บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

สำหรับวิธีดำเนินการวิจัยนั้น เราสามารถแบ่งการดำเนินการออกเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณทวินามนิเสธ โดยเฉพาะเรื่องการประมาณทวินามนิเสธด้วยวิธีของสไตน์จากงานวิจัยของ Brown and Phillips (1999) เรื่องการประมาณทวินามนิเสธด้วยวิธีของสไตน์ และเอกลักษณ์ของสไตน์จากงานวิจัยของ Teerapabolarn and Boondirek (2010) และศึกษาการประมาณเรขาคณิตและฟังก์ชัน w ในงานวิจัยของ Teerapabolarn (2011) เพื่อนำมาสร้างบทตั้งต่าง ๆ ที่จำเป็นสำหรับการสร้างและพิสูจน์ผลลัพธ์ของการวิจัยดังต่อไปนี้

สมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์ $r > 0$ และ $0 < p < 1$ (เมื่อกำหนดฟังก์ชัน h) ซึ่ง Brown and Phillips (1999) ได้สร้างขึ้นมาเป็นดังนี้

$$h(x) - \aleph_{r,p}(h) = q(r+x)f(x+1) - xf(x) \tag{3.1}$$

โดยที่ $\aleph_{r,p}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)}p^r q^k$ และ f และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตที่นิยามบน $\mathbb{N} \cup \{0\}$ สำหรับ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ ให้ $h_A : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases} \tag{3.2}$$

ดังนั้นโดย Brown and Phillips (1999) และ Teerapabolarn and Boondirek (2010) เราสามารถเขียนผลเฉลย f_A ของสมการ (3.1) ได้ดังนี้

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{x!\Gamma(r)}{\Gamma(r+x)xp^r q^x}\left[\aleph_{r,p}(h_{A \cap C_{x-1}}) - \aleph_{r,p}(h_A)\aleph_{r,p}(h_{C_{x-1}})\right] & , x \geq 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

โดยที่ $C_x = \{0, \ldots, x\}$

เมื่อ $A = \{x_0\}$ สำหรับ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $h_{x_0} = h_{\{x_0\}}$ เราสามารถเขียนผลเฉลย $f_{x_0} = f_{\{x_0\}}$ ของสมการ (3.3) ได้ดังนี้

$$f_{x_0}(x)=\begin{cases} -\dfrac{x!\Gamma(r)}{\Gamma(r+x)xp^r q^x}\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(h_{C_{x-1}}) & , \quad 1\le x\le x_0 \\ \dfrac{x!\Gamma(r)}{\Gamma(r+x)xp^r q^x}\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(1-h_{C_{x-1}}) & , \quad x>x_0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases} \tag{3.4}$$

ต่อไปนี้เราจะสร้างบทตั้งที่แสดงสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน f_{x_0} เพื่อที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท ซึ่งเป็นผลลัพธ์หลักของงานวิจัยในครั้งนี้

บทตั้ง 3.1 ให้ $x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ และ $x\in\mathbb{N}$ แล้ว จะได้ว่า

(1) f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่มากกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลดสำหรับทุก $x>x_0$

(2) f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่น้อยกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลดสำหรับทุก $x\le x_0$

พิสูจน์ (1) จากสมการ (3.4) เราจะเห็นได้ชัดว่า f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่มากกว่าศูนย์สำหรับทุก $x>x_0$ ต่อไปเราจะแสดงให้เห็นว่า f_{x_0} เป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x>x_0$ นั่นคือ เราต้องแสดงว่า $f_{x_0}(x+1)-f_{x_0}(x)<0$ ซึ่งจากสมการ (3.4) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{x_0}(x+1)-f_{x_0}(x) &= \frac{(x+1)!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(1-h_{C_x})}{\Gamma(r+x+1)(x+1)p^r q^{x+1}}-\frac{x!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(1-h_{C_{x-1}})}{\Gamma(r+x)xp^r q^x} \\ &= \frac{x!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})}{\Gamma(r+x+1)xp^r q^x}\left[\frac{x}{q}\aleph_{r,p}(1-h_{C_x})-(r+x)\aleph_{r,p}(1-h_{C_{x-1}})\right] \end{aligned}$$

ให้ $\Delta(x)=\frac{x}{q}\aleph_{r,p}(1-h_{C_x})-(r+x)\aleph_{r,p}(1-h_{C_{x-1}})$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\Delta(x)<0$

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{x}{q}\sum_{k=x+1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}-(r+x)\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} \\ &= x\sum_{k=x+1}^{\infty}\frac{(r+k-1)\Gamma(r+k-1)p^r q^{k-1}}{k(k-1)!\Gamma(r)}-(r+x)\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} \\ &= x\sum_{k=x}^{\infty}\frac{(r+k)\Gamma(r+k)p^r q^k}{(k+1)k!\Gamma(r)}-(r+x)\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} \\ &= \sum_{k=x}^{\infty}\left(\frac{x(r+k)}{(k+1)}-(r+x)\right)\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} \\ &= \sum_{k=x}^{\infty}\left(\frac{r(x-k)-(r+x)}{(k+1)}\right)\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}<0 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า $f_{x_0}(x+1)-f_{x_0}(x)<0$

ดังนั้น เราจะได้ว่า f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่มากกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x>x_0$

(2) จากสมการ (3.4) เราจะเห็นได้ชัดว่า f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่น้อยกว่าศูนย์สำหรับทุก $x\le x_0$ ต่อไปเราจะแสดงให้เห็นว่า f_{x_0} เป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x\le x_0$ นั่นคือ เราต้องแสดงว่า $f_{x_0}(x+1)-f_{x_0}(x)<0$ จากสมการ (3.4) เราจะได้ว่า

$$f_{x_0}(x+1)-f_{x_0}(x)=\frac{x!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(h_{C_{x-1}})}{\Gamma(r+x)xp^rq^x}-\frac{(x+1)!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(h_{C_x})}{\Gamma(r+x+1)(x+1)p^rq^{x+1}}$$

$$=\frac{x!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})}{\Gamma(r+x+1)xp^rq^x}\left[(r+x)\aleph_{r,p}(h_{C_{x-1}})-\frac{x}{q}\aleph_{r,p}(h_{C_x})\right]$$

$$=\frac{x!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})}{\Gamma(r+x)xq^x}\left[\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}-\frac{x}{(r+x)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}\right]$$

ดังนั้นจะแสดงว่า $\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}<\frac{x}{(r+x)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$ ซึ่งเราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ขั้นตอน โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction) ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า $\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r+1)(x-1)!}<\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{N}$

ให้ $x=1$ เราจะได้ว่า $\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r+1)(x-1)!}=q<\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}=1$ $(0<q<1)$

ให้ $\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r+1)(x-1)!}<\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$ เมื่อ $x\in\mathbb{N}$

จะแสดงว่า $$\frac{\Gamma(r+x+1)q^{x+1}}{\Gamma(r+1)x!}<\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$$

สังเกตได้ว่า
$$\frac{\Gamma(r+x+1)q^{x+1}}{\Gamma(r+1)x!}<\frac{\Gamma(r+x+1)q^x}{\Gamma(r+1)x!}$$

$$=\frac{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}{r\Gamma(r)x(x-1)!}$$

$$=\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)(x-1)!}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r+1)(x-1)!}+\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)x!}$$

$$< \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)x!}$$

$$= \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$$

ดังนั้นโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r+1)(x-1)!} < \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$

ขั้นตอนที่ 2 จะแสดงว่า $\sum_{k=0}^{x-1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} < \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$

ให้ $x = 1$ เราจะได้ว่า $\sum_{k=0}^{x-1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} = 1 < \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} = \frac{1+rq}{(r+1)q}$

ให้ $\sum_{k=0}^{x-1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} < \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$ เมื่อ $x \in \mathbb{N}$

จะแสดงว่า $\sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} < \frac{x+1}{(r+x+1)q} \sum_{k=0}^{x+1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$

จะสังเกตได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} = \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{\Gamma(r+x)q^x}{x!\Gamma(r)}$$

$$< \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{\Gamma(r+x)q^x}{x!\Gamma(r)} \tag{3.5}$$

และ

$$\frac{x+1}{(r+x+1)q} \sum_{k=0}^{x+1} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} = \frac{x+1}{(r+x+1)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{(x+1)\Gamma(r+x+1)q^{x+1}}{(r+x+1)q\Gamma(r)(x+1)!}$$

$$= \frac{x+1}{(r+x+1)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}{(r+x+1)x!\Gamma(r)}$$

$$= \frac{x+1}{(r+x+1)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} - \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$$

$$+ \frac{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}{(r+x+1)x!\Gamma(r)} + \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$$

$$= \frac{r}{(r+x)(r+x+1)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}{(r+x+1)x!\Gamma(r)}$$

$$+ \frac{x}{(r+x)q} \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} \tag{3.6}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\Gamma(r+x+1)q^{x+1}}{\Gamma(r+1)x!} = \dfrac{(r+x)\Gamma(r+x)q^{x+1}}{r\Gamma(r)x!}\left(\dfrac{r+x+1}{r+x+1}\right)$ และโดยขั้นตอนที่ 1 เราจะได้ว่า

$$\frac{\Gamma(r+x+1)q^{x+1}}{\Gamma(r+1)x!} < \sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)}$$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)x!}\left(\frac{1}{r+x+1}\right) < \frac{r}{(r+x)(r+x+1)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} \tag{3.7}$$

จากสมการ (3.6) และอสมการ (3.7) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{(r+x+1)q}\sum_{k=0}^{x+1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} &> \frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)x!}\left(\frac{1}{r+x+1}\right) + \frac{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}{(r+x+1)x!\Gamma(r)} \\
&\quad + \frac{x}{(r+x)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} \\
&= \frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)x!}\left(1-\frac{r+x}{r+x+1}\right) + \frac{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}{(r+x+1)x!\Gamma(r)} \\
&\quad + \frac{x}{(r+x)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} \\
&= \frac{x}{(r+x)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{\Gamma(r+x)q^x}{\Gamma(r)x!} \\
&> \sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} \quad \text{(โดยอสมการ (3.5))}
\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} < \frac{x}{(r+x)q}\sum_{k=0}^{x}\frac{\Gamma(r+k)q^k}{k!\Gamma(r)} \quad \text{สำหรับทุก } x\in\mathbb{N}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $f_{x_0}(x+1)-f_{x_0}(x)<0$

ดังนั้น f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่น้อยกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลดสำหรับทุก $x\le x_0$ ตามที่ต้องการ

บทตั้ง 3.2 สำหรับ $x_0, x\in\mathbb{N}$ ให้ $\Delta f_{x_0}(x) = f_{x_0}(x+1) - f_{x_0}(x)$ แล้ว อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $$|f_0(x)| \le \frac{1-p^r}{rq} \tag{3.8}$$

(2) $$|\Delta f_0(x)| \le \frac{rq+p(p^r-1)}{r(r+1)q^2} \tag{3.9}$$

(3) ถ้า $r \geq 1$ แล้ว $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \leq \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}$ (3.10)

และ $\left|f_{x_0}(x)\right| \leq \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}$ (3.11)

พิสูจน์ (1) โดยบทตั้ง 3.1 (1) จะได้ว่า f_0 เป็นฟังก์ชันที่มากกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $|f_0(x)| = f_0(x) \leq f_0(1)$

และ
$$\begin{aligned} f_0(1) &= \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r+1)p^r q}\aleph_{r,p}(h_0)\aleph_{r,p}(1-h_{C_0}) \\ &= \frac{\Gamma(r)}{r\Gamma(r)p^r q}p^r\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} \\ &= \frac{1-p^r}{rq} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|f_0(x)| \leq \frac{1-p^r}{rq}$

(2) เราจะแสดงว่า $|\Delta f_0(x)| \leq \frac{rq+p(p^r-1)}{r(r+1)q^2}$

โดยบทตั้ง 3.1 (1) f_0 เป็นฟังก์ชันที่มากกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$ ดังนั้น เราจะได้ว่า $|\Delta f_0(x)| = f_0(x) - f_0(x+1)$

และ
$$\begin{aligned} f_0(x) - f_0(x+1) &= \frac{(x-1)!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_0)}{\Gamma(r+x+1)p^r q^x}\left[(r+x)\aleph_{r,p}(1-h_{C_{x-1}}) - \frac{x}{q}\aleph_{r,p}(1-h_{C_x})\right] \\ &= \frac{(x-1)!\Gamma(r)}{\Gamma(r+x+1)q^x}\left[(r+x)\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} - \frac{x}{q}\sum_{k=x+1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}\right] \\ &= \frac{(x-1)!\Gamma(r)}{(r+x)\Gamma(r+x)q^x}\left[(r+x)\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} - x\sum_{k=x}^{\infty}\frac{(r+k)\Gamma(r+k)p^r q^k}{(k+1)k!\Gamma(r)}\right] \\ &= \frac{(x-1)!\Gamma(r)}{\Gamma(r+x)}\left[\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^{k-x}}{k!\Gamma(r)} - \frac{x}{r+x}\sum_{k=x}^{\infty}\frac{(r+k)\Gamma(r+k)p^r q^{k-x}}{(k+1)k!\Gamma(r)}\right] \\ &= \sum_{k=x}^{\infty}\frac{(x-1)!\Gamma(r)}{\Gamma(r+x)}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^{k-x}}{k!\Gamma(r)}\left[1 - \frac{x(r+k)}{(r+x)(k+1)}\right] \\ &= \frac{p^r}{x}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{p^r q^1}{x(x+1)}\left(\frac{2r+x}{x+2}\right) + \frac{(r+x+1)p^r q^2}{x(x+1)(x+2)}\left(\frac{3r+x}{x+3}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$\leq \frac{p^r}{2} + \frac{p^r q^1}{2!}\left(\frac{2r+1}{3}\right) + \frac{(r+2)p^r q^2}{3!}\left(\frac{3r+1}{4}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k)p^r q^{k-1}}{k!\Gamma(r+1)}\left[1 - \frac{r+k}{(r+1)(k+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{rq}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} - \frac{1}{r(r+1)q^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r+1)}$$

$$= \frac{1-p^r}{rq} - \frac{1-p^r-rqp^r}{r(r+1)q^2}$$

$$= \frac{rq + p(p^r - 1)}{r(r+1)q^2}$$

ดังนั้น อสมการ (3.9) เป็นจริง

(3) เราจะแสดงว่า $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right|$ และ $\left|f_{x_0}(x)\right|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q}\right\}$

โดยบทตั้ง 3.1 f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่น้อยกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x \in \{1,\ldots,x_0\}$ และ f_{x_0} เป็นฟังก์ชันที่มากกว่าศูนย์และเป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุก $x \in \{x_0+1, x_0+2,\ldots\}$ ดังนั้น เราจะได้ว่า $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \leq f_{x_0}(x_0+1) - f_{x_0}(x_0)$ และ $\left|f_{x_0}(x)\right| \leq f_{x_0}(x_0+1) - f_{x_0}(x_0)$ ซึ่ง

$$f(x_0+1) - f(x_0) = \frac{(x_0+1)!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(1-h_{C_{x_0}})}{\Gamma(r+x_0+1)(x_0+1)p^r q^{x_0+1}} + \frac{x_0!\Gamma(r)\aleph_{r,p}(h_{x_0})\aleph_{r,p}(h_{C_{x_0-1}})}{\Gamma(r+x_0)(x_0)p^r q^{x_0}}$$

$$= \frac{1}{(r+x_0)q}\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}$$

$$= \frac{1}{x_0}\left[\sum_{k=x_0}^{\infty}\frac{x_0}{(r+x_0)}\frac{(r+k)}{(k+1)}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} + \sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}\right]$$

$$\leq \frac{1}{x_0}\left[\sum_{k=x_0}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} + \sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}\right]$$

$$= \frac{1}{x_0} \tag{3.12}$$

นั่นคือ $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \leq \frac{1}{x_0}$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| = \frac{1}{(r+x_0)q}\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} + \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}$$

$$= \frac{1}{(r+x_0-1)q}\left[\frac{(r+x_0-1)}{(r+x_0)}\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} + \sum_{k=1}^{x_0}\frac{k(r+x_0-1)}{x_0(r+k-1)}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}\right]$$

$$\le \frac{1}{(r+x_0-1)q}\left[\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)} + \sum_{k=1}^{x_0}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}\right]$$

$$= \frac{1}{(r+x_0-1)q}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(r+k)p^r q^k}{k!\Gamma(r)}\right]$$

$$= \frac{1-p^r}{(r+x_0-1)q} \tag{3.13}$$

ดังนั้น จาก (3.12) และ (3.13) เราจะได้ อสมการ (3.10) และ (3.11) เป็นจริง

บทตั้ง 3.3 สำหรับ $x_0, x \in \mathbb{N}$ ถ้า $r = 1$ แล้ว จะได้ว่า

(1) $\left|f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$ (3.14)

(2) $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$ (3.15)

พิสูจน์ (1) เราจะแสดงว่า $\left|f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \in \mathbb{N}$ จากสมการ (3.4)

เมื่อ $x \le x_0$ เราจะได้ว่า $\left|f_{x_0}(x)\right| = \frac{1}{xpq^x}G_p(h_{x_0})G_p(h_{C_{x-1}}) \le \frac{G_p(h_{C_{x-1}})}{x} \le \frac{1}{x}$ และ

เมื่อ $x > x_0$ เราจะได้ว่า $\left|f_{x_0}(x)\right| = \frac{1}{xpq^x}G_p(h_{x_0})G_p(1-h_{C_{x-1}}) \le \frac{q^{x_0}}{x}\sum_{j=x}^{\infty}pq^{j-x} \le \frac{1}{x}$

เพราะฉะนั้น $\left|f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$

(2) เราจะแสดงว่า $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \in \mathbb{N}$ จะสังเกตุได้ว่ากรณี $x = x_0$ โดยบทตั้ง 3.2 (3) เราจะได้ว่า $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \le \frac{1}{x}$ ในกรณี $x \ne x_0$ สำหรับ $x < x_0$ เราจะได้ว่า

$$\Delta f_{x_0}(x) = -\frac{1}{(x+1)pq^{x+1}}G_p(h_{x_0})G_p(h_{C_x}) + \frac{1}{xpq^x}G_p(h_{x_0})G_p(h_{C_{x-1}})$$

$$= -\frac{pq^{x_0}}{pq^x}\left[\frac{1}{(x+1)q}\sum_{j=0}^{x}pq^j - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{x-1}pq^k\right]$$

$$= -\frac{pq^{x_0}}{q^{x-1}x(x+1)}\left[x\sum_{j=0}^{x} q^{j} - (x+1)\sum_{k=0}^{x-1} q^{k+1}\right]$$

$$= -\frac{pq^{x_0}}{q^{x+1}x(x+1)}\left[x\sum_{j=0}^{x} q^{j} - (x+1)\sum_{k=1}^{x} q^{k}\right]$$

$$= -\frac{pq^{x_0}}{q^{x+1}x(x+1)}\left[x - \sum_{k=1}^{x} q^{k}\right]$$

$$\geq -\frac{1}{x}$$

จะได้ว่า $0 > \Delta f_{x_0}(x) > -\frac{1}{x}$

ดังนั้น $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \leq \frac{1}{x}$

และสำหรับ $x_0 < x$ เราจะได้ว่า

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{1}{(x+1)pq^{x+1}} G_p(h_{x_0})G_p(1-h_{C_x}) - \frac{1}{xpq^{x}} G_p(h_{x_0})G_p(1-h_{C_{x-1}})$$

$$= \frac{pq^{x_0}}{pq^{x}}\left[\frac{1}{(x+1)q}\sum_{k=x+1}^{\infty} pq^{k} - \frac{1}{x}\sum_{j=x}^{\infty} pq^{j}\right]$$

$$= \frac{q^{x_0}}{x(x+1)q^{x}}\left[x\sum_{k=x}^{\infty} pq^{k} - (x+1)\sum_{j=x}^{\infty} pq^{j}\right]$$

$$= -\frac{q^{x_0}}{x(x+1)}\left[\sum_{j=x}^{\infty} pq^{j-x}\right]$$

$$= -\frac{q^{x_0}}{x(x+1)}$$

$$\geq -\frac{1}{x}$$

จะได้ว่า $0 > \Delta f_{x_0}(x) > -\frac{1}{x}$

นั่นคือ $\left|\Delta f_{x_0}(x)\right| \leq \frac{1}{x}$

ดังนั้น เราจะได้ว่าอสมการ (3.15) เป็นจริง

ขั้นตอนที่ 2 หาผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธและการแจกแจงเรขาคณิตที่อยู่ในรูปของเมตริกแบบจุดระหว่างทั้งสองการแจกแจงดังกล่าวพร้อมด้วยขอบเขตบนแบบไม่เอกรูปที่เราต้องการ โดยใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w ซึ่งในการหาผลลัพธ์ของการประมาณดังกล่าวเราจะแสดงการพิสูจน์ให้เห็นจริงว่าผลลัพธ์ต่าง ๆ หามาได้อย่างไร

ขั้นตอนที่ 3 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากงานวิจัยนี้และผลลัพธ์เดิม นั่นคือ เปรียบเทียบขอบเขตบนแบบเอกรูปของผลลัพธ์ในอสมการ (1.7) และ (1.8) และขอบเขตบนแบบไม่เอกรูปของผลลัพธ์ที่หาได้จากการวิจัยนี้

ขั้นตอนที่ 4 นำผลลัพธ์ที่ได้ในการวิจัยนี้ไปประยุกต์ใช้ในการประมาณการแจกแจงบางการแจกแจง ได้แก่ การแจกแจงโพลยา การแจกแจงโพลยานิเสธ การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก และการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธ (negative hypergeometric distribution)