บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ประกอบไปด้วยเซต X ที่ไม่เป็นเซตว่าง และฟังก์ชัน $d: X \times X \to \mathbb{R}$ มีสมบัติดังนี้ สำหรับ $x,y,z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

เรียก d ว่าฟังก์ชันระยะทาง (distance function) หรือเมตริก (metric) บน X

บทนิยาม 2.2. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

1. บอลเปิด (Open Ball) นิยามโดย $B(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$
2. บอลปิด (Closed Ball) นิยามโดย $\overline{B}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$

โดยที่ $x_0 \in X$ เป็นจุดศูนย์กลาง และ $r \in \mathbb{R}^+$ เป็นรัศมี

บทนิยาม 2.3. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $G \subset X$ เรียก G ว่าเป็นเซตเปิด (open set) ก็ต่อเมื่อทุก $x \in G$ มี $\varepsilon_x > 0$ ที่ทำให้ $B_d(x,\varepsilon_x) \subseteq G$

บทนิยาม 2.4. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $F \subset X$ เรียก F ว่าเป็นเซตปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อ $X - F$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.5. ให้ x เป็นจำนวนจริง และ δ เป็นจำนวนจริงบวก เราเรียกเซต $(x-\delta, x+\delta)$ ว่าเป็นย่านใกล้เคียงระยะ δ ของ x (δ-neighborhood of x)

ใช้สัญลักษณ์ $N_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta)$ และเรียกเซต U ว่าเป็นย่านใกล้เคียงของ x ถ้า U มีสมบัติว่า $N_\delta(x) \subseteq U$ สำหรับ δ บางจำนวน

บทนิยาม 2.6. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $A,B \subseteq X$ แล้ว B เป็นย่านใกล้เคียง (neighborhood) ของ A ก็ต่อเมื่อ มีเซตเปิด G ซึ่ง $A \subseteq G \subseteq B$

ถ้า $A = \{x\}$ จะเรียกว่า B เป็นย่านใกล้เคียงของ x และใช้สัญลักษณ์ $\eta(x)$ แทนเซตของย่านใกล้เคียงของ x

ข้อสังเกต B เป็นย่านใกล้เคียงของ x ก็ต่อเมื่อ $x \in \operatorname{Int} B$

บทนิยาม 2.7. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $A \subseteq X$ เรียก $p \in A$ ว่าเป็นจุดข้างใน (interior point) ของ A ก็ต่อเมื่อ มี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $B(p,\varepsilon) \subseteq A$

เขียนแทนเซตของจุดข้างในของ A ด้วย Int A นั่นคือ Int A=$\{x \in A|$ มี $\varepsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $B(x,\varepsilon) \subseteq A\}$

บทนิยาม 2.8. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียก $x \in X$ ว่าเป็นจุดของส่วนปกคลุม (Closure) ของเซต E ถ้าทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $y \in E$ โดยที่ $d(x,y) < \varepsilon$

ใช้สัญลักษณ์ $\overline{E}$ แทนเซตของจุดส่วนปกคลุมของ E ชัดเจนว่า $E \subseteq \overline{E}$

ทฤษฎีบท 2.9. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตย่อย F ของ X ว่าเป็นเซตปิด ถ้า $F = \overline{F}$

บทนิยาม 2.10. ให้ (X,d) และ (Y,d') เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะกล่าวว่าการส่ง $T : X \to Y$ ต่อเนื่อง (Continuous) ที่จุด $x_0 \in X$ ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับ $x \in X$

ถ้า $d(x,x_0) < \delta$ แล้ว $d'(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$

และจะกล่าวว่า T ต่อเนื่องบน X ถ้า T ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน X

บทนิยาม 2.11. กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกฟังก์ชัน $x : \mathbb{N} \to X$ ว่าลำดับ (sequence) ใน X

ถ้า x เป็นลำดับใน X แล้วแทน $x(n)$ ด้วย x_n และแทน x ด้วย (x_n) และเรียก x_n ว่าพจน์ที่ n ของ x สำหรับเรนจ์ของลำดับอาจเป็นเซตอนันต์หรือเซตจำกัด

บทนิยาม 2.12. กำหนดให้ s และ t เป็นลำดับใน X จะกล่าวว่า t เป็นลำดับย่อย (subsequence) ของ s ถ้ามีฟังก์ชัน $\varnothing : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ โดยที่

1. $t = s \circ \varnothing$
2. ทุก $n \in \mathbb{N}$ มี $m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\varnothing(i) \geq n$ สำหรับทุก $i \geq m$

ถ้า (x_n) เป็นลำดับใน X และ (i_n) เป็นลำดับใน $\mathbb{N}$ ที่ $i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$ ดังนั้นลำดับ (x_{i_n}) เป็นลำดับย่อยของ (x_n)

บทนิยาม 2.13. กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) และ $x \in X$ จะกล่าวว่า (x_n) ลู่เข้าสู่ x (converges to x) ก็ต่อเมื่อทุก $\varepsilon > 0$ มี $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $d(x_n,x) < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq n_\varepsilon$

ถ้ามี x ที่ทำให้ (x_n) ลู่เข้าสู่ x แล้วเรียกลำดับ (x_n) ว่าลำดับลู่เข้า (convergent sequence) และเรียก x ว่าลิมิต (limit) ของลำดับ (x_n) และใช้สัญลักษณ์ $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ แทน (x_n) ลู่เข้าสู่ x

จากบทนิยาม 2.12 สามารถกล่าวได้ว่า (x_n) ลู่เข้าสู่ x ก็ต่อเมื่อทุก $\varepsilon > 0$ มี $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n \in B_d(x,\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq n_\varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.14. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง (x_n) เป็นลำดับใน (X,d) และ $x \in X$ ได้ว่า (x_n) ลู่เข้าสู่ x ก็ต่อเมื่อทุกเซตเปิด G ที่ $x \in G$ มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n \in G$ สำหรับทุก $n \geq n_0$

ข้อสังเกต 2.15. จากทฤษฎีบท 2.14 สามารถกล่าวได้ว่า (x_n) ลู่เข้าสู่ x ก็ต่อเมื่อทุกย่านใกล้เคียง V ที่ $x \in V$ มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq n_0$

ทฤษฎีบท 2.16. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ถ้า (x_n) เป็นลำดับใน X ที่ (x_n) ลู่เข้าสู่ $x \in X$ และ $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ เป็นเซตอนันต์แล้ว x เป็นจุดลิมิตของเซต $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ทฤษฎีบท 2.17. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะได้ว่าลำดับที่ลู่เข้าในปริภูมิอิงระยะทางเป็นลำดับที่มีขอบเขตและมีลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.18. กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้าในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ x และ y ใน X แล้ว $x = y$

ทฤษฎีบท 2.19. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $A \subseteq X$ โดยที่ $A \neq \varnothing$ ได้ว่า A เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อถ้า (x_n) เป็นลำดับใน A ซึ่ง (x_n) ลู่เข้าสู่ x แล้ว $x \in A$

ทฤษฎีบท 2.20. กำหนดให้ (X,d) และ (Y,d') เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $f:(X,d) \to (Y,d')$ ได้ว่า f ต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ ถ้า (x_n) เป็นลำดับใด ๆ ซึ่งลู่เข้าสู่ a แล้วลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ $f(a)$

บทนิยาม 2.21. ลำดับ (x_n) ในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะกล่าวว่าเป็น ลำดับโคชี (Cauchy Sequence) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } m,n \geq N$$

จะเรียกปริภูมิอิงระยะทาง X ว่า ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (Complete Metric Space) ถ้าทุก ๆ ลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้า

บทนิยาม 2.22. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $A \subseteq X$ เรียกเซต $V = \{G_\alpha | \alpha \in J\}$ เมื่อ J เป็นเซตดรรชนีว่าเป็น เซตปกเปิด (open cover) ของ A ถ้า G_α เป็นเซตเปิดใน X สำหรับทุก $\alpha \in J$ และ $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$

บทนิยาม 2.23. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $\varnothing \neq A \subseteq X$ เรียก A ว่าเป็นเซตกระชับ (compact set) ถ้าทุกเซตปกเปิด V ของ A มี $U \subseteq V$ โดยที่ U เป็นเซตจำกัด และ U เป็นเซตปกเปิดของ A

บทนิยาม 2.24. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เรียก (X,d) ว่า ปริภูมิอิงระยะทางกระชับ (compact metric space) ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตกระชับ

บทนิยาม 2.25. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $A \subseteq X$ เรียก A ว่า เซตมีขอบเขต (bounded set) ก็ต่อเมื่อ มี $K \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $d(x,y) \leq K$ สำหรับทุก $x,y \in A$

บทนิยาม 2.26. จะเรียกปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) ว่า totally bounded ก็ต่อเมื่อทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $A_1,A_2,\ldots,A_n \subseteq X$ ที่ $diam(A_i) < \varepsilon$ และ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ เมื่อ $diam(A_i) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A_i\}$

บทนิยาม 2.27. จะเรียก (X,d) ว่าปริภูมิ sequentially compact ก็ต่อเมื่อทุกลำดับใน X มีลำดับย่อยลู่เข้า

บทนิยาม 2.28. ปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะมีสมบัติ Bolzano-Weierstrass ก็ต่อเมื่อทุกสับเซตอนันต์ของ X มีจุดลิมิต

ทฤษฎีบท 2.29. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ข้อความ 4 ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. (X,d) เป็นปริภูมิกระชับ
2. (X,d) มีสมบัติ Bolzano-Weierstrass
3. (X,d) เป็นปริภูมิ sequentially compact
4. (X,d) เป็นปริภูมิบริบูรณ์และ totally bounded

บทนิยาม 2.30. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตย่อย S ของ X ว่าเป็นเซตหนาแน่น (dense set) ถ้า $\overline{S} = X$

บทนิยาม 2.31. ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตย่อย A ของ X ว่าเป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่น (nowhere dense) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ บอลเปิด $B(x,\varepsilon) \subseteq X$ จะมีบอลเปิด $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ โดยที่ $A \cap B(y,\delta) = \varnothing$

ทฤษฎีบท 2.32. กำหนดให้ (X,T) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ $A \subset X$ จะได้ว่า $\overline{X-A} = X - \mathrm{Int}(A)$

ทฤษฎีบท 2.33. กำหนดให้ (X,T) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ $A \subset X$ ได้ว่าข้อความ 3 ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเซตหนาแน่น
2. ถ้า F เป็นเซตปิดที่ $A \subset F$ แล้ว $F = X$
3. $G \cap A \neq \varnothing$ สำหรับทุกเซตเปิด G ที่ไม่ใช่เซตว่าง

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับและแทนเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องที่ส่งจาก X ไปยัง X ด้วย $C(X)$ ถ้า f และ g อยู่ใน $C(X)$ นิยามฟังก์ชันระยะทาง ρ ระหว่าง f และ g ว่า

$$\rho(f,g) = \sup\,[\, d(f(x),g(x)) \mid x \in X \,]$$

เป็นที่รู้จักว่า $(C(X),\rho)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

ให้ 2^X เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างและเป็นเซตกระชับของ X ถ้า $A \in 2^X$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $U(\varepsilon,A) = \{x \in X \mid$ จะมี $y \in A$ และ $d(x,y) < \varepsilon\}$ และให้ H เป็นฟังก์ชันระยะทางบน 2^X โดยที่

$$H(A,B) = \inf\,[\, \varepsilon \mid A \subseteq U(\varepsilon,B) \text{ และ } B \subseteq U(\varepsilon,A) \,]$$

ซึ่ง A และ B อยู่ใน 2^X

เป็นที่รู้จักว่า $(2^X,H)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับ (compact metric space)

ฟังก์ชัน $T : S \to 2^X$ โดยที่ S เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะกล่าวว่า T เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องบน (upper semi - continuous function) ที่จุด $p \in S$ ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีย่านใกล้เคียง V ของ p โดยที่ $T(x) \subseteq U(\varepsilon, T(p))$ สำหรับทุก $x \in V$

จะกล่าวว่า T เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง (lower semi - continuous function) ที่จุด $p \in S$ ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีย่านใกล้เคียง V ของ p โดยที่ $T(p) \subseteq U(\varepsilon, T(x))$ สำหรับทุก $x \in V$

ชัดเจนว่า T เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด p (ขึ้นกับฟังก์ชันระยะทาง H) ก็ต่อเมื่อ T เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องบนและฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่างที่จุด p

นิยามที่เกี่ยวข้องกับจุดเป็นคาบ

สมมติ(X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับและ $f : X \to X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะเรียกสมาชิก $x \in X$ ที่ $f^n(x) = x$ สำหรับบาง n ว่าจุดเป็นคาบ (periodic point) และจะเรียกสมาชิก $x \in X$ ที่ $f^n(x) = x$ โดยที่ $f^k(x) \neq x$ สำหรับทุก $1 \le k < n$ ว่าจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f (periodic point order n of f) ซึ่ง $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, (n \ge 1)$

ใช้สัญลักษณ์ $P(f)$ แทนเซตของจุดเป็นคาบของ f และ $P_n(f)$ แทนเซตของจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f ซึ่งชัดเจนว่า $P(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(f)$

เป็นที่รู้จักกันดีว่า $P_n(f)$ เป็นเซตปิด แต่ $P(f)$ ไม่เป็นเซตปิด เช่นตัวอย่าง พิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : [0,1] \to [0,1]$ ที่นิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ซึ่งจะได้ว่าเซตของจุดเป็นคาบของ f เป็นเซตย่อยหนาแน่นและเป็นเซตอนันต์นับได้ของ $[0,1]$
นิยามฟังก์ชัน $P_n : C(X) \to 2^X$ โดยที่

$$P_n(f) = \{x \in X \mid f^n(x) = x \text{ และ } n \text{ เป็นอันดับของ } x\}$$

เป็นเซตของจุดเป็นคาบอันดับ n ของ f เมื่อ $f \in C(X)$