

บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากการหาผลเฉลยของสมการฟีชเชอร์-โคลโน่กรอฟ และสมการเบอร์เกอร์-ฟีชเชอร์-โคลโน่กรอฟ โดยวิธีไอกเพอร์โนบลิกแทนเจนต์ และวิธีขยายของไอกเพอร์โนบลิกแทนเจนต์ ผู้วิจัยได้ผลเฉลยดังนี้

การหาผลเฉลยโดยวิธีไอกเพอร์โนบลิกแทนเจนต์

สมการฟีชเชอร์-โคลโน่กรอฟ

มีรูปสมการคือ

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \quad (4.1)$$

โดยการใช้วิธีไอกเพอร์โนบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปพังก์ชัน $u(x, t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำนองคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่ออย่าง (4.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + U(\xi) - U^3(\xi) = 0 \quad (4.2)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (4.3)$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \quad (4.4)$$

จากสมการ (4.3) และ สมการ (4.4) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ $M = 1$ หากค่าตัวแปร a_0, a_1, c , และ λ แล้วแทนค่าตัวแปรลงในสมการ (4.3) จะได้ผลเฉลยดังนี้

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right], \\ u_2(x,t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right], \\ u_3(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right], \\ u_4(x,t) &= \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} x \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right], \\ u_2(x,t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right], \\ u_3(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right], \\ u_4(x,t) &= \coth \left[\frac{1}{\sqrt{2}} x \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

สมการเบอเกอร์-ฟิชเชอร์-โครโนม็อกลอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \quad (4.7)$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่

โดยการใช้วิธีไไซเพอร์โนบลิกแทนแทนตัวหาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x, t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่ค่าตอบกลับ $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วย ความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่ออย่าง (4.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} = c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + acU \frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U(\xi)^3 \quad (4.8)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (4.9)$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \quad (4.10)$$

จากสมการ (4.9) และสมการ (4.10) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ $M = 1$ แทนค่าหาค่าตัวแปร a_0, a_1, c , และ λ ได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right] \quad (4.11)$$

และจะได้ผลลัพธ์ของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
u_4(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right], \\
u_5(x,t) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right], \\
u_6(x,t) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right], \\
u_7(x,t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right], \\
u_8(x,t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right] \quad (4.12)
\end{aligned}$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

สมการฟิชเชอร์โคล์โนม็อกروف

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \quad (4.13)$$

โดยการใช้วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดด้วยแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเกลี้ยงที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.13) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + U(\xi) - U^3(\xi) = 0 \quad (4.14)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k + \sum_{k=1}^M b_k Y^{-k} \quad (4.15)$$

เมื่อ $Y = \tanh(\xi)$ (4.16)

จากสมการ (4.15) และ (4.16) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ $M = 1$ แทนค่าหาค่าตัวแปร a_0, a_1, c , และ λ แทนค่าตัวแปรจะได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right],$$

$$u_4(x,t) = \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} x \right] \quad (4.17)$$

และจะได้ผลเฉลยของค่านี่ในรูปแบบคือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} t \right) \right],$$

$$u_4(x,t) = \coth \left[\frac{1}{\sqrt{2}} x \right] \quad (4.18)$$

สมการเบอเกอร์-ฟิชเชอร์-โคร์โนมโกลอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \quad (4.19)$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่

โดยการใช้วิธีขยายไயเพอร์โนลิกแทนแทนค่าผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น

$\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปพัฟฟ์ชัน $u(x, t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อ (4.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} = c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + acU \frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U(\xi)^3 \quad (4.20)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k + \sum_{k=1}^M b_k Y^{-k} \quad (4.21)$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \quad (4.22)$$

จากสมการ (4.21) และสมการ (4.22) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ให้ $M = 1$ แทนค่าหาค่าคลื่น a_0, a_1, c , และ λ ได้ผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right] \quad (4.23)$$

ແລະຈະໄດ້ພົລເຄສຍຂອງຄລືນກະຮະເທກ ຄືວ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth \left[-\frac{1}{8} \left(a + \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 32} \right) \left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} t \right) \right] \quad (4.24)$$

จากผลเฉลยที่ได้แสดงว่าเราสามารถใช้วิธีไซเพอร์โนบลิกแทนเงนต์และวิธีของขากของ
ไซเพอร์โนบลิกแทนเงนต์ หากผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของ สมการพิชเชอร์โคลโนโกรอฟ
และสมการเบอร์เกอร์พิชเชอร์โคลโนโกรอฟ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่ออย่างไม่เชิงเส้น ที่ผู้วิจัย
ศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ