บทที่ 4
ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่เราต้องการ คือ ผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธที่อยู่ในรูปของเมตริกแบบจุดระหว่างการแจกแจงสองการแจกแจงดังกล่าวพร้อมด้วยขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป โดยใช้วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามนิเสธและฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบดังที่ได้นิยามมาแล้วข้างต้น และมี $w(X)$ เป็นฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X แล้ว อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

(1) สำหรับ $x_0 = 0$

$$\left|p_X(0) - \mathcal{NB}(0)\right| \le \frac{p(1-p^r)}{rq}\left\{\mathrm{E}\left|\frac{(r+X)q}{p} - \sigma^2 w(X)\right| + (1-p_X(0))\left|\frac{rq}{p} - \mu\right|\right\} \tag{4.1}$$

ถ้า $\mu = \frac{rq}{p}$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|p_X(0) - \mathcal{NB}(0)\right| \le \left(\frac{rq + p(p^r - 1)}{r(r+1)q^2}\right)\mathrm{E}\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right| \tag{4.2}$$

(2) สำหรับ $x_0 \in S(x)\setminus\{0\}$ ถ้า $r \ge 1$ แล้ว

$$\begin{aligned}\left|p_X(x_0) - \mathcal{NB}(x_0)\right| \le \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\} p\left\{\mathrm{E}\left|\frac{(r+X)q}{p} - \sigma^2 w(X)\right|\right.\\ \left. +(1-p_X(0))\left|\frac{rq}{p} - \mu\right|\right\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

ถ้า $\mu = \frac{rq}{p}$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|p_X(x_0) - \mathcal{NB}(x_0)\right| \le \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\} p\mathrm{E}\left|\frac{(r+X)q}{p} - \sigma^2 w(X)\right| \tag{4.4}$$

พิสูจน์ จากสมการสไตน์ (3.1) เมื่อแทน h ด้วย h_{x_0} และ x ด้วยตัวแปรสุ่ม X แล้วหาค่าคาดหมายตลอดสมการเราจะได้

$$p_X(x_0) - \mathcal{NB}(x_0) = E\big[q(r+X)f(X+1) - Xf(X)\big]$$

$$= E\big[rqf(X+1) + qXf(X+1) - Xf(X)\big]$$

$$= E\big[rqf(X+1) + qX\Delta f(X) - pXf(X)\big]$$

$$= rqE\big[f(X+1)\big] + qE\big[X\Delta f(X)\big] - pE\big[Xf(X)\big]$$

$$= rqE\big[f(X+1)\big] + qE\big[X\Delta f(X)\big] - p\big\{E[(X-\mu)f(X)] + \mu E\big[f(X)\big]\big\}$$

$$= rqE\big[\Delta f(X)\big] + qE\big[X\Delta f(X)\big] + (rq - p\mu)E\big[f(X)\big] - pE[(X-\mu)f(X)]$$

โดยที่ $f = f_{x_0}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดเช่นเดียวกับในสมการ (3.4)

เนื่องจาก $E[w(X)] = 1$ และโดยบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $E\left|w(X)\Delta f(X)\right| = E\left[\,w(X)\left|\Delta f(X)\right|\,\right] < \infty$

ดังนั้นโดยสมการ (2.6) เราจะได้ว่า

$$\left|p_X(x_0) - \mathcal{NB}(x_0)\right| \le \left|rqE\big[\Delta f(X)\big] + qE\big[X\Delta f(X)\big] - p\sigma^2 E[w(X)\Delta f(X)]\,\right|$$

$$+ \left|rq - p\mu\right| E\left|f(X)\right|$$

$$\le E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right|\left|\Delta f(X)\right| + \left|rq - p\mu\right| E\left|f(X)\right|$$

สำหรับ $x_0 = 0$ โดยบทตั้ง 3.2 (1) และ (2) เราจะได้ว่า

$$\left|p_X(0) - \mathcal{NB}(0)\right| \le E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right|\left|\Delta f_0(X)\right| + \left|rq - p\mu\right| E\left|f_0(X)\right|$$

$$\le \frac{rq + p(p^r - 1)}{r(r+1)q^2} E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right| + \left|rq - p\mu\right| \sum_{x=1}^{\infty} \left|f_0(x)\right| p_X(x)$$

$$\le \frac{1-p^r}{rq} E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right| + \frac{1-p^r}{rq}\left|rq - p\mu\right| \sum_{x=1}^{\infty} p_X(x)$$

$$= \frac{1-p^r}{rq}\left\{E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right| + \left|rq - p\mu\right|(1 - p_X(0))\right\}$$

และสำหรับ $x_0 > 0$ โดยบทตั้ง 3.2 (3) เราจะได้ว่า

$$\left|p_X(x_0) - \mathcal{NB}(x_0)\right| \le E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right|\left|\Delta f_{x_0}(X)\right| + \left|rq - p\mu\right| E\left|f_{x_0}(X)\right|$$

$$\le \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}\left[E\left|(r+X)q - p\sigma^2 w(X)\right| + \left|rq - p\mu\right|(1 - p_X(0))\right]$$

ในกรณี $\mu = \dfrac{rq}{p}$ เราจะได้อสมการ (4.2) และ (4.4) ตามลำดับ

บทแทรก 4.1 ถ้า $\frac{(r+x)q}{p}-\sigma^2 w(x)\geq/<0$ สำหรับทุก $x\in S(x)$ แล้ว จะได้ว่า

(1) สำหรับ $x_0=0$

$$\left|p_X(0)-\mathcal{NB}(0)\right|\leq\frac{p(1-p^r)}{rq}\left\{\left|\frac{(r+\mu)q}{p}-\sigma^2\right|+(1-p_X(0))\left|\frac{rq}{p}-\mu\right|\right\} \tag{4.5}$$

ถ้า $\mu=\frac{rq}{p}$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|p_X(0)-\mathcal{NB}(0)\right|\leq\left(\frac{rq+p(p^r-1)}{r(r+1)q^2}\right)\left|\mu-p\sigma^2\right| \tag{4.6}$$

(2) สำหรับ $x_0\in S(x)\setminus\{0\}$ และ $r\geq 1$

$$\left|p_X(x_0)-\mathcal{NB}(x_0)\right|\leq\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}p\left[\left|\frac{(r+\mu)q}{p}-\sigma^2\right|+\left|\frac{rq}{p}-\mu\right|(1-p_X(0))\right] \tag{4.7}$$

ถ้า $\mu=\frac{rq}{p}$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|p_X(x_0)-\mathcal{NB}(x_0)\right|\leq\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}\left|\mu-p\sigma^2\right| \tag{4.8}$$

พิสูจน์ (1) ให้ $\frac{(r+x)q}{p}-\sigma^2 w(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in S(x)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left|\frac{(r+X)q}{p}-\sigma^2 w(X)\right| &= \mathrm{E}\left[\frac{(r+X)q}{p}-\sigma^2 w(X)\right]\\ &= \frac{\left[r+\mathrm{E}(X)\right]q}{p}-\sigma^2\mathrm{E}\left[w(X)\right]\\ &= \frac{(r+\mu)q}{p}-\sigma^2\end{aligned}$$

(2) ให้ $\frac{(r+x)q}{p}-\sigma^2 w(x)<0$ สำหรับทุก $x\in S(x)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left|\frac{(r+X)q}{p}-\sigma^2 w(X)\right| &= \mathrm{E}\left[\sigma^2 w(X)-\frac{(r+X)q}{p}\right]\\ &= \sigma^2\mathrm{E}\left[w(X)\right]-\frac{\left[r+\mathrm{E}(X)\right]q}{p}\\ &= \sigma^2-\frac{(r+\mu)q}{p}\end{aligned}$$

ดังนั้นจาก (1) และ (2) เราจะได้ว่า $\mathrm{E}\left|\frac{(r+X)q}{p}-\sigma^2 w(X)\right|=\left|\frac{(r+\mu)q}{p}-\sigma^2\right|$ ซึ่งเมื่อแทนลงในทฤษฎีบท 4.1 จะได้ผลลัพธ์ดังอสมการ (4.5) ถึง (4.8)

ในกรณีที่ $r=1$ เราสามารถแสดงผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงเราขาคณิตดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.2 สำหรับการแจกแจงเรขาคณิต แล้ว จะได้ว่า

(1) สำหรับ $x_0=0$ (Teerapabolarn, 2011)

$$|p_X(0)-\mathcal{G}(0)| \le \sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\left|\frac{q}{x}-\frac{p\sigma^2 w(x)}{x(x+1)}\right|p_X(x)+|q-p\mu|\left\{p_X(0)+\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{x}\right\} \tag{4.9}$$

ถ้า $\mu=\frac{q}{p}$ แล้วจะได้ว่า

$$|p_X(0)-\mathcal{G}(0)| \le \sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\left|\frac{q}{x}-\frac{p\sigma^2 w(x)}{x(x+1)}\right|p_X(x) \tag{4.10}$$

(2) สำหรับ $x_0\in S(x)\setminus\{0\}$

$$|p_X(x_0)-\mathcal{G}(x_0)| \le \sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1}{x}\right\}\left|(x+1)q-p\sigma^2 w(x)\right|p_X(x)$$

$$+|q-p\mu|\left\{p_X(0)+\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1}{x}\right\}p_X(x)\right\} \tag{4.11}$$

ถ้า $\mu=\frac{q}{p}$ แล้วจะได้ว่า

$$|p_X(x_0)-\mathcal{G}(x_0)| \le \sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1}{x}\right\}\left|(x+1)q-p\sigma^2 w(x)\right|p_X(x) \tag{4.12}$$

บทแทรก 4.3 สำหรับ $r\ge 1$ และ $x,x_0\in\mathbb{N}$ แล้ว จะได้ว่า

$$(1)\ \ p\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}\le\frac{p(1-p^r)}{rq}<1 \tag{4.13}$$

$$(2)\ \ \min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1}{x}\right\}\le\frac{1}{x} \tag{4.14}$$

พิสูจน์ (1) จะเห็นได้ชัดว่า $p\min\left\{\frac{1}{x_0},\frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}\le\frac{p(1-p^r)}{rq}$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\frac{p(1-p^r)}{rq}<1$

จาก $e^{q/p}=1+\frac{q}{p}+\frac{1}{2!}\left(\frac{q}{p}\right)^2+\cdots=1+\frac{1-p}{p}+\frac{1}{2!}\left(\frac{q}{p}\right)^2+\cdots=\frac{1}{p}+\frac{1}{2!}\left(\frac{q}{p}\right)^2+\cdots$

จะได้ว่า $\frac{1}{p} < e^{q/p} \Rightarrow \; p > e^{-q/p}$

$$\Rightarrow p^r > e^{-rq/p}$$

$$\Rightarrow 1 - p^r < 1 - e^{-rq/p}$$

ดังนั้น $\frac{p(1-p^r)}{rq} < \frac{p(1-e^{-rq/p})}{rq} = \frac{(1-e^{-\lambda})}{\lambda}$, $(\lambda = \frac{rq}{p})$ (4.15)

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} < 1$

จาก $1-\lambda < e^{-\lambda}$ แล้วจะได้ว่า $1 - e^{-\lambda} < \lambda$

ดังนั้น $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} < 1$ (4.16)

จาก (4.15) และ (4.16) เราจะได้ว่า $\frac{p(1-p^r)}{rq} < 1$

ดังนั้นจะได้อสมการ (4.13) เป็นจริง

(2) เราเห็นได้ชัดว่าอสมการ (4.14) เป็นจริง

บทแทรก 4.3 นี้ได้สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผลลัพธ์ทั้งหมดในทฤษฎีบท 4.1 และอสมการ (1.7) และบทแทรก 4.2 และอสมการ (1.8) เราจะเห็นว่าขอบเขตบนแบบไม่เอกรูปของผลลัพธ์ทั้งหมดในทฤษฎีบท 4.1 และบทแทรก 4.2 คมกว่าขอบเขตบนแบบเอกรูปในอสมการ (1.7) และอสมการ (1.8)

การประยุกต์

การประยุกต์ที่จะนำเสนอต่อไปนี้ เราจะใช้ผลลัพธ์โดยตรงที่ได้มาจากทฤษฎีบท 4.1 และบทแทรก 4.3 ซึ่งเกี่ยวข้องกับการประมาณแบบจุดของการแจกแจงโพลยา การแจกแจงโพลยานิเสธ การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก และการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธและการแจกแจงเรขาคณิต

การแจกแจงโพลยา

สมมติว่ากล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง r ลูก และสีดำ $N-r$ ลูก สุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมาหนึ่งลูกแล้วใส่กลับคืนลงในกล่องพร้อมด้วยลูกบอลสีเดียวกับลูกบอลที่สุ่มได้อีกหนึ่งลูกลงในกล่องใบนี้ ทำซ้ำในลักษณะนี้เป็นจำนวน m ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่สุ่มได้จากการสุ่มหยิบลูกบอล m ครั้ง แล้วจะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงโพลยา โดยมี N, m และ r เป็นพารามิเตอร์ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (Brown & Phillips, 1999) ดังนี้

$$p_X(x)=\frac{\binom{r+x-1}{x}\binom{N-r+m-x-1}{m-x}}{\binom{N+m-1}{m}} \qquad ,x=0,1,\ldots,m$$

และค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ $\mu=\frac{mr}{N}$ และ $\sigma^2=\frac{mr(N+m)(N-r)}{N^2(N+1)}$ ตามลำดับ

โดยความสัมพันธ์ของสมการเวียนเกิดในสมการ (2.4) เราจะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มโพลยา $w(x)=\frac{(r+x)(m-x)}{N\sigma^2}$ ให้ $p=\frac{N}{N+m}$ และแทนค่า p ลงในทฤษฎีบท 4.1 แล้วจะได้ว่า $\frac{(r+x)q}{p}-\sigma^2 w(x)=\frac{(r+x)x}{N}\geq 0$ สำหรับทุก $0\leq x\leq m$ ดังนั้นโดยบทแทรก 4.1 และ 4.2 เราจะได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทและบทแทรกต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ $\mathcal{P}Y(x_0)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มโพลยาที่ $x_0\in\{0,1,\ldots,m\}$ ถ้า $p=\frac{N}{N+m}$ แล้ว จะได้ว่า

$$\left|\mathcal{P}Y(x_0)-\mathcal{NB}(x_0)\right|\leq\begin{cases}\dfrac{mr+N(p^r-1)}{m(N+1)p} & ,\quad x_0=0\\[2ex] \min\left\{\dfrac{1}{x_0},\dfrac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}\dfrac{r(r+1)m}{N(N+1)} & ,\quad 1\leq x_0\leq m\end{cases}$$

บทแทรก 4.4 สำหรับ $r=1$

$$\left|\mathcal{P}Y(x_0)-\mathcal{G}(x_0)\right|\leq\begin{cases}\dfrac{m}{(N+m-1)(N+m)} & ,x_0=0\\[2ex] \dfrac{m}{N}\min\left\{\dfrac{2N+m-1}{(N+m-1)(N+m)},\dfrac{2}{(N+1)x_0}\right\} & ,1\leq x_0\leq m\end{cases}$$

เราจะสังเกตได้ว่าขอบเขตบนของการประมาณมีค่าน้อย เมื่อ N มีค่ามาก และ r และ m มีค่าน้อย นั่นคือ การแจกแจงทวินามนิเสธสามารถประมาณการแจกแจงโพลยาได้ดี

การแจกแจงโพลยานิเสธ

สมมติว่ากล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง r ลูก และสีดำ $N-r$ ลูก สุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมาหนึ่งลูกแล้วใส่กลับคืนลงในกล่องพร้อมด้วยลูกบอลสีเดียวกับลูกบอลที่สุ่มได้อีกหนึ่งลูกลงในกล่องใบนี้ ทำซ้ำในลักษณะนี้ จนกระทั่งได้จำนวนลูกบอลสีดำ n ลูก ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่สุ่มได้ก่อนที่จะได้ลูกบอลสีดำลูกที่ n แล้วจะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงโพลยานิเสธโดยมี N, n และ r เป็นพารามิเตอร์ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (Teerapabolarn & Boondirek, 2010) ดังนี้

$$p_X(x)=\binom{n+x-1}{x}\frac{(r+x-1)!(N-r+n-1)!(N-1)!}{(r-1)!(N-r-1)!(N+n+x-1)!} \qquad ,x=0,1,...$$

และค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ $\mu=\dfrac{nr}{N-r-1}$ และ $\sigma^2=\dfrac{nr(n+N-r-1)(N-1)}{(N-r-2)(N-r-1)^2}$ ตามลำดับ

โดยความสัมพันธ์ของสมการเวียนเกิดในสมการ (2.4) เราจะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มโพลยานิเสธ ดังนี้ $w(x)=\dfrac{(n+x)(r+x)}{(N-r-1)\sigma^2}$ แทนค่า p และ r ลงในทฤษฎีบท 4.1 ด้วย $\dfrac{N-r-1}{N-1}$ และ n ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า $\dfrac{(n+x)q}{p}-\sigma^2 w(x)=-\dfrac{(n+x)x}{N-r-1}\le 0$ สำหรับทุก $x\ge 0$ ดังนั้น โดยบทแทรก 4.1 และ 4.2 เราจะได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทและบทแทรกต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ $\mathcal{NP}(x_0)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มโพลยานิเสธที่ $x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ถ้า $p=\dfrac{N-r-1}{N-1}$ แล้ว จะได้ว่า

$$|\mathcal{NP}(x_0)-\mathcal{NB}(x_0)|\le\begin{cases}\dfrac{nr+(N-r-1)(p^n-1)}{rp(N-r-2)} & , \quad x_0=0\\[2ex] \min\left\{\dfrac{1}{x_0},\dfrac{1-p^n}{(r+x_0-1)q}\right\}\dfrac{n(n+1)r}{(N-r-1)(N-r-2)} & , \quad x_0>0\end{cases}$$

บทแทรก 4.5 สำหรับ $n=1$

$$|\mathcal{NP}(x_0)-\mathcal{G}(x_0)|\le\begin{cases}\dfrac{r}{N(N-1)} & , \quad x_0=0\\[2ex] \dfrac{r}{N-r-1}\min\left\{\dfrac{2}{x_0(N-r-2)},\dfrac{2N-r-1}{N(N-1)}\right\} & , \quad x_0>0\end{cases}$$

เราจะสังเกตได้ว่าขอบเขตบนของการประมาณมีค่าน้อย เมื่อ N มีค่ามาก และ r และ n มีค่าน้อย นั่นคือ การแจกแจงทวินามนิเสธสามารถประมาณการแจกแจงโพลยานิเสธได้ดี

การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก

สมมติว่ากล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลอยู่ N ลูก ประกอบด้วยลูกบอลสีขาว r ลูก และลูกบอลสีดำ $N-r$ ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมาหนึ่งลูกแล้วไม่ใส่ลูกบอลกลับคืนในกล่อง ทำซ้ำในลักษณะนี้เป็นจำนวน n ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีขาวที่สุ่มได้จากการสุ่มหยิบลูกบอล n ครั้ง แล้วจะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก โดยมี N, r และ n เป็นพารามิเตอร์ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (Balakrishnana & Nevzorov, 1956) ดังนี้

$$p_X(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad ,x = 0,1,\ldots,\min\{n,r\}$$

และค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ $\mu = \frac{nr}{N}$ และ $\sigma^2 = \frac{nr(N-n)(N-r)}{N^2(N-1)}$ ตามลำดับ

โดยความสัมพันธ์ของสมการเวียนเกิดในสมการ (2.4) เราจะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริก ดังนี้ $w(x) = \frac{(n-x)(r-x)}{N\sigma^2}$ ให้ $p = \frac{N}{N+n}$ และแทนค่า p ลงในทฤษฎีบท 4.1 เราจะได้ว่า $\frac{(r+x)q}{p} - \sigma^2 w(x) = \frac{(2n+r-x)x}{N} \geq 0$ สำหรับทุก $0 \leq x \leq \min\{n,r\}$ ดังนั้นโดย บทแทรก 4.1 เราจะได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $\mathcal{H}(x_0)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริกที่ $x_0 \in \{0,1,\ldots,\min\{n,r\}\}$ ถ้า $p = \frac{N}{N+n}$ แล้ว จะได้ว่า

$$|\mathcal{H}(x_0) - \mathcal{NB}(x_0)| \leq \begin{cases} \frac{(2n+r-1)(nr+N(p^r-1))}{n(r+1)(N-1)} & , \quad x_0 = 0 \\ \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}\frac{nr(2n+r-1)}{(N-1)(N+n)} & , \quad 0 < x_0 \leq \min\{n,r\} \end{cases}$$

เราจะสังเกตได้ว่าขอบเขตบนของการประมาณมีค่าน้อย เมื่อ N มีค่ามาก และ r และ n มีค่าน้อย นั่นคือ การแจกแจงทวินามนิเสธสามารถประมาณการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกได้ดี

การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธ

สมมติว่ากล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลอยู่ N ลูก ประกอบด้วยลูกบอลสีขาว r ลูก และลูกบอลสีดำ $N-r$ ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมาหนึ่งลูกแล้วไม่ใส่ลูกบอลกลับคืนในกล่อง ทำซ้ำในลักษณะนี้จนกระทั่งได้ลูกบอลสีดำเป็นจำนวน n ลูก ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีขาวที่สุ่มได้ก่อนที่จะได้ลูกบอลสีดำลูกที่ n แล้วจะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธ โดยมี N, n และ r เป็นพารามิเตอร์ มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (Balakrishnana & Nevzorov, 1956) ดังนี้

$$p_X(x) = \frac{\binom{n+x-1}{x}\binom{N-n-x}{r-x}}{\binom{N}{r}} \qquad ,x = 0,1,\ldots,r$$

และค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ $\mu = \frac{nr}{N}$ และ $\sigma^2 = \frac{nr(N-n)(N-r)}{N^2(N-1)}$ ตามลำดับ

โดยความสัมพันธ์ของสมการเวียนเกิดในสมการ (2.4) เราจะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธ ดังนี้ $w(x) = \frac{(n+x)(r-x)}{(N-r+1)\sigma^2}$ แทนค่า p และ r ในทฤษฎีบท 4.1 ด้วย $\frac{N-r+1}{N+1}$ และ n แล้วเราจะได้ว่า $\frac{(n+x)q}{p} - \sigma^2 w(x) = \frac{(n+x)x}{N-r+1} \geq 0$ สำหรับทุก $0 \leq x \leq n$ ดังนั้นโดยบทแทรก 4.1 และ 4.2 เราจะได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทและบทแทรกต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ $\mathcal{NH}(x_0)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธ ที่ $x_0 \in \{0,1,\ldots,r\}$ ถ้า $p = \frac{N-r+1}{N+1}$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|\mathcal{NH}(x_0) - \mathcal{NB}(x_0)\right| \leq \begin{cases} \dfrac{nr+(N-r+1)(p^n-1)}{pr(N-r+2)} & , \quad x_0 = 0 \\ \min\left\{\dfrac{1}{x_0}, \dfrac{1-p^n}{(r+x_0-1)q}\right\} \dfrac{nr(n+1)}{(N-r+1)(N-r+2)} & , \quad 0 < x_0 \leq r \end{cases}$$

บทแทรก 4.6 สำหรับ $n = 1$

$$\left|\mathcal{NH}(x_0) - \mathcal{G}(x_0)\right| \leq \begin{cases} \dfrac{r}{N(N+1)} & , \quad x_0 = 0 \\ \dfrac{r}{N-r+1} \min\left\{\dfrac{2}{x_0(N-r+2)}, \dfrac{2N-r+1}{N(N+1)}\right\} & , \quad 0 < x_0 \leq r \end{cases}$$

เราจะสังเกตได้ว่าขอบเขตบนของการประมาณมีค่าน้อย เมื่อ N มีค่ามาก และ r และ n มีค่าน้อย นั่นคือ การแจกแจงทวินามนิเสธสามารถประมาณการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธได้ดี