บทที่ 4
ผลการวิจัย

จุดเป็นคาบและจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชัน

ในส่วนนี้ผู้วิจัยจะนิยามและศึกษาสมบัติบางประการของจุดเป็นคาบและจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันต่อเนื่องบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ

บทนิยาม 4.1. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับและ $f:X\to X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เรียก $x\in X$ ว่าจุดเป็นคาบ (periodic point) ของ f ก็ต่อเมื่อมี $n\in\mathbb{N}$ ที่ทำให้ $f^n(x)=x$ และถ้า $x\in X$ เป็นจุดเป็นคาบของ f ซึ่ง $f^n(x)=x$ และ $f^k(x)\neq x$ สำหรับทุก $1\le k<n$ แล้วจะเรียก x ว่าจุดเป็นคาบอันดับ n (periodic point order n) ของ f

ใช้สัญลักษณ์ $P(f)$, $P_n(f)$ แทนเซตของจุดเป็นคาบของ f และเซตของจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f ตามลำดับ และจะได้ว่า $P(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n(f)$

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับและแทนเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องที่ส่งจาก X ไปยัง X ด้วย $C(X)$ ถ้า f และ g อยู่ใน $C(X)$ นิยามฟังก์ชันระยะทาง ρ ระหว่าง f กับ g ดังนี้

$$\rho(f,g)=\sup\left[\, d(f(x),g(x)) \mid x\in X\right]$$

ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีว่า $(C(X),\rho)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

บทนิยาม 4.2. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับ และ $f\in C(X)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เรียก $x\in X$ ที่เป็นจุดเป็นคาบของ f ว่าจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียล (essential periodic point) ถ้าแต่ละ $V\in\eta(x)$ จะมี $\delta>0$ โดยที่ถ้า $g\in C(X)$ และ $\rho(f,g)<\delta$ แล้ว g มีจุดเป็นคาบใน V และเรียก $x\in X$ ที่เป็นจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f ว่าจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n (essential periodic point of order n) ถ้าแต่ละ $V\in\eta(x)$ จะมี $\delta>0$ โดยที่ถ้า $g\in C(X)$ และ $\rho(f,g)<\delta$ แล้ว g มีจุดเป็นคาบอันดับ n ใน V

ใช้สัญลักษณ์ $E(f)$, $E_n(f)$ แทนเซตของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของ f และเซตของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของ f ตามลำดับ

บทตั้ง 4.3. ถ้า $f\in C(X)$ แล้ว $f^n\in C(X)$ สำหรับทุก $n\ge 2$

พิสูจน์ สมมติให้ $f\in C(X)$
จะแสดงว่า f^n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับทุก $n\ge 2$ โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทนด้วย f^n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อ $n = 2, 3, \cdots$
ก่อนอื่นจะแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง นั่นคือ f^2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
จาก f ต่อเนื่องที่จุด $f(x)$ ดังนั้นสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ที่ถ้า $d(f(x), f(y)) < \delta_1$ แล้ว

$$d(f(f(x)), f(f(y))) < \varepsilon$$

และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะมี $\delta_2 > 0$ ที่ถ้า $d(x, y) < \delta_2$ แล้ว

$$d(f(x), f(y)) < \delta_1$$

และได้ว่า

$$d(f^2(x), f^2(y)) = d(f(f(x)), f(f(y))) < \varepsilon$$

เป็นผลทำให้ f^2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ f^k เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
จะแสดงว่า $P(k+1)$เป็นจริง นั่นคือ f^{k+1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
จาก f^k ต่อเนื่องที่จุด $f(x)$ ดังนั้นสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ที่ถ้า $d(f(x), f(y)) < \delta_1$ แล้ว

$$d(f^k(f(x)), f^k(f(y))) < \varepsilon$$

และ f ต่อเนื่องที่จุด x จะมี $\delta_2 > 0$ ที่ถ้า $d(x, y) < \delta_2$ แล้ว

$$d(f(x), f(y)) < \delta_1$$

และได้ว่า

$$d(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y)) = d(f^k(f(x)), f^k(f(y))) < \varepsilon$$

เป็นผลทำให้ f^{k+1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
ดังนั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f^n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับทุก $n \geq 2$

ประพจน์ 4.4. สำหรับทุก $n \geq 1$, $P_n(f)$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ (x_k) เป็นลำดับใน $P_n(f)$ และสมมติ $x_k \to x$ เมื่อ $k \to \infty$
เนื่องจาก $x_k \in P_n(f)$ ดังนั้น $f^n(x_k) = x_k$
และจากบทตั้ง 4.3 f^n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับทุก $n \geq 1$ ทำให้ได้ว่า
$f^n(x_k) \to f^n(x)$ เมื่อ $k \to \infty$
จากทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า $f^n(x) = x$ และดังนั้น $x \in P_n(f)$
เป็นผลทำให้ $P_n(f)$ เป็นเซตปิด สำหรับทุก $n \geq 1$

ตัวอย่าง 4.5. (J.-P. Delahaye, 1981) ให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:[0,1]\to[0,1]$ โดยกำหนด

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ,x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 2-2x & ,x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

จะได้เซตของจุดเป็นคาบอันดับ n ดังนี้

$$P_n(f)=\begin{cases} \left\{\dfrac{2k-2}{2^n-1},\dfrac{2k}{2^n+1}\right\} & \text{โดยที่ } n=1 \text{ และ } k=1 \\ \bigcup_{k=1}^{n-1}\left\{\dfrac{2k-2}{2^n-1},\dfrac{2k}{2^n+1}\right\}-P_1(f) & \text{โดยที่ } n\geq 2 \end{cases}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $P(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n(f)$ เป็นเซตอนันต์นับได้และเป็นเซตหนาแน่นใน $[0,1]$
เพราะฉะนั้น $P(f)\neq[0,1]$ แต่ $\overline{P(f)}=[0,1]$
เป็นผลทำให้ $P(f)$ ไม่เป็นเซตปิด

ประพจน์ 4.6. ถ้า $P(f)=F(f)$ แล้ว $P(f)$ เป็นเซตปิด เมื่อ $F(f)$ แทนเซตของจุดตรึงของ f

พิสูจน์ ชัดเจนว่า $F(f)=P_1(f)$ แต่เนื่องจาก $P_1(f)$ เป็นเซตปิด
ดังนั้น $F(f)$ เป็นเซตปิด และจะได้ว่า $P(f)$ เป็นเซตปิดด้วย

ประพจน์ 4.7. ถ้าเซตของอันดับของจุดเป็นคาบเป็นเซตจำกัด แล้ว $P(f)$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้เซตของอันดับของจุดเป็นคาบเป็นเซตจำกัด
จะได้ว่า $P(f)=\bigcup_{k=1}^{m}P_{n_k}$ สำหรับทุก $m\in\mathbb{N}$
เนื่องจาก $P_{n_k}(f)$ เป็นเซตปิด สำหรับทุก $n\geq 1$ ดังนั้น $\bigcup_{k=1}^{m}P_{n_k}(f)$ เป็นเซตปิด
เป็นผลทำให้ $P(f)$ เป็นเซตปิด

ส่วนในทางกลับกันพบว่าถ้า $P(f)$ เป็นเซตปิดแล้วเซตของอันดับของจุดเป็นคาบเป็นเซตจำกัด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.8. ถ้า $P(f)$ เป็นเซตปิด แล้ว $O=\{\,n\in\mathbb{N}\mid n$ เป็นอันดับของจุดเป็นคาบของ $f\,\}$ เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ สมมติ $O=\{\,n\in\mathbb{N}\mid n$ เป็นอันดับของจุดเป็นคาบของ $f\,\}$ เป็นเซตอนันต์
เนื่องจาก $P(f)$ เป็นเซตย่อย ปิด ของเซตกระชับ X ดังนั้น $P(f)$ เป็นเซตกระชับ

ให้

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid P_n(f) \neq \varnothing\}$$
$$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid P_n(f) \neq \varnothing\} - \{n_1\}$$
$$\vdots$$
$$n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid P_n(f) \neq \varnothing\} - \{n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}\}$$
$$\vdots$$

และให้

$$x_1 \in P_{n_1}(f),\ x_2 \in P_{n_2}(f),\ \cdots,\ x_k \in P_{n_k}(f),\ \cdots$$

ดังนั้นจะได้ว่าลำดับ $(x_n) \in P(f)$ เป็นผลทำให้มีลำดับย่อยลู่เข้า (x_{n_k})
สมมติ $x_{n_k} \to x_0$ เมื่อ $k \to \infty$
เพราะฉะนั้น $x_0 \in P(f)$ และมีอันดับเป็น n สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$
ให้

$$\delta = \min\{d(f^r(x_0), x_0) \mid r = 1, 2, \cdots, n-1\}$$

ชัดเจนว่า $\delta > 0$ และให้ $\varepsilon = \dfrac{\delta}{n+1}$
สำหรับแต่ละ $r = 1, 2, \ldots, n-1$ ดังนั้นจะมี $N_r \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก $n_k \geq N_r$ จะได้ว่า

$$d(f^r(x_{n_k}), f^r(x_0)) < \varepsilon = \frac{\delta}{n+1}$$

สำหรับ m มีค่ามากๆ โดยที่ $m = qn + 1$ จะได้ว่า

$$d(f^m(x_{n_k}), f^m(x_0)) < \frac{\varepsilon}{6} \qquad \text{สำหรับ } k \text{ มีค่ามาก ๆ}$$

เนื่องจาก

$$f^m(x_0) = f^{qn+1}(x_0) = f(x_0)$$

ดังนั้น สำหรับ k มีค่ามากๆ

$$d(f(x_{n_k}), f^m(x_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(x_0)) + d(f^m(x_{n_k}), f(x_0))$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$d(f(x_{n_k}), f^m(x_{n_k})) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\delta}{6(n+1)} + \frac{\delta}{6(n+1)} < \frac{\delta}{3(n+1)}$$

สำหรับ k มีค่ามากๆ จะมี $n_k \in \mathbb{N}$ โดยที่ ord $(x_{n_k}) \mid m$ ซึ่ง ord (x_{n_k}) แทนอันดับของ(x_{n_k}) ของ f แล้ว

$$d(f^m(x_{n_k}),x_0) = d(x_{n_k},x_0) < \frac{\delta}{3(n+1)}$$

ดังนั้นสำหรับ k มากๆ ถ้า $m = qn+1$ และ ord $(x_{n_k}) \mid m$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(f(x_0),x_0) &\leq d(f(x_0),f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}),f^m(x_{n_k})) + d(f^m(x_{n_k}),x_0) \\ &< \frac{\delta}{6(n+1)} + \frac{\delta}{3(n+1)} + \frac{\delta}{3(n+1)} = \frac{5\delta}{6(n+1)} < \delta \end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้น $O = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n$ เป็นอันดับของจุดเป็นคาบของ $f\,\}$ เป็นเซตจำกัด

ประพจน์ 4.9. ถ้า $P(f)$ เป็นเซตปิด แล้ว $E(f)$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับใน $E(f)$

สมมติ $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$

เนื่องจาก $P(f)$ เป็นเซตปิด ดังนั้น $x \in P(f)$

สมมติให้ $V \in \eta(x)$ และ $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$ จะมี $N \in \mathbb{N}$

ที่ทำให้ $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq \mathbb{N}$

ดังนั้นจะได้ว่า มี $\delta > 0$ โดยที่ถ้า $g \in C(X)$ และ $\rho(f,g) < \delta$

แล้ว g มีจุดเป็นคาบใน V เพราะฉะนั้น $x \in E(f)$

ดังนั้น $E(f)$ เป็นเซตปิด

ประพจน์ 4.10. สำหรับ $n \geq 1, E_n(f)$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับใน $E_n(f)$

เนื่องจาก $P_n(f)$ เป็นเซตปิด ดังนั้น $x \in P_n(f)$

สมมติให้ $V \in \eta(x)$ และ $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$ จะมี $N \in \mathbb{N}$

ที่ทำให้ $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq \mathbb{N}$

ดังนั้นจะได้ว่า มี $\delta > 0$ โดยที่ถ้า $g \in C(X)$ และ $\rho(f,g) < \delta$

แล้ว g มีจุดเป็นคาบอันดับ n ใน V เพราะฉะนั้น $x \in E_n(f)$

ดังนั้น $E_n(f)$ เป็นเซตปิด

การมีจริงของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n

มีฟังก์ชันในเซต $C(X)$ ที่ไม่มีจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียล เช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.11. กำหนดฟังก์ชันเอกลักษณ์ $i:[0,1]\to[0,1]$
ซึ่งสมาชิกใน $[0,1]$ เป็นจุดเป็นคาบอันดับ 1 นั่นคือ $P_1(i)=[0,1]$
จะแสดงว่าทุกสมาชิกของ $P_1(i)$ ไม่เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ 1

พิสูจน์ ให้ x เป็นสมาชิกใดๆ ของ $P_1(i)$
สมมติว่า x เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ 1
ดังนั้นจะได้ว่า สำหรับทุก $\varepsilon>0$ โดยที่ $V=B_d(x,\frac{\varepsilon}{3})\subseteq[0,1]$
จะมี $\delta>0$ โดยที่ถ้า $g\in C(X)$ และ $\rho(i,g)<\delta$
นั่นคือ

$$\begin{aligned}\rho(i,g)&=\sup\{d(i(x),g(x))\mid x\in[0,1]\}\\&=\sup\{d(x,g(x))\mid x\in[0,1]\}\\&<\delta\end{aligned}$$

แล้ว g มีจุดเป็นคาบอันดับ 1 ใน V
สมมติให้ x_0 เป็นจุดเป็นคาบอันดับ 1 ของ g ใน V
นั่นคือ $g(x_0)=x_0$ และ $x_0\in B_d(x,\frac{\varepsilon}{3})$
ดังนั้น $d(x,x_0)<\frac{\varepsilon}{3}$
เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 ดังนั้นจะมี $\delta_1>0$ โดยที่
ถ้า $d(y,x_0)<\delta_1$ แล้ว $d(g(y),g(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}$
ให้ $y\in B_d(x,\frac{\varepsilon}{3})\cap B_d(x_0,\delta_1)$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}d(i(y),g(y))&\le d(i(y),x)+d(x,x_0)+d(x_0,g(y))\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้นได้ว่า g ก็คือฟังก์ชันเอกลักษณ์นั่นเอง
ดังนั้น x ไม่เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ 1 ของ i

การมีจริงของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n เป็นที่น่าสนใจภายใต้เงื่อนไขของฟังก์ชันต่อไปนี้

ให้ 2^X เป็นเซตของเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างและกระชับของ X ถ้า $A \in 2^X$ และ $\varepsilon > 0$ จะกำหนดให้ $U(\varepsilon,A) = \{x \in X \mid$ จะมี $y \in A$ และ $d(x,y) < \varepsilon\}$ และให้ H เป็นฟังก์ชันระยะทางบน 2^X โดยกำหนดให้

$$H(A,B) = \inf [\, \varepsilon \mid A \subseteq U(\varepsilon,B) \text{ และ } B \subseteq U(\varepsilon,A)\,]$$

สำหรับ A และ B อยู่ใน 2^X และชัดเจนว่า $(2^X,H)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับ
ให้ฟังก์ชัน $P_n : C(X) \to 2^X$ โดยที่

$$P_n(f) = \{\, x \in X \mid f^n(x) = x \text{ และ } n \text{ เป็นอันดับของ } x \,\}$$

ซึ่งเป็นเซตของจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f เมื่อ $f \in C(X)$

บทตั้ง 4.12. P_n เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องบน (upper semi-continuous function)

พิสูจน์ ให้ $f \in C(X)$ และสมมติ $\varepsilon > 0$ โดยนิยาม

$$\delta = \begin{cases} x \in X - U(\varepsilon,P_n(f)) & ;X \neq U(\varepsilon,P_n(f)) \\ 1 & ;X = U(\varepsilon,P_n(f)) \end{cases}$$

ชัดเจนว่า $\delta > 0$
ถ้า $g \in V$ และโดยบทตั้ง 4.3 จะได้ว่า $\rho(f^n,g^n) < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$x \notin X - U(\varepsilon,P_n(f)) \qquad \text{สำหรับทุก } x \in P_n(g)$$

ดังนั้น $x \in U(\varepsilon,P_n(f))$ และจะได้ว่า $P_n(g) \subseteq U(\varepsilon,P_n(f))$
เป็นผลทำให้ P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน

บทตั้ง 4.13. แต่ละจุดเป็นคาบอันดับ n ของ $f \in C(X)$ เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ก็ต่อเมื่อ f เป็นจุดที่ต่อเนื่องของ P_n

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้จุดเป็นคาบอันดับ n ของ $f \in C(X)$ เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n จะแสดงว่า P_n เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด f
ให้ $\varepsilon > 0$ สำหรับแต่ละ $x \in P_n(f)$
จะมี $V_x \in \eta(f)$ โดยที่ ถ้า $g \in V_x$ แล้ว g มีจุดเป็นคาบอันดับ n ใน $B_d(x,\frac{\varepsilon}{2})$
เนื่องจาก $P_n(f)$ เป็นเซตย่อย ปิด ของเซตกระชับ X ดังนั้นทำให้ได้ว่า $P_n(f)$ เป็นเซตกระชับด้วย

และจะได้ว่า

$$P_n(f) = \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$$

ดังนั้น $x \in B_d(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$ สำหรับบาง $i_0 = 1, \cdots, n$

ให้ $g \in V \subseteq V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_n}$

ดังนั้น g มีจุดเป็นคาบอันดับ n ใน $B_d(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$

สมมติให้ y_0 เป็นจุดเป็นคาบอันดับ n ของ g นั่นคือ $y_0 = g(y_0)$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} d(x,y_0) &\le d(x,x_{i_0}) + d(x_{i_0},y_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \in U(\varepsilon, P_n(g))$

เพราะฉะนั้น $P_n(f) \subseteq U(\varepsilon, P_n(g))$

ดังนั้น P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องล่างที่จุด f

จากบทตั้ง 4.12 จะได้ว่า P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด f

$(\Leftarrow)$ สมมติว่า P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด f

จะแสดงว่าแต่ละจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n

ให้ $x \in P_n(f)$ และ $V \in \eta(x)$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ โดยที่ $B_d(x,\varepsilon) \subseteq V$

เนื่องจาก P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ โดยที่ถ้า $g \in C(X)$ และ $\rho(f,g) < \delta$

แล้ว $P_n(g) \subseteq U(\varepsilon, P_n(f))$

เพราะฉะนั้น g มีจุดเป็นคาบอันดับ n ใน V

ดังนั้น $x \in P_n(f)$ เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของ f

ทฤษฎีบท 4.14. สำหรับทุก $f \in C(X)$ และ $\varepsilon > 0$ แล้วจะมี $g \in C(X)$ โดยที่ $\rho(f,g) < \varepsilon$ และทุก ๆ จุดเป็นคาบอันดับ n ของ g เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ เซตของจุดที่ต่อเนื่องของ P_n เป็นเซตหนาแน่นใน $C(X)$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ จะแสดงว่า เซตของจุดที่ต่อเนื่องของ P_n เป็นเซตหนาแน่นใน $C(X)$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยนิยาม

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) = \{f \in C(X) \mid &\text{ สำหรับทุก } \delta > 0 \text{ จะมี } g \in C(X) \text{ โดยที่ถ้า } \rho(f,g) < \delta \\ &\text{ แล้ว } P_n(f) \not\subseteq U(\varepsilon', P_n(g)) \text{ สำหรับทุก } \varepsilon' < \varepsilon\} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้เซตของจุดที่ต่อเนื่องของ P_n ซึ่งแทนด้วย A โดยที่

$$A = C(X) - \bigcup_{\varepsilon>0} N(\varepsilon)$$

ชัดเจนว่า ถ้า $\gamma < \varepsilon$ แล้ว $N(\varepsilon) < N(\gamma)$ เพราะฉะนั้น

$$A = C(X) - \bigcup_{\gamma>0} N(\gamma)$$

เนื่องจาก $(C(X),\rho)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space)
ดังนั้นจะแสดงเพียงว่า $N(\varepsilon)$ เป็นเซตปิดและเซตไม่หนาแน่น (nowhere dense set) ใน $C(X)$
ขั้นตอนแรกแสดงว่า $N(\varepsilon)$ เป็นเซตปิด นั่นคือ $\overline{N(\varepsilon)} = N(\varepsilon)$
ให้ $f \in \overline{N(\varepsilon)}$ สำหรับ $\delta > 0$ และ $\varepsilon' < \varepsilon$ จะมี ε_1 ที่ $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon - \varepsilon'$
เนื่องจาก P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนที่จุด f ดังนั้นจะมี δ_1 ที่

$$P_n(g) \subseteq U(\varepsilon_1, P_n(f))$$

เมื่อ $g \in C(X)$ และ $\rho(f,g) < \delta_1$
สมมติว่า $\delta_1 < \delta$ และให้ $\gamma = \delta - \delta_1$
เนื่องจาก $f \in \overline{N(\varepsilon)}$ ดังนั้นจะมี $g \in N(\varepsilon)$ โดยที่ $\rho(f,g) < \delta_1$ แล้ว

$$P_n(g) \subseteq U(\varepsilon_1, P_n(f))$$

เนื่องจาก $g \in N(\varepsilon)$ จะได้ว่าสำหรับ $\gamma > 0$ จะมี $h \in C(X)$ โดยที่ถ้า $\rho(g,h) < \gamma$ แล้ว

$$P_n(g) \not\subseteq U(\varepsilon'', P_n(h))$$

สำหรับ $\varepsilon'' < \varepsilon$
เพราะฉะนั้น สำหรับ $\delta > 0$ จะมี $h \in C(X)$ โดยที่ถ้า $\rho(f,h) < \delta$ แล้ว

$$P_n(f) \not\subseteq U(\varepsilon', P_n(h))$$

สำหรับ $\varepsilon' < \varepsilon$
เพราะฉะนั้น $f \in N(\varepsilon)$
ดังนั้น $N(\varepsilon)$ เป็นเซตปิด
ขั้นตอนสุดท้ายจะแสดงว่า $N(\varepsilon)$ เป็นเซตไม่หนาแน่นใน $C(X)$ นั่นคือ $\mathrm{Int}(\overline{N(\varepsilon)}) = \varnothing$
เนื่องจาก $N(\varepsilon)$ เป็นเซตปิด ดังนั้นจะแสดงเพียง $\mathrm{Int}(N(\varepsilon)) = \varnothing$
สมมติ $\mathrm{Int}(N(\varepsilon)) \neq \varnothing$
ให้ V เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างและเป็นเซตปิดของ $C(X)$ ใน $N(\varepsilon)$
เลือก ε_i $(i = 1,2,3,\ldots)$ โดยที่ $0 < \gamma < \ldots < \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i < \ldots < \varepsilon_1 < \varepsilon$
เลือก $f_1 \in V$ และสมมติว่า $f_i \in V$

เนื่องจาก P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนที่จุด f_i จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่

$$P_n(g) \subseteq U(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, P_n(f_i))$$

เมื่อ $g \in C(X)$ และ $\rho(f_i, g) < \delta$

สมมติว่า $N_\delta(f_i) \subseteq V$

เนื่องจาก $f_i \in N(\varepsilon)$ ดังนั้นสำหรับ $\delta > 0$ จะมี $f_{i+1} \in C(X)$ โดยที่ถ้า $\rho(f_i, f_{i+1}) < \delta$ แล้ว

$$P_n(f_i) \not\subseteq U(\varepsilon', P_n(f_{i+1}))$$

สำหรับ $\varepsilon' < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $f_{i+1} \in V$ โดยที่

$$P_n(f_{i+1}) \subseteq U(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, P_n(f_i))$$

ดังนั้นเมื่อ $j > i$

$$P_n(f_i) \not\subseteq U(\varepsilon_j, P_n(f_j))$$

ในที่สุดเป็นจริงสำหรับ $j = i+1$

ถ้าสมมติว่าเป็นจริงสำหรับ $j > i$ ถ้าเป็นจริงจะได้ว่า

$$P_n(f_i) \subseteq U(\varepsilon_{j+1}, P_n(f_{j+1}))$$

แต่

$$P_n(f_{j+1}) \subseteq U(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}, P_n(f_j))$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$P_n(f_i) \subseteq U(\varepsilon_j, P_n(f_j))$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานของการอุปนัย

เพราะฉะนั้นเมื่อ $j \neq i$ จะได้ว่า

$$P_n(f_i) \not\subseteq U(\varepsilon_j, P_n(f_j))$$

หรือ

$$P_n(f_j) \not\subseteq U(\varepsilon_i, P_n(f_i))$$

นั่นคือสำหรับ $i \neq j$

$$H(P_n(f_i), P_n(f_j)) \geq \min\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} > \gamma > 0$$

ดังนั้นลำดับ $P_n(f_i) \in 2^X$ ไม่มีลำดับย่อยลู่เข้าใน 2^X ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นเซตกระชับของ 2^X

เพราะฉะนั้น $\mathrm{Int}(N(\varepsilon)) = \varnothing$ และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \overline{C(X) - \bigcup_{\varepsilon>0} N(\varepsilon)} \\
&= C(X) - \mathrm{Int}\Big(\bigcup_{\varepsilon>0} N(\varepsilon)\Big) \\
&\supseteq C(X) - \bigcup_{\varepsilon>0} \mathrm{Int}(N(\varepsilon))
\end{aligned}$$

$$= C(X) - \varnothing$$
$$= C(X)$$

เนื่องจาก $\overline{A} \subseteq C(X)$ จะได้ว่า $\overline{A} = C(X)$ ดังนั้น A เป็นเซตหนาแน่นใน $C(X)$
เป็นผลทำให้ได้ว่า สำหรับทุก $f \in C(X)$ และ $\varepsilon > 0$ จะมี $g \in A$ โดยที่ $\rho(f,g) < \varepsilon$
ดังนั้นจะมี $g \in A$ ที่เป็นจุดที่ต่อเนื่องของ P_n
จากบทตั้ง 4.13 จะได้ว่าทุก ๆ จุดเป็นคาบอันดับ n ของ g เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n

ทฤษฎีบท 4.15. ถ้า f มีจุดเป็นคาบอันดับ n เพียงจุดเดียว แล้วจุดเป็นคาบอันดับ n เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n

พิสูจน์ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$
จะแสดงว่า P_n เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่างที่จุด f
จากบทตั้ง 4.12 จะได้ว่า P_n เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องบน ดังนั้นจะมี $V \in \eta(f)$ โดยที่ ถ้า $g \in V$ แล้ว

$$P_n(g) \subseteq U(\varepsilon, P_n(f))$$

เนื่องจาก $P_n(f)$ มีจุดเป็นคาบอันดับ n เพียงจุดเดียว จะได้ว่า

$$P_n(f) \subseteq U(\varepsilon, P_n(g))$$

ดังนั้น ถ้า $g \in V$ แล้วจะได้ว่า

$$H(P_n(f), P_n(g)) = \inf\,[\delta \mid P_n(g) \subseteq U(\delta, P_n(f)) \text{ และ } P_n(f) \subseteq U(\delta, P_n(g))\,]$$
$$< \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น P_n เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่างที่จุด f
ดังนั้น f เป็นจุดที่ต่อเนื่องของ P_n
จากบทตั้ง 4.13 จะได้ว่าจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f เป็นจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n