บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่สำคัญสำหรับใช้ในงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบด้วยทฤษฎีและงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นส่วนประกอบสำคัญที่ใช้ในงานวิจัยนี้

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามนิเสธและการแจกแจงเรขาคณิต

วิธีของสไตน์ (Stein's method) ได้เริ่มต้นนำเสนอครั้งแรกโดย Stein (1972) ซึ่งใช้ในการประมาณการแจกแจงของผลรวมตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน (dependent random variables) ด้วยการแจกแจงปรกติ (normal distribution) ต่อมา Chen (1975) ได้ปรับและพัฒนาวิธีของสไตน์แบบเดิมมาสู่การประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน (dependent bernoulli random variables) ด้วยการแจกแจงปัวซง (Poisson distribution) และ Brown and Phillips (1999) ได้ประยุกต์วิธีของสไตน์มาใช้กับการประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธและการแจกแจงเรขาคณิต และสมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์ $r>0$ และ $0<p=1-q<1$ (เมื่อกำหนดฟังก์ชัน h) ซึ่ง Brown and Phillips (1999) ได้สร้างขึ้นมาเป็นดังนี้

$$h(x)-\aleph_{r,p}(h)=q(r+x)f(x+1)-xf(x) \tag{2.1}$$

โดยที่ $\aleph_{r,p}(h)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)\frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)}p^r q^k$ และ f และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตที่นิยามบน $\mathbb{N}\cup\{0\}$ และกรณีที่ $r=1$ สมการ (2.1) จะเปลี่ยนเป็นสมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงเรขาคณิตดังนี้

$$h(x)-G_p(h)=q(1+x)f(x+1)-xf(x) \tag{2.2}$$

โดยที่ $G_p(h)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)pq^k$

ฟังก์ชัน w

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบดังที่ได้นิยามมาข้างต้น Cacoullos and Papathanasiou (1989) ได้นิยามฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X หรือสัมพันธ์กับการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ในรูปของความสัมพันธ์ดังนี้

$$w(x)p_X(x) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{x}(\mu - i)p_X(i),\ x \in S(x) \tag{2.3}$$

ต่อมา Majsnerowska (1998) ได้ปรับรูปแบบความสัมพันธ์ในสมการ (2.3) ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$w(x) = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\mu + \frac{\sigma^2 w(x-1)p_X(x-1)}{p_X(x)} - x\right\},\ \ x \in S(x)\backslash\{0\} \tag{2.4}$$

และ $w(x) \geq 0$, $x \in S(x)\setminus\{0\}$ (2.5)

โดยที่ $w(0) = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$ และ $p_X(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in S(x)$

รูปแบบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน w สำหรับการสร้างผลการวิจัย ซึ่ง Cacoullos and Papathanasiou (1989) ได้กำหนดไว้ดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X มี $p_X(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in S(x)$ และมีความแปรปรวนจำกัด $0 < \sigma^2 < \infty$ แล้ว

$$E[(X-\mu)f(X)] = \sigma^2 E[w(X)\Delta f(X)] \tag{2.6}$$

สำหรับฟังก์ชัน $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $E|w(X)\Delta f(X)| < \infty$ โดย $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ และจะได้ว่า $E[w(X)] = 1$ (เมื่อกำหนด $f(x) = x$)

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ เป็นที่ทราบกันดีว่าการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงวิยุตบางการแจกแจง เมื่อมีการกำหนดพารามิเตอร์ของการแจกแจงให้มีความสอดคล้องกันภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม และด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ เราอาจประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ได้ด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธ ถ้าหากว่า การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X เข้าใกล้การแจกแจงทวินามนิเสธมากกว่าการแจกแจงอื่น ๆ ซึ่งจากการศึกษาเราทราบว่ามีงานวิจัยบางส่วนเกี่ยวข้องกับการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธ เริ่มต้นด้วยงานวิจัยของ Brown and Phillips (1999) ซึ่งได้ใช้วิธีของสไตน์นำเสนอผลลัพธ์ของการประมาณทวินามนิเสธสำหรับผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี m ตัว แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปประยุกต์หาขอบเขตบนแบบเอกรูปของการประมาณการแจกแจงโพลยา Vellaisamy and Upadhye (2009) ได้ใช้วิธีของเคอร์สแตน (Kerstan's method) ประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตที่เป็นอิสระต่อกัน n ตัว X ด้วยการแจกแจง

ทวินามนิเสธ ในกรณีที่ตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X มีเงื่อนไขเช่นเดียวกับบทที่ 1 Teerapabolarn and Boondirek (2010) ได้ประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงทวินามนิเสธในรูปของอสมการ (1.2) แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปประยุกต์หาขอบเขตบนแบบเอกรูปของการประมาณการแจกแจงโพลยา การแจกแจงโพลยานิเสธ (negative Pólya distribution) และการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก (hypergeometric distribution)

ในกรณีที่ $r=1$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการประมาณเรขาคณิต เริ่มต้นด้วยการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มด้วยการแจกแจงเรขาคณิตโดยใช้วิธีของสไตน์ ซึ่งนำเสนอโดย Barbour and Grübel (1995) เป็นงานวิจัยเกี่ยวกับปัญหาการค้นหาผลบวกแรกของลำดับจำนวนเต็มบวกแบบสุ่มด้วยการกำหนดตัวหาร (divider) Peköz (1996) ได้ใช้วิธีของสไตน์หาขอบเขตบนแบบเอกรูปสำหรับการวัดความคลาดเคลื่อนในการประมาณเรขาคณิตของตัวแปรสุ่มที่ใช้นับจำนวนความล้มเหลวก่อนเกิดความสำเร็จครั้งแรกในลำดับของการทดลองย่อยแบร์นูลลีที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน Brown and Phillips (1999) ใช้การแจกแจงเรขาคณิตไปประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีโดยวิธีของสไตน์ แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปประยุกต์หาขอบเขตบนแบบเอกรูปของการประมาณการแจกแจงโพลยา ต่อมา Phillips and Weinberg (2000) ใช้วิธีของสไตน์หาขอบเขตบนแบบไม่เอกรูปสำหรับประมาณการแจกของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีด้วยการปรับขอบเขตบนของ Brown and Phillips (1999) ให้ดีขึ้นกว่าเดิม และ Teerapabolarn (2008) ได้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตบนแบบเอกรูปของการประมาณการแจกแจงโพลยาด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ซึ่งดีกว่าขอบเขตบนของ Brown and Phillips (1999) และ Phillips and Weinberg (2000) สำหรับงานวิจัยล่าสุดของการประมาณเรขาคณิต คือ งานวิจัยของ Teerapabolarn (2011) เป็นการใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w เพื่อหาขอบเขตบนแบบเอกรูปและไม่เอกรูปของการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงเรขาคณิตดังที่ได้แสดงไว้ในอสมการ (1.3) ถึง (1.6) และได้นำผลลัพธ์ไปประยุกต์หาขอบเขตบนแบบเอกรูปและไม่เอกรูปของการประมาณการแจกแจงเรขาคณิตบีตา (beta-geometric distribution) การแจกแจงโพลยา และการแจกแจงปัวซง (Poisson distribution)