บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การหาผลเฉลยของสมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ (Fisher-Kolmogorov equation) และสมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (The tanh method) และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (The extended tanh method) ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์
2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. เลือกและสร้างสมการที่ต้องการหาผลเฉลย คือ สมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ และสมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ
4. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลยสมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ และ สมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ

ศึกษาวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

จากการศึกษาวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ทำให้ทราบว่าทั้งสองวิธีมีขั้นตอนที่คล้ายกัน โดยแตกต่างกันที่ขั้นตอนที่ 4 คือ มีการกำหนดค่า $S(Y)$ ต่างกัน โดยวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เพื่อให้ผลเฉลยที่ได้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (The tanh method)

1. พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้น

$$P\left(u,u_t,u_x,u_{xx},\ldots\right)=0 \tag{3.1}$$

2. หาคำตอบของสมการ (3.1) โดยกำหนดตัวแปรคลื่น $\xi=c(x-\lambda t)$ ดังนั้นจะได้

$$u(x,t)=U(\xi) \tag{3.2}$$

$$u(x,t) = U(\xi) \tag{3.9}$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ ด้วยข้อตกลงนี้เราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\lambda \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = c\frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2\frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3\frac{d^3}{d\xi^3} \tag{3.10}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ อีก ซึ่งในที่นี้ $\frac{d}{dt}$ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่ เมื่อแทนสมการ (3.10) แล้วจะทำให้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการ (3.8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P\left(U,U',U'',\ldots\right) = 0 \tag{3.11}$$

3. ถ้าทุกเทอมของผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีอนุพันธ์ของ ξ แล้วเราจะสามารถอินทิเกรตสมการนี้ได้ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ จะทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จัดรูปเรียบร้อยแล้ว

4. ในขั้นนี้เราจะกำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{3.12}$$

ซึ่งจะทำให้ได้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1 - Y^2\right)\frac{d}{dY},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1 - Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY} + \left(1 - Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{3.13}$$

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

5. กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=o}^{M} a_k Y^K + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \tag{3.14}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้ แทนสมการ (3.13) และ (3.14) ในสมการ (3.11) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y

6. พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $b_k, a_k, (k = 0,1,2,...,M)$, c, และ λ เมื่อหา M ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นจำนวนเต็มบวก ได้แล้ว และใช้ M นี้กับสมการ (3.14) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปแบบปิด

7. จากผลเฉลยที่ได้โดยวิธีไฮเพอโบลิกแทนเจนต์สามารถนำผลเฉลยนั้นมาเทียบหาผลเฉลยคลื่นกระแทกได้ โดยการเปลี่ยนค่าฟังก์ชัน tanh เป็นค่าฟังก์ชัน coth ในผลเฉลยที่ได้

ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการใช้วิธีไฮเพอโบลิกแทนเจนต์ และวิธีขยายของไฮเพอโบลิกแทนเจนต์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีรูปแบบต่าง ๆ

เลือกและสร้างสมการที่ต้องการหาผลเฉลย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้เลือกสมการที่จะนำมาใช้ในการทำวิจัย ดังนี้

สมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ (Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปแบบ

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \tag{3.15}$$

สมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปแบบ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \tag{3.16}$$

เป็นสมการที่ผู้วิจัยได้พัฒนามาจากสมการเบอร์เกอร์และสมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ

ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย

ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลยของสมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟและสมการเบอร์เกอร์ฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ มีขั้นตอน ดังนี้

การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

สมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \tag{3.17}$$

ใช้สมการ (3.2) และสมการ (3.3)

ให้ $u(x,t) = U(\xi)$ เมื่อ $\xi = c(x - \lambda t)$ ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\lambda \frac{d}{d\xi} ,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = c \frac{d}{d\xi} .$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2} ,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3 \frac{d^3}{d\xi^3} \tag{3.18}$$

เปลี่ยนสมการที่ (3.17) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U^3(\xi) = 0 \tag{3.19}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{3.20}$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{3.21}$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1 - Y^2\right) \frac{d}{dY} ,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1 - Y^2\right)\left(-2Y \frac{d}{dY} + \left(1 - Y^2\right) \frac{d^2}{dY^2} \right) \tag{3.22}$$

แทนในสมการ(3.18) จะได้

$$c\lambda \left(1 - Y^2\right) \frac{dS}{dY} + c^2 \left(1 - Y^2\right) \left[-2Y \frac{dS}{dY} + \left(1 - Y^2\right) \frac{d^2S}{dY^2} \right] + S - S^3 = 0 \tag{3.23}$$

จาก (3.16) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $c^2\left(1-Y^2\right)\left[\left(1-Y^2\right)\dfrac{d^2S}{dY^2}\right]$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ S^3 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (3.20) และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k=a_0+a_1Y+a_2Y^2+\ldots+a_MY^M$$

$$\frac{dS}{dY}=\sum_{k=0}^{M}ka_kY^{k-1}=a_1+2a_2Y+3a_3Y^2+\ldots+Ma_MY^{M-1}$$

$$\frac{d^2S}{dY^2}=\sum_{k=0}^{M}k(k-1)a_kY^{k-2}=2a_2+6a_3Y+\ldots+M(M-1)a_MY^{M-2}$$

ดังนั้นจะได้

$$c^2\left(1-Y^2\right)\left[\left(1-Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right]=c^2\left(1-2Y^2+Y^4\right)\sum_{k=0}^{M}k\left(k-1\right)a_kY^{k-2} \qquad (3.25)$$

จากสมการ (3.22) และสมการ (3.25) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้

$$3M=4+M-2 \qquad (3.26)$$

จะได้ $M=1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y)=a_0+a_1Y \qquad (3.27)$$

และ $$\frac{dS}{dY}=a_1,$$

$$\frac{d^2S}{dY^2}=0 \qquad (3.28)$$

แทนค่าสมการ (3.27) และสมการ (3.28) ในสมการ (3.17) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\left(-2a_1c^2+a_1^3\right)Y^3+\left(-a_1c\lambda-3a_0a_1^2\right)Y^2+\left(-2a_1c^2+a_1-3a_0^2a\right)Y^1+\left(a_1c\lambda+a_0-a_0^3\right)Y^0=0 \tag{3.29}$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0,a_1,c,$และ λ ดังนี้

$$Y^3: 2a_1c^2-a_1^3=0\ ,$$

$$Y^2: -a_1c\lambda-3a_0a_1^2=0\ ,$$

$$Y^1: -2a_1c^2+a_1-3a_0^2a_1=0\ ,$$

$$Y^0: a_1c\lambda+a_0-a_0^3=0 \tag{3.30}$$

คำนวณหาค่า $a_0,a_1,c,$และ λ ได้ดังนี้

$$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_0=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,$$

$$\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad a_1=-\frac{1}{2},\quad a_0=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,$$

$$\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_0=\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,$$

$$\lambda=0,\quad a_1=1,\quad a_0=0,\quad c=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.31}$$

แทนค่าตัวแปรแต่ละชุดในสมการ (3.23) ลงในสมการ (3.20) โดยเงื่อนไข

$$Y=\tanh(\xi)$$

และ $$\xi = c(x - \lambda t)$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \tanh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \tag{3.32}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \coth\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \tag{3.33}$$

สมการเบอเกอร์ฟิชเชอร์ โครโมโกลอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \tag{3.34}$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่

ใช้สมการ (3.2) และสมการ (3.3)

ให้ $u(x,t) = U(\xi)$ เมื่อ $\xi = c(x - \lambda t)$ ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\lambda \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = c\frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2\frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3\frac{d^3}{d\xi^3} \tag{3.35}$$

โดยการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.34) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-c\lambda\frac{dU(\xi)}{d\xi} = c^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + acU\frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U(\xi)^3 \tag{3.36}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{3.37}$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{3.38}$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY} \ ,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1-Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY} + \left(1-Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{3.39}$$

จากสมการ (3.37) และสมการ (3.38) คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ $M=1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y \tag{3.40}$$

และ

$$\frac{dS}{dY} = a_1 \ ,$$

$$\frac{d^2S}{dY^2} = 0 \tag{3.41}$$

แทนค่าสมการ (3.40) สมการ (3.41) และสมการ (3.39) ลงในสมการ (3.36) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned}&(-a_0^{\ 3} + c\lambda a_1 + aa_0a_1c + a_0) + (-3a_0^{\ 2}a_1 - 2c^2a_1 + aa_1^{\ 2}c + a_1)Y \\ &+(-c\lambda a_1 - aa_0a_1 - 3a_0a_1^{\ 2})Y^2 + (2a_1c^2 - aa_1^{\ 2}c - a_1^{\ 3})Y^3 = 0\end{aligned} \tag{3.42}$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $a_0, a_1, c,$และ λ ดังนี้

$$Y^3 : 2a_1c^2 - aa_1^{\ 2}c - a_1^{\ 3} = 0 \ ,$$

$$Y^2 : -c\lambda a_1 - aa_0a_1c - 3a_0a_1^{\ 2} = 0 \text{ ,}$$

$$Y^1 : -3a_0^{\ 2}a_1 - 2a_1c^2 + aa_1^{\ 2}c + a_1 = 0 \text{ ,}$$

$$Y^0 : -a_0^{\ 3} + c\lambda a_1 + aa_1a_0 + a_0 = 0 \qquad (3.43)$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (3.43) จะได้ ค่า $a_0, a_1, c,$และ λ ดังนี้

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} \ ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} \tag{3.44}$$

แทนค่าตัวแปรแต่ละชุดของ a_0, a_1, c, และ λ ในสมการ (3.40) จะได้ผลเฉลยแต่ละชุด ดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x - \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32})\left(x + \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}}t\right)\right] \tag{3.45}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x - \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x - \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x + \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x + \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x - \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x - \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x + \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32})\left(x + \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \qquad (3.46)$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีขยายของไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

สมการฟิชเชอร์โคลโมโกรอฟ (Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \tag{3.47}$$

ให้ $u(x,t) = U(\xi)$ เมื่อ $\xi = c(x - \lambda t)$ ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\lambda \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = c\frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3 \frac{d^3}{d\xi^3} \tag{3.48}$$

เปลี่ยนสมการที่ (3.47) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U^3(\xi) = 0 \tag{3.49}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^K + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \tag{3.50}$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{3.51}$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1 - Y^2\right)\frac{d}{dY} \ ,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1 - Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY} + \left(1 - Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{3.52}$$

แทนในสมการ (3.49) จะได้

$$c\lambda\left(1 - Y^2\right)\frac{dS}{dY} + c^2\left(1 - Y^2\right)\left[-2Y\frac{dS}{dY} + \left(1 - Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right] + S - S^3 = 0 \tag{3.53}$$

จากสมการ (3.53) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $c^2\left(1 - Y^2\right)\left[\left(1 - Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right]$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ S^3 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (3.50) จะได้ $M = 1$
ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y) = a_0 + a_1Y + b_1Y^{-1} \tag{3.54}$$

แทนค่า $S(Y), S'(Y), S''(Y)$ ลงในสมการ (3.53) และพิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0, a_1, b_1 และ λ ดังนี้

$$Y^3 : 2a_1c^2 - a_1^3 = 0 \ ,$$

$$Y^2 : -a_1c\lambda - 3a_0a_1^2 = 0 \ ,$$

$$Y^1 : -2a_1c^2 - 2b_1c^2 + a_1 + a_1b_1 - 3a_0^{\ 2}a_1 + 2a_0a_1b_1 = 0 \ ,$$

$$Y^0 : a_1c\lambda + 6a_0a_1b_1 + a_0 + a_0^{\ 3} = 0 \ ,$$

$$Y^{-1} : 4b_1c^2 + 3a_0{}^2b_1 + 3a_1b_1{}^2 = 0 ,$$

$$Y^{-2} : 3a_0b_1{}^2 = 0 ,$$

$$Y^{-3} : -2b_1c^2 + b_1 + b_1{}^3 = 0 \tag{3.55}$$

คำนวณหาค่า $\lambda, a_0, a_1, b_1,$ และ c ได้ดังนี้

$$\lambda = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \mathrm{b}_1 = 0, \; c = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{b}_1 = 0, \; c = \frac{1}{2\sqrt{2}} ,$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{b}_1 = 0, \; c = -\frac{1}{2\sqrt{2}} ,$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_0 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{b}_1 = 0, \; c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{3.56}$$

จากค่าตัวแปรแต่ละชุดในสมการ (3.56) จะได้ผลเฉลยแต่ละชุด ดังนี้

$$u_1(x,t) = \tanh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right] ,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right] ,$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right] ,$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right] \tag{3.57}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = \coth\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right] \tag{3.58}$$

สมการเบอเกอร์ ฟิชเชอร์ โครโมโกลอฟ (Berger-Fisher-Kolmogorov equation)

มีรูปสมการ คือ

$$u_t = u_{xx} + auu_x + u - u^3 \tag{3.59}$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่

ให้ $u(x,t) = U(\xi)$ เมื่อ $\xi = c(x - \lambda t)$ ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\lambda\frac{d}{d\xi} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = c\frac{d}{d\xi} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = c^3 \frac{d^3}{d\xi^3} \tag{3.60}$$

โดยการใช้วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = c(x - \lambda t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว λ เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.59) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} = c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + acU \frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) - U(\xi)^3 \tag{3.61}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^K + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \tag{3.62}$$

เมื่อ

$$Y = \tanh(\xi) \tag{3.63}$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = \left(1 - Y^2\right) \frac{d}{dY} \ ,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \left(1 - Y^2\right)\left(-2Y \frac{d}{dY} + \left(1 - Y^2\right) \frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{3.64}$$

จากสมการ (3.62) และสมการ (3.63) คำนวณค่าพารามิเตอร์ได้ $M = 1$ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + b_1 Y^{-1} \tag{3.65}$$

และ
$$\frac{dS}{dY} = a_1 - b_1 Y^{-2} \ ,$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 2b_1 Y^{-3} \qquad (3.66)$$

แทนค่าสมการ (3.64) สมการ (3.65) และสมการ (3.66) ลงในสมการ (3.61) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned}
&\left(-b_1^{\,3}\right)Y^{-9} + \left(-3a_0 b_1^{\,2}\right)Y^{-6} + \left(-3a_1 b_1^{\,2}\right)Y^{-5} + \left(2b_1 c^2 - acb_1^{\,2} + b_1 - 3a_0^{\,2} b_1\right)Y^{-3} \\
&+\left(-c\lambda b_1 - aca_0 b_1 - 6a_0 a_1 b_1\right)Y^{-2} + \left(-2b_1 c^2 + acb_1^{\,2} - 3a_1^{\,2} b_1\right)Y^{-1} \\
&+(-a_0^{\,3} + c\lambda a_1 + c\lambda b_1 + aa_0 a_1 c + a_0 b_1 + a_0) + (-3a_0^{\,2} a_1 - 2c^2 a_1 + aa_1^{\,2} c + a_1)Y \\
&+(-c\lambda a_1 - aca_0 a_1 - 3a_0 a_1^{\,2})Y^2 + (2a_1 c^2 - aa_1^{\,2} c - a_1^{\,3})Y^3 = 0
\end{aligned} \qquad (3.67)$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $\lambda, a_0, a_1, b_1,$ และ c ดังนี้

$$Y^3 : 2a_1 c^2 - aa_1^{\,2} c - a_1^{\,3} = 0 \ ,$$

$$Y^2 : -c\lambda a_1 - aa_0 a_1 c - 3a_0 a_1^{\,2} = 0 \ ,$$

$$Y^1 : -3a_0^{\,2} a_1 - 2a_1 c^2 + aa_1^{\,2} c + a_1 = 0 \ ,$$

$$Y^0 : -a_0^{\,3} + c\lambda a_1 + c\lambda b_1 + aca_1 a_0 + a_0 b_1 + a_0 = 0 \ ,$$

$$Y^{-1} : -2b_1 c^2 + acb_1^{\,2} - 3a_1^{\,2} b_1 \ ,$$

$$Y^{-2} : -c\lambda b_1 - aca_0 b_1 - 6a_0 a_1 b \ ,$$

$$Y^{-3} : -2b_1 c^2 + acb_1^{\,2} + b_1 - 3a_1^{\,2} b_1 \ ,$$

$$Y^{-5} : -3a_1 b_1^{\,2} \ ,$$

$$Y^{-6} : -3a_0 b_1^{\ 2} ,$$

$$Y^{-9} : -b_1^{\ 3} \tag{3.68}$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (3.68) จะได้ค่า $a_0, a_1, b_1, c,$ และ λ ดังนี้

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = \frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a - \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a - 8\sqrt{a^2 + 8}} ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{8}(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 32}),\ \lambda = -\frac{(a + \sqrt{a^2 + 8})^2 + 4}{8a + 8\sqrt{a^2 + 8}} \tag{3.69}$$

แทนค่าตัวแปรแต่ละชุดของ a_0, a_1, c, และ λ ในสมการ (3.69) จะได้ผลเฉลยแต่ละชุด ดังนี้

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}\left(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}\left(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}\left(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x-\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x-\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}\left(a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x+\frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{8}\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x+\frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \tag{3.70}$$

และจะได้ผลเฉลยของคลื่นกระแทก คือ

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}\left(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x - \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}\left(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x - \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}\left(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x + \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}\left(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x + \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}\left(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x - \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}\left(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x - \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}\left(a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x + \frac{(a-\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a-8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right],$$

$$u_8(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left[-\frac{1}{8}\left(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+32}\right)\left(x + \frac{(a+\sqrt{a^2+8})^2+4}{8a+8\sqrt{a^2+8}}t\right)\right] \qquad (3.71)$$