

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากปัญหาพื้นฐานในระบบพลวัต (dynamical system) คือการประมาณจำนวนวงโคจรเป็นระยะ ๆ ของช่วงเวลาที่กำหนดซึ่งเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาได้แก่ ทฤษฎีบทจุดตรึง (fixed point theory) ทฤษฎีบทจุดเป็นคาบ (periodic point theory) ที่จะช่วยแก้ไข้ปัญหาในระบบพลวัต

จุดเป็นคาบ (periodic point) นั้นได้มีการนำมาใช้ในทฤษฎีความอลวน (chaos theory) ในระบบพลวัต เพื่อศึกษาปัญหาของการดำรงอยู่ของการแก้ปัญหาคู่ที่ที่สุดในทฤษฎีเกม (game theory) และปัญหาในการทำชุดคำสั่งในส่วนวงจรของวิทยาการคอมพิวเตอร์ (computer science) เป็นต้น

สมมติว่า X เป็นเซตซึ่งไม่ใช่เซตว่าง และฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X$ จะเรียกสมาชิก $x \in X$ ที่ $f^n(x) = x$ สำหรับบาง n ว่าจุดเป็นคาบ (periodic point) และจะเรียกสมาชิก $x \in X$ ที่ $f^n(x) = x$ โดยที่ $f^k(x) \neq x$ สำหรับทุก $1 \leq k < n$ ว่าจุดเป็นคาบอันดับ n (periodic point order n) ของ f ซึ่งจะเรียก n ว่าเป็นอันดับของ x (n is order of x) และ $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, (n \geq 1)$

ในปี 1950, Fort ได้ให้นิยามและศึกษาเกี่ยวกับจุดตรึงที่เอสเซนเชียล (essential fixed point) ไว้ว่า

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกะทัดรัดและมีคุณสมบัติจุดตรึง และ $f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เซตของฟังก์ชันต่อเนื่องแทนด้วย $C(X)$ ถ้า f และ g อยู่ใน $C(X)$ นิยามฟังก์ชันระยะทาง (Distance Function) ระหว่าง f กับ g ว่า

$$\rho(f, g) = \sup [d(f(x), g(x)) \mid x \in X]$$

เป็นที่รู้จักว่า $(C(X), \rho)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space)

ให้ p เป็นจุดตรึงของ $f \in C(X)$ จะเรียก p ว่าจุดตรึงที่เอสเซนเชียล ถ้าแต่ละย่านใกล้เคียง U ของ p จะมี $\varepsilon > 0$ โดยที่ g มีจุดตรึงใน U เมื่อ $g \in C(X)$ และ $\rho(f, g) < \varepsilon$

ในปี 1963, Jiang, Jia-he ได้นำแนวคิดของ Fort ไปใช้ในการศึกษาเรื่อง Nash Equilibrium point ในทฤษฎีเกม จนประสบความสำเร็จ และในปี 1997, Brucker ได้ใช้แนวคิดนี้เหมือนกันในการศึกษาเรื่องค่าเสถียรในสมการเชิงอนุพันธ์ตลอดจนในระบบพลวัต อย่างไรก็ตามยังไม่มีการศึกษาเกี่ยวกับจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียล (essential periodic points)

ดังนั้นผู้วิจัยจะดำเนินการวิจัยและศึกษาเกี่ยวกับจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชันและจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชัน เพื่อให้ได้ข้อสรุปซึ่งเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชันและจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. นิยามจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ
2. นิยามจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ
3. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ
4. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ได้ผลสรุปที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ดังนี้

1. สามารถนิยามจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับได้
2. สามารถนิยามจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับได้
3. ได้สมบัติพื้นฐานของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ
4. ได้สมบัติพื้นฐานของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้นิยามและศึกษาสมบัติพื้นฐานของจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลอันดับ n ของฟังก์ชัน และจุดที่เป็นคาบแบบเอสเซนเชียลของฟังก์ชันบนปริภูมิอิงระยะทางกระชับ