

บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากการศึกษาการเปรียบเทียบและจัดอันดับทางเลือกโดยใช้วิธี MCDM พบว่าเราสามารถนำวิธี TOPSIS และวิธี ELECTRE ไปใช้กับข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะไม่ต่อเนื่องและต่อเนื่องได้ ผู้วิจัยจะเสนอขั้นตอนการใช้วิธีดังกล่าวและนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงซึ่งเป็นข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นตัวชี้วัดเชิงลบ ดังในหัวข้อต่าง ๆ ต่อไปนี้

การเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้วิธี TOPSIS

1. ข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะไม่ต่อเนื่อง

การเปรียบเทียบทางเลือก K ทางเลือก ตัวชี้วัด N ตัว เขียนข้อมูลในรูปเมทริกซ์ $[x_{ij}]_{K \times N}$ ขั้นตอนในการเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้วิธี TOPSIS เป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแถวในอุดมคติ (IDR) และ แถวในอุดมคติลบ (NIDR) ดังนี้

$$IDR = (\min_i x_{i1}, \min_i x_{i2}, \dots, \min_i x_{iN}) = (u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (1)$$

และ
$$NIDR = (\max_i x_{i1}, \max_i x_{i2}, \dots, \max_i x_{iN}) = (v_1, v_2, \dots, v_N) \quad (2)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักของตัวชี้วัดที่ j , $j=1,2,\dots,N$ มี 3 แบบ คือ

$$w_1(j) = 1 \quad (3)$$

$$w_2(j) = (1 - \phi_j) / \sum_{j=1}^K (1 - \phi_j), j=1, \dots, N \quad (4)$$

เมื่อ
$$\phi_j = -\sum_{i=1}^K [(x_{ij} / \sum_{i=1}^K x_{ij}) / \ln(x_{ij} / \sum_{i=1}^K x_{ij})] / [\ln(K)]$$

$$w_3(j) = s_j / \bar{x}_j \quad (5)$$

เมื่อ
$$s_j^2 = \sum_{i=1}^K (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 / (K-1) \text{ และ } \bar{x}_j = \sum_{i=1}^K x_{ij} / K$$

ขั้นตอนที่ 3 หาระยะทางจากแถวที่ i ไปยัง IDR และ NIDR โดยใช้ L_1 -norm และ L_2 -norm ดังนี้

$$L_1(i, IDR) = \sum_{j=1}^N [|x_{ij} - u_j| w(j) / (\sum_{i=1}^K |x_{ij}|)] \quad (6)$$

$$L_1(i, NIDR) = \sum_{j=1}^N [|x_{ij} - v_j| w(j) / (\sum_{i=1}^K |x_{ij}|)] \quad (7)$$

$$L_2(i, IDR) = \left\{ \sum_{j=1}^N [(x_{ij} - u_j)^2 w(j)^2 / (\sum_{i=1}^K x_{ij}^2)] \right\}^{1/2} \quad (8)$$

$$L_2(i, NIDR) = \left\{ \sum_{j=1}^N [(x_{ij} - v_j)^2 w(j)^2 / (\sum_{i=1}^K x_{ij}^2)] \right\}^2 \quad (9)$$

ขั้นตอนที่ 4 หาค่าดัชนีโดยรวมจาก

$$L_1(Index_i) = L_1(i, IDR) / [L_1(i, IDR) + L_1(i, NIDR)], i = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

$$L_2(Index_i) = L_2(i, IDR) / [L_2(i, IDR) + L_2(i, NIDR)], i = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

ขั้นตอนที่ 5 เปรียบเทียบค่าดัชนีโดยรวม แล้วจัดอันดับทางเลือก โดยทางเลือกที่มีค่าดัชนีโดยรวมต่ำกว่า จะมีอันดับที่ดีกว่า

2. ข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะต่อเนื่อง

การเปรียบเทียบทางเลือก K ทางเลือก สมมติให้ค่าในทางเลือกที่ i มีค่าต่อเนื่องขึ้นกับ t ($x_i(t); i = 1, 2, \dots, K$) พิจารณาค่า t ที่อยู่ในช่วง $\underline{t} < t < \bar{t}$ ขั้นตอนการเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้วิธี TOPSIS กระทำได้ 2 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 ใช้ดัชนีโดยรวม

ขั้นตอนที่ 1 หาแถวในอุดมคติ (IDR) และ แถวในอุดมคติลบ ($NIDR$) ดังนี้

$$IDR = u(t) = \min \{x_i(t), i = 1, 2, \dots, K\} \quad (12)$$

และ

$$NIDR = v(t) = \max \{x_i(t), i = 1, 2, \dots, K\} \quad (13)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก 3 แบบ คือ

$$w_1(t) = 1 \quad (14)$$

$$w_2(t) = [1 - \phi(t)] / \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} [1 - \phi(t)] dt \quad (15)$$

เมื่อ $\phi_j = -(1 / [\ln K]) \sum_{i=1}^K \{ [x_i(t) / \sum_{i=1}^K x_i(t)] \cdot \ln [x_i(t) / \sum_{i=1}^K x_i(t)] \}$

และ $w_3(t) = s(t) / \bar{x}(t) \quad (16)$

เมื่อ $s(t) = [\sum_{i=1}^K (x_i(t) - \bar{x}(t))^2 / (K - 1)]^{1/2}$ และ $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^K x_i(t) / K$

ขั้นตอนที่ 3 หาระยะทางจาก $x_i(t)$ ไปยัง IDR และ $NIDR$ โดยใช้ L_1 -norm และ L_2 -norm ดังนี้

$$L_1(i, IDR) = \int_t^{\bar{t}} [x_i(t) - u(t)]w(t)dt \quad (17)$$

$$L_1(i, NIDR) = \int_t^{\bar{t}} [v(t) - x_i(t)]w(t)dt \quad (18)$$

$$L_2(i, IDR) = \left\{ \int_t^{\bar{t}} [x_i(t) - u(t)]^2 [w(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \quad (19)$$

$$L_2(i, NIDR) = \left\{ \int_t^{\bar{t}} [v(t) - x_i(t)]^2 [w(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \quad (20)$$

ขั้นตอนที่ 4 หาคำนีโดยรวมจาก

$$L_1(Index_i) = L_1(i, IDR) / [L_1(i, IDR) + L_1(i, NIDR)], i = 1, \dots, K \quad (21)$$

$$L_2(Index_i) = L_2(i, IDR) / [L_2(i, IDR) + L_2(i, NIDR)], i = 1, 2, \dots, K \quad (22)$$

ขั้นตอนที่ 5 เปรียบเทียบและจัดอันดับทางเลือก โดยทางเลือกที่มีค่าดัชนีโดยรวม

ต่ำกว่า จะมีอันดับที่ดีกว่า

แบบที่ 2 ใช้ดัชนีลดรูป (Reduced Index)

จากงานวิจัยของ Lertprapai et al. (2004, p.144) พบว่า ภายใต้อินทรีย์ L_1 -norm

ทางเลือกที่ i จะดีกว่าทางเลือกที่ j ถ้า

$$\int_t^{\bar{t}} x_i(t)w(t)dt < \int_t^{\bar{t}} x_j(t)w(t)dt$$

และภายใต้อินทรีย์ L_2 -norm ทางเลือกที่ i จะดีกว่าทางเลือกที่ j ถ้า

$$\begin{aligned} & \int_t^{\bar{t}} [x_i(t) - u(t)]^2 [w(t)]^2 dt / \int_t^{\bar{t}} [v(t) - T_i(t)]^2 [w(t)]^2 dt \\ & < \int_t^{\bar{t}} [T_j(t) - u(t)]^2 [w(t)]^2 dt / \int_t^{\bar{t}} [v(t) - T_j(t)]^2 [w(t)]^2 dt \end{aligned}$$

เมื่อ $u(t) = \min\{x_i(t), i = 1, 2, \dots, K\}$ และ $v(t) = \max\{x_i(t), i = 1, 2, \dots, K\}$

ดังนั้น เราสามารถเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้หลักการดังกล่าว โดยกำหนด

ดัชนีลดรูป ($L^*(index_i)$) ดังนี้

$$L_1^*(index_i) = \int_t^{\bar{t}} x_i(t)w(t)dt \quad (23)$$

$$L_2^*(index_i) = \int_t^{\bar{t}} [x_i(t) - u(t)]^2 [w(t)]^2 dt / \int_t^{\bar{t}} [v(t) - T_i(t)]^2 [w(t)]^2 dt \quad (24)$$

ตัวประมาณค่าใดมีค่าดัชนีลดรูปต่ำกว่าจะเป็นตัวประมาณค่าที่ดีกว่า ดังนั้น
จึงสามารถลดขั้นตอนในการเปรียบเทียบทางเลือกได้ เป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 และ ขั้นตอนที่ 2 เช่นเดียวกับแบบที่ 1

ขั้นตอนที่ 3 หาดัชนีลดรูปจากสมการที่ 23 และ 24

ขั้นตอนที่ 4 เปรียบเทียบและจัดอันดับตัวประมาณค่า โดยตัวประมาณค่าที่มีค่า
ดัชนีลดรูปต่ำกว่า จะมีอันดับที่ดีกว่า

การเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้วิธี ELECTRE

1. ข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะไม่ต่อเนื่อง

การเปรียบเทียบทางเลือก K ทางเลือก ตัวชี้วัด N ตัว เขียนข้อมูลในรูปเมตริกซ์ $[x_{ij}]_{K \times N}$
ขั้นตอนในการเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้วิธี ELECTRE เป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณค่าบรรทัดฐาน ดังนี้

$$r_{ij} = x_{ij} / (\sum_{i=1}^K x_{ij}^2)^{1/2}, i=1,2,\dots,K, j=1,2,\dots,N \quad (25)$$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนัก

วิธี ELECTRE มีเงื่อนไขของค่าถ่วงน้ำหนักคือ ผลรวมของน้ำหนักตัวชี้วัดทั้งหมด
ต้องเท่ากับ 1 ดังนั้น จึงปรับค่าถ่วงน้ำหนักแต่ละแบบของตัวชี้วัดที่ $j, j=1,2,\dots,N$ เป็นดังนี้

$$w_1^*(j) = w_1(j) / \sum_{j=1}^N w_1(j) \quad (26)$$

$$w_2^*(j) = w_2(j) \text{ โดยคุณสมบัติของค่าถ่วงน้ำหนักแบบใช้เอนโทรปี} \quad (27)$$

$$w_3^*(j) = w_3(j) / \sum_{j=1}^N w_3(j) \quad (28)$$

ค่าบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนักคำนวณได้จากสูตร

$$v_{ij} = w^*(j) \cdot r_{ij}, i=1,2,\dots,K, j=1,2,\dots,N \quad (29)$$

ขั้นตอนที่ 3 หาเซตของความสอดคล้อง ($C(p,q)$) และไม่สอดคล้อง ($D(p,q)$)

กรณีตัวชี้วัดเชิงลบ เซตของความสอดคล้อง ประกอบไปด้วยตัวชี้วัดที่มีค่าของ
ทางเลือกที่ p ดีกว่าทางเลือกที่ q และเซตของความไม่สอดคล้อง ประกอบไปด้วยตัวชี้วัดที่มีค่า
ของทางเลือกที่ p แย่กว่าทางเลือกที่ q โดยที่ $p, q = 1, 2, \dots, K$ และ $p \neq q$ พิจารณาดังนี้

$$C(p,q) = \{j | v_{pj} \leq v_{qj}\} \quad (30)$$

และ $D(p,q) = \{j | v_{pj} > v_{qj}\} \quad (31)$

277159

๑
๕/๑๕/๖
๖๕๖๓

ขั้นตอนที่ 4 หาคำนีความสอดคล้อง (C_{pq}) และไม่สอดคล้อง (D_{pq}) ซึ่งเป็นดัชนีที่ใช้วัดระดับความสอดคล้องและความไม่สอดคล้องของการเปรียบเทียบว่าทางเลือกที่ p ดีกว่าทางเลือกที่ q โดยที่ $p, q = 1, 2, \dots, K$ และ $p \neq q$ คำนวณโดย

$$C_{pq} = \sum_j w^*(j^*), j^* \in C(p, q) \quad (32)$$

และ
$$D_{pq} = (\sum_j |v_{pj}^o - v_{qj}^o|) / (\sum_j |v_{pj} - v_{qj}|), j^o \in D(p, q) \quad (33)$$

ขั้นตอนที่ 5 หาคำนีสุทธิสองชนิดของทางเลือกที่ $p, p = 1, 2, \dots, K$ คือดัชนีความสอดคล้องสุทธิ (C_p) และดัชนีความไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) จากสูตร

$$C_p = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K C_{pk} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K C_{kp} \quad (34)$$

และ
$$D_p = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K D_{pk} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K D_{kp} \quad (35)$$

ขั้นตอนที่ 6 อ้างอิงจาก Yoon and Hwang (1995) ถ้าต้องการจัดอันดับทางเลือกจะต้องจัดอันดับค่าดัชนีทั้งสอง แล้วหาค่าเฉลี่ยของอันดับของแต่ละทางเลือก จากนั้นเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยนี้เพื่อจัดอันดับทางเลือก โดยทางเลือกที่ดีที่สุดคือทางเลือกที่มีค่าเฉลี่ยของอันดับที่ดีที่สุด แต่เนื่องจากอันดับเป็นมาตรวัดเชิงอันดับ (Ordinal Scale) ไม่เหมาะสมที่จะนำมาหาค่าเฉลี่ย นอกจากนี้หากอันดับของ C_p และ D_p ไม่สอดคล้องกัน อาจทำให้อันดับเฉลี่ยที่ได้มีค่าเท่ากัน ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้ปรับปรุงวิธีการจัดอันดับโดยสร้างดัชนี ELECTRE (ELECTRE Index, EI) ของทางเลือกที่ p จากดัชนีสุทธิทั้งสอง ดังนี้

$$EI_p = C_p / (\sum_{p=1}^K C_p^2)^{1/2} - D_p / (\sum_{p=1}^K D_p^2)^{1/2}, p = 1, 2, \dots, K \quad (36)$$

เปรียบเทียบและจัดอันดับทางเลือก โดยทางเลือกที่มีค่า EI มากกว่าจะมีอันดับที่ดีกว่า

2. ข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะต่อเนื่อง

เนื่องจากการเปรียบเทียบโดยวิธี ELECTRE ที่กล่าวถึงในบทที่ 2 นั้นใช้เฉพาะกรณีข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะไม่ต่อเนื่อง ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้กำหนดสูตรที่ใช้ในการคำนวณเพื่อนำไปใช้กับกรณีข้อมูลที่มีตัวชี้วัดชนิดต่อเนื่องได้ ดังนี้

การเปรียบเทียบทางเลือก K ทางเลือก สมมุติให้ค่าในทางเลือกที่ i มีค่าต่อเนื่องขึ้นกับ t ($x_i(t), i = 1, 2, \dots, K$) ขั้นตอนการเปรียบเทียบทางเลือกโดยใช้วิธี ELECTRE เป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1

คำนวณค่าบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนัก
ปรับค่าถ่วงน้ำหนักแต่ละแบบเพื่อให้ผลรวมของน้ำหนักตัวชี้วัดทั้งหมดเท่ากับ 1 ดังนี้

$$w_1^*(t) = w_1(t) / \int_t^{\bar{t}} w_1(t) dt \quad (37)$$

$$w_2^*(t) = w_2(t) \text{ โดยคุณสมบัติของค่าถ่วงน้ำหนักแบบใช้เอนโทรปี} \quad (38)$$

$$w_3^*(t) = w_3(t) / \int_t^{\bar{t}} w_3(t) dt \quad (39)$$

คำนวณค่าบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนักจากสูตร

$$v_i(t) = w^*(t) \cdot x_i(t), i=1,2,\dots,K \quad (40)$$

ขั้นตอนที่ 2

หาเซตของความสอดคล้อง ($C(p,q)$) และไม่สอดคล้อง ($D(p,q)$)

$$C(p,q) = \{t \in (-1,1) | v_p(t) \leq v_q(t)\} \quad (41)$$

และ $D(p,q) = \{t \in (-1,1) | v_p(t) > v_q(t)\} \quad (42)$

ขั้นตอนที่ 3

หาคำนีความสอดคล้อง (C_{pq}) และไม่สอดคล้อง (D_{pq})

$$C_{pq} = \int_{t \in C(p,q)} w(t) dt \quad (43)$$

และ $D_{pq} = \int_{t \in D(p,q)} |v_p(t) - v_q(t)| dt / \int_{t \in (-1,1)} |v_p(t) - v_q(t)| dt \quad (44)$

ขั้นตอนที่ 4

หาคำนีสุทธิของทางเลือกที่ p สองชนิด คือ คำนีความสอดคล้องสุทธิ

(C_p) และไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) จากสูตร

$$C_p = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K C_{pk} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K C_{kp} \quad (45)$$

และ $D_p = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K D_{pk} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^K D_{kp} \quad (46)$

ขั้นตอนที่ 5

หาคำนี ELECTRE (EI) จากสูตร

$$EI_p = C_p / (\sum_{p=1}^K C_p^2)^{1/2} - D_p / (\sum_{p=1}^K D_p^2)^{1/2}, p=1,2,\dots,K \quad (47)$$

แล้วจัดอันดับโดยตัวประมาณค่าที่มีค่า EI มากกว่าจะมีอันดับที่ดีกว่า

หัวข้อต่อไปเป็นการนำวิธี MCDM ไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

การเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในต่างจังหวัด

ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบและจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในต่างจังหวัด จำนวน 24 สถานี ทั่วประเทศไทย ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2548 – 2551 ใช้ข้อมูลปริมาณสารมลพิษของสถานีตรวจวัดต่าง ๆ จาก website : <http://www.aqris.pcd.go.th> แสดงในตารางที่ 43 - 46 โดยพิจารณาปริมาณสารมลพิษ 5 ตัว เป็นตัวชี้วัด ใช้วิธี TOPSIS และวิธี ELECTRE ในการเปรียบเทียบและจัดอันดับสถานียดังกล่าว การวิเคราะห์ข้อมูลผู้วิจัยได้ประมวลผลด้วยโปรแกรม MATLAB ดังแสดงในภาคผนวก ค ผลการวิเคราะห์ เป็นดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี TOPSIS

จากข้อมูลในตารางที่ 43 แสดงข้อมูลคุณภาพอากาศในพื้นที่ต่างจังหวัด จำแนกตามราย สถานี ปี 2548 เมื่อพิจารณาในรูปของเมตริกซ์ขนาด 24×5 โดยสมการที่ 1 และ 2 แทนค่า K ด้วย 24 และ N ด้วย 5 จะได้แถวในอุดมคติ (IDR) และแถวในอุดมคติลบ ($NIDR$) ดังนี้

$$IDR = (0.5, 3.4, 0.3, 7.6, 15.4)$$

และ $NIDR = (5.6, 20.4, 1, 25, 108)$

ค่าถ่วงน้ำหนักของแต่ละตัวชี้วัด 3 แบบ คำนวณตามสมการที่ 3 – 5 ได้ผลในรูปของ เวกเตอร์แถว ดังนี้

$$w_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$w_2 = (0.3981, 0.2281, 0.1405, 0.0580, 0.1753)$$

และ $w_3 = (0.6097, 0.4705, 0.3772, 0.2271, 0.4272)$

ระยะทางจากแถวต่าง ๆ ไปยัง IDR และ $NIDR$ ภายใต L_1 -norm คำนวณตามสมการที่ 6 และ 7 ตามลำดับ และภายใต L_2 -norm คำนวณตามสมการที่ 8 และ 9 ตามลำดับ ดังนี้โดยรวม เมื่อใช้ L_1 และ L_2 -norm คำนวณตามสมการที่ 10 และ 11 ตามลำดับ ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อการ จัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 ภายใต L_1 และ L_2 -norm แสดงในตารางที่ 1 – 3

ตารางที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548
ภายใต้ L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_1

สถานีที่	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
1	0.0961	0.2357	0.2895	7	0.2194	0.5109	0.3004	6
2	0.1872	0.1446	0.5643	21	0.3997	0.3432	0.538	21
3	0.1127	0.2191	0.3396	10	0.2600	0.4839	0.3495	9
4	0.0597	0.2720	0.1800	2	0.1862	0.5817	0.2425	3
5	0.0669	0.2649	0.2016	4	0.1709	0.5561	0.2351	2
6	0.0669	0.2649	0.2016	3	0.1955	0.5697	0.2555	5
7	0.1567	0.1751	0.4722	16	0.3381	0.4194	0.4463	13
8	0.2023	0.1295	0.6097	23	0.4530	0.3698	0.5505	22
9	0.1572	0.1746	0.4737	17	0.3334	0.3897	0.4611	15
10	0.1579	0.1738	0.4761	18	0.3286	0.3821	0.4623	16
11	0.2101	0.1217	0.6332	24	0.5030	0.3256	0.6071	24
12	0.1676	0.1641	0.5053	19	0.3735	0.3912	0.4884	19
13	0.1343	0.1975	0.4048	11	0.2973	0.4376	0.4046	11
14	0.1471	0.1847	0.4434	13	0.3721	0.4297	0.4641	17
15	0.1543	0.1775	0.465	15	0.4085	0.4565	0.4722	18
16	0.1356	0.1962	0.4086	12	0.2864	0.4088	0.4120	12
17	0.1106	0.2212	0.3333	9	0.2910	0.4869	0.3741	10
18	0.1382	0.2081	0.399	13	0.3349	0.4475	0.428	14
19	0.1588	0.1875	0.4585	18	0.3532	0.4228	0.4552	19
20	0.1496	0.1822	0.4510	14	0.3374	0.4051	0.4544	14
21	0.0944	0.2373	0.2847	6	0.2445	0.5296	0.3158	7
22	0.0459	0.2859	0.1382	1	0.1046	0.5887	0.1509	1
23	0.0734	0.2583	0.2213	5	0.1774	0.5465	0.2450	4
24	0.0995	0.2323	0.2998	8	0.2290	0.4849	0.3208	8

จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยใช้ w_1 ภายใต้อันดับ L_1 และ $L_2 - \text{norm}$ สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และแย่งที่สุดได้แก่ สถานีที่ 11 (สถานีตำรวจภูธรตำบลหน้าพระลาน จ.สระบุรี)

ตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548
ภายใต้อันดับ L_1 และ $L_2 - \text{norm}$ เมื่อใช้ w_2

สถานีที่	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
1	0.0150	0.0596	0.2015	6	0.0334	0.1543	0.1778	6
2	0.0373	0.0374	0.4993	17	0.0828	0.1094	0.4310	14
3	0.0180	0.0567	0.2410	7	0.0457	0.1560	0.2265	7
4	0.0084	0.0663	0.1123	1	0.0269	0.1651	0.1401	1
5	0.0110	0.0636	0.148	4	0.0282	0.1581	0.1513	3
6	0.0101	0.0646	0.1352	2	0.0285	0.1599	0.1512	2
7	0.026	0.0487	0.348	10	0.0548	0.1363	0.2867	8
8	0.0422	0.0325	0.5646	21	0.1004	0.0999	0.5014	18
9	0.0292	0.0455	0.3912	11	0.0636	0.1191	0.3483	11
10	0.0321	0.0426	0.4294	14	0.0733	0.1062	0.4084	12
11	0.0440	0.0306	0.59	22	0.1051	0.1049	0.5006	17
12	0.0410	0.0337	0.5487	20	0.1146	0.0771	0.5979	22
13	0.0321	0.0426	0.4297	15	0.0921	0.0959	0.4898	16
14	0.0300	0.0447	0.4017	12	0.0787	0.1120	0.4126	13
15	0.0441	0.0306	0.5906	23	0.1480	0.0822	0.6431	23
16	0.0331	0.0415	0.4435	16	0.0878	0.0932	0.4850	15
17	0.0313	0.0434	0.4192	13	0.1043	0.0954	0.5224	19
18	0.0524	0.0223	0.7017	24	0.1465	0.0512	0.741	24
19	0.0390	0.0356	0.5225	19	0.1002	0.084	0.5441	20
20	0.0389	0.0358	0.5210	18	0.1121	0.0794	0.5854	21
21	0.0195	0.0551	0.2614	8	0.0572	0.1276	0.3095	9
22	0.0106	0.0641	0.1418	3	0.0286	0.1502	0.1599	4

ตารางที่ 2 (ต่อ)

สถานีที่	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
23	0.0118	0.0628	0.1582	5	0.0316	0.1620	0.1634	5
24	0.0243	0.0504	0.3252	9	0.0607	0.1193	0.3372	10

จากตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยใช้ w_2 ภายใต้อันดับ L_1 และ L_2 - norm สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าดงจ.ลำปาง) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลเทศบาลเมืองจ.ชลบุรี)

ตารางที่ 3 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 ภายใต้อันดับ L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_3

สถานีที่	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
1	0.0364	0.1137	0.2423	6	0.0811	0.2653	0.2341	6
2	0.0804	0.0696	0.5359	21	0.1743	0.1823	0.4889	17
3	0.0438	0.1062	0.2919	8	0.1055	0.2594	0.2891	8
4	0.0213	0.1287	0.1419	2	0.0679	0.2922	0.1885	2
5	0.0260	0.1240	0.1733	4	0.0670	0.2792	0.1936	3
6	0.0244	0.1256	0.1626	3	0.0699	0.2848	0.1971	4
7	0.0609	0.0891	0.4059	12	0.1282	0.2273	0.3607	10
8	0.0880	0.062	0.587	22	0.2020	0.1821	0.5260	20
9	0.0643	0.0857	0.4284	15	0.1357	0.2038	0.3997	11
10	0.0670	0.083	0.4467	16	0.1421	0.1898	0.4281	12
11	0.0940	0.0560	0.6267	23	0.2263	0.1694	0.5718	23
12	0.0772	0.0728	0.5144	20	0.1903	0.1704	0.5277	21
13	0.0608	0.0892	0.4055	11	0.1505	0.1982	0.4315	13
14	0.0627	0.0873	0.4178	13	0.1602	0.2066	0.4368	14
15	0.0768	0.0732	0.5121	19	0.2321	0.1941	0.5446	22

ตารางที่ 3 (ต่อ)

สถานีที่	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
16	0.0633	0.0867	0.4219	14	0.148	0.1854	0.4440	16
17	0.0548	0.0952	0.3652	10	0.1637	0.2101	0.4380	15
18	0.0968	0.0532	0.6452	24	0.2434	0.1260	0.6589	24
19	0.0764	0.0736	0.5094	18	0.1737	0.1703	0.5050	18
20	0.0717	0.0783	0.4777	17	0.1823	0.1749	0.5104	19
21	0.0387	0.1113	0.2583	7	0.0997	0.2481	0.2868	7
22	0.0205	0.1295	0.1369	1	0.0497	0.2797	0.1509	1
23	0.0285	0.1215	0.1902	5	0.0722	0.2792	0.2055	5
24	0.0474	0.1026	0.3160	9	0.1104	0.2241	0.3300	9

จากตารางที่ 3 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยใช้ w_3 ภายใต้อันดับ L_1 และ L_2 - norm สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ ได้แก่ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี)

สรุปการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยภาพรวม ในปี 2548 เมื่อใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ โดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน แสดงในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 โดยใช้วิธี TOPSIS

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
1	0.1404	0.1464	0.0989	0.0853	0.1197	0.1155	0.1177	6
2	0.2736	0.2623	0.2451	0.2068	0.2648	0.2411	0.2489	18
3	0.1647	0.1704	0.1183	0.1087	0.1442	0.1426	0.1415	8
4	0.0873	0.1182	0.0551	0.0672	0.0701	0.0929	0.0818	2
5	0.0978	0.1146	0.0726	0.0726	0.0856	0.0955	0.0898	4
6	0.0977	0.1245	0.0664	0.0725	0.0803	0.0972	0.0898	3

ตารางที่ 4 (ต่อ)

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
7	0.2290	0.2175	0.1708	0.1376	0.2006	0.1778	0.1889	10
8	0.2957	0.2684	0.2771	0.2405	0.2900	0.2594	0.2718	22
9	0.2297	0.2248	0.1920	0.1671	0.2117	0.1971	0.2037	12
10	0.2308	0.2254	0.2108	0.1959	0.2207	0.2111	0.2158	16
11	0.3070	0.2959	0.2896	0.2401	0.3097	0.2820	0.2874	23
12	0.2450	0.2381	0.2693	0.2868	0.2542	0.2602	0.2589	20
13	0.1963	0.1972	0.2109	0.2350	0.2004	0.2128	0.2088	13
14	0.2150	0.2262	0.1972	0.1979	0.2065	0.2154	0.2097	14
15	0.2255	0.2302	0.2899	0.3085	0.2530	0.2685	0.2626	21
16	0.1981	0.2008	0.2177	0.2327	0.2085	0.2189	0.2128	15
17	0.1616	0.1823	0.2058	0.2506	0.1805	0.2160	0.1995	11
18	0.2906	0.2873	0.3444	0.3555	0.3188	0.3249	0.3202	24
19	0.2489	0.2392	0.2565	0.2610	0.2517	0.2490	0.2511	19
20	0.2187	0.2215	0.2557	0.2808	0.236	0.2517	0.2441	17
21	0.1380	0.1540	0.1283	0.1485	0.1276	0.1414	0.1396	7
22	0.0670	0.0736	0.0696	0.0767	0.0677	0.0744	0.0715	1
23	0.1073	0.1194	0.0777	0.0784	0.094	0.1013	0.0964	5
24	0.1454	0.1563	0.1596	0.1618	0.1562	0.1627	0.1570	9

หมายเหตุ ตัวอย่างการคำนวณค่าดัชนีบรรทัดฐานของสถานีที่ 2 เมื่อใช้ L_1 -norm
และตัวถ่วงน้ำหนัก w_3

$$0.5359 / \sqrt{0.2423^2 + 0.5359^2 + \dots + 0.316^2} = 0.2648$$

จากตารางที่ 4 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในปี 2548 โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี)

ทำนองเดียวกัน เราสามารถจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2549 – 2551 โดยใช้วิธี TOPSIS ได้ดังแสดงในตารางที่ 5 - 7

ตารางที่ 5 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2549 โดยใช้วิธี TOPSIS

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
1	0.1309	0.1340	0.0835	0.0667	0.1057	0.0961	0.1028	4
2	0.2585	0.2480	0.1991	0.1541	0.2312	0.2008	0.2153	16
3	0.1467	0.1501	0.1079	0.0890	0.1276	0.1184	0.1233	7
4	0.0696	0.0859	0.0466	0.0424	0.0565	0.0593	0.0601	1
5	0.0985	0.1064	0.0837	0.0714	0.0930	0.0895	0.0904	3
6	0.0940	0.1033	0.0734	0.0664	0.0834	0.0825	0.0838	2
7	0.2365	0.2234	0.1687	0.1301	0.1997	0.1697	0.188	12
8	0.2252	0.2282	0.2048	0.1837	0.2147	0.2057	0.2104	15
9	0.2107	0.2122	0.1713	0.1411	0.1945	0.1789	0.1848	11
10	0.2693	0.2511	0.2267	0.1862	0.2481	0.2149	0.2327	19
11	0.3271	0.3013	0.2511	0.1947	0.2969	0.2545	0.2709	22
12	0.2556	0.2501	0.2716	0.2807	0.2628	0.2675	0.2647	21
13	0.1919	0.1929	0.2022	0.2184	0.1960	0.2065	0.2013	13
14	0.1681	0.1796	0.1740	0.1901	0.1704	0.1850	0.1779	10
15	0.3285	0.3284	0.4542	0.4743	0.3954	0.4119	0.3988	24
16	0.1939	0.1935	0.2074	0.2156	0.2017	0.2078	0.2033	14
17	0.2236	0.2336	0.2614	0.2908	0.2448	0.2710	0.2542	23
18	0.2417	0.2590	0.3000	0.3371	0.2758	0.3113	0.2875	23
19	0.2150	0.2114	0.2216	0.2259	0.2175	0.2191	0.2184	17

ตารางที่ 5 (ต่อ)

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
20	0.2024	0.2084	0.2255	0.2440	0.2131	0.2289	0.2204	18
21	0.1618	0.1712	0.1521	0.1633	0.1536	0.1602	0.1604	9
22	0.0998	0.1128	0.1129	0.1353	0.1061	0.1259	0.1155	6
23	0.1345	0.1479	0.0891	0.0836	0.1138	0.1178	0.1145	5
24	0.1213	0.1294	0.1291	0.1209	0.1292	0.1287	0.1264	8

จากตารางที่ 5 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในปี 2549 โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 15 (สถานีอนามัยมาบตาพุด จ.ระยอง)

ตารางที่ 6 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2550 โดยใช้วิธี TOPSIS

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
1	0.1718	0.1720	0.0942	0.0771	0.1309	0.1187	0.1274	8
2	0.2453	0.2301	0.1767	0.1331	0.2129	0.1800	0.1963	13
3	0.1527	0.1503	0.1130	0.0886	0.1327	0.1165	0.1256	7
4	0.0688	0.0838	0.0437	0.0418	0.0556	0.0611	0.0591	1
5	0.1190	0.1329	0.0995	0.0817	0.1115	0.1058	0.1084	6
6	0.1009	0.1141	0.0820	0.0758	0.0921	0.0942	0.0932	5
7	0.2283	0.2131	0.1776	0.1444	0.2006	0.1703	0.1891	12
8	0.2511	0.2466	0.2412	0.2229	0.2479	0.2360	0.2410	18
9	0.2166	0.2073	0.1774	0.1445	0.1977	0.1725	0.1860	11
10	0.2346	0.2213	0.2003	0.1654	0.2183	0.1896	0.2049	14

ตารางที่ 6 (ต่อ)

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
11	0.2894	0.2629	0.2339	0.1798	0.2654	0.2226	0.2423	19
12	0.2806	0.2784	0.3056	0.3167	0.2944	0.3041	0.2967	23
13	0.2328	0.2280	0.2174	0.2099	0.2246	0.2161	0.2214	16
14	0.1489	0.1726	0.1818	0.2242	0.1640	0.2035	0.1825	10
15	0.3154	0.3285	0.4463	0.4844	0.3863	0.4216	0.3971	24
16	0.2320	0.2354	0.2471	0.2543	0.2415	0.2494	0.2433	20
17	0.1878	0.2073	0.2333	0.2740	0.2120	0.2513	0.2276	17
18	0.2769	0.2733	0.2700	0.2481	0.2777	0.2637	0.2683	22
19	0.2003	0.2068	0.2148	0.2319	0.2075	0.2221	0.2139	15
20	0.2180	0.2300	0.2530	0.2787	0.2363	0.2613	0.2462	21
21	0.1611	0.1682	0.1528	0.1619	0.1547	0.1608	0.1599	9
22	0.0844	0.0862	0.0797	0.0765	0.0820	0.0799	0.0814	3
23	0.0852	0.0928	0.0563	0.0491	0.0710	0.0703	0.0708	2
24	0.0934	0.0981	0.0911	0.0822	0.0941	0.0904	0.0915	4

จากตารางที่ 6 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในปี 2550 โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหมดแบบ สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 15 (สถานีอนามัยมาบตาพุด จ.ระยอง)

ตารางที่ 7 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2551 โดยใช้วิธี TOPSIS

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1		w_2		w_3			
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
1	0.1465	0.1418	0.1036	0.0914	0.1220	0.1108	0.1193	4
2	0.2378	0.2259	0.1829	0.1599	0.2118	0.1885	0.2011	12
3	0.1410	0.1527	0.0931	0.0988	0.1144	0.1196	0.1199	5
4	0.0449	0.0666	0.0238	0.0271	0.0335	0.0434	0.0399	1
5	0.1871	0.1773	0.1533	0.1406	0.1675	0.1529	0.1631	10
6	0.0932	0.1061	0.0630	0.0617	0.0772	0.0783	0.0799	2
7	0.2465	0.2244	0.1985	0.1739	0.2183	0.1917	0.2089	13
8	0.2326	0.2364	0.2424	0.2170	0.2430	0.2302	0.2336	17
9	0.2334	0.2278	0.2227	0.2142	0.2277	0.2197	0.2242	16
10	0.2233	0.2204	0.2107	0.1954	0.2173	0.2060	0.2122	14
11	0.2926	0.2655	0.2322	0.1923	0.2630	0.2221	0.2446	20
12	0.2426	0.2437	0.2551	0.2555	0.2499	0.2538	0.2501	22
13	0.1972	0.1884	0.1671	0.1594	0.1796	0.1679	0.1766	11
14	0.1373	0.1517	0.1482	0.1753	0.1407	0.1657	0.1531	9
15	0.3357	0.3455	0.4329	0.4593	0.3924	0.4147	0.3967	24
16	0.2561	0.2503	0.2434	0.2263	0.2520	0.2369	0.2442	19
17	0.1949	0.2076	0.2169	0.2396	0.2065	0.2291	0.2158	15
18	0.2038	0.2227	0.2428	0.2651	0.2258	0.2526	0.2355	18
19	0.2342	0.2368	0.2507	0.2572	0.2431	0.2522	0.2457	21
20	0.2231	0.2384	0.2678	0.2802	0.2481	0.2689	0.2544	23
21	0.1435	0.1453	0.1372	0.1540	0.1362	0.1478	0.1440	7
22	0.1153	0.1308	0.1373	0.1514	0.1294	0.1455	0.1350	6
23	0.1234	0.1194	0.1121	0.1057	0.1162	0.1107	0.1146	3
24	0.1531	0.1527	0.1434	0.1410	0.1487	0.1453	0.1474	8

จากตารางที่ 7 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในปี 2551 โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 15 (สถานีอนามัยมาบตาพุด จ.ระยอง)

ดังนั้น เราสามารถสรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพ ในปี 2548 – 2551 โดยใช้วิธี TOPSIS ได้ดังในตารางที่ 8

ตารางที่ 8 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศปี 2548 – 2551 โดยใช้วิธี TOPSIS

สถานีที่	อันดับ			
	2548	2549	2550	2551
1	6	4	8	4
2	18	16	13	12
3	8	7	7	5
4	2	1	1	1
5	4	3	6	10
6	3	2	5	2
7	10	12	12	13
8	22	15	18	17
9	12	11	11	16
10	16	19	14	14
11	23	22	19	20
12	20	21	23	22
13	13	13	16	11
14	14	10	10	9
15	21	24	24	24
16	15	14	20	19
17	11	20	17	15
18	24	23	22	18
19	19	17	15	21
20	17	18	21	23

ตารางที่ 8 (ต่อ)

สถานีที่	อันดับ			
	2548	2549	2550	2551
21	7	9	9	7
22	1	6	3	6
23	5	5	2	3
24	9	8	4	8

จากตารางที่ 8 จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้วิธี TOPSIS จัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศในต่างจังหวัด จำนวน 24 สถานี ในปี 2548 สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดคือ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการอ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และแยที่ที่สุดคือ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี) สำหรับในปี 2549 – 2551 สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดคือ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และแยที่ที่สุดคือ สถานีที่ 15 (สถานีอนามัยมาบตาพุด จ.ระยอง)

สถานีที่มีอันดับของคุณภาพอากาศดีขึ้นได้แก่ สถานีที่ 2 (โรงเรียนยุพราชวิทยาลัย จ.เชียงใหม่), สถานีที่ 3 (ศาลหลักเมือง จ.ลำปาง), สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และ สถานีที่ 14 (องค์การบริหารส่วนตำบลตาสีทรี จ.ระยอง) และสถานีที่มีอันดับของคุณภาพอากาศแยลง ได้แก่ สถานีที่ 7 (วิทยาลัยอาชีวศึกษานครสวรรค์ จ.นครสวรรค์), สถานีที่ 15 (สถานีอนามัยมาบตาพุด จ.ระยอง) และ สถานีที่ 20 (สำนักงานสามัญศึกษา จ.ชลบุรี)

2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี ELECTRE

ค่าบรรทัดฐาน (r_{ij}) คำนวณจากสมการที่ 25 แสดงผลในตารางที่ 47

ค่าถ่วงน้ำหนักแต่ละแบบที่ปรับให้ผลรวมเป็น 1 ซึ่งคำนวณตามสมการที่ 26 – 28

ได้ผลในรูปเวกเตอร์แถวดังนี้

$$w_1 = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2),$$

$$w_2 = (0.3981, 0.2281, 0.1405, 0.0580, 0.1753)$$

และ $w_3 = (0.2887, 0.2228, 0.1786, 0.1076, 0.2023)$

ค่าบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนัก (v_{ij}) สำหรับแต่ละแบบการถ่วงน้ำหนัก คำนวณจากสมการที่ 29

แสดงผลในตารางที่ 48 – 50

พิจารณาเซตของความสอดคล้อง ($C(p,q)$) และไม่สอดคล้อง ($D(p,q)$) ตามสมการที่ 30 และ 31 ตามลำดับ คำนวณความสอดคล้อง (C_{pq}) และไม่สอดคล้อง (D_{pq}) จำนวนโดยใช้สมการที่ 32 และ 33 ตามลำดับ แสดงผลในตารางที่ 51 – 56

คำนวณความสอดคล้องสุทธิ (C_p) คำนวณความไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) และค่านี ELECTRE (EI_p) เมื่อ $p = 1, 2, \dots, 24$ จำนวนตามสมการที่ 34 – 36 ตามลำดับ รวมถึงผลการจัดอันดับโดยใช้วิธี ELECTRE ในแต่ละแบบการถ่วงน้ำหนักแสดงในตารางที่ 9 – 11

ตารางที่ 9 ผลการวิเคราะห์เพื่อจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 โดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_1

สถานีที่	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
1	3.4	-6.6028	0.2246	9
2	-7.6	11.6434	-0.4391	22
3	0	-3.2095	0.0648	10
4	10.4	-16.0259	0.6027	2
5	10.8	-14.1153	0.5749	3
6	8.6	-12.9698	0.4927	5
7	-9	7.6811	-0.3967	18
8	-8.6	12.7157	-0.4876	23
9	-8.4	7.8616	-0.3842	17
10	-9.4	8.0353	-0.4145	19
11	-6.2	12.3603	-0.4160	20
12	-5.6	9.2241	-0.3366	16
13	-2	0.5788	-0.0654	12
14	-2	5.0393	-0.1554	15
15	-0.6	3.8960	-0.0948	13
16	0.2	0.9554	-0.0139	11
17	8	-5.7450	0.3307	6
18	-8.2	13.5231	-0.4932	24
19	-8.2	9.8861	-0.4197	21

ตารางที่ 9 (ต่อ)

สถานีที่	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
20	-1.2	3.7414	-0.1078	14
21	3	-7.5303	0.2326	8
22	16.6	-19.5300	0.8399	1
23	10.8	-13.597	0.5644	4
24	5.2	-7.8159	0.2974	7

จากตารางที่ 9 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_1 สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี)

ตารางที่ 10 ผลการวิเคราะห์เพื่อจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 โดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_2

สถานีที่	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
1	8.0978	-10.3341	0.3948	6
2	-7.3325	9.5664	-0.3614	19
3	4.5623	-7.3043	0.2503	8
4	13.8177	-18.5623	0.6912	1
5	11.5152	-14.7325	0.5621	5
6	11.7244	-15.6498	0.5846	4
7	-2.5782	1.1011	-0.0845	11
8	-9.3927	11.6942	-0.4524	23
9	-3.3629	3.1413	-0.1423	14
10	-7.1202	5.4010	-0.2778	16
11	-7.6150	12.877	-0.4307	22
12	-8.1498	11.7859	-0.4234	21
13	-2.7317	2.0902	-0.1069	13

ตารางที่ 10 (ต่อ)

สถานีที่	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
14	-1.0492	3.4703	-0.0913	12
15	-5.2092	10.2162	-0.3211	17
16	-3.4776	4.3382	-0.1677	15
17	2.5696	0.3738	0.0565	10
18	-13.6631	17.8084	-0.6732	24
19	-8.9338	10.4603	-0.4179	20
20	-6.3221	8.8240	-0.3225	18
21	5.1519	-9.1081	0.2989	7
22	14.3752	-17.3728	0.6826	2
23	12.2186	-15.1662	0.5877	3
24	2.9049	-4.9184	0.1644	9

จากตารางที่ 10 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_2 สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี)

ตารางที่ 11 ผลการวิเคราะห์เพื่อจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 โดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_3

สถานีที่	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
1	5.7796	-8.5437	0.3190	6
2	-8.2758	11.1022	-0.4346	21
3	1.7342	-5.0225	0.1440	10
4	12.1115	-17.3349	0.6574	2
5	10.8891	-14.252	0.5649	4
6	10.3862	-14.4713	0.5560	5
7	-5.8157	4.3460	-0.2376	16

ตารางที่ 11 (ต่อ)

สถานีที่	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
8	-9.1352	12.3029	-0.4807	23
9	-5.9465	5.5496	-0.2647	17
10	-8.1777	6.5602	-0.3430	18
11	-7.9906	13.4259	-0.4727	22
12	-6.2717	10.0745	-0.3620	19
13	-1.8506	0.9118	-0.0664	11
14	-1.1946	4.2729	-0.1151	13
15	-2.2657	6.7549	-0.1919	14
16	-1.8449	2.8846	-0.1049	12
17	5.7422	-2.9038	0.2074	9
18	-11.1449	15.8837	-0.6036	24
19	-8.3658	10.0263	-0.4159	20
20	-3.5930	6.2592	-0.2169	15
21	4.9626	-9.1060	0.3087	7
22	15.5552	-18.5822	0.7721	1
23	11.0632	-14.1832	0.5681	3
24	3.6491	-5.9551	0.2124	8

จากตารางที่ 11 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ โดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_3 สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดได้แก่ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และแย่ที่สุดได้แก่ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี)

สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศโดยภาพรวม ในปี 2548 เมื่อใช้วิธี ELECTRE ทุกแบบการถ่วงน้ำหนักโดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน แสดงในตารางที่ 12

ตารางที่ 12 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 โดยใช้วิธี ELECTRE

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
1	0.1133	0.1981	0.1604	0.1573	6
2	-0.2215	-0.1813	-0.2186	-0.2071	20
3	0.0327	0.1256	0.0724	0.0769	10
4	0.3041	0.3468	0.3306	0.3272	2
5	0.2900	0.2820	0.2841	0.2854	4
6	0.2486	0.2933	0.2796	0.2738	5
7	-0.2001	-0.0424	-0.1195	-0.1207	16
8	-0.2460	-0.2270	-0.2418	-0.2382	23
9	-0.1938	-0.0714	-0.1331	-0.1328	17
10	-0.2091	-0.1394	-0.1725	-0.1737	18
11	-0.2099	-0.2161	-0.2377	-0.2212	22
12	-0.1698	-0.2124	-0.182	-0.1881	19
13	-0.0330	-0.0536	-0.0334	-0.0400	11
14	-0.0784	-0.0458	-0.0579	-0.0607	13
15	-0.0478	-0.1611	-0.0965	-0.1018	14
16	-0.0070	-0.0841	-0.0528	-0.0480	12
17	0.1668	0.0284	0.1043	0.0998	9
18	-0.2488	-0.3377	-0.3036	-0.2967	24
19	-0.2117	-0.2097	-0.2092	-0.2102	21
20	-0.0544	-0.1618	-0.1091	-0.1084	15
21	0.1173	0.1500	0.1552	0.1408	7
22	0.4237	0.3425	0.3883	0.3848	1
23	0.2847	0.2949	0.2857	0.2884	3
24	0.1500	0.0825	0.1068	0.1131	8

จากตารางที่ 12 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2548 โดยใช้วิธี ELECTRE ทั้งสามแบบโดยภาพรวม สถานีที่มีคุณภาพอากาศดี ได้แก่ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และสถานีที่มีคุณภาพอากาศแย่ที่สุดคือ สถานีที่ 18 (สนามกีฬาเทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี)

ทำนองเดียวกัน เราสามารถจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2549 – 2551 โดยใช้วิธี ELECTRE ได้ดังแสดงในตารางที่ 13 – 15

ตารางที่ 13 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2549 โดยใช้วิธี ELECTRE

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
1	0.1474	0.2646	0.2176	0.2099	5
2	-0.1963	-0.1088	-0.1650	-0.1567	18
3	0.1277	0.1814	0.1556	0.1549	8
4	0.3900	0.4117	0.4155	0.4057	1
5	0.2987	0.2781	0.2877	0.2882	3
6	0.3000	0.3104	0.3117	0.3073	2
7	-0.2193	-0.0493	-0.1282	-0.1323	17
8	-0.0412	-0.0595	-0.0506	-0.0504	13
9	-0.1253	-0.0488	-0.0966	-0.0902	15
10	-0.3315	-0.2270	-0.2829	-0.2805	24
11	-0.3040	-0.1744	-0.2510	-0.2431	22
12	-0.2297	-0.2551	-0.2373	-0.2407	21
13	-0.0243	-0.0577	-0.0325	-0.0382	11
14	0.0393	0.0123	0.0328	0.0281	10
15	-0.1922	-0.3099	-0.2596	-0.2539	23
16	-0.0114	-0.0781	-0.0481	-0.0459	12
17	-0.1254	-0.2153	-0.1770	-0.1726	19
18	-0.1155	-0.2702	-0.2135	-0.1997	20
19	-0.1173	-0.1420	-0.1236	-0.1276	16

ตารางที่ 13 (ต่อ)

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
20	-0.0339	-0.1210	-0.0724	-0.0758	14
21	0.0505	0.0690	0.0767	0.0654	9
22	0.3335	0.2345	0.2906	0.2862	4
23	0.1569	0.2234	0.1824	0.1876	6
24	0.2235	0.1317	0.1677	0.1743	7

จากตารางที่ 13 จะเห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2549 โดยใช้วิธี ELECTRE ทั้งสามแบบโดยภาพรวม สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุด ได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และสถานีที่มีคุณภาพอากาศแย่ที่สุดคือ สถานีที่ 10 (โรงเรียน อยุรยาวิทยาลัย จ.พระนครศรีอยุธยา)

ตารางที่ 14 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2550 โดยใช้วิธี ELECTRE

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
1	-0.0207	0.1713	0.0832	0.0779	9
2	-0.1567	-0.0462	-0.1097	-0.1042	15
3	0.0975	0.1594	0.1306	0.1291	7
4	0.3534	0.3719	0.3714	0.3656	1
5	0.2011	0.2034	0.1998	0.2014	6
6	0.2611	0.2612	0.2632	0.2618	5
7	-0.2021	-0.0752	-0.1332	-0.1368	17
8	-0.1091	-0.1372	-0.1285	-0.1249	16
9	-0.1234	-0.0463	-0.0862	-0.0853	13
10	-0.2058	-0.1385	-0.1763	-0.1735	19
11	-0.2551	-0.1696	-0.2203	-0.2150	21

ตารางที่ 14 (ต่อ)

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
12	-0.2499	-0.3019	-0.2774	-0.2764	24
13	-0.1940	-0.1411	-0.1678	-0.1676	18
14	0.1245	0.0380	0.0928	0.0851	8
15	-0.1488	-0.2900	-0.2317	-0.2235	22
16	-0.1560	-0.2165	-0.1944	-0.1890	20
17	0.0331	-0.1138	-0.0433	-0.0413	11
18	-0.2290	-0.2407	-0.2458	-0.2385	23
19	-0.0355	-0.0868	-0.0587	-0.0603	12
20	-0.0369	-0.1570	-0.0979	-0.0972	14
21	0.0496	0.0635	0.0686	0.0606	10
22	0.3554	0.2983	0.3342	0.3293	3
23	0.3328	0.3462	0.3442	0.3410	2
24	0.3143	0.2476	0.2831	0.2817	4

จากตารางที่ 14 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2550 โดยใช้วิธี ELECTRE ทั้งสามแบบโดยภาพรวม สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุด ได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และสถานีที่มีคุณภาพอากาศแย่ที่สุดคือ สถานีที่ 12 (สถานีดับเพลิงเขาน้อย จ.สระบุรี)

ตารางที่ 15 สรุปผลการจัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2551 โดยใช้วิธี ELECTRE

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
1	0.1086	0.2117	0.1776	0.1659	7
2	-0.1232	-0.0245	-0.0874	-0.0784	13
3	0.1282	0.2271	0.1872	0.1808	5

ตารางที่ 15 (ต่อ)

สถานีที่	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
	w_1	w_2	w_3		
4	0.4562	0.4272	0.4458	0.4431	1
5	-0.0611	0.0917	0.0332	0.0213	10
6	0.3103	0.3256	0.3185	0.3181	2
7	-0.2531	-0.0661	-0.1411	-0.1534	17
8	-0.0314	-0.1433	-0.1130	-0.0959	15
9	-0.2275	-0.1581	-0.1911	-0.1922	21
10	-0.1518	-0.1151	-0.1374	-0.1348	16
11	-0.2298	-0.1216	-0.1854	-0.1789	19
12	-0.1914	-0.2294	-0.2146	-0.2118	22
13	-0.1321	-0.0006	-0.0516	-0.0614	12
14	0.1745	0.1287	0.1702	0.1578	9
15	-0.2165	-0.3473	-0.3081	-0.2906	24
16	-0.2405	-0.2342	-0.2591	-0.2446	23
17	-0.0202	-0.0939	-0.0582	-0.0574	11
18	0.0130	-0.1656	-0.0890	-0.0805	14
19	-0.1633	-0.2154	-0.1874	-0.1887	20
20	-0.0635	-0.2420	-0.1627	-0.1561	18
21	0.1370	0.1623	0.1791	0.1595	8
22	0.3462	0.1842	0.2534	0.2612	3
23	0.2585	0.2359	0.2577	0.2507	4
24	0.1728	0.1627	0.1634	0.1663	6

จากตารางที่ 15 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในปี 2551 โดยใช้วิธี ELECTRE ทั้งสามแบบโดยภาพรวม สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุด ได้แก่ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัย สบป่าด จ.ลำปาง) และสถานีที่มีคุณภาพอากาศแย่ที่สุดคือ สถานีที่ 15 (สถานีอนามัย มาบตาพุด จ.ระยอง)

ดังนั้น เราสามารถสรุปผลการจัดอันดับสถานีวิจัยวัดคุณภาพ ในปี 2548 – 2551 โดยใช้วิธี ELECTRE ได้ดังในตารางที่ 16

ตารางที่ 16 สรุปผลการจัดอันดับสถานีวิจัยวัดคุณภาพอากาศ ปี 2548-2551 โดยใช้วิธี ELECTRE

สถานีที่	อันดับ			
	2548	2549	2550	2551
1	6	5	9	7
2	20	18	15	13
3	10	8	7	5
4	2	1	1	1
5	4	3	6	10
6	5	2	5	2
7	16	17	17	17
8	23	13	16	15
9	17	15	13	21
10	18	24	19	16
11	22	22	21	19
12	19	21	24	22
13	11	11	18	12
14	13	10	8	9
15	14	23	22	24
16	12	12	20	23
17	9	19	11	11
18	24	20	23	14
19	21	16	12	20
20	15	14	14	18
21	7	9	10	8
22	1	4	3	3

ตารางที่ 16 (ต่อ)

สถานีที่	อันดับ			
	2548	2549	2550	2551
23	3	6	2	4
24	8	7	4	6

จากตารางที่ 16 จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้วิธี ELECTRE จัดอันดับสถานีตรวจวัดคุณภาพอากาศ ในต่างจังหวัด จำนวน 24 สถานี สถานีที่มีคุณภาพอากาศดีที่สุดในปี 2548 คือ สถานีที่ 22 (ที่ว่าการ อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี) และในปี 2549 ถึงปี 2551 คือ สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และสถานีที่มีคุณภาพอากาศแย่ที่สุดในปี 2548 ถึงปี 2551 คือ สถานีที่ 18 (สนามกีฬา เทศบาลแหลมฉบัง จ.ชลบุรี), สถานีที่ 10 (โรงเรียนอยุธยาวิทยาลัย จ.พระนครศรีอยุธยา), สถานีที่ 12 (สถานีดับเพลิงเขาน้อย จ.สระบุรี) และ สถานีที่ 15 (สถานีอนามัยมาบตาพุด จ.ระยอง) ตามลำดับ สถานีที่มีอันดับของคุณภาพอากาศดีขึ้นได้แก่ สถานีที่ 2 (โรงเรียนยุพราชวิทยาลัย จ.เชียงใหม่), สถานีที่ 3 (ศาลหลักเมือง จ.ลำปาง), สถานีที่ 4 (สถานีอนามัยสบป่าด จ.ลำปาง) และ สถานีที่ 11 (สถานีตำรวจภูธร ด.หน้าพระลาน จ.สระบุรี) สถานีที่มีอันดับของคุณภาพอากาศแย่ลง ได้แก่ สถานีที่ 7 (วิทยาลัยอาชีวศึกษา จ.นครสวรรค์)

การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ และ μ ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์

การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าในงานวิจัยนี้ ตัวชี้วัดที่ใช้ในการเปรียบเทียบคือ ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับค่าพารามิเตอร์ จัดเป็นตัวชี้วัดที่มีลักษณะต่อเนื่อง วิธีที่ใช้ในการเปรียบเทียบคือวิธี TOPSIS แบบที่ 1 และวิธี ELECTRE มีการให้น้ำหนักตัวชี้วัด 3 แบบ คือ แบบเท่ากันทุกตัวชี้วัด แบบใช้เอนโทรปี และแบบใช้สัมประสิทธิ์การแปรผัน พิจารณาในกรณีที่ $n = 10, 15$ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรม Maple

1. การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ

ตัวประมาณค่าของ θ ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบเพื่อหาตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด ได้แก่ ตัวประมาณค่าแบบภาวะความน่าจะเป็นสูงสุด ($\hat{\theta}_{MLE}$) และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\theta}_{(p)}$) โดยที่

$$\hat{\theta}_{MLE} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{(1)}) / n \text{ เมื่อ } x_{(1)} = \min \{x_{(i)} / i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\hat{\theta}_{(p)} = \theta_0 + \alpha(p) \cdot (\hat{\theta}_{UE} - \theta_0)$$

เมื่อ θ_0 เป็นค่าของ θ ที่ทราบโดยเบื้องต้น และ $\hat{\theta}_{UE} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{(1)}) / (n-1)$

p เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ $p \in (-\infty, (n-1)/2)$ พิจารณาที่ $p = -2, -1, 1, 2$

และ $\alpha(p) = \Gamma(n-1-p) / [\Gamma(n-1-2p) \cdot (n-1)^p]$

ตัวประมาณค่า 5 ตัว ดังกล่าวถูกเปรียบเทียบโดยใช้ค่า $MSEs$ ซึ่งคำนวณตามสมการต่อไปนี้อย่างไรก็ตาม

$$MSE(\hat{\theta}_{MLE}) = \theta^2 / n \quad (48)$$

$$MSE(\hat{\theta}_{(p)}) = [(1-\alpha(p))^2 r^2 + \alpha^2(p) / (n-1)] \theta^2 \quad (49)$$

เมื่อ $\alpha(p) = \Gamma(n-1-p) / [\Gamma(n-1-2p)(n-1)^p]$ และ $r = (\theta_0 / \theta) - 1$

จากสมการที่ 48 และ 49 จะเห็นได้ว่ามี θ^2 เป็นพจน์ร่วมเราสามารถตัดออกได้เป็น

$$MSE(\hat{\theta}_{MLE}) = 1 / n \quad (50)$$

$$MSE(\hat{\theta}_{(p)}) = (1-\alpha(p))^2 r^2 + \alpha^2(p) / (n-1) \quad (51)$$

จากสมการที่ 50 และ 51 เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง $n = 10, 15$ จะได้ฟังก์ชันที่ขึ้นกับค่า r ซึ่งมีค่าต่อเนื่องเราจะพิจารณาช่วง $-1 < r < 1$ นั่นคือ $0 < \theta_0 / \theta < 2$ และเพื่อให้สะดวกในการเขียนสูตรต่าง ๆ จึงกำหนดสัญลักษณ์ T_1 แทน MSE ของ $\hat{\theta}_{MLE}$ และ T_2, T_3, T_4, T_5 แทน $MSEs$ ของ $\hat{\theta}_{(p)}$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ ซึ่งจะได้ค่า $MSEs$ ของแต่ละตัวประมาณค่า ดังต่อไปนี้

กรณีที่ $n = 10$

$$T_1(r) = 1/10$$

$$T_2(r) = 289r^2 / 1936 + 81/1936$$

$$T_3(r) = r^2 / 100 + 9/100$$

$$T_4(r) = 4r^2 / 81 + 49/729$$

$$T_5(r) = 289r^2 / 729 + 100/6561$$

แสดงกราฟได้ตามภาพที่ 1

กรณี $n = 15$

$$T_1(r) = 1/15$$

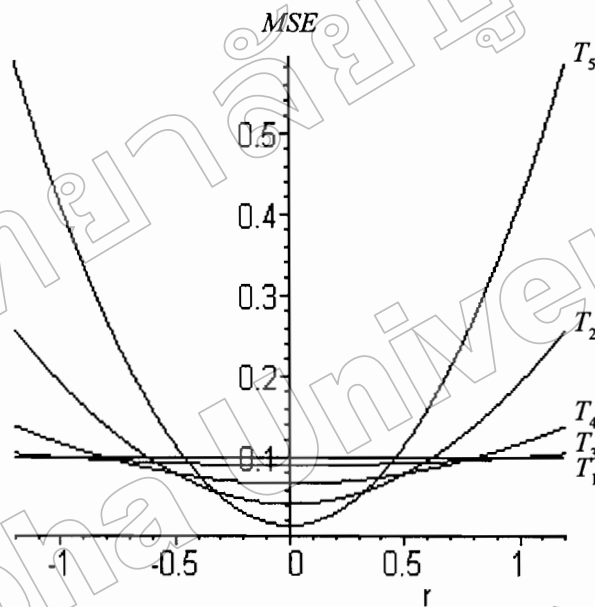
$$T_2(r) = (361/4624)r^2 + 343/9248$$

$$T_3(r) = (1/225)r^2 + 14/225$$

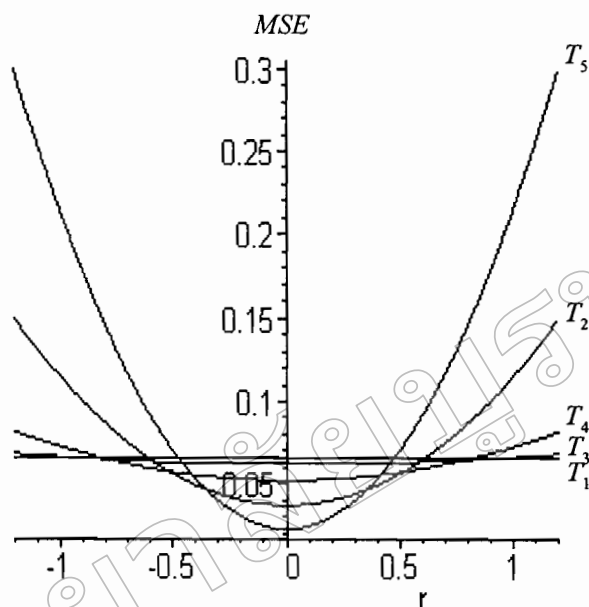
$$T_4(r) = (1/49)r^2 + 18/343$$

$$T_5(r) = (1849/9604)r^2 + 3025/134456$$

แสดงกราฟได้ตามภาพที่ 2



ภาพที่ 1 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ เมื่อ $n = 10$



ภาพที่ 2 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ เมื่อ $n = 15$

1.1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี TOPSIS

จากกราฟ จะเห็นได้ว่า ในช่วง $-1 < r < 1$ จุดตัดของกราฟทั้ง 5 เส้น แบ่งช่วงของ r ออกเป็น 20 ช่วงย่อย และกราฟข้างต้นมีลักษณะสมมาตรที่ $r=0$ ดังนั้น สามารถแสดงเพียง ช่วงที่ $0 < r < 1$ มี 10 ช่วงย่อยได้ดังนี้ $0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6 < c_7 < c_8 < c_9 < 1$ เมื่อ $c_j, j = 1, 2, 3, \dots, 9$ แทนจุดตัดของกราฟในช่วงดังกล่าว ซึ่งมีค่าดังแสดงในตารางที่ 17

ตารางที่ 17 จุดตัดของ T_1, T_2, T_3, T_4 และ T_5 เมื่อ $n = 10, 15$

n	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
10	0.3280	0.3870	0.4398	0.4624	0.5040	0.5880	0.6242	0.7606	0.8148
15	0.3571	0.4174	0.4596	0.4790	0.5166	0.5843	0.6155	0.7813	0.8338

เนื่องจากช่วง $0 < r < 1$ มี 10 ช่วงย่อย ดังนั้น แฉวในอุดมคติ (IDR) ตามสมการที่ 12 จึงประกอบด้วย $u_j(r), j = 1, 2, \dots, 10$ และแฉวในอุดมคติลบ (NIDR) ตามสมการที่ 13 จึงประกอบด้วย $v_j(r), j = 1, 2, \dots, 10$ ดังแสดงในตารางที่ 18

ตารางที่ 18 *IDR* และ *NIDR* สำหรับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ เมื่อ $n = 10, 15$

n	$0 < r < c_1$		$c_1 < r < c_2$		$c_2 < r < c_3$		$c_3 < r < c_4$		$c_4 < r < c_5$	
	$u_1(r)$	$v_1(r)$	$u_2(r)$	$v_2(r)$	$u_3(r)$	$v_3(r)$	$u_4(r)$	$v_4(r)$	$u_5(r)$	$v_5(r)$
10	$T_5(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_5(r)$
15	$T_5(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_1(r)$	$T_2(r)$	$T_5(r)$

n	$c_5 < r < c_6$		$c_6 < r < c_7$		$c_7 < r < c_8$		$c_8 < r < c_9$		$c_9 < r < 1$	
	$u_6(r)$	$v_6(r)$	$u_7(r)$	$v_7(r)$	$u_8(r)$	$v_8(r)$	$u_9(r)$	$v_9(r)$	$u_{10}(r)$	$v_{10}(r)$
10	$T_4(r)$	$T_5(r)$	$T_4(r)$	$T_5(r)$	$T_4(r)$	$T_5(r)$	$T_3(r)$	$T_5(r)$	$T_3(r)$	$T_5(r)$
15	$T_4(r)$	$T_5(r)$	$T_4(r)$	$T_5(r)$	$T_4(r)$	$T_5(r)$	$T_3(r)$	$T_5(r)$	$T_3(r)$	$T_5(r)$

1.1.1 การวิเคราะห์ข้อมูลภายใต้ L_1 -norm

จากตัวประมาณค่าทั้งหมด 5 ตัว หาระยะทางจาก $T_i(r)$ ไปยัง *IDR* และ *NIDR*

เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ โดยใช้ L_1 -norm จากสมการที่ 17 และ 18 จะได้

$$\begin{aligned}
 L_1(i, IDR) &= 2 \left\{ \int_0^{c_1} [T_i(r) - u_1(r)]w(r)dr + \int_{c_1}^{c_2} [T_i(r) - u_2(r)]w(r)dr \right. \\
 &\quad + \int_{c_2}^{c_3} [T_i(r) - u_3(r)]w(r)dr + \int_{c_3}^{c_4} [T_i(r) - u_4(r)]w(r)dr \\
 &\quad + \int_{c_4}^{c_5} [T_i(r) - u_5(r)]w(r)dr + \int_{c_5}^{c_6} [T_i(r) - u_6(r)]w(r)dr \\
 &\quad + \int_{c_6}^{c_7} [T_i(r) - u_7(r)]w(r)dr + \int_{c_7}^{c_8} [T_i(r) - u_8(r)]w(r)dr \\
 &\quad \left. + \int_{c_8}^{c_9} [T_i(r) - u_9(r)]w(r)dr + \int_{c_9}^1 [T_i(r) - u_{10}(r)]w(r)dr \right\} \\
 &= 2 \left\{ \int_0^{c_1} [T_i(r) - T_5(r)]w(r)dr + \int_{c_1}^{c_2} [T_i(r) - T_2(r)]w(r)dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_{c_2}^{c_3} [T_i(r) - T_4(r)]w(r)dr + \int_{c_3}^{c_4} [T_i(r) - T_3(r)]w(r)dr \right\}
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
L_1(i, NIDR) &= 2 \left\{ \int_0^{c_1} [v_1(r) - T_i(r)] w(r) dr + \int_{c_1}^{c_2} [v_2(r) - T_i(r)] w(r) dr \right. \\
&\quad + \int_{c_2}^{c_3} [v_3(r) - T_i(r)] w(r) dr + \int_{c_3}^{c_4} [v_4(r) - T_i(r)] w(r) dr \\
&\quad + \int_{c_4}^{c_5} [v_5(r) - T_i(r)] w(r) dr + \int_{c_5}^{c_6} [v_6(r) - T_i(r)] w(r) dr \\
&\quad + \int_{c_6}^{c_7} [v_7(r) - T_i(r)] w(r) dr + \int_{c_7}^{c_8} [v_8(r) - T_i(r)] w(r) dr \\
&\quad \left. + \int_{c_8}^{c_9} [v_9(r) - T_i(r)] w(r) dr + \int_{c_9}^{c_{10}} [v_{10}(r) - T_i(r)] w(r) dr \right\} \\
&= 2 \left\{ \int_0^{c_4} [T_1(r) - T_i(r)] w(r) dr + \int_{c_4}^1 [T_5(r) - T_i(r)] w(r) dr \right\}
\end{aligned}$$

โดยที่ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักในแต่ละแบบ ($w(r)$) คำนวณจากสมการที่ 14 – 16
 ระยะทางที่ได้นำไปใช้หาดัชนีโดยรวมตามสมการที่ 21 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในตารางที่ 19 – 21

1.1.2 การวิเคราะห์ข้อมูลภายใต้ L_2 -norm

จากตัวประมาณค่าทั้งหมด 5 ตัว หาระยะทางจาก $T_i(r)$ ไปยัง IDR และ $NIDR$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ โดยใช้ L_2 -norm จากสมการที่ 19 และ 20 จะได้

$$\begin{aligned}
L_2(i, IDR) &= \left[2 \left\{ \int_0^{c_1} [T_i(r) - u_1(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_1}^{c_2} [T_i(r) - u_2(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right. \right. \\
&\quad + \int_{c_2}^{c_3} [T_i(r) - u_3(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_3}^{c_4} [T_i(r) - u_4(r)]^2 [w(r)]^2 dr \\
&\quad + \int_{c_4}^{c_5} [T_i(r) - u_5(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_5}^{c_6} [T_i(r) - u_6(r)]^2 [w(r)]^2 dr \\
&\quad + \int_{c_6}^{c_7} [T_i(r) - u_7(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_7}^{c_8} [T_i(r) - u_8(r)]^2 [w(r)]^2 dr \\
&\quad \left. + \int_{c_8}^{c_9} [T_i(r) - u_9(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_9}^{c_{10}} [T_i(r) - u_{10}(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right\} \right]^{1/2} \\
&= \left[2 \left\{ \int_0^{c_1} [T_i(r) - T_5(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_1}^{c_5} [T_i(r) - T_2(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{c_5}^{c_8} [T_i(r) - T_4(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_8}^1 [T_i(r) - T_3(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right\} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(i, NIDR) &= \left[2 \left\{ \int_0^{c_1} [v_1(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_1}^{c_2} [v_2(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right. \right. \\
&\quad + \int_{c_2}^{c_3} [v_3(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_3}^{c_4} [v_4(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr \\
&\quad + \int_{c_4}^{c_5} [v_5(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_5}^{c_6} [v_6(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr \\
&\quad + \int_{c_6}^{c_7} [v_7(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_7}^{c_8} [v_8(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr \\
&\quad \left. \left. + \int_{c_8}^{c_9} [v_9(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_9}^{c_{10}} [v_{10}(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right\} \right]^{1/2} \\
&= \left[2 \left\{ \int_0^{c_4} [T_1(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr + \int_{c_4}^1 [T_5(r) - T_i(r)]^2 [w(r)]^2 dr \right\} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

โดยที่ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักในแต่ละแบบ ($w(r)$) คำนวณจากสมการที่ 14 – 16
 ระยะทางที่ได้นำไปใช้หาดัชนีโดยรวมตามสมการที่ 22 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในตารางที่ 19 – 21

ตารางที่ 19 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ ภายใต L_1 และ L_2 -norm เมื่อใช้ w_1

n	$\hat{\theta}$	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.0651	0.1470	0.3070	4	0.0620	0.1700	0.2672	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.0483	0.1638	0.2278	2	0.0479	0.1377	0.2582	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.0518	0.1604	0.2441	3	0.0527	0.1728	0.2337	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.0325	0.1797	0.1531	1	0.0343	0.1709	0.1671	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.1599	0.0523	0.7537	5	0.1742	0.0595	0.7453	5
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.0336	0.0682	0.3301	4	0.0324	0.0800	0.2886	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.0265	0.0753	0.2604	2	0.0258	0.0625	0.2922	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.0277	0.0741	0.2720	3	0.0283	0.0812	0.2587	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.0189	0.0830	0.1851	1	0.0203	0.0807	0.2006	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.0736	0.0282	0.7230	5	0.0818	0.0316	0.7215	5

จากตารางที่ 19 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้ w_1 ภายใต L_1 และ L_2 -norm ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ และแย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(2)}$

ตารางที่ 20 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ ภายใต L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_2

n	$\hat{\theta}$	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.0341	0.1130	0.2320	3	0.0434	0.1582	0.2152	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.0386	0.1086	0.2621	4	0.0458	0.1196	0.2767	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.0283	0.1188	0.1925	2	0.0379	0.1594	0.1923	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.0221	0.1251	0.1499	1	0.0267	0.1539	0.1480	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.1156	0.0315	0.7857	5	0.1594	0.0433	0.7864	5
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.0153	0.0614	0.1993	3	0.0189	0.0893	0.1746	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.0228	0.0539	0.2969	4	0.0287	0.0632	0.3120	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.0129	0.0637	0.1689	2	0.0169	0.0899	0.1580	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.0108	0.0659	0.1406	1	0.0129	0.0872	0.1286	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.0625	0.0142	0.8153	5	0.0899	0.0189	0.8266	5

จากตารางที่ 20 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้ w_2 ภายใต L_1 และ L_2 - norm ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

ตารางที่ 21 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ ภายใต L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_3

n	$\hat{\theta}$	$L_1(IDR)$	$L_1(NIDR)$	$L_1(index)$	อันดับ	$L_2(IDR)$	$L_2(NIDR)$	$L_2(index)$	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.0257	0.0813	0.2405	3	0.0283	0.1046	0.2128	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.0267	0.0803	0.2498	4	0.0297	0.0799	0.2709	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.0209	0.0862	0.1951	2	0.0245	0.1056	0.1886	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.0152	0.0919	0.1416	1	0.0170	0.1024	0.1421	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.0846	0.0225	0.7901	5	0.1058	0.0280	0.7904	5
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.0094	0.0297	0.2398	3	0.0103	0.0394	0.2079	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.0112	0.0280	0.2850	4	0.0126	0.0285	0.3065	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.0079	0.0313	0.2007	2	0.0092	0.0397	0.1877	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.0060	0.0331	0.1541	1	0.0068	0.0388	0.1502	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.0307	0.0084	0.7855	5	0.0398	0.0103	0.7946	5

จากตารางที่ 21 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้ w_3 ภายใต L_1 และ L_2 -norm ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

สรุปการจัดอันดับโดยภาพรวมเมื่อใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ โดยใช้ค่าเฉลี่ยของ คำนีบรรทัดฐาน ได้ผลการคำนวณและการจัดอันดับดังในตารางที่ 22

ตารางที่ 22 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี TOPSIS

n	$\hat{\theta}$	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1		w_2		w_3			
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.3438	0.3033	0.2595	0.2405	0.2684	0.2381	0.2756	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.2551	0.2931	0.2932	0.3094	0.2788	0.3030	0.2888	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.2734	0.2652	0.2154	0.2150	0.2178	0.2109	0.2329	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.1715	0.1897	0.1677	0.1654	0.1580	0.1590	0.1686	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.8441	0.8460	0.8788	0.8791	0.8819	0.8842	0.8690	5
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	0.3673	0.3234	0.2173	0.1891	0.2649	0.2287	0.2651	3
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.2897	0.3275	0.3238	0.3379	0.3147	0.3372	0.3218	4
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.3026	0.2899	0.1842	0.1711	0.2217	0.2065	0.2293	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.2060	0.2247	0.1533	0.1393	0.1702	0.1652	0.1765	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	0.8045	0.8085	0.8891	0.8952	0.8676	0.8741	0.8565	5

จากตารางที่ 22 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ เมื่อ $n = 10, 15$ ตัวประมาณค่าของ θ ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้พบว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้วเราสามารถจัดอันดับ ตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 ได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี

ทฤษฎีบทที่ 1 เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิด

สองพารามิเตอร์ ได้แก่ ตัวประมาณค่าแบบภาวะความน่าจะเป็นสูงสุด ($\hat{\theta}_{MLE} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{(1)}) / n$)

และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\theta}_{(p)} = \theta_0 + \alpha(p) \cdot (\hat{\theta}_{UE} - \theta_0)$) เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ช่วง $-1 < r < 1$

โดยใช้วิธี TOPSIS ภายได้ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม

$n \geq 4$ แล้ว ตัวประมาณค่าของ θ ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$

ตามลำดับ

พิสูจน์ กำหนดให้ T_1 แทน $MSE(\hat{\theta}_{MLE})$ และ T_2, T_3, T_4, T_5 แทน $MSE(\hat{\theta}_{(p)})$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$

ตามลำดับ $T_i(r)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ หาได้จากสมการที่ 50 และ 51

การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยวิธี TOPSIS ภายได้ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 (Lerprapai et al., 2004, p.144) ตัวประมาณค่าที่ i จะดีกว่า ตัวประมาณค่าที่ j ถ้า

$$\int_{-1}^1 T_i(r) dr < \int_{-1}^1 T_j(r) dr$$

นั่นคือ ในที่นี้จะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว

$$\int_{-1}^1 T_4(r) dr < \int_{-1}^1 T_2(r) dr < \int_{-1}^1 T_3(r) dr < \int_{-1}^1 T_1(r) dr < \int_{-1}^1 T_5(r) dr$$

สำหรับการพิสูจน์จะทำการเปรียบเทียบทีละคู่ ดังนี้

$$1.1) \int_{-1}^1 T_4(r) dr < \int_{-1}^1 T_2(r) dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 [(1-\alpha(1))^2 r^2 + (\alpha(1))^2 / (n-1)] dr < \int_{-1}^1 [(1-\alpha(-2))^2 r^2 + (\alpha(-2))^2 / (n-1)] dr$$

$$(2/3)(3n^2 - 14n + 23)/(n-1)^3 < (2/3)(3n^2 + 10n - 1)/(n+2)/(n+1)^2$$

$$\text{จัดรูปอสมการใหม่ได้ } 3n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 100n - 45 > 0$$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 4$ ดังนี้

$$\text{ให้ } p(n) : 3n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 100n - 45 > 0$$

(1) เนื่องจาก $3(4)^4 - 4(4)^3 + 2(4)^2 - 100(4) - 45 = 99 > 0$ จะได้ $p(4)$ เป็นจริง

(2) ให้ n แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geq 4$ ถ้า $p(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$3n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 100n - 45 > 0$$

พิจารณา $p(n+1)$:

$$\begin{aligned} 3(n+1)^4 - 4(n+1)^3 + 2(n+1)^2 - 100(n+1) - 45 &= 3n^4 + 8n^3 + 8n^2 - 96n - 144 \\ &= (3n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 100n - 45) + 12n^3 + 6n^2 + 4n - 99 \end{aligned}$$

$$\text{แต่ } 3n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 100n - 45 > 0$$

$$\text{และเมื่อ } n \geq 4 \text{ ทำให้ } 12n^3 + 6n^2 + 4n - 99 \geq 12(4)^3 + 6(4)^2 + 4(4) - 99 = 789 > 0$$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_4(r) dr &< \int_{-1}^1 T_2(r) dr \\ 1.2) \int_{-1}^1 T_2(r) dr &< \int_{-1}^1 T_3(r) dr \text{ ก็ต่อเมื่อ} \\ \int_{-1}^1 [(1-\alpha(-2))^2 r^2 + (\alpha(-2))^2 / (n-1)] dr &< \int_{-1}^1 [(1-\alpha(-1))^2 r^2 + (\alpha(-1))^2 / (n-1)] dr \\ (2/3)(3n^2 + 10n - 1) / (n+2) / (n+1)^2 &< (2/3)(3n-2) / n^2 \end{aligned}$$

$$\text{จัดรูปอสมการใหม่ได้ } 8n^2 - 4n - 4 > 0$$

$$4(2n+1)(n-1) > 0$$

$$\text{เห็นได้ชัดว่า เมื่อ } n \geq 4 \text{ ทำให้ } (n-1) > 0$$

$$\text{นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม } n \geq 4 \text{ แล้ว } \int_{-1}^1 T_2(r) dr < \int_{-1}^1 T_3(r) dr$$

$$1.3) \int_{-1}^1 T_3(r) dr < \int_{-1}^1 T_1(r) dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 [(1-\alpha(-1))^2 r^2 + (\alpha(-1))^2 / (n-1)] dr < \int_{-1}^1 (1/n) dr$$

$$(2/3)(3n-2) / n^2 < 2/n$$

$$2 > 0$$

เป็นจริง

$$\text{นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม } n \geq 4 \text{ แล้ว } \int_{-1}^1 T_3(r) dr < \int_{-1}^1 T_1(r) dr$$

$$1.4) \int_{-1}^1 T_1(r) dr < \int_{-1}^1 T_5(r) dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 (1/n) dr < \int_{-1}^1 [(1-\alpha(2))^2 r^2 + (\alpha(2))^2 / (n-1)] dr$$

$$2/n < (2/3)(3n^4 - 5n^3 + 48n^2 - 453n + 839) / (n-1)^5$$

$$\text{จัดรูปอสมการใหม่ได้ } 10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3 > 0$$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 4$ ดังนี้

$$\text{ให้ } p(n) : 10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3 > 0$$

(1) เนื่องจาก $10(4)^4 + 18(4)^3 - 423(4)^2 + 824(4) + 3 = 243 > 0$ จะได้ $p(4)$ เป็นจริง

(2) ให้ n แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geq 4$ ถ้า $p(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3 > 0$$

พิจารณา $p(n+1)$:

$$10(n+1)^4 + 18(n+1)^3 - 423(n+1)^2 + 824(n+1) + 3 = 10n^4 + 58n^3 - 309n^2 + 72n + 432$$

$$= (10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3) + 40n^3 + 114n^2 - 752n + 429$$

$$= (10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3) + 2n(20n^2 + 57n - 376) + 429$$

แต่ $(10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3) > 0$ และเมื่อ $n \geq 4$ จะได้

$$20n^2 + 57n - 376 \geq 20(4)^2 + 57(4) - 376 > 0$$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว

$$\int_{-1}^1 T_1(r) dr < \int_{-1}^1 T_5(r) dr$$

สรุป สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว ตัวประมาณค่า θ ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

1.2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี ELECTRE

หลังจากปรับปรุงวิธี ELECTRE สำหรับข้อมูลที่มีตัวชี้วัดเป็นลักษณะต่อเนื่อง ผู้วิจัยได้ใช้โปรแกรม Maple หาฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w^*(r)$ จากสมการที่ 37 - 39 แล้วนำไปใช้หาฟังก์ชันบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนัก ($v_i(r)$) ของแต่ละตัวประมาณค่าตามสมการที่ 40

จากนั้นหาเซตของความสอดคล้อง ($C(p,q)$) และความไม่สอดคล้อง ($D(p,q)$)

ตามสมการที่ 41 และ 42 ตามลำดับ ดังนั้นความสอดคล้อง (C_{pq}) และดัชนีความไม่สอดคล้อง (D_{pq})

จากสมการที่ 43 และ 44 ตามลำดับ โดยเราจะพิจารณาฟังก์ชันบรรทัดฐานถ่วงน้ำหนัก ($v_i(r)$)

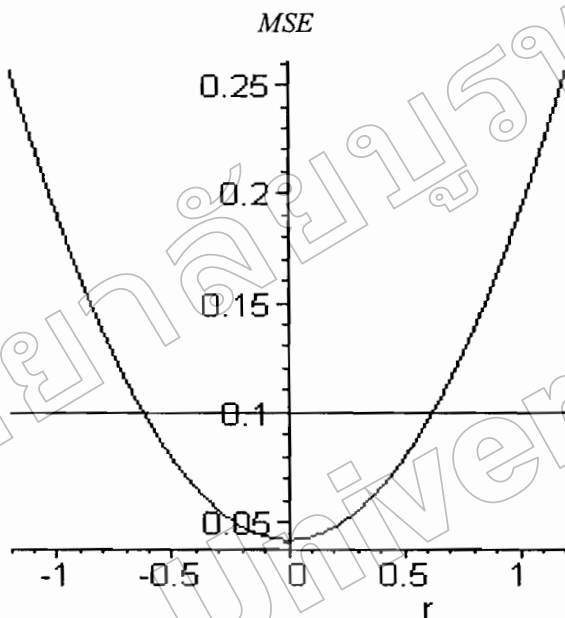
ของแต่ละตัวประมาณค่าที่จะรู้ กำหนดสัญลักษณ์ทั่วไปเป็น $v_p(r)$ และ $v_q(r)$ จะได้

$$\begin{aligned} C(p,q) &= \{r \in (-1,1) | v_p(r) \leq v_q(r)\} \\ &= \{r \in (-1,1) | T_p(r)w(r) \leq T_q(r)w(r)\} \\ &= \{r \in (-1,1) | T_p(r) \leq T_q(r)\} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$D(p,q) = \{r \in (-1,1) | T_p(r) > T_q(r)\}$$

ดังนั้น ถ้าพิจารณากรณีที่ $n = 10$ โดยใช้ตัวถ่วงน้ำหนัก w_1 เมื่อ $p = 1$ และ $q = 2$ จะได้กราฟของ $T_1(r)$ และ $T_2(r)$ ดังแสดงในภาพที่ 3



ภาพที่ 3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบฟังก์ชัน $T_1(r)$ และ $T_2(r)$

จากกราฟ จะได้

$$C(1,2) = \{r \in (-1,1) | T_1(r) \leq T_2(r)\} = (0, -0.6242) \cup (0.6242, 1)$$

$$D(1,2) = \{r \in (-1,1) | T_1(r) > T_2(r)\} = (-0.6242, 0.6242)$$

$$C_{12} = \int_{-0.6242}^0 w_1^*(r) dr + \int_{0.6242}^1 w_1^*(r) dr = 0.3758$$

$$D_{12} = \int_{-0.6242}^{0.6242} |v_1(r) - v_2(r)| dr / \int_{-1}^1 |v_1(r) - v_2(r)| dr = 0.6050$$

สำหรับกรณีอื่น ๆ คำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้เขียนในรูปเมตริกซ์ C

และ D แสดงในภาคผนวก ข

ค่าต่าง ๆ ในเมตริกซ์ C และ D นำไปหาดัชนีความสอดคล้องสุทธิ (C_p)
 ดัชนีความไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) และ ดัชนี ELECTRE (EI_p) ของแต่ละตัวประมาณค่าคำนวณตาม
 สมการที่ 34 – 36 ตามลำดับ ได้ผลการจัดอันดับโดยใช้วิธี ELECTRE ในแต่ละแบบของการถ่วงน้ำหนัก
 ดังแสดงในตารางที่ 23 – 25

ตารางที่ 23 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ โดยวิธี ELECTRE เมื่อใช้ w_1

n	$\hat{\theta}$	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	-1.8028	1.5806	-1.0916	5
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.7764	-0.7685	0.4915	2
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.4230	-0.7860	0.3570	3
	$\hat{\theta}_{(1)}$	1.3688	-2.5850	1.1654	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.7655	2.5589	-0.9222	4
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	-1.8566	1.6371	-1.1591	5
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.7187	-0.7094	0.4680	2
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.3498	-0.6822	0.3137	3
	$\hat{\theta}_{(1)}$	1.3622	-2.5397	1.1920	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.5741	2.2942	-0.8146	4

จากตารางที่ 23 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี ELECTRE
 กับ w_1 ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{(2)}$ และ $\hat{\theta}_{MLE}$ ตามลำดับ

ตารางที่ 24 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ โดยวิธี ELECTRE เมื่อใช้ w_2

n	$\hat{\theta}$	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	-1.0918	1.0093	-0.8605	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	-0.0880	-0.0618	-0.0331	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	1.0778	-1.3737	0.9452	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.7203	-2.2912	0.9799	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.6183	2.7174	-1.0316	5

ตารางที่ 24 (ต่อ)

n	$\hat{\theta}$	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	-0.7611	0.7408	-0.5402	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	-0.3870	0.3477	-0.2676	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	1.4182	-1.6251	1.0662	1
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.7870	-2.3192	0.9370	2
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-1.0571	2.8558	-1.1954	5

จากตารางที่ 24 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_2 กรณีที่ $n = 10$ ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ กรณีที่ $n = 15$ ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(1)}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

ตารางที่ 25 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ โดยวิธี ELECTRE เมื่อใช้ w_3

n	$\hat{\theta}$	C_p	D_p	EI_p	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	-1.2640	1.1336	-0.8913	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.1165	-0.1911	0.1035	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.9401	-1.2536	0.7638	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	1.0363	-2.4532	1.1053	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.8289	2.7642	-1.0812	5
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	-1.1826	1.0740	-0.8374	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	-0.0330	0.0046	-0.0171	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	1.0136	-1.2755	0.8061	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	1.0651	-2.4827	1.1315	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.8631	2.6795	-1.0832	5

จากตารางที่ 25 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี ELECTRE กับ w_3 ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

สรุปการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ โดยภาพรวม เมื่อใช้วิธี ELECTRE ทุกแบบ การถ่วงน้ำหนัก โดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน ได้ผลดังในตารางที่ 26

ตารางที่ 26 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี ELECTRE

n	$\hat{\theta}$	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1	w_2	w_3		
10	$\hat{\theta}_{MLE}$	-0.5623	-0.4498	-0.4585	-0.4902	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.2531	-0.0173	0.0532	0.0964	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.1839	0.4941	0.3929	0.3570	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.6003	0.5123	0.5686	0.5604	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.4750	-0.5393	-0.5562	-0.5235	5
15	$\hat{\theta}_{MLE}$	-0.5989	-0.2769	-0.4293	-0.4350	4
	$\hat{\theta}_{(-2)}$	0.2418	-0.1372	-0.0087	0.0320	3
	$\hat{\theta}_{(-1)}$	0.1621	0.5464	0.4132	0.3739	2
	$\hat{\theta}_{(1)}$	0.6159	0.4802	0.5801	0.5587	1
	$\hat{\theta}_{(2)}$	-0.4209	-0.6126	-0.5553	-0.5296	5

จากตารางที่ 26 จะเห็นว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้วิธี ELECTRE ทั้งสามแบบ ตัวประมาณค่า θ ที่ดีที่สุด คือ $\hat{\theta}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{(-1)}$, $\hat{\theta}_{(-2)}$, $\hat{\theta}_{MLE}$ และ $\hat{\theta}_{(2)}$ ตามลำดับ

2. การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ μ

ตัวประมาณค่าของ μ ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบเพื่อหาตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด ได้แก่ ตัวประมาณค่าที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ($\hat{\mu}_{MSE} = x_{(1)} + (n-1)(\bar{x} - x_{(1)})/n$) และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\mu}_{(p)} = X_{(1)} + (n-1)\hat{\theta}_{(p)}/n$) เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$

ตัวประมาณค่า 5 ตัวดังกล่าว ถูกเปรียบเทียบโดยใช้ค่า $MSEs$ ซึ่งคำนวณตามสมการต่อไปนี้

$$MSE(\hat{\mu}_{MMSE}) = \theta^2 / n^2 + (n-1)^2 \theta^2 / n^3 \quad (52)$$

$$MSE(\hat{\mu}_{(p)}) = (\theta^2 / n^2) \{1 + (n-1)^2 [(1-\alpha(p))^2 r^2 + (\alpha(p))^2 / (n-1)]\} \quad (53)$$

เมื่อ $\alpha(p) = \Gamma(n-1-p) / \Gamma(n-1-2p) \cdot (n-1)^p$ และ $r = (\theta_0 / \theta) - 1$

จากสมการที่ 52 และ 53 จะเห็นได้ว่า มี θ^2 / n^2 เป็นพจน์ร่วมเราสามารถตัดออกได้เป็น

$$MSE(\hat{\mu}_{MMSE}) = (n^2 - n + 1) / n \quad (54)$$

$$MSE(\hat{\mu}_{(p)}) = 1 + (n-1)^2 [(1-\alpha(p))^2 r^2 + (\alpha(p))^2 / (n-1)] \quad (55)$$

จากสมการที่ 54 – 55 เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง $n = 10, 15$ จะได้ฟังก์ชันที่ขึ้นกับค่า r ซึ่งมีค่าต่อเนื่อง เราจะพิจารณาช่วง $-1 < r < 1$ นั่นคือ $0 < \theta_0 / \theta < 2$ และเพื่อให้สะดวกในการเขียนสูตรต่าง ๆ จึงกำหนดสัญลักษณ์ M_1 แทน MSE ของ $\hat{\mu}_{MMSE}$ และ M_2, M_3, M_4 และ M_5 แทน $MSEs$ ของ $\hat{\mu}_{(p)}$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ ซึ่งจะได้ค่า $MSEs$ ของแต่ละตัวประมาณค่า ดังต่อไปนี้

กรณีที่ $n = 10$

$$M_1(r) = 91/10$$

$$M_2(r) = (23409/1936)r^2 + 8497/1936$$

$$M_3(r) = (81/100)r^2 + 829/100$$

$$M_4(r) = 4r^2 + 58/9$$

$$M_5(r) = (289/9)r^2 + 181/81$$

แสดงกราฟได้ตามภาพที่ 4

กรณีที่ $n = 15$

$$M_1(r) = 211/15$$

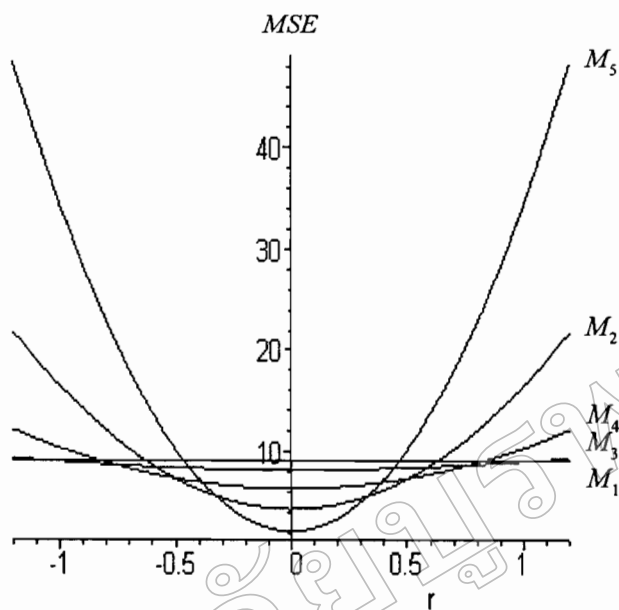
$$M_2(r) = (17689/1156)r^2 + 19119/2312$$

$$M_3(r) = (196/225)r^2 + 2969/225$$

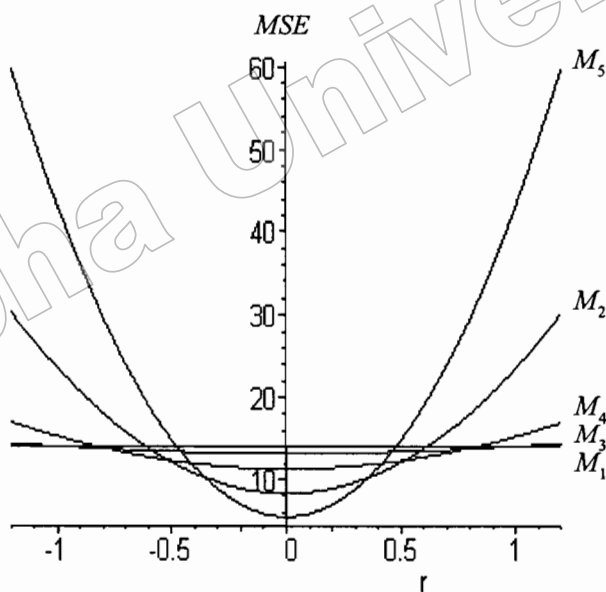
$$M_4(r) = 4r^2 + 79/7$$

$$M_5(r) = (1849/49)r^2 + 3711/686$$

แสดงกราฟได้ตามภาพที่ 5



ภาพที่ 4 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ μ เมื่อ $n = 10$



ภาพที่ 5 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ μ เมื่อ $n = 15$

2.1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี TOPSIS

ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลในทำนองเดียวกับการเปรียบตัวประมาณค่าของ θ ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ μ ภายใต L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_1, w_2 และ w_3 แสดงในตารางที่ 57 – 59

สรุปการจัดอันดับโดยภาพรวมเมื่อใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ โดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน ได้ผลการคำนวณและการจัดอันดับดังตารางที่ 27

ตารางที่ 27 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ μ โดยใช้วิธี TOPSIS

n	$\hat{\mu}$	ดัชนีบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1		w_2		w_3			
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
10	$\hat{\mu}_{MMSE}$	0.3438	0.3033	0.2157	0.1937	0.2501	0.2185	0.2542	3
	$\hat{\mu}_{(-2)}$	0.2551	0.2931	0.2885	0.3040	0.2776	0.3012	0.2866	4
	$\hat{\mu}_{(-1)}$	0.2734	0.2652	0.1772	0.1721	0.2020	0.1930	0.2138	2
	$\hat{\mu}_{(1)}$	0.1715	0.1897	0.1434	0.1338	0.1484	0.1458	0.1554	1
	$\hat{\mu}_{(2)}$	0.8441	0.8460	0.9046	0.9069	0.8931	0.8961	0.8818	5
15	$\hat{\mu}_{MMSE}$	0.3673	0.3234	0.1993	0.1709	0.2562	0.2197	0.2561	3
	$\hat{\mu}_{(-2)}$	0.2897	0.3275	0.3218	0.3354	0.3142	0.3364	0.3208	4
	$\hat{\mu}_{(-1)}$	0.3026	0.2899	0.1681	0.1543	0.2140	0.1981	0.2212	2
	$\hat{\mu}_{(1)}$	0.2060	0.2247	0.1421	0.1261	0.1650	0.1585	0.1704	1
	$\hat{\mu}_{(2)}$	0.8045	0.8085	0.8990	0.9048	0.8733	0.8799	0.8617	5

จากตารางที่ 27 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ μ โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\mu}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\mu}_{(-1)}$, $\hat{\mu}_{MMSE}$, $\hat{\mu}_{(-2)}$ และ $\hat{\mu}_{(2)}$ ตามลำดับ

นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้พบว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้วเราสามารถจัดอันดับตัวประมาณค่าของ μ โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต L_1 - norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 ได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ μ ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ ได้แก่ ตัวประมาณค่าที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

$(\hat{\mu}_{MMSE} = x_{(1)} + (n-1)(\bar{x} - x_{(1)})/n)$ และตัวประมาณค่าแบบย่อ $(\hat{\mu}_{(p)} = x_{(1)} + (n-1)\hat{\theta}_{(p)}/n)$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต้ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว ตัวประมาณค่าของ μ ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\mu}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\mu}_{(-2)}, \hat{\mu}_{(-1)}, \hat{\mu}_{MMSE}$ และ $\hat{\mu}_{(2)}$ ตามลำดับ

พิสูจน์ กำหนดให้ M_1 แทน $MSE(\hat{\mu}_{MMSE})$ และ M_2, M_3, M_4, M_5 แทน $MSE(\hat{\theta}_{(p)})$

เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ $M_i(r), i = 1, 2, 3, 4, 5$ หาได้จากสมการที่ 54 และ 55

เช่นเดียวกับทฤษฎีบทที่ 1 จะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว

$$\int_{-1}^1 M_4(r) dr < \int_{-1}^1 M_2(r) dr < \int_{-1}^1 M_3(r) dr < \int_{-1}^1 M_1(r) dr < \int_{-1}^1 M_5(r) dr$$

$$2.1) \int_{-1}^1 M_4(r) dr < \int_{-1}^1 M_2(r) dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 \{1 + (n-1)^2 [(1 - \alpha(1))^2 r^2 + (\alpha(1))^2 / (n-1)]\} dr < \int_{-1}^1 \{1 + (n-1)^2 [(1 - \alpha(-2))^2 r^2 + (\alpha(-2))^2 / (n-1)]\} dr$$

$$(2/3)(3n^2 - 11n + 20)/(n-1) < (2/3)(3n^4 + 7n^3 - 6n^2 + 27n + 5)/[(n+2)(n+1)^2]$$

$$\text{จัดรูปอสมการใหม่ได้ } 3n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 100n - 45 > 0$$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ

จำนวนเต็มบวก $n \geq 4$ เช่นเดียวกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 1

$$2.2) \int_{-1}^1 M_2(r) dr < \int_{-1}^1 M_3(r) dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 \{1 + (n-1)^2 [(1 - \alpha(-2))^2 r^2 + (\alpha(-2))^2 / (n-1)]\} dr$$

$$< \int_{-1}^1 \{1 + (n-1)^2 [(1 - \alpha(-1))^2 r^2 + (\alpha(-1))^2 / (n-1)]\} dr$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$(2/3)(3n^4 + 7n^3 - 6n^2 + 27n + 5)/[(n+2)(n+1)^2] < (2/3)(3n^3 - 5n^2 + 7n - 2)/n^2$$

$$\text{จัดรูปอสมการใหม่ได้ } 8n^4 - 20n^3 + 12n^2 + 4n - 4 > 0$$

$$2n^4 - 5n^3 + 3n^2 + n - 1 > 0$$

$$n^3(2n-5) + 3n^2 + (n-1) > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 4$ ทำให้ $2n-5 > 0$ และ $n-1 > 0$ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว $\int_{-1}^1 M_2(r)dr < \int_{-1}^1 M_3(r)dr$

$$2.3) \int_{-1}^1 M_3(r)dr < \int_{-1}^1 M_1(r)dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 \{1 + (n-1)^2 [(1 - \alpha(-1))^2 r^2 + (\alpha(-1))^2 / (n-1)]\} dr < \int_{-1}^1 [(n^2 - n + 1)/n] dr$$

$$(2/3)(3n^3 - 5n^2 + 7n - 2)/n^2 < (2/n)(n^2 - n + 1)$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้ $n^2 - 2n + 1 > 0$

$$(n-1)(n-1) > 0$$

เห็นได้ชัดว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n > 1$

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว $\int_{-1}^1 M_3(r)dr < \int_{-1}^1 M_1(r)dr$

$$2.4) \int_{-1}^1 M_1(r)dr < \int_{-1}^1 M_5(r)dr \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_{-1}^1 [(n^2 - n + 1)/n] dr < \int_{-1}^1 \{1 + (n-1)^2 [(1 - \alpha(2))^2 r^2 + (\alpha(2))^2 / (n-1)]\} dr$$

$$(2/n)(n^2 - n + 1) < (2/3)(3n^4 - 2n^3 + 39n^2 - 444n + 836)/(n-1)^3$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้ $10n^4 + 18n^3 - 423n^2 + 824n + 3 > 0$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 4$ เช่นเดียวกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 1

สรุป สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 4$ แล้ว ตัวประมาณค่าของ μ ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\mu}_{(1)}$

รองลงมาคือ $\hat{\mu}_{(-2)}$, $\hat{\mu}_{(-1)}$, $\hat{\mu}_{MMSE}$ และ $\hat{\mu}_{(2)}$ ตามลำดับ

2.2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี ELECTRE

ในทำนองเดียวกับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ เราสามารถเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ μ โดยวิธี ELECTRE ได้ดัชนีความสอดคล้อง (C_{pq}) และไม่สอดคล้อง (D_{pq}) แสดงผลลัพธ์ในรูปเมตริกซ์ C และ D ในภาคผนวก ข

ค่าต่าง ๆ ในเมตริกซ์ C และ D นำไปหาดัชนีความสอดคล้องสุทธิ (C_p) ดัชนีความไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) และ ดัชนี ELECTRE (EI_p) ได้ผลการจัดอันดับโดยใช้วิธี ELECTRE ในแต่ละแบบของการถ่วงน้ำหนัก ดังแสดงในตารางที่ 60 – 62

สรุปการจัดอันดับโดยภาพรวม เมื่อใช้วิธี ELECTRE ทุกแบบการถ่วงน้ำหนัก โดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน ได้ผลดังในตารางที่ 28

ตารางที่ 28 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ μ โดยใช้วิธี ELECTRE

n	$\hat{\mu}$	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1	w_2	w_3		
10	$\hat{\mu}_{MMSE}$	-0.5623	-0.2957	-0.4069	-0.4216	4
	$\hat{\mu}_{(-2)}$	0.2531	-0.0987	0.0184	0.0576	3
	$\hat{\mu}_{(-1)}$	0.1839	0.5445	0.4205	0.3830	2
	$\hat{\mu}_{(1)}$	0.6003	0.4704	0.5570	0.5426	1
	$\hat{\mu}_{(2)}$	-0.4750	-0.6205	-0.5891	-0.5615	5
15	$\hat{\mu}_{MMSE}$	-0.5989	-0.2191	-0.4044	-0.4075	4
	$\hat{\mu}_{(-2)}$	0.2418	-0.1628	-0.0243	0.0182	3
	$\hat{\mu}_{(-1)}$	0.1621	0.5579	0.4254	0.3818	2
	$\hat{\mu}_{(1)}$	0.6159	0.4592	0.5739	0.5497	1
	$\hat{\mu}_{(2)}$	-0.4209	-0.6351	-0.5706	-0.5422	5

จากตารางที่ 28 จะเห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ μ โดยวิธี ELECTRE ทั้งสามแบบ ตัวประมาณค่าของ μ ที่ดีที่สุด คือ $\hat{\mu}_{(1)}$ รองลงมาคือ $\hat{\mu}_{(-1)}$, $\hat{\mu}_{(-2)}$, $\hat{\mu}_{MMSE}$ และ $\hat{\mu}_{(2)}$ ตามลำดับ

การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ และสองพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี TOPSIS แบบที่ 2 และ วิธี ELECTRE ให้น้ำหนักตัวชี้วัด 3 แบบ คือ แบบเท่ากันทุกตัวชี้วัด แบบใช้เอนโทรปี และแบบใช้สัมประสิทธิ์การแปรผัน พิจารณากรณีที่ $n = 10, 15, 20, 25$ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรม Maple

1. การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์

ตัวประมาณค่าของ θ^2 ที่ใช้ในการเปรียบเทียบเพื่อหาตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด ได้แก่ ตัวประมาณค่าที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ($\hat{\theta}_{1MMSE}^2$) และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\theta}_{(p)}^2$ และ $\hat{\theta}_r^2$) โดยที่

$$\hat{\theta}_{1MMSE}^2 = n^2 \bar{X}^2 / [(n+2)(n+3)]$$

$$\hat{\theta}_{1(p)}^2 = \theta_0^2 + \alpha(p)(\bar{x}^2 - \theta_0^2)$$

เมื่อ θ_0 แทนค่าของพารามิเตอร์ที่ทราบเบื้องต้น $\alpha(p) = n^{2p} \Gamma(n+2p) / \Gamma(n+4p)$

พิจารณาที่ $p = -2, -1, 1, 2$

และ
$$\hat{\theta}_s^2 = \theta_0^2 + \{[n(n-1)]/[n^2 + 7n - 6]\}(s^2 - \theta_0^2)$$

ตัวประมาณค่า 6 ตัว ดังกล่าวถูกเปรียบเทียบโดยใช้ค่า $MSEs$ ซึ่งคำนวณค่าตามสมการต่อไปนี้

$$MSE(\hat{\theta}_{1MMSE}^2) = 2(2n+3)\theta^4 / [(n+2)(n+3)] \quad (56)$$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_{1(p)}^2) = & \theta^4 \{ \lambda^2 (1 - \alpha(p))^2 \\ & - 2\lambda[1 + (n+1)\alpha(p)^2 / n - (2n+1)\alpha(p) / n] \\ & + 1 - 2(n+1)\alpha(p) / n + (n+1)(n+2)(n+3)\alpha(p)^2 / n^3 \} \end{aligned} \quad (57)$$

เมื่อ $\alpha(p) = n^{2p} \Gamma(n+2p) / \Gamma(n+4p)$ และ $\lambda = \theta_0^2 / \theta^2$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_s^2) = & (8n-6)\theta^4 / (n^2 + 7n - 6) \\ & + \lambda(\lambda-2)(8n-6)^2 \theta^4 / (n^2 + 7n - 6)^2 \end{aligned} \quad (58)$$

จากสมการที่ 56 – 58 จะเห็นได้ว่า มี θ^4 เป็นพจน์ร่วมเราสามารถตัดออกได้เป็น

$$MSE(\hat{\theta}_{1MMSE}^2) = 2(2n+3) / [(n+2)(n+3)] \quad (59)$$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_{1(p)}^2) = & \{ \lambda^2 (1 - \alpha(p))^2 \\ & - 2\lambda[1 + (n+1)\alpha(p)^2 / n - (2n+1)\alpha(p) / n] \\ & + 1 - 2(n+1)\alpha(p) / n + (n+1)(n+2)(n+3)\alpha(p)^2 / n^3 \} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_s^2) = & (8n-6) / (n^2 + 7n - 6) \\ & + \lambda(\lambda-2)(8n-6)^2 / (n^2 + 7n - 6)^2 \end{aligned} \quad (61)$$

จากสมการที่ 59 – 61 เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง $n = 10, 15, 20, 25$ จะได้ฟังก์ชันที่ขึ้นกับค่า λ ซึ่งมีค่าต่อเนื่อง เราจะพิจารณาช่วง $0 < \lambda < 2$ นั่นคือ $0 < \theta_0^2 / \theta^2 < 2$ และเพื่อให้สะดวก

ในการเขียนสูตรต่าง ๆ จึงกำหนดสัญลักษณ์ T_1 แทน MSE ของ $\hat{\theta}_{1MMSE}^2$ กำหนด T_2, T_3, T_4, T_5

แทน $MSEs$ ของ $\hat{\theta}_{1(p)}^2$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ T_6 แทน $MSEs$ ของ $\hat{\theta}_s^2$ และกำหนด l

แทน λ ซึ่งจะได้ค่า $MSEs$ ของแต่ละตัวประมาณค่า ดังต่อไปนี้

กรณีที่ $n = 10$

$$T_1(l) = 23 / 78$$

$$T_2(l) = (61009 / 62500)l^2 - (609349 / 312500)l + 15216361 / 15625000$$

$$T_3(l) = (841 / 2500)l^2 - (7801 / 12500)l + 236689 / 625000$$

$$T_4(l) = (196/1521)l^2 - (322/1521)l + 23/78$$

$$T_5(l) = (346921/509796)l^2 - (679117/509796)l + 75613/113288$$

$$T_6(l) = (1369/6724)l^2 - (1369/3362)l + 37/82$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 6

กรณีที่ $n = 15$

$$T_1(l) = 11/51$$

$$T_2(l) = (1026169/1265625)l^2 - (30558158/18984375)l + 380633311/474609375$$

$$T_3(l) = (961/5625)l^2 - (26102/84375)l + 522559/2109375$$

$$T_4(l) = (81/1156)l^2 - (33/289)l + 11/51$$

$$T_5(l) = (69372241/136983616)l^2 - (8437277/8561476)l + 2163713/4280738$$

$$T_6(l) = (361/2916)l^2 - (361/1458)l + 19/54$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 7

กรณีที่ $n = 20$

$$T_1(l) = 43/253$$

$$T_2(l) = (10118761/16000000)l^2 - (199769981/160000000)l + 40045353193/64000000000$$

$$T_3(l) = (64/625)l^2 - (572/3125)l + 465457/2500000$$

$$T_4(l) = (2809/64009)l^2 - (4558/64009)l + 43/253$$

$$T_5(l) = (426409/1108809)l^2 - (275566/369603)l + 145603/369603$$

$$T_6(l) = (5929/71289)l^2 - (11858/71289)l + 77/267$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 8

กรณีที่ $n = 25$

$$T_1(l) = 53/378$$

$$T_2(l) = (3010607161/6103515625)l^2 - (147978291122/152587890625)l + 46949775372241/95367431640625$$

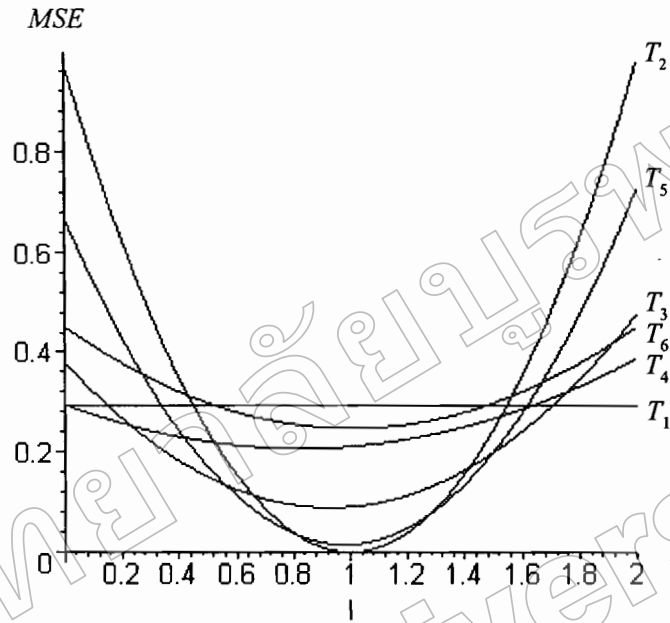
$$T_3(l) = (26569/390625)l^2 - (1177838/97656252)l + 914595889/6103515625$$

$$T_4(l) = (17161/571536)l^2 - (6943/142884)l + 53/378$$

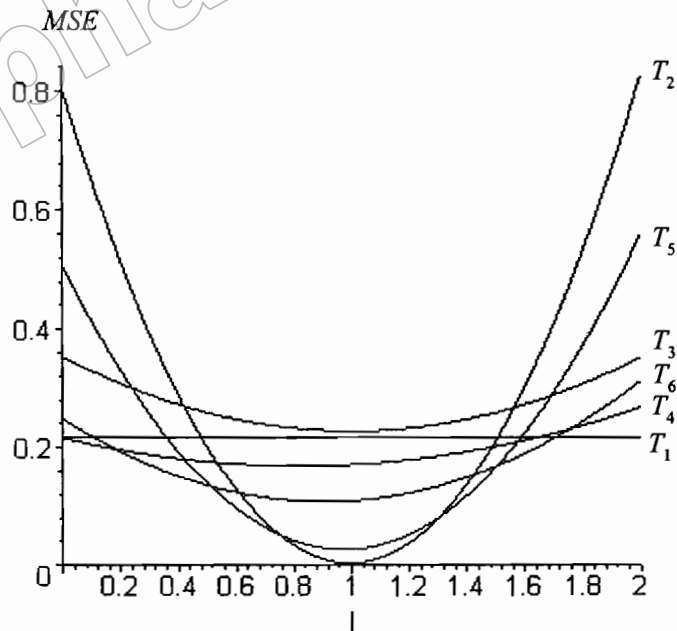
$$T_5(l) = (8927037289/29793521664)l^2 - (4315888957/7448380416)l + 392618611/1241396736$$

$$T_6(l) = (9409/157609)l^2 - (18818/157609)l + 97/397$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 9



ภาพที่ 6 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ^2 เมื่อ $n = 10$



ภาพที่ 7 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ^2 เมื่อ $n = 15$

ตารางที่ 31 *NIDR* สำหรับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง
ชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ เมื่อ $n = 10$

n	$0 < l < n_1$	$n_1 < l < n_2$	$n_2 < l < n_3$	$n_3 < l < n_4$	$n_4 < l < 2$
	$v_1(l)$	$v_2(l)$	$v_3(l)$	$v_4(l)$	$v_4(l)$
10	$T_2(l)$	$T_6(l)$	$T_1(l)$	$T_6(l)$	$T_2(l)$

ตารางที่ 32 *NIDR* สำหรับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง
ชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ เมื่อ $n = 15, 20, 25$

n	$0 < l < n_1$	$n_1 < l < n_2$	$n_2 < l < 2$
	$v_1(l)$	$v_2(l)$	$v_3(l)$
15	$T_2(l)$	$T_6(l)$	$T_2(l)$
20	$T_2(l)$	$T_6(l)$	$T_2(l)$
25	$T_2(l)$	$T_6(l)$	$T_2(l)$

แต่ละตัวประมาณค่าที่ $i, i = 1, 2, \dots, 5$ คำนวณค่าดัชนีลดรูป ภายใต้อินทรีย์ L_1 และ L_2 - norm
จากสมการที่ 23 และ 24 ได้ผลลัพธ์แสดงในตารางที่ 33 – 35

ตารางที่ 33 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิด
หนึ่งพารามิเตอร์ ภายใต้อินทรีย์ L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_1

n	$\hat{\theta}^2$	L_1 - norm		L_2 - norm	
		ดัชนีลดรูป	อันดับ	ดัชนีลดรูป	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.5897	4	0.4877	4
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.6509	6	2.6135	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.4063	1	0.0534	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.5100	3	0.2343	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.4853	2	0.4770	3
	$\hat{\theta}_s^2$	0.6310	5	0.7728	5

ตารางที่ 33 (ต่อ)

n	$\hat{\theta}^2$	L_1 - norm		L_2 - norm	
		ดัชนีโครงสร้าง	อันดับ	ดัชนีโครงสร้าง	อันดับ
15	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.4314	4	0.2763	3
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.5468	6	3.4308	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.3323	1	0.0578	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.3899	2	0.1610	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.3904	3	0.4355	4
	$\hat{\theta}_s^2$	0.5386	5	0.8512	5
20	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.3399	4	0.2316	3
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.4408	5	2.7028	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.2794	1	0.0674	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.3145	2	0.1473	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.3222	3	0.3925	4
	$\hat{\theta}_s^2$	0.4659	6	1.1920	5
25	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.2804	4	0.2138	3
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.3604	5	2.1079	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.2399	1	0.0744	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2633	2	0.1428	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.2727	3	0.3621	4
	$\hat{\theta}_s^2$	0.4091	6	1.7483	5

จากตารางที่ 33 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้ w_1 ภายใต้ L_1 และ L_2 - norm ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ ที่แย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-2)}^2$ ยกเว้นกรณีที่ $n = 20, 25$ ภายใต้ L_1 norm ตัวประมาณค่าที่แย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_s^2$

ตารางที่ 34 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิด
หนึ่งพารามิเตอร์ ภายใต้อินทรีย์ L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_2

n	$\hat{\theta}^2$	L_1 - norm		L_2 - norm	
		ดัชนีลดรูป	อันดับ	ดัชนีลดรูป	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.2949	6	6.9063	6
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.1512	3	0.1528	3
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1411	2	0.1431	2
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2301	4	2.2619	4
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1201	1	0.0514	1
	$\hat{\theta}_s^2$	0.2792	5	6.5946	5
15	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.2157	5	1.5397	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.1786	3	0.5772	3
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1450	2	0.2582	2
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.1857	4	0.8781	4
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1352	1	0.1579	1
	$\hat{\theta}_s^2$	0.2549	6	3.2845	6
20	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.1700	5	0.8509	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.1646	4	0.7318	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1300	2	0.2368	2
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.1529	3	0.5412	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1268	1	0.1994	1
	$\hat{\theta}_s^2$	0.2257	6	2.8796	6
25	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.1402	4	0.6146	4
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.1446	5	0.7627	5
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1147	2	0.2148	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.1292	3	0.4145	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1145	1	0.2171	2
	$\hat{\theta}_s^2$	0.2003	6	3.1544	6

จากตารางที่ 34 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้ w_2 ภายใต้ L_1 และ L_2 - norm ตัวประมาณค่าของที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(2)}^2$ ยกเว้นกรณีที่ $n = 25$ ภายใต้ L_2 - norm ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ สำหรับตัวประมาณค่าที่แย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_s^2$ ยกเว้นกรณีที่ $n = 10$ ตัวประมาณค่าที่แย่ที่สุด คือ $\hat{\theta}_{1MMSE}^2$

ตารางที่ 35 ผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ ภายใต้ L_1 และ L_2 - norm เมื่อใช้ w_3

n	$\hat{\theta}^2$	L_1 - norm		L_2 - norm	
		ดัชนีลดรูป	อันดับ	ดัชนีลดรูป	อันดับ
10	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.2652	5	1.3205	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.2280	4	0.8326	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1586	1	0.0881	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2191	3	0.6148	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1721	2	0.2264	2
	$\hat{\theta}_s^2$	0.2702	6	1.6701	6
15	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.1898	4	0.4663	4
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.2165	5	1.9271	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1403	1	0.1035	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.1688	3	0.2827	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1562	2	0.3587	3
	$\hat{\theta}_s^2$	0.2334	6	1.1385	5
20	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.1449	4	0.3425	3
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.1756	5	1.8404	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.1167	1	0.1088	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.1329	3	0.2265	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1296	2	0.3582	4
	$\hat{\theta}_s^2$	0.1970	6	1.3395	5

ตารางที่ 35 (ต่อ)

n	$\hat{\theta}^2$	L_1 - norm		L_2 - norm	
		ดัชนีลดรูป	อันดับ	ดัชนีลดรูป	อันดับ
25	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.1153	4	0.3032	3
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.1401	5	1.5628	5
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.0973	1	0.1141	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.1076	3	0.2097	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.1071	2	0.3414	4
	$\hat{\theta}_s^2$	0.1672	6	1.8100	6

จากตารางที่ 35 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้ w_3 ภายใต้ L_1 และ L_2 - norm ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ และแย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_s^2$ ยกเว้น กรณีที่ $n = 15, 20$ ภายใต้ L_2 - norm ตัวประมาณค่าที่แย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-2)}^2$ ดังนี้

สรุปการจัดอันดับโดยภาพรวมเมื่อใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ โดยใช้ค่าเฉลี่ยดัชนีลดรูปบรรทัดฐานได้ผลการคำนวณและการจัดอันดับดังในตารางที่ 33

ตารางที่ 36 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี TOPSIS

n	$\hat{\theta}^2$	ดัชนีลดรูปบรรทัดฐาน						ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1		w_2		w_3			
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
10	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.4359	0.1730	0.5623	0.7036	0.4857	0.5549	0.4859	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.4811	0.9269	0.2883	0.0156	0.4176	0.3498	0.4132	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.3003	0.0189	0.2691	0.0146	0.2905	0.0370	0.1551	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.3770	0.0831	0.4388	0.2304	0.4013	0.2584	0.2981	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.3587	0.1692	0.2289	0.0052	0.3152	0.0951	0.1954	2
	$\hat{\theta}_s^2$	0.4664	0.2741	0.5323	0.6718	0.4950	0.7018	0.5236	6

ตารางที่ 36 (ต่อ)

ดัชนีลดรูปบรรทัดฐาน									
n	$\hat{\theta}^2$	w_1		w_2		w_3		ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
15	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.3954	0.0773	0.4628	0.4064	0.4143	0.1998	0.3260	4
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.5013	0.9593	0.3832	0.1523	0.4725	0.8257	0.5491	6
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.3046	0.0162	0.3112	0.0682	0.3063	0.0444	0.1751	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.3574	0.0450	0.3986	0.2318	0.3684	0.1212	0.2537	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.3579	0.1218	0.2900	0.0417	0.3408	0.1537	0.2176	2
	$\hat{\theta}_s^2$	0.4938	0.2380	0.5470	0.8669	0.5094	0.4878	0.5238	5
20	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.3782	0.0774	0.4206	0.2699	0.3890	0.1462	0.2802	4
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.4904	0.9030	0.4073	0.2321	0.4714	0.7855	0.5483	5
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.3108	0.0225	0.3218	0.0751	0.3133	0.0464	0.1817	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.3500	0.0492	0.3784	0.1717	0.3568	0.0967	0.2338	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.3586	0.1311	0.3137	0.0632	0.3480	0.1529	0.2279	2
	$\hat{\theta}_s^2$	0.5184	0.3982	0.5585	0.9133	0.5290	0.5717	0.5815	6
25	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	0.3692	0.0770	0.3988	0.1838	0.3772	0.1239	0.2550	4
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	0.4744	0.7595	0.4113	0.2281	0.4585	0.6389	0.4951	5
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.3157	0.0268	0.3261	0.0643	0.3184	0.0466	0.1830	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.3466	0.0515	0.3675	0.1240	0.3521	0.0857	0.2213	2
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.3590	0.1305	0.3256	0.0650	0.3504	0.1396	0.2283	3
	$\hat{\theta}_s^2$	0.5385	0.6300	0.5696	0.9436	0.5472	0.7399	0.6615	6

จากตารางที่ 36 จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบ เลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ และตัวประมาณค่าที่แย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_s^2$ ยกเว้นกรณีที่ $n = 15$ ตัวประมาณค่าที่แย่ที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-2)}^2$

นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้พบว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$ แล้ว เราสามารถหาตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ที่ดีที่สุด และยิ่งกว่านั้นเมื่อ $n \geq 38$ เราสามารถจัดอันดับตัวประมาณค่าดังกล่าวได้ โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต้อินทรีย์ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 ได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่า θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ ได้แก่ ตัวประมาณค่าที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ($\hat{\theta}_{1(MMSE)}^2$) และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\theta}_{1(p)}^2$ และ $\hat{\theta}_s^2$) เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ พิจารณาช่วง $0 < l < 2$ โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต้อินทรีย์ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 จะได้ว่า

3.1) สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$ แล้ว $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด

3.2) สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 38$ แล้ว $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{1(1)}^2$, $\hat{\theta}_{1(MMSE)}^2$, $\hat{\theta}_{1(2)}^2$, $\hat{\theta}_{1(-2)}^2$ และ $\hat{\theta}_s^2$ ตามลำดับ

พิสูจน์ กำหนดให้ T_1 แทน $MSE(\hat{\theta}_{1(MMSE)}^2)$ และ T_2, T_3, T_4, T_5 แทน $MSE(\hat{\theta}_{1(p)}^2)$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ T_6 แทน $MSE(\hat{\theta}_s^2)$ โดยที่ $T_i(l)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ หาได้จากสมการที่ 59-61

3.1) สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$ แล้ว $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด เช่นเดียวกับทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 เราจะต้องแสดงว่า

ถ้า $n \geq 9$ แล้ว

$$\int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_i(l) dl \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 4, 5, 6$$

$$3.1.1) \int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_1(l) dl \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{ l^2 [1 - (\alpha(-1))]^2 - 2l[1 + (n+1)(\alpha(-1))^2 / n - (2n+1)\alpha(-1)/n] + 1 \\ & - 2(n+1)\alpha(-1)/n + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(-1))^2 / n^3 \} dl \\ & < \int_0^2 2(2n+3)/[(n+2)(n+3)] dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned} & (2/3)(12n^6 - 86n^5 + 264n^4 + 285n^3 - 2502n^2 + 1728n + 2592)/n^7 \\ & < 4(2n+3)/[(n+2)(n+3)] \end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$44n^7 + 94n^6 - 1089n^5 - 507n^4 + 9072n^3 + 3780n^2 - 23328n - 15552 > 0$$

$$(44n^7 - 1089n^5) + (94n^6 - 507n^4) + (9072n^3 - 23328n) + (3780n^2 - 15552) > 0$$

$$(44n^2 - 1089)n^5 + (94n^2 - 507)n^4 + (9072n^2 - 23328)n + (3780n^2 - 15552) > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 9$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$

$$\int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_1(l) dl$$

$$3.1.2) \quad \int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_2(l) dl \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\int_0^2 \{l^2 [1 - (\alpha(-1))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(-1))^2/n - (2n+1)\alpha(-1)/n] + 1 - 2(n+1)\alpha(-1)/n + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(-1))^2/n^3\} dl$$

$$< \int_0^2 \{l^2 [1 - (\alpha(-2))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(-2))^2/n - (2n+1)\alpha(-2)/n] + 1 - 2(n+1)\alpha(-2)/n + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(-2))^2/n^3\} dl$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$(2/3)(12n^6 - 86n^5 + 264n^4 + 285n^3 - 2502n^2 + 1728n + 2592)/n^7$$

$$< (2/3)(12n^{10} + 85n^9 - 614n^8 - 25837n^7 + 359156n^6 - 1744331n^5 + 1824870n^4 + 13967052n^3 - 48694392n^2 + 28667520n + 50803200)/n^{11}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$171n^9 - 878n^8 - 26122n^7 + 361658n^6 - 1746059n^5 + 1822278n^4 + 13967052n^3 - 48694392n^2 + 28667520n + 50803200 > 0$$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 9$ ดังนี้

ให้ $p(n)$ แทนข้อความตามอสมการข้างต้น

(1) $p(9)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$171(9)^9 - 878(9)^8 - 26122(9)^7 + 361658(9)^6 - 1746059(9)^5 + 1822278(9)^4 + 13967052(9)^3 - 48694392(9)^2 + 28667520(9) + 50803200 = 11112529644 > 0$$

(2) ให้ n แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geq 9$ และ $p(n)$ เป็นจริง

พิจารณา $p(n+1)$:

$$171(n+1)^9 - 878(n+1)^8 - 26122(n+1)^7 + 361658(n+1)^6 - 1746059(n+1)^5 + 1822278(n+1)^4 + 13967052(n+1)^3 - 48694392(n+1)^2 + 28667520(n+1) + 50803200$$

$$\begin{aligned}
&= 171n^9 + 661n^8 - 26990n^7 + 168584n^6 - 152295n^5 - 2437331n^4 + 10079660n^3 \\
&\quad - 8462278n^2 - 26279682n + 45154428 \\
&= (171n^9 - 878n^8 - 26122n^7 + 361658n^6 - 1746059n^5 + 1822278n^4 + 13967052n^3 \\
&\quad - 48694392n^2 + 28667520n + 50803200) + (1539n^8 - 868n^7 - 193074n^6 \\
&\quad + 1593764n^5 - 4259609n^4 - 3887392n^3 + 40232114n^2 - 54947202n - 5648772)
\end{aligned}$$

ซึ่งวงเล็บแรกมีค่ามากกว่าศูนย์ตามที่กำหนดให้ $p(n)$ เป็นจริง และสามารถใช่วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์แสดงได้ว่า วงเล็บหลังมีค่ามากกว่าศูนย์ เมื่อ $n \geq 9$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{ให้ } q(n) : 1539n^8 - 868n^7 - 193074n^6 + 1593764n^5 - 4259609n^4 - 3887392n^3 \\
+ 40232114n^2 - 54947202n - 5648772 > 0
\end{aligned}$$

1) $q(9)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
1539(9)^8 - 868(9)^7 - 193074(9)^6 + 1593764(9)^5 - 4259609(9)^4 - 3887392(9)^3 \\
- 54947202(9) - 5648772 = 25577441556 > 0
\end{aligned}$$

2) ให้ n แทนจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่ง $n \geq 9$ และ $p(n)$ เป็นจริง

พิจารณา $q(n+1)$:

$$\begin{aligned}
&1539(n+1)^8 - 868(n+1)^7 - 193074(n+1)^6 + 1593764(n+1)^5 - 4259609(n+1)^4 \\
&\quad - 3887392(n+1)^3 + 40232114(n+1)^2 - 54947202(n+1) - 5648772 \\
&= 1539n^8 + 11444n^7 - 156058n^6 + 503276n^5 + 890451n^4 - 8793864n^3 + 16078678n^2 \\
&\quad + 3633026n - 27109500 \\
&= (1539n^8 - 868n^7 - 193074n^6 + 1593764n^5 - 4259609n^4 - 3887392n^3 + 40232114n^2 \\
&\quad - 54947202n - 5648772) + (12312n^7 + 37016n^6 - 1090488n^5 + 5150060n^4 \\
&\quad - 4906472n^3 - 24153436n^2 + 58580228n - 21460728)
\end{aligned}$$

แต่วงเล็บแรกมีค่ามากกว่าศูนย์ตามที่กำหนดให้ $q(n)$ เป็นจริง และวงเล็บหลังจัดกลุ่มได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&(12312n^7 + 37016n^6 - 1090488n^5) + (2000000n^4 - 4906472n^3) \\
&\quad + (3150060n^4 - 24153436n^2) + (58580228n - 21460728) \\
&= (12312n^2 + 37016n - 1090488)n^5 + (2000000n - 4906472)n^3 \\
&\quad + (3150060n^2 - 24153436)n^2 + (58580228n - 21460728)
\end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 9$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น $q(n+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$

$$\int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_2(l) dl$$

$$3.1.3) \int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_4(l) dl \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{l^2 [1 - (\alpha(-1))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(-1))^2 / n - (2n+1)\alpha(-1)/n] + 1 \\ & - 2(n+1)\alpha(-1)/n + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(-1))^2 / n^3\} dl \\ & < \int_0^2 \{l^2 [1 - (\alpha(1))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(1))^2 / n - (2n+1)\alpha(1)/n] + 1 - 2(n+1)\alpha(1)/n \\ & + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(1))^2 / n^3\} dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned} & (2/3)(12n^6 - 86n^5 + 264n^4 + 285n^3 - 2502n^2 + 1728n + 2592)/n^7 \\ & < (4/3)(6n^2 + 11n + 6)/(n+3)(n+2)^2 \end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} 24n^8 + 158n^7 - 901n^6 - 2685n^5 + 8058n^4 + 21924n^3 - 15768n^2 - 62208n - 31104 & > 0 \\ (2n^3 + 17n^2 - 18n - 72)(12n^5 - 23n^4 - 147n^3 + 132n^2 + 756n + 432) & > 0 \\ [(2n^3 - 18n) + (17n^2 - 72)][(5n^5 - 23n^4) + (7n^3 - 147n^3) + 132n^2 + 756n + 432] & > 0 \\ [(2n^2 - 18)n + (17n^2 - 72)][(5n - 23)n^4 + (7n^2 - 147)n^3 + 132n^2 + 756n + 432] & > 0 \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 9$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$

$$\int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_4(l) dl$$

$$3.1.4) \int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_5(l) dl \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{l^2 [1 - (\alpha(-1))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(-1))^2 / n - (2n+1)\alpha(-1)/n] + 1 \\ & - 2(n+1)\alpha(-1)/n + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(-1))^2 / n^3\} dl \\ & < \int_0^2 \{l^2 [1 - (\alpha(2))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(2))^2 / n - (2n+1)\alpha(2)/n] + 1 - 2(n+1)\alpha(2)/n \\ & + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(2))^2 / n^3\} dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned} & (2/3)(12n^6 - 86n^5 + 264n^4 + 285n^3 - 2502n^2 + 1728n + 2592)/n^7 \\ & < (2/3)(12n^7 + 517n^6 + 7894n^5 + 60113n^4 + 265364n^3 + 707764n^2 + 1071840n \\ & + 705600)/[(n+4)^2(n+5)^2(n+6)^2(n+7)^2] \end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
& 75n^{13} + 1310n^{12} + 10800n^{11} + 78594n^{10} + 289856n^9 - 1493636n^8 - 17626597n^7 \\
& - 42158430n^6 + 109443540n^5 + 660356280n^4 + 569808000n^3 - 1921252608n^2 \\
& - 3997486080n - 1828915200 > 0
\end{aligned}$$

จัดกลุ่มใหม่ได้

$$\begin{aligned}
& (75n^{13} - 1493636n^8) + (1310n^{12} - 17626597n^7) + (10800n^{11} - 42158430n^6) \\
& + (78594n^{10} - 1921252608n^2) + (289856n^9 - 3997486080n) \\
& + (109443540n^5 - 1828915200) + (660356280n^4 + 569808000n^3) > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (75n^5 - 1493636n^8) + (1310n^5 - 17626597n^7) + (10800n^5 - 42158430n^6) \\
& + (78594n^8 - 1921252608n^2) + (289856n^8 - 3997486080n) \\
& + (109443540n^5 - 1828915200) + 660356280n^4 + 569808000n^3 > 0
\end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 9$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

ดังนั้น อสมการเป็นจริง นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_5(l) dl \\
& 3.1.5) \int_0^2 T_3(l) dl < \int_0^2 T_6(l) dl \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 \{ l^2 [1 - (\alpha(-1))^2] - 2l[1 + (n+1)(\alpha(-1))^2/n - (2n+1)\alpha(-1)/n] + 1 \\
& - 2(n+1)\alpha(-1)/n + (n+1)(n+2)(n+3)(\alpha(-1))^2/n^3 \} dl \\
& < \int_0^2 \{ (8n-6)/(n^2+7n-6) + l(l-2)(8n-6)^2/((n^2+7n-6)^2) \} dl
\end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned}
& (2/3)(12n^6 - 86n^5 + 264n^4 + 285n^3 - 2502n^2 + 1728n + 2592)/n^7 \\
& < (4/3)(4n-3)(5n-6+3n^2)/(n^2+7n-6)^2
\end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
& 12n^{10} - 60n^9 + 418n^8 + 245n^7 - 18912n^6 + 48027n^5 + 80226n^4 - 320652n^3 + 139320n^2 \\
& + 155520n - 93312 > 0
\end{aligned}$$

จัดกลุ่มใหม่ได้เป็น

$$(12n^{10} - 60n^9) + (418n^8 + 245n^7 - 18912n^6) + 48027n^5 + (80226n^4 - 320652n^3) \\ + 139320n^2 + 155520n - 93312 > 0$$

$$(12n - 60)n^9 + (418n^2 + 245n - 18912)n^6 + 48027n^5 + (80226n - 320652)n^3 \\ + 139320n^2 + (155520n - 93312) > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 9$ ทำให้ทุกเทอมในวงเล็บมีค่ามากกว่าศูนย์

ดังนั้น อสมการเป็นจริง นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$

$$\int_0^2 T_3(l)dl < \int_0^2 T_6(l)dl$$

สรุป สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 9$ แล้ว $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด

3.2) สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 38$ แล้ว $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด รองลงมา คือ $\hat{\theta}_{1(1)}^2$, $\hat{\theta}_{1(MMSE)}^2$, $\hat{\theta}_{1(2)}^2$, $\hat{\theta}_{1(-2)}^2$ และ $\hat{\theta}_s^2$ ตามลำดับ

ในที่นี้จะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 38$ แล้ว

$$\int_0^2 T_3(l)dl < \int_0^2 T_4(l)dl < \int_0^2 T_1(l)dl < \int_0^2 T_5(l)dl < \int_0^2 T_2(l)dl < \int_0^2 T_6(l)dl$$

$$3.2.1) \int_0^2 T_3(l)dl < \int_0^2 T_4(l)dl \text{ เป็นจริงตามพิสูจน์ข้อ 3.1.3)}$$

$$3.2.2) \int_0^2 T_4(l)dl < \int_0^2 T_1(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$(4/3)(6n^2 + 11n + 6)/[(n+3)(n+2)^2] < 4(2n+3)/[(n+2)(n+3)]$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$10n + 12 > 0 \text{ ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

$$\text{นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม } n \geq 38 \text{ แล้ว } \int_0^2 T_4(l)dl < \int_0^2 T_1(l)dl$$

$$3.2.3) \int_0^2 T_1(l)dl < \int_0^2 T_5(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$4(2n+3)/[(n+2)(n+3)]$$

$$< (2/3)(12n^7 + 517n^6 + 7894n^5 + 60113n^4 + 265364n^3 + 707764n^2 + 1071840n \\ + 705600)/[(n+4)^2(n+5)^2(n+6)^2(n+7)^2]$$

จัดรูปอสมการได้ใหม่ได้เป็น

$$31n^8 - 345n^7 - 22295n^6 - 292959n^5 - 1901380n^4 - 7066876n^3 - 15290448n^2 \\ - 17801280n - 8467200 > 0$$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 38$ ดังนี้

ให้ $p(n)$ แทนข้อความตามอสมการข้างต้น

(1) $p(38)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$31(38)^8 - 345(38)^7 - 22295(38)^6 - 292959(38)^5 - 1901380(38)^4 - 7066876(38)^3 - 15290448(38)^2 - 17801280(38) - 8467200 = 591524205440 > 0$$

(2) ให้ n แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geq 38$ และ $p(n)$ เป็นจริง

พิจารณา $p(n+1)$:

$$\begin{aligned} & 31(n+1)^8 - 345(n+1)^7 - 22295(n+1)^6 - 292959(n+1)^5 - 1901380(n+1)^4 \\ & - 7066876(n+1)^3 - 15290448(n+1)^2 - 17801280(n+1) - 8467200 \\ = & 31n^8 - 97n^7 - 23842n^6 - 432238n^5 - 3710505n^4 - 18058225n^3 - 51169748n^2 \\ & - 78789056n - 50842752 \\ = & (31n^8 - 345n^7 - 22295n^6 - 292959n^5 - 1901380n^4 - 7066876n^3 - 15290448n^2 \\ & - 17801280n - 8467200) + (248n^7 - 1547n^6 - 139279n^5 - 1809125n^4 - 10991349n^3 \\ & - 35879300n^2 - 60987776n - 42375552) \end{aligned}$$

ซึ่งวงเล็บแรกมีค่ามากกว่าศูนย์ตามที่กำหนดให้ $p(n)$ เป็นจริง และวงเล็บหลังจัดกลุ่มได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} & 248n^7 - 1547n^6 - 139279n^5 - 1809125n^4 - 10991349n^3 - 35879300n^2 \\ & - 60987776n - 42375552 \\ = & (50n^7 - 1547n^6) + (100n^7 - 139279n^5) + (40n^7 - 1809125n^4) + (10n^7 - 10991349n^3) \\ & + (n^7 - 35879300n^2) + (n^7 - 60987776n) + (45n^7 - 42375552) \\ = & (50n - 1547)n^6 + (100n^2 - 139279)n^5 + (40n^3 - 1809125)n^4 + (10n^4 - 10991349)n^3 \\ & + (n^5 - 35879300)n^2 + (n^6 - 60987776)n + (45n^7 - 42375552) \end{aligned}$$

เมื่อ $n \geq 38$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 38$ แล้ว $\int_0^2 T_1(l)dl < \int_0^2 T_5(l)dl$

$$3.2.4) \int_0^2 T_5(l)dl < \int_0^2 T_2(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$(2/3)(12n^7 + 517n^6 + 7894n^5 + 60113n^4 + 265364n^3 + 707764n^2 + 1071840n + 705600)/[(n+4)^2(n+5)^2(n+6)^2(n+7)^2]$$

$$< (2/3)(12n^{10} + 85n^9 - 614n^8 - 25837n^7 + 359156n^6 - 1744331n^5 + 1824870n^4 + 13967052n^3 - 48694392n^2 + 28667520n + 50803200)/n^{11}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$96n^{17} + 5336n^{16} + 68428n^{15} - 40588n^{14} - 5586540n^{13} - 16940200n^{12} + 225367525n^{11} \\ + 1140402668n^{10} - 5017422631n^9 - 35909184950n^8 + 60195657928n^7 + 677875684752n^6 \\ - 74790390000n^5 - 7459454456928n^4 - 8566266240000n^3 + 32324907686400n^2 \\ + 74680704000000n + 35846737920000 > 0$$

$$(4n^7 + 142n^6 - 440n^5 - 7409n^4 + 15556n^3 + 168548n^2 - 176400n - 1411200) \\ (24n^{10} + 482n^9 + 2636n^8 - 6251n^7 - 85316n^6 + 102803n^5 + 2226162n^4 + 2314092n^3 \\ - 19721736n^2 - 49744800n - 25401600) > 0$$

$$[(4n^7 - 440n^5) + (142n^6 - 7409n^4) + (15556n^3 - 176400n) + (168548n^2 - 1411200)] \\ [24n^{10} + (482n^9 - 6251n^7) + (2636n^8 - 85316n^6) + (102803n^5 - 25401600) \\ + (2226162n^4 - 19721736n^2) + (2314092n^3 - 49744800n)] > 0$$

$$[(4n^2 - 440)n^5 + (142n^2 - 7409)n^4 + (15556n^2 - 176400)n + (168548n^2 - 1411200)] \\ [24n^{10} + (482n^2 - 6251)n^7 + (2636n^2 - 85316)n^6 + (102803n^5 - 25401600) \\ + (2226162n^2 - 19721736)n^2 + (2314092n^2 - 49744800)n] > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 38$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 38$ แล้ว $\int_0^2 T_5(l)dl < \int_0^2 T_2(l)dl$

3.2.5) $\int_0^2 T_2(l)dl < \int_0^2 T_6(l)dl$ ก็ต่อเมื่อ

$$(2/3)(12n^{10} + 85n^9 - 614n^8 - 25837n^7 + 359156n^6 - 1744331n^5 + 1824870n^4 \\ + 13967052n^3 - 48694392n^2 + 28667520n + 50803200)/n^{11} \\ < (4/3)(4n-3)(5n-6+3n^2)/(n^2+7n-6)^2$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$12n^{14} - 231n^{13} - 1098n^{12} + 32332n^{11} + 31988n^{10} - 2382520n^9 + 7158788n^8 + 56124251n^7 \\ - 373817946n^6 + 352358040n^5 + 2457081072n^4 - 6365085840n^3 + 2281351392n^2 \\ + 3235438080n - 1828915200 > 0$$

จัดกลุ่มใหม่ได้เป็น

$$(10n^{14} - 231n^{13}) + (2n^{14} - 1098n^{12}) + (32332n^{11} + 31988n^{10} - 2382520n^9) + 7158788n^8 \\ + (56124251n^7 - 373817946n^6) + 352358040n^5 + (2457081072n^4 - 6365085840n^3) \\ + 2281351392n^2 + (3235438080n - 1828915200) > 0$$

$$(10n^{13} - 231)n^{13} + (2n^2 - 1098)n^{12} + (32332n^2 + 31988n - 2382520)n^9 + 7158788n^8 \\ + (56124251n - 373817946)n^6 + 352358040n^5 + (2457081072n - 6365085840)n^3 \\ + 2281351392n^2 + (3235438080n - 1828915200) > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 38$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

$$\text{นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม } n \geq 38 \text{ แล้ว } \int_0^2 T_2(l)dl < \int_0^2 T_6(l)dl$$

สรุป สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 38$ แล้ว $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด รองลงมาคือ

$$\hat{\theta}_{1(1)}^2, \hat{\theta}_{1MMSE}^2, \hat{\theta}_{1(2)}^2, \hat{\theta}_{1(-2)}^2 \text{ และ } \hat{\theta}_s^2 \text{ ตามลำดับ}$$

1.2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี ELECTRE

ในการทำนองเดียวกับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ เราสามารถเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี ELECTRE ได้ดัชนีความสอดคล้อง (C_{pq}) และ ดัชนีความไม่สอดคล้อง (D_{pq}) แสดงผลลัพธ์ในรูปเมตริกซ์ในภาคผนวก ข

ค่าต่าง ๆ ในเมตริกซ์ C และ D นำไปหาดัชนีความสอดคล้องสุทธิ (C_p) ดัชนีความไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) และ ดัชนี ELECTRE (EI_p) ของแต่ละตัวประมาณค่า ได้ผลการจัดอันดับโดยใช้วิธี ELECTRE ในแต่ละแบบของการถ่วงน้ำหนัก แสดงในตารางที่ 63 – 65

สรุปการจัดอันดับโดยภาพรวม เมื่อใช้วิธี ELECTRE ทุกแบบการถ่วงน้ำหนัก โดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน ได้ผลดังในตารางที่ 37

ตารางที่ 37 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี ELECTRE

n	θ^2	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1	w_2	w_3		
10	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	-0.3028	-0.5922	-0.4892	-0.4614	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	-0.2646	0.2917	0.0193	0.0155	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.6181	0.3293	0.5039	0.4838	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2268	-0.0122	0.1236	0.1127	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.2891	0.4689	0.4105	0.3895	2
	$\hat{\theta}_s^2$	-0.5667	-0.4855	-0.5680	-0.5401	6

ตารางที่ 37 (ต่อ)

n	$\hat{\theta}^2$	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1	w_2	w_3		
15	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	-0.0797	-0.2576	-0.1429	-0.1601	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	-0.2536	0.1698	-0.0876	-0.0571	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.5652	0.3943	0.5100	0.4898	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2202	0.0708	0.1820	0.1576	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.2531	0.3915	0.3042	0.3162	2
	$\hat{\theta}_s^2$	-0.7052	-0.7688	-0.7656	-0.7466	6
20	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	-0.0649	-0.2115	-0.1103	-0.1289	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	-0.2243	0.1241	-0.0936	-0.0646	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.5519	0.4205	0.5090	0.4938	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2193	0.1069	0.1939	0.1734	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.2472	0.3522	0.2786	0.2927	2
	$\hat{\theta}_s^2$	-0.7292	-0.7922	-0.7776	-0.7663	6
25	$\hat{\theta}_{1MMSE}^2$	-0.0575	-0.1823	-0.0981	-0.1126	5
	$\hat{\theta}_{1(-2)}^2$	-0.1928	0.1030	-0.0780	-0.0559	4
	$\hat{\theta}_{1(-1)}^2$	0.5394	0.4294	0.5004	0.4897	1
	$\hat{\theta}_{1(1)}^2$	0.2155	0.1239	0.1921	0.1772	3
	$\hat{\theta}_{1(2)}^2$	0.2451	0.3305	0.2726	0.2827	2
	$\hat{\theta}_s^2$	-0.7497	-0.8045	-0.7891	-0.7811	6

จากตารางที่ 37 จะเห็นว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ โดยวิธี ELECTRE ทั้งสามแบบ ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{1(-1)}^2$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{1(2)}^2$, $\hat{\theta}_{1(1)}^2$, $\hat{\theta}_{1(-2)}^2$, $\hat{\theta}_{1MMSE}^2$ และ $\hat{\theta}_s^2$ ตามลำดับ

2. การเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิด

สองพารามิเตอร์

ตัวประมาณค่าของ θ^2 ที่ใช้ในการเปรียบเทียบได้แก่ ตัวประมาณค่าที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ($\hat{\theta}_{2MMSE}^2$) และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\theta}_{2(p)}^2$) โดยที่

$$\hat{\theta}_{2MMSE}^2 = [n^2 (\bar{x} - x_{(1)})^2] / [(n+1)(n+2)]$$

$$\hat{\theta}_{2(p)}^2 = \theta_0^2 + \beta(p)(Z^2 - \theta_0^2)$$

เมื่อ $Z = (\bar{x} - x_{(1)})$ และ $\beta(p) = n^{2q} \Gamma(n+2p-1) / \Gamma(n+4p-1)$ พิจารณาที่ $p = -2, -1, 1, 2$ ตัวประมาณค่า 5 ตัว ดังกล่าวถูกเปรียบเทียบโดยใช้ MSEs ซึ่งคำนวณตามสมการต่อไปนี้

$$MSE(\hat{\theta}_{2MMSE}^2) = 2(2n+1)\theta^4 / [(n+1)(n+2)] \quad (62)$$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_{2(p)}^2) &= \theta^4 \{ \lambda^2 (1 - \beta(p))^2 \\ &\quad - 2\lambda \times [1 + (n-1)\beta(p)^2 / n - (2n-1)\beta(p)/n] \\ &\quad + [1 + (n-1)(n+1)(n+2)\beta(p)^2 / n^3 - 2(n-1)\beta(p)/n] \} \end{aligned} \quad (63)$$

เมื่อ $\lambda = \theta_0 / \theta$, และ $\beta(p) = n^{2q} \Gamma(n+2p-1) / \Gamma(n+4p-1)$

จากสมการที่ 62 และ 63 จะเห็นได้ว่า มี θ^4 เป็นพจน์ร่วมเราสามารถตัดออกได้เป็น

$$MSE(\hat{\theta}_{2MMSE}^2) = 2(2n+1) / [(n+1)(n+2)] \quad (64)$$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_{2(p)}^2) &= \lambda^2 (1 - \beta(p))^2 - 2\lambda \times [1 + (n-1)\beta(p)^2 / n - (2n-1)\beta(p)/n] \\ &\quad + [1 + (n-1)(n+1)(n+2)\beta(p)^2 / n^3 - 2(n-1)\beta(p)/n] \end{aligned} \quad (65)$$

จากสมการที่ 64 และ 65 เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง $n = 10, 15, 20, 25$ จะได้ฟังก์ชัน

ที่ขึ้นกับค่า λ เราพิจารณาช่วงของ λ เช่นเดียวกับการประมาณค่า θ^2 ในการแจกแจงแบบ

เลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ และเพื่อให้สะดวกในการเขียนสูตรต่าง ๆ จึงกำหนดสัญลักษณ์

TT_1 แทน MSE ของ $\hat{\theta}_{2MMSE}^2$ กำหนด TT_2, TT_3, TT_4 และ TT_5 แทน MSEs ของ $\hat{\theta}_{2(p)}^2$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ ซึ่งจะได้ค่า MSEs ของแต่ละตัวประมาณค่า ดังต่อไปนี้

กรณีที่ $n = 10$

$$TT_1(I) = 7/22$$

$$\begin{aligned} TT_2(I) &= (1555009/1562500)I^2 - (15553831/7812500)I \\ &\quad + 388940173/390625000 \end{aligned}$$

$$TT_3(I) = (49/100)I^2 - (511/500)I + 14173/25000$$

$$TT_4(I) = (64/1089)I^2 - (56/363)I + 7/22$$

$$TT_5(I) = (177241/298116)I^2 - (121669/99372)I + 43073/66248$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 10

กรณีที่ $n = 15$

$$TT_1(I) = 31/136$$

$$TT_2(I) = (3108169/3515625)I^2 - (93639982/52734375)I + 10590001927/11865234375$$

$$TT_3(I) = (529/2025)I^2 - (16882/30375)I + 2440447/6834375$$

$$TT_4(I) = (2209/73984)I^2 - (1457/18496)I + 31/136$$

$$TT_5(I) = (474721/1132096)I^2 - (35139/40432)I + 3656/7581$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 11

กรณีที่ $n = 20$

$$TT_1(I) = 41/231$$

$$TT_2(I) = (288898009/400000000)I^2 - 5829002171/4000000000I + 1183124041501/1600000000000$$

$$TT_3(I) = (4/25)I^2 - (43/125)I + 25501/100000$$

$$TT_4(I) = (961/53361)I^2 - (2542/53361)I + 41/231$$

$$TT_5(I) = (247009/804609)I^2 - (513898/804609)I + 33161/89401$$

เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 12

กรณีที่ $n = 25$

$$TT_1(I) = 17/117$$

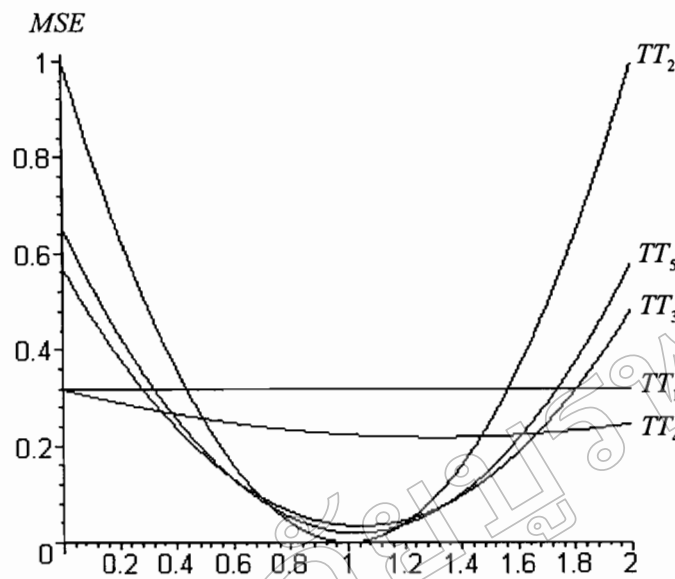
$$TT_2(I) = (88566355201/152587890625)I^2 - 4483685830898/3814697265625I + 1439854362192073/2384185791015625$$

$$TT_3(I) = (1681/15625)I^2 - 90938/390625I + 48020113/244140625$$

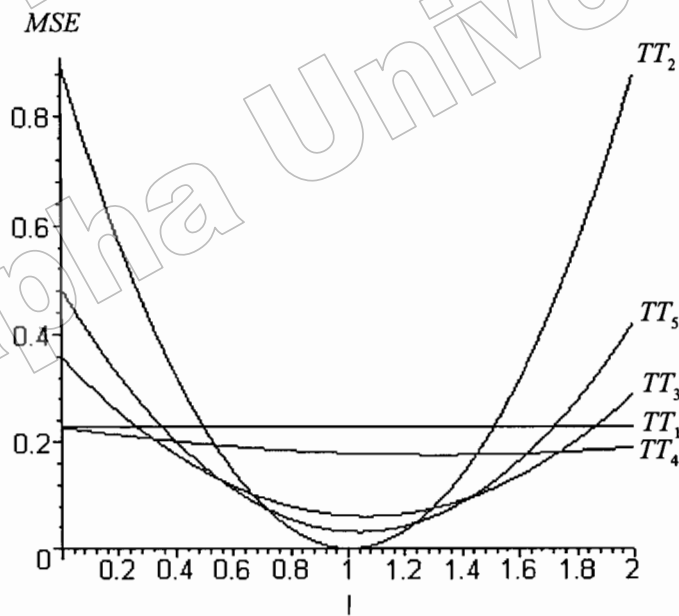
$$TT_4(I) = (5929/492804)I^2 - (1309/41067)I + 17/117$$

$$TT_5(I) = (5315430649/22810665024)I^2 - (19247448/39601849)I + 46785521/158407396$$

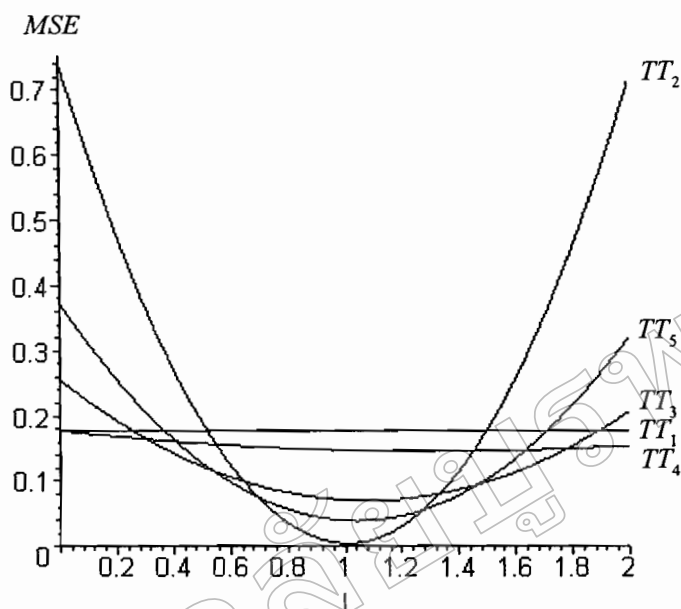
เขียนกราฟได้ตามภาพที่ 13



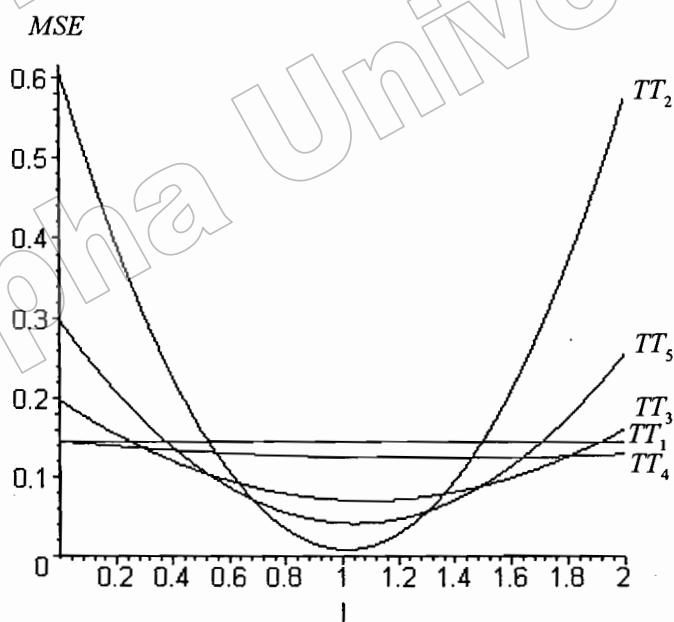
ภาพที่ 10 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ^2 เมื่อ $n = 10$



ภาพที่ 11 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ^2 เมื่อ $n = 15$



ภาพที่ 12 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ^2 เมื่อ $n=20$



ภาพที่ 13 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของ θ^2 เมื่อ $n=25$

2.1. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี TOPSIS

จากกราฟ จะเห็นได้ว่า ในช่วง $0 < l < 2$ กราฟทั้ง 5 เส้น ตัดกัน 20 จุด แต่จะมีเพียง 6 จุดเท่านั้นที่ใช้ในการพิจารณาแถวในอุดมคติ (IDR) ได้แก่ $i_1, i_2, \dots, i_6$ และมีเพียง 2 จุด เท่านั้นที่ใช้ในการพิจารณาแถวในอุดมคติลบ (NIDR) ได้แก่ n_1, n_2 ค่าของจุดตัดดังกล่าวแสดงในตารางที่ 38

ตารางที่ 38 จุดตัดของ TT_1, TT_2, TT_3, TT_4 และ TT_5 ที่ใช้ในการพิจารณา IDR และ NIDR

n	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	n_1	n_2
10	0.3462	0.5931	0.7271	1.1860	1.3429	1.6660	0.4348	1.5657
15	0.3206	0.5549	0.7135	1.2371	1.4268	1.7410	0.4975	1.5110
20	0.3066	0.5374	0.6959	1.2754	1.4674	1.7806	0.5193	1.4984
25	0.2980	0.5274	0.6821	1.3022	1.4913	1.8048	0.5277	1.4973

จากจุดตัดดังกล่าว จะได้ว่าแถวในอุดมคติ (IDR) ประกอบด้วย $u_j(r), j = 1, 2, \dots, 7$ และแถวในอุดมคติลบ (NIDR) ประกอบด้วย $v_j(r), j = 1, 2, 3$ ดังแสดงในตารางที่ 39 และ 40

ตารางที่ 39 IDR สำหรับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ชนิดสองพารามิเตอร์

n	$0 < l < i_1$	$i_1 < l < i_2$	$i_2 < l < i_3$	$i_3 < l < i_4$	$i_4 < l < i_5$	$i_5 < l < i_6$	$i_6 < l < 2$
	$u_1(l)$	$u_2(l)$	$u_3(l)$	$u_4(l)$	$u_5(l)$	$u_6(l)$	$u_7(l)$
10	$TT_4(l)$	$TT_3(l)$	$TT_5(l)$	$TT_2(l)$	$TT_5(l)$	$TT_3(l)$	$TT_4(l)$
15	$TT_4(l)$	$TT_3(l)$	$TT_5(l)$	$TT_2(l)$	$TT_5(l)$	$TT_3(l)$	$TT_4(l)$
20	$TT_4(l)$	$TT_3(l)$	$TT_5(l)$	$TT_2(l)$	$TT_5(l)$	$TT_3(l)$	$TT_4(l)$
25	$TT_4(l)$	$TT_3(l)$	$TT_5(l)$	$TT_2(l)$	$TT_5(l)$	$TT_3(l)$	$TT_4(l)$

ตารางที่ 40 $NIDR$ สำหรับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง
ชนิดสองพารามิเตอร์

n	$0 < l < n_1$	$n_1 < l < n_2$	$n_2 < l < 2$
	$v_1(l)$	$v_2(l)$	$v_3(l)$
10	$TT_2(l)$	$TT_1(l)$	$TT_2(l)$
15	$TT_2(l)$	$TT_1(l)$	$TT_2(l)$
20	$TT_2(l)$	$TT_1(l)$	$TT_2(l)$
25	$TT_2(l)$	$TT_1(l)$	$TT_2(l)$

แต่ละตัวประมาณค่าที่ $i, i = 1, 2, \dots, 5$ คำนวณค่าดัชนีลดรูปโดยใช้ L_1 และ L_2 -norm
ได้ผลลัพธ์แสดงในตาราง 66–68

สรุปการจัดอันดับโดยภาพรวมเมื่อใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ โดยใช้ค่าเฉลี่ยดัชนีลดรูป
บรรทัดฐานได้ผลการคำนวณและการจัดอันดับดังในตารางที่ 41

ตารางที่ 41 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิด
สองพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี TOPSIS

ดัชนีลดรูปบรรทัดฐาน									
n	$\hat{\theta}^2$	w_1		w_2		w_3		ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
10	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	0.5325	0.2549	0.7297	0.9848	0.6268	0.9388	0.6779	5
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	0.5552	0.9598	0.3016	0.0058	0.4589	0.1948	0.4127	4
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.3318	0.0342	0.2249	0.0013	0.2916	0.0174	0.1502	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.4055	0.0752	0.5253	0.1734	0.4630	0.2817	0.3207	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.3657	0.0838	0.2237	0.0013	0.3116	0.0319	0.1697	2

ตารางที่ 41 (ต่อ)

ดัชนีการบูรณาการ									
n	$\hat{\theta}^2$	w_1		w_2		w_3		ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2		
15	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	0.4783	0.0560	0.5793	0.8095	0.5083	0.1913	0.4371	4
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	0.6203	0.9977	0.5018	0.4211	0.5905	0.9752	0.6844	5
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.3139	0.0056	0.3029	0.0370	0.3108	0.0163	0.1644	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.3965	0.0252	0.4697	0.4046	0.4176	0.0953	0.3015	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.3615	0.0292	0.3164	0.0473	0.3494	0.0541	0.1930	2
20	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	0.4571	0.0343	0.4978	0.2461	0.4585	0.0524	0.2910	4
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	0.6314	0.9990	0.5844	0.9553	0.6314	0.9977	0.7999	5
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.3202	0.0042	0.3234	0.0328	0.3189	0.0079	0.1679	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.3962	0.0185	0.4276	0.1498	0.3966	0.0309	0.2366	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.3645	0.0200	0.3509	0.0580	0.3633	0.0293	0.1977	2
25	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	0.4489	0.0295	0.4554	0.0793	0.4362	0.0270	0.2460	4
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	0.6254	0.9992	0.6188	0.9946	0.6421	0.9993	0.8132	5
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.3316	0.0046	0.3319	0.0164	0.3276	0.0056	0.1696	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.3999	0.0176	0.4047	0.0528	0.3887	0.0174	0.2135	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.3708	0.0179	0.3684	0.0373	0.3730	0.0209	0.1981	2

จากตารางที่ 41 จะเห็นว่า เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี TOPSIS ทั้งหกแบบ ตัวประมาณค่าของ θ^2 ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{2(-1)}^2$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{2(2)}^2$, $\hat{\theta}_{2(1)}^2$, $\hat{\theta}_{2MMSE}^2$ และ $\hat{\theta}_{2(-2)}^2$ ตามลำดับ ยกเว้นกรณีที่ $n = 10$ ตัวประมาณค่าของ θ^2 ที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{2(-1)}^2$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{2(2)}^2$, $\hat{\theta}_{2(1)}^2$, $\hat{\theta}_{2(-2)}^2$ และ $\hat{\theta}_{2MMSE}^2$

นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังพบว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้วเราสามารถจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต้อินทรีย์ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 ได้ตามทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 เมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่า θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ ได้แก่ ตัวประมาณค่าที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ($\hat{\theta}_{2MMSE}^2$) และตัวประมาณค่าแบบย่อ ($\hat{\theta}_{(2p)}^2$) เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ช่วง $0 < l < 2$ โดยใช้วิธี TOPSIS ภายใต้ L_1 -norm และค่าถ่วงน้ำหนัก w_i จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้ว $\hat{\theta}_{2(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{2(2)}^2$, $\hat{\theta}_{2(1)}^2$, $\hat{\theta}_{2MMSE}^2$ และ $\hat{\theta}_{2(-2)}^2$ ตามลำดับ

พิสูจน์ กำหนดให้ TT_1 แทน $MSE(\hat{\theta}_{2MMSE})$ และ TT_2, TT_3, TT_4, TT_5 แทน $MSE(\hat{\theta}_{2(p)})$ เมื่อ $p = -2, -1, 1, 2$ ตามลำดับ โดยที่ $TT_i(l)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ หาได้จากสมการที่ 64 และ 65 เช่นเดียวกับทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 เราต้องแสดงว่า

ถ้า $n \geq 10$ แล้ว

$$\int_0^2 TT_3(l)dl < \int_0^2 TT_5(l)dl < \int_0^2 TT_4(l)dl < \int_0^2 TT_1(l)dl < \int_0^2 TT_2(l)dl$$

เมื่อ $TT_i(l)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ หาได้จากสมการ (3.62) และ (3.63)

$$4.1) \int_0^2 TT_3(l)dl < \int_0^2 TT_5(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{l^2(1-\beta(-1))^2 - 2l[(1+(n-1)(\beta(-1))^2/n - (2n-1)(\beta(-1))/n] + 1 \\ & + (n-1)(n+1)(n+2)(\beta(-1))^2 - 2(n-1)\beta(-1)/n\}dl \\ & < \int_0^2 \{l^2(1-\beta(2))^2 - 2l[(1+(n-1)(\beta(2))^2/n - (2n-1)(\beta(2))/n] + 1 \\ & + (n-1)(n+1)(n+2)(\beta(2))^2 - 2(n-1)\beta(2)/n\}dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned} & (2/3)(12n^6 - 138n^5 + 1140n^4 - 4175n^3 + 5154n^2 + 960n - 2400)/n^7 \\ & < (2/3)(12n^7 + 321n^6 + 4278n^5 + 26473n^4 + 94356n^3 + 202644n^2 + 246240n + 129600) \\ & /[(n+3)^2(n+4)^2(n+5)^2(n+6)^2] \end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} & 27n^{13} + 1362n^{12} + 7548n^{11} - 41910n^{10} - 680668n^9 - 2351688n^8 + 5046335n^7 \\ & + 51774858n^6 + 82716996n^5 - 189437736n^4 - 696124800n^3 - 418003200n^2 \\ & + 466560000n + 311040000 > 0 \end{aligned}$$

จัดกลุ่มใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} & (27n^{13} - 2351688n^8) + (1362n^{12} - 680668n^9) + (7548n^{11} - 41910n^{10}) + (5046335n^7 \\ & - 189437736n^4) + (51774858n^6 - 696124800n^3) + (82716996n^5 - 418003200n^2) \\ & + (466560000n + 311040000) > 0 \end{aligned}$$

$$(27n^5 - 2351688)n^8 + (1362n^3 - 680668)n^9 + (7548n - 41910)n^{10} + (5046335n^3 - 189437736)n^4 + (51774858n^3 - 696124800)n^3 + (82716996n^3 - 418003200)n^2 + (466560000n + 311040000) > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 10$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้ว $\int_0^2 TT_3(l)dl < \int_0^2 TT_5(l)dl$

$$4.2) \int_0^2 TT_5(l)dl < \int_0^2 TT_4(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{l^2(1-\beta(2))^2 - 2l[(1+(n-1)(\beta(2))^2/n - (2n-1)(\beta(2))/n] + 1 \\ & + (n-1)(n+1)(n+2)(\beta(2))^2 - 2(n-1)\beta(2)/n\}dl \\ & < \int_0^2 \{l^2(1-\beta(1))^2 - 2l[(1+(n-1)(\beta(1))^2/n - (2n-1)(\beta(1))/n] + 1 \\ & + (n-1)(n+1)(n+2)(\beta(1))^2 - 2(n-1)\beta(1)/n\}dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned} & (2/3)(12n^7 + 321n^6 + 4278n^5 + 26473n^4 + 94356n^3 + 202644n^2 + 246240n + 129600) \\ & /[(n+3)^2(n+4)^2(n+5)^2(n+6)^2] \\ & < (4/3)(6n^3 + 3n^2 + 3n + 2)/[(n+1)^2(n+2)^2] \end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$45n^{10} + 606n^9 + 6750n^8 + 46932n^7 + 161937n^6 + 157374n^5 - 633924n^4 - 2161944n^3 - 2384640n^2 - 777600n > 0$$

$$3n(5n^3 + 39n^2 + 114n + 120)(3n^6 + 17n^5 + 249n^4 + 727n^3 - 960n^2 - 4572n - 2160) > 0$$

$$3n(5n^3 + 39n^2 + 114n + 120)[3n^6 + (17n^5 - 960n^2) + (249n^4 - 4572n) + (727n^3 - 2160)] > 0$$

$$3n(5n^3 + 39n^2 + 114n + 120)[3n^6 + (17n^3 - 960)n^2 + (249n^3 - 4572)n + (727n^3 - 2160)] > 0$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 10$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น อสมการเป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้ว $\int_0^2 TT_5(l)dl < \int_0^2 TT_4(l)dl$

$$4.3) \int_0^2 TT_4(l)dl < \int_0^2 TT_1(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{l^2(1-\beta(1))^2 - 2l[(1+(n-1)(\beta(1))^2/n - 2n-1)(\beta(1))/n] + 1 \\ & + (n-1)(n+1)(n+2)(\beta(1))^2 - 2(n-1)\beta(1)/n\}dl \\ & < \int_0^2 2(2n+1)/[(n+1)(n+2)]dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$(4/3)(6n^3 + 3n^2 + 3n + 2)/[(n+1)^2(n+2)^2] < 4(2n+1)/[(n+1)(n+2)]$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น $18n^2 + 18n + 4 > 0$ เห็นได้ชัดว่าอสมการเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกใด ๆ

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้ว $\int_0^2 TT_4(l)dl < \int_0^2 TT_1(l)dl$

$$4.4) \int_0^2 TT_1(l)dl < \int_0^2 TT_2(l)dl \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 2(2n+1)/[(n+1)(n+2)]dl &< \int_0^2 \{l^2(1-\beta(-2))^2 - 2l[1+(n-1)(\beta(-2))^2/n \\ &\quad - 2n-1)(\beta(-2))/n] + 1+(n-1)(n+1)(n+2)(\beta(-2))^2 \\ &\quad - 2(n-1)\beta(-2)/n\}dl \end{aligned}$$

ได้ผลอินทิกรัลเป็น

$$\begin{aligned} 4(2n+1)/[(n+1)(n+2)] &< (2/3)(12n^{10} + 177n^9 - 1086n^8 - 73925n^7 + 1381116n^6 \\ &\quad - 11206119n^5 + 49560942n^4 - 117129924n^3 + 111181032n^2 \\ &\quad + 32441472n - 54867456)/n^{11} \end{aligned}$$

จัดรูปอสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} 207n^{11} - 531n^{10} - 76829n^9 + 1157169n^8 - 7210621n^7 + 18704817n^6 + 9140664n^5 \\ - 141086856n^4 + 131724720n^3 + 264819024n^2 - 99719424n - 109734912 > 0 \end{aligned}$$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า อสมการนี้เป็นจริง สำหรับทุก ๆ

จำนวนเต็มบวก $n \geq 10$ ดังนี้

ให้ $p(n)$ แทนข้อความตามอสมการข้างต้น

(1) $p(10)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 207(10)^{11} - 531(10)^{10} - 76829(10)^9 + 1157169(10)^8 - 7210621(10)^7 + 18704817(10)^6 \\ + 9140664(10)^5 - 141086856(10)^4 + 131724720(10)^3 + 264819024(10)^2 - 99719424(10) \\ - 109734912 = 536804533248 > 0 \end{aligned}$$

(2) ให้ n แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geq 10$ และ $p(n)$ เป็นจริง

พิจารณา $p(n+1)$:

$$\begin{aligned}
& 207(n+1)^{11} - 531(n+1)^{10} - 76829(n+1)^9 + 1157169(n+1)^8 - 7210621(n+1)^7 \\
& + 18704817(n+1)^6 + 9140664(n+1)^5 - 141086856(n+1)^4 + 131724720(n+1)^3 \\
& + 264819024(n+1)^2 - 99719424(n+1) - 109734912 \\
= & 207n^{11} + 1746n^{10} - 70754n^9 + 475968n^8 - 714523n^7 - 5838310n^6 + 25029357n^5 \\
& + 4095160n^4 - 161173196n^3 + 63650280n^2 + 376766093n + 67717428 \\
= & (207n^{11} - 531n^{10} - 76829n^9 + 1157169n^8 - 7210621n^7 + 18704817n^6 + 9140664n^5 \\
& - 141086856n^4 + 131724720n^3 + 264819024n^2 - 99719424n - 109734912) \\
& + (2277n^{10} + 6075n^9 - 681201n^8 + 6496098n^7 - 24543127n^6 + 15888693n^5 \\
& + 145182016n^4 - 292897916n^3 - 201168744n^2 + 476485517n + 177452340)
\end{aligned}$$

วงเล็บแรกมีค่ามากกว่าศูนย์ตาม $p(n)$ วงเล็บหลังจัดรูปใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
& (n-9)(2277n^9 + 26568n^8 - 442089n^7 + 2517297n^6 - 1887454n^5 - 1098393n^4 \\
& + 135296479n^3 + 924770395n^2 + 8121764811n + 73572368816) + 662328771684 \\
= & (n-9)[(2277n^9 + 26568n^8 - 442089n^7) + 2000000n^6 + (500000n^6 - 1887454n^5) \\
& + (17297n^6 - 1098393n^4) + 135296479n^3 + 924770395n^2 + 8121764811n + 73572368816]] \\
& + 662328771684 \\
= & (n-9)[(2277n^2 + 26568n - 442089)n^7 + 2000000n^6 + (500000n - 1887454)n^5 \\
& + (17297n^2 - 1098393)n^4 + 135296479n^3 + 924770395n^2 + 8121764811n \\
& + 73572368816] + 662328771684
\end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อ $n \geq 10$ แต่ละเทอมมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้ว $\int_0^2 TT_1(l)dl < \int_0^2 TT_2(l)dl$

สรุป สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 10$ แล้ว $\hat{\theta}_{2(-1)}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{2(2)}^2$, $\hat{\theta}_{2(1)}^2$, $\hat{\theta}_{2MMSE}^2$ และ $\hat{\theta}_{2(-2)}^2$ ตามลำดับ

2.2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี ELECTRE

ในการทำนองเดียวกับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดหนึ่งพารามิเตอร์ θ เราสามารถเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี ELECTRE ได้ดัชนีความสอดคล้อง (C_{pq}) และ ไม่สอดคล้อง (D_{pq}) แสดงผลลัพธ์ในรูปเมตริกซ์ (ภาคผนวก ข)

ค่าต่าง ๆ ในเมตริกซ์ C และ D นำไปหาดัชนีความสอดคล้องสุทธิ (C_p) ดัชนีความไม่สอดคล้องสุทธิ (D_p) และ ดัชนี ELECTRE (EI_p) ของแต่ละตัวประมาณค่า ได้ผลการคำนวณและจัดอันดับ ในแต่ละแบบของการถ่วงน้ำหนัก ดังแสดงในตารางที่ 69 – 71

สรุปผลการจัดอันดับโดยภาพรวม เมื่อใช้วิธี ELECTRE ทุกแบบการถ่วงน้ำหนัก โดยใช้ค่าเฉลี่ยของดัชนีบรรทัดฐาน ได้ผลดังในตารางที่ 42

ตารางที่ 42 สรุปผลการจัดอันดับตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ โดยใช้วิธี ELECTRE

n	θ^2	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1	w_2	w_3		
10	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	-0.6127	-0.7593	-0.7673	-0.7131	5
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	-0.4215	0.2343	-0.0575	-0.0816	4
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.5847	0.3054	0.4760	0.4554	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.1806	-0.2446	-0.0711	-0.0450	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.2690	0.4642	0.4199	0.3844	2
15	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	-0.5774	-0.7988	-0.7213	-0.6991	5
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	-0.4608	0.0527	-0.2565	-0.2215	4
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.5894	0.3968	0.5267	0.5043	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.1687	-0.0907	0.0936	0.0572	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.2802	0.4399	0.3575	0.3592	2

ตารางที่ 42 (ต่อ)

n	$\hat{\theta}^2$	ดัชนีบรรทัดฐาน			ค่าเฉลี่ย	อันดับ
		w_1	w_2	w_3		
20	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	-0.5772	-0.7954	-0.6710	-0.6812	5
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	-0.4573	-0.0923	-0.3525	-0.3007	4
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.5937	0.4716	0.5586	0.5413	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.1565	0.0503	0.1809	0.1292	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.2843	0.3659	0.2840	0.3114	2
25	$\hat{\theta}_{2MMSE}^2$	-0.5846	-0.7604	-0.6322	-0.6591	5
	$\hat{\theta}_{2(-2)}^2$	-0.4453	-0.2090	-0.4032	-0.3525	4
	$\hat{\theta}_{2(-1)}^2$	0.5970	0.5205	0.5767	0.5648	1
	$\hat{\theta}_{2(1)}^2$	0.1463	0.1680	0.2299	0.1814	3
	$\hat{\theta}_{2(2)}^2$	0.2866	0.2809	0.2287	0.2654	2

จากตารางที่ 42 จะเห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบตัวประมาณค่าของ θ^2 ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังชนิดสองพารามิเตอร์ โดยวิธี ELECTRE ทั้งสามแบบ ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดคือ $\hat{\theta}_{2(-1)}^2$ รองลงมาคือ $\hat{\theta}_{2(2)}^2$, $\hat{\theta}_{2(1)}^2$, $\hat{\theta}_{2(-2)}^2$ และ $\hat{\theta}_{2MMSE}^2$ ตามลำดับ