บทที่ 4
ผลการวิจัย

จากการหาผลเฉลยของสมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ และสมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ผู้วิจัยได้ผลเฉลย ดังนี้

การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

สมการฟิชเชอร์-โคลโมโกรอฟ

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \tag{4.1}$$

โดยการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U^3(\xi) = 0 \tag{4.2}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.3}$$

เมื่อ $$Y = \tanh(\xi) \tag{4.4}$$

จากสมการ (4.3) และ สมการ (4.4) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ M = 1 หาค่าตัวแปร $a_0, a_1, c,$และ λ แล้วแทนค่าตัวแปรลงในสมการ (4.3) จะได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \tanh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \tag{4.5}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \coth\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \tag{4.6}$$

สมการเบอเกอร์ฟิชเชอร์ โครโมโกลอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \tag{4.7}$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่

โดยการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} = c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + acU\frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U(\xi)^3 \tag{4.8}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.9}$$

เมื่อ $$Y = \tanh(\xi) \tag{4.10}$$

จากสมการ (4.9) และสมการ (4.10) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ M = 1 แทนค่าหาค่าตัวแปร $a_0, a_1, c,$ และ λ ได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \qquad (4.11)$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \quad (4.12)$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

สมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ

มีรูปสมการ คือ

$$u_t=u_{xx}+u-u^3 \quad (4.13)$$

โดยการใช้วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi=c(x-\lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.13) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$c\lambda\frac{dU(\xi)}{d\xi}+c^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi}+U(\xi)-U^3(\xi)=0 \quad (4.14)$$

กำหนด

$$U(\xi)=S(Y)=\sum_{k=o}^{M}a_kY^K+\sum_{k=1}^{M}b_kY^{-k} \quad (4.15)$$

เมื่อ $$Y = \tanh(\xi) \tag{4.16}$$

จากสมการ (4.15) และ (4.16) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ M = 1 แทนค่าหาค่าตัวแปร $a_0, a_1, c,$ และ λ แทนค่าตัวแปรจะได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \tanh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \tag{4.17}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \coth\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \tag{4.18}$$

สมการเบอเกอร์ฟิชเชอร์โครโมโกลอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \tag{4.19}$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่

โดยการใช้วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} = c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + acU\frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U(\xi)^3 \tag{4.20}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=o}^{M} a_k Y^K + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \tag{4.21}$$

เมื่อ $$Y = \tanh(\xi) \tag{4.22}$$

จากสมการ (4.21) และสมการ (4.22) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ M = 1 แทนค่าหาค่าตัวแปร $a_0, a_1, c,$และ λ ได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2+8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2+8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \quad (4.23)$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \qquad (4.24)$$

จากผลเฉลยที่ได้แสดงว่าเราสามารถใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ หาผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของ สมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ และสมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่ผู้วิจัยศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ