทนทานของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา และมีตัวไม่แน่นอนไม่เชิงเส้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าระบบนิวทรอลสามารถนำไปประยุกต์กับระบบอื่น ๆ ได้ และยังครอบคลุมระบบเชิงเส้นด้วย ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้เลือกศึกษาเสถียรภาพของระบบนิวทรอล

จากการค้นคว้างานวิจัยบนระบบนิวทรอล พบงานวิจัยของ Li and Liu (2009) ได้เสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบนิวทรอล โดยมีเทคนิคที่น่าสนใจและเงื่อนไขที่ได้สามารถขยายค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงได้ดีกว่าหลาย ๆ เงื่อนไขในอดีต แต่อย่างไรก็ตามเงื่อนไขของ Li and Liu (2009) ยังมีข้อด้อยในเรื่องความเร็วของการลู่เข้าสู่คำตอบ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงต้องการพัฒนาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่สามารถลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วขึ้นในขณะที่ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงเท่ากัน (Kwon & Park, 2008; Yu et al., 2009) นั่นคือหาเงื่อนไข

การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่ Li and Liu (2009) ได้ศึกษา

โดยการได้มาของเงื่อนไขในงานวิจัยนี้จะใช้ทฤษฎีไลปูนอฟ (Lyapunov theory) และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequality, LMI) และบทตั้งที่จำเป็นเพื่อให้ได้เงื่อนไขใหม่ที่มีประสิทธิภาพกว่าเงื่อนไขที่ผ่านมา

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว
2. เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวที่ดีกว่าเงื่อนไขที่มีอยู่เดิม
2. ได้เงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัวที่ดีกว่าเงื่อนไขที่มีอยู่เดิม

ขอบเขตการวิจัย

ศึกษาหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล

ข้อจำกัดของการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลในทางทฤษฎีเท่านั้นยังไม่ได้นำเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลไปประยุกต์ใช้จริงในทางปฏิบัติกับระบบทางวิศวกรรม

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ทฤษฎีควบคุม (control theory) หมายถึง ทฤษฎีที่ว่าด้วยการควบคุมระบบพลวัตให้มีผลลัพธ์ที่ต้องการ โดยการกำหนดค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมให้กับระบบ
2. เสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (exponential stability) หมายถึง การลู่เข้าสู่จุดสมดุลของคำตอบของระบบอย่างรวดเร็วแบบเลขชี้กำลัง

3. ระบบนิวทรอล (neutral systems) ที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว หมายถึง ระบบที่ใช้ในการศึกษาด้านทฤษฎีควบคุมโดยมีตัวหน่วงในตัวแปรเวกเตอร์สถานะและอนุพันธ์ของตัวแปรเวกเตอร์สถานะที่ใช้ศึกษาใน Li and Liu (2009) และมีรูปแบบสมการดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\dot{x}(t-\tau),\ t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta),\ \ \forall\,\theta \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$A, B, C \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\tau > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\|C\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\tau, 0]$

5. ระบบนิวทรอล (neutral systems) ที่มีตัวหน่วง 2 ตัว หมายถึง ระบบที่ใช้ในการศึกษาด้านทฤษฎีควบคุมโดยมีตัวหน่วงที่แตกต่างกันในตัวแปรเวกเตอร์สถานะและอนุพันธ์ของตัวแปรเวกเตอร์สถานะที่ใช้ศึกษาใน Yu and Lien (2008) และมีรูปแบบสมการดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau(t))\ \ ,t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall\,\theta \in [-\max\{\tau, h_2\}, 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\|\overline{C}\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\max\{\tau, h_2\}, 0]$

$\tau(t), h(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$$0 \le \tau(t) \le \tau,\ \ \dot{\tau}(t) \le \beta < 1$$

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2,\ \ \dot{h}(t) \le \mu < 1$$

$\tau, h_1, h_2, \beta, \mu$ เป็นค่าคงตัว

โดยในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาในกรณีที่ตัวหน่วงในตัวแปรเวกเตอร์สถานะเป็นช่วงและอนุพันธ์ของตัวแปรเวกเตอร์สถานะเป็นค่าคงตัวที่มีรูปแบบสมการดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \;\; , t > 0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\max\{\tau, h_2\}, 0] \end{cases}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \Re^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\tau > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\left\|\overline{C}\right\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้นโดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\max\{\tau, h_2\}, 0]$

$h(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2, \;\; \dot{h}(t) \le \mu < 1$$

h_1, h_2, μ เป็นค่าคงตัว

6. อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequality, LMI) หมายถึง เงื่อนไขที่เขียนในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น