บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในบทนี้เรานำเสนอตัวประมาณค่าที่ประยุกต์มาจากแนวคิดของ Kadilar and Cingi (2004, 2005) แต่ละตัว แล้วเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าในรูปของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และสุดท้ายเราแสดงตัวอย่างการคำนวณค่าต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนผลที่ได้ในเชิงทฤษฎี

ตัวประมาณค่าที่นำเสนอ

1. ตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกที่ประยุกต์มาจากแนวความคิดของ Kadilar and Cingi (2004)

$$\bar{y}_{RS.new1} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{prh} \tag{4.1}$$

2. ตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกที่ประยุกต์มาจากแนวความคิดของ Kadilar and Cingi (2005)

$$\bar{y}_{RS.new2} = k\bar{y}_{RS} \tag{4.2}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าที่นำเสนอ

1. ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\bar{y}_{RS.new1}$

$$\bar{y}_{RS.new1} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{prh}$$

โดยที่

$$\bar{y}_{prh} = \frac{\bar{y}_h + b_h\left(\bar{X}_h - \bar{x}_h\right)}{\bar{x}_h}\bar{X}_h = \hat{R}_{prh}\bar{X}_h$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} MSE\left(\bar{y}_{RS.new1}\right) &= MSE\left(\sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{prh}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 MSE\left(\bar{y}_{prh}\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

หา $MSE\left(\overline{y}_{prh}\right)$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ในสมการ (2.10) จะได้

$$h\left(\overline{x}_h,\overline{y}_h\right)\cong h\left(\overline{X}_h,\overline{Y}_h\right)+\left.\frac{\partial h(c,d)}{\partial c}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)+\left.\frac{\partial h(c,d)}{\partial d}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)$$

กำหนดให้ $h\left(\overline{x}_h,\overline{y}_h\right)=\hat{R}_{prh}$ และ $h\left(\overline{X}_h,\overline{Y}_h\right)=R_h$ จะได้

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{prh}-R_h &\cong \left.\frac{\partial\left(\left(\overline{y}_h+b_h\left(\overline{X}_h-\overline{x}_h\right)\right)/\overline{x}_h\right)}{\partial\overline{x}_h}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)\\
&\quad+\left.\frac{\partial\left(\left(\overline{y}_h+b_h\left(\overline{X}_h-\overline{x}_h\right)\right)/\overline{x}_h\right)}{\partial\overline{y}_h}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)\\
&\cong \frac{\partial}{\partial\overline{x}_h}\left.\left\{\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h}+\frac{b_h\left(\overline{X}_h-\overline{x}_h\right)}{\overline{x}_h}\right\}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial\overline{y}_h}\left.\left\{\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h}+\frac{b\left(\overline{X}_h-\overline{x}_h\right)}{\overline{x}_h}\right\}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)\\
&\cong \left.-\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h^2}-\frac{b_h\overline{X}_h}{\overline{x}_h^2}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)+\left.\frac{1}{\overline{x}_h}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)\\
&\cong -\left.\left(\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h^2}+\frac{b_h\overline{X}_h}{\overline{x}_h^2}\right)\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)+\left.\frac{1}{\overline{x}_h}\right|_{\overline{X}_h,\overline{Y}_h}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)\\
&\cong -\left(\frac{\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h}{\overline{X}_h^2}\right)\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)+\frac{1}{\overline{X}_h}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)
\end{aligned}$$

โดยที่ $B_h=\dfrac{S_{XYh}}{S_{Xh}^2}=\dfrac{\rho_h S_{Yh}}{S_{Xh}}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{R}_{prh}-R_h\right)^2 &\cong\left[\frac{\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h}{\overline{X}_h^2}\right]^2E\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)^2-2\frac{\left(\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h^3}E\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)\\
&\quad+\frac{1}{\overline{X}_h^2}E\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)^2\\
&\cong\frac{\left(\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h\right)^2}{\overline{X}_h^4}Var\left(\overline{x}_h\right)-2\frac{\left(\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h^3}Cov\left(\overline{x}_h,\overline{y}_h\right)+\frac{1}{\overline{X}_h^2}Var\left(\overline{y}_h\right)\\
&\cong\frac{1}{\overline{X}_h^2}\left\{\frac{\left(\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h\right)^2}{\overline{X}_h^2}Var\left(\overline{x}_h\right)-2\frac{\left(\overline{Y}_h+B_h\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h}Cov\left(\overline{x}_h,\overline{y}_h\right)+Var\left(\overline{y}_h\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\bar{X}_h^{\,2} E\left(\hat{R}_{prh}-R_h\right)^2 \cong \frac{\left(\bar{Y}_h+B_h\bar{X}_h\right)^2}{\bar{X}_h^{\,2}} Var\left(\bar{x}_h\right) - 2\frac{\left(\bar{Y}_h+B_h\bar{X}_h\right)}{\bar{X}_h} Cov\left(\bar{x}_h,\bar{y}_h\right)+Var\left(\bar{y}_h\right)$$

เมื่อ $S_{XYh}=\rho_h S_{Xh} S_{Yh}$

$$\begin{aligned}
MSE\left(\bar{y}_{prh}\right) &\cong \bar{X}_h^{\,2} E\left(\hat{R}_{prh}-R_h\right)^2 \\
&\cong \frac{\bar{Y}_h^2+2B_h\bar{Y}_h\bar{X}_h+B_h^2\bar{X}_h^2}{\bar{X}_h^2} Var\left(\bar{x}_h\right) - 2\frac{\left(\bar{Y}_h+B_h\bar{X}_h\right)}{\bar{X}_h} Cov\left(\bar{x}_h,\bar{y}_h\right)+Var\left(\bar{y}_h\right) \\
&\cong \frac{1-f_h}{n_h}\left\{\frac{\bar{Y}_h^2+2B_h\bar{X}_h\bar{Y}_h+B_h^2\bar{X}_h^2}{\bar{X}_h^2}S_{Xh}^2 - \frac{2\bar{Y}_h}{\bar{X}_h}S_{XYh} - 2B_hS_{XYh}+S_{Yh}^2\right\} \\
&\cong \frac{1-f_h}{n_h}\left\{\frac{\bar{Y}_h^2S_{Xh}^2}{\bar{X}_h^2} + \frac{2B_h\bar{Y}_hS_{Xh}^2}{\bar{X}_h} + B_h^2S_{Xh}^2 - \frac{2\bar{Y}_h}{\bar{X}_h}S_{XYh} - 2B_hS_{XYh}+S_{Yh}^2\right\} \\
&\cong \frac{1-f_h}{n_h}\left\{R_h^2S_{Xh}^2 + 2R_hS_{Xh}^2\frac{S_{XYh}}{S_{Xh}^2} + \frac{S_{XYh}^2}{S_{Xh}^4}S_{Xh}^2 - 2R_hS_{XYh} - 2S_{XYh}\frac{S_{XYh}}{S_{Xh}^2}+S_{Yh}^2\right\} \\
&\cong \frac{1-f_h}{n_h}\left\{R_h^2S_{Xh}^2 + 2R_hS_{XYh} + \frac{S_{XYh}^2}{S_{Xh}^2} - 2R_hS_{XYh} - 2\frac{S_{XYh}^2}{S_{Xh}^2}+S_{Yh}^2\right\} \\
&\cong \frac{1-f_h}{n_h}\left\{R_h^2S_{Xh}^2 - \frac{S_{XYh}^2}{S_{Xh}^2}+S_{Yh}^2\right\}
\end{aligned}$$

แทนค่าใน (4.3) จะได้

$$MSE\left(\bar{y}_{RS.new1}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{\left(1-f_h\right)}{n_h}\left(R_h^2S_{Xh}^2-\rho_h^2S_{Yh}^2+S_{Yh}^2\right) \tag{4.4}$$

2. ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\bar{y}_{RS.new2}$

$$\bar{y}_{RS.new2} = k\bar{y}_{RS}$$

พิจารณาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new2}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right) &= E\left(\bar{y}_{RS.new2}-\bar{Y}\right)^2 \\
&= E\left(\bar{y}_{RS.new2}^2 - 2\bar{y}_{RS.new2}\bar{Y}+\bar{Y}^2\right) \\
&= E\left(k^2\bar{y}_{RS}^2 - 2k\bar{y}_{RS}\bar{Y}+\bar{Y}^2\right) \\
&= k^2E\left(\bar{y}_{RS}^2\right) - 2k\bar{Y}E\left(\bar{y}_{RS}\right)+\bar{Y}^2 \\
&= k^2E\left(\bar{y}_{RS}^2\right) - 2k\bar{Y}E\left(\bar{y}_{RS}\right)+\bar{Y}^2 + k^2\left[E\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]^2 - k^2\left[E\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]^2 \\
&= k^2\left[E\left(\bar{y}_{RS}^2\right)-\left(E\left(\bar{y}_{RS}\right)\right)^2\right]+\left[kE\left(\bar{y}_{RS}\right)-\bar{Y}\right]^2
\end{aligned}$$

จากความเอนเอียงของตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS}$ คือ $b(\bar{y}_{RS}) = E(\bar{y}_{RS}) - \bar{Y}$ หรือ $E(\bar{y}_{RS}) = \bar{Y} + b(\bar{y}_{RS})$ ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned} MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right) &= k^2 Var\left(\bar{y}_{RS}\right) + \left[k\left(\bar{Y} + b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right) - \bar{Y}\right]^2 \\ &= k^2 Var\left(\bar{y}_{RS}\right) + \bar{Y}^2\left(k-1\right)^2 + 2k\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right)\left(k-1\right) + k^2 b^2\left(\bar{y}_{RS}\right) \\ &= k^2 MSE\left(\bar{y}_{RS}\right) + \bar{Y}^2\left(k-1\right)^2 + 2k\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right)\left(k-1\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้

$$MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right) = k^2 MSE\left(\bar{y}_{RS}\right) + \bar{Y}\left(k-1\right)\left[\bar{Y}\left(k-1\right) + 2kb\left(\bar{y}_{RS}\right)\right] \tag{4.5}$$

โดยที่

$$MSE\left(\bar{y}_{RS}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{\left(1-f_h\right)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - 2R_h S_{XYh} + S_{Yh}^2\right) + \left[\sum_{h=1}^{L} W_h \frac{\left(1-f_h\right)}{n_h \bar{X}_h}\left(R_h S_{Xh}^2 - S_{XYh}\right)\right]^2$$

ต่อไปหาความเอนเอียงของตัวประมาณค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจาก

$$\begin{aligned} b\left(\bar{y}_{RS\,new2}\right) &= E\left(k\bar{y}_{RS}\right) - \bar{Y} \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h E\left(k\hat{R}_h \bar{X}_h - \bar{Y}_h\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h E\left(\frac{k\bar{y}_h \bar{X}_h - R_h \bar{x}_h \bar{X}_h}{\bar{x}_h}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h E\left(\frac{\bar{X}_h\left(k\bar{y}_h - R_h \bar{x}_h\right)}{\bar{x}_h}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

และโดยการกระจายเทย์เลอร์ของ $\frac{1}{\bar{x}_h}$ รอบค่า $\bar{X}_h$ เราจะได้

$$\frac{1}{\bar{x}_h} = \frac{1}{\bar{X}_h} - \frac{\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)}{\bar{X}_h^2} + \frac{\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^2}{\bar{X}_h^3} - \frac{\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^3}{\bar{X}_h^4} + \cdots \tag{4.7}$$

โดยทั่วไปเทอม $\frac{\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^2}{\bar{X}_h^3} - \frac{\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^3}{\bar{X}_h^4} + \cdots$ มีค่าน้อยใกล้ศูนย์ ดังนั้นเราอาจประมาณค่า $\frac{1}{\bar{x}_h}$ ด้วยสองเทอมแรกของสมการ (4.7) (Cochran, 1977) นั่นคือ

$$\frac{1}{\bar{x}_h} \cong \frac{1}{\bar{X}_h}\left(1 - \frac{\bar{x}_h - \bar{X}_h}{\bar{X}_h}\right) \tag{4.8}$$

นำ (4.8) ไปแทนลงในสมการ (4.6) จะได้

$$
\begin{aligned}
b\left(\bar{y}_{RS\,new2}\right) &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h E\left\{\left(k\bar{y}_h - R_h\bar{x}_h\right)\left(1-\frac{\bar{x}_h-\bar{X}_h}{\bar{X}_h}\right)\right\} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{E\left(k\bar{y}_h - R_h\bar{x}_h\right) - \frac{1}{\bar{X}_h}E\left[k\bar{y}_h\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)\right] + \frac{R_h}{\bar{X}_h}E\left[\bar{x}_h\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{(k-1)\bar{Y}_h + \frac{R_h}{\bar{X}_h}E\left[\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)^2\right] - \frac{k}{\bar{X}_h}E\left[\left(\bar{y}_h-\bar{Y}_h\right)\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{(k-1)\bar{Y}_h + R_h S_{Xh}^2 - kS_{XYh}\right\} \\
&= (k-1)\bar{Y} + \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{(1-f_h)}{n_h\bar{X}_h}\left(R_h S_{Xh}^2 - kS_{XYh}\right) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

ต่อไปเราจะหาค่า k ที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\bar{y}_{RS.new2}$ มีค่าต่ำสุดด้วยเงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right)}{\partial k} &= \frac{\partial}{\partial k}\left\{k^2 MSE\left(\bar{y}_{RS}\right) + \bar{Y}(k-1)\left[\bar{Y}(k-1) + 2kb\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]\right\} \\
&= 2kMSE\left(\bar{y}_{RS}\right) + 2\bar{Y}^2(k-1) + 4k\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right) - 2\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ซึ่งทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\bar{Y}\left[\bar{Y}+b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]}{MSE\left(\bar{y}_{RS}\right)+\bar{Y}\left[\bar{Y}+2b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]} \\
&= \frac{\bar{Y}\left[\bar{Y}+b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]}{Var\left(\bar{y}_{RS}\right)+\left(b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right)^2+\bar{Y}^2+2\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right)} \\
&= \frac{\bar{Y}\left[\bar{Y}+b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]}{Var\left(\bar{y}_{RS}\right)+\left[\bar{Y}+b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]^2} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

และเงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ที่ทำให้ $MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right)$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ

$$
k = \frac{\bar{Y}\left[\bar{Y}+b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]}{Var\left(\bar{y}_{RS}\right)+\left[\bar{Y}+b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]^2}
$$ คือ

$$
\frac{\partial^2 MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right)}{(\partial k)^2} = \frac{\partial}{\partial k}\left[2kMSE\left(\bar{y}_{RS}\right)+2\bar{Y}^2k-2\bar{Y}^2+4k\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right)-2\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2MSE\left(\bar{y}_{RS}\right) + 2\bar{Y}^2 + 4\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right) \\
&= 2\left\{Var\left(\bar{y}_{RS}\right) + \left(b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right)^2\right\} + 2\bar{Y}^2 + 4\bar{Y}b\left(\bar{y}_{RS}\right) \\
&= 2Var\left(\bar{y}_{RS}\right) + 2\left[\bar{Y} + b\left(\bar{y}_{RS}\right)\right]^2 \\
&> 0 \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

เป็นจริงเสมอสำหรับทุกค่าของ k และ $b\left(\bar{y}_{RS}\right)$

ดังนั้นตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกของค่าเฉลี่ยประชากรภายใต้การชักตัวอย่างอย่างง่ายแบบแบ่งเป็นชั้นภูมิหรือ $\bar{y}_{RS.new2} = k\bar{y}_{RS}$ มีค่า $MSE\left(\bar{y}_{RS.new2}\right)$ ต่ำสุดก็ต่อเมื่อค่า k ได้มาจากสมการ (4.10)

เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าที่นำเสนอนั้นผู้วิจัยได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS}$ กับ $\bar{y}_{RS.new1}$ $\bar{y}_{RS.new2}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ กับ $\bar{y}_{RS.new2}$ ตามลำดับ ดังนี้

1. **เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$** สามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
MSE\left(\bar{y}_{RS.new1}\right) &< MSE\left(\bar{y}_{RS}\right) \\
\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{\left(1-f_h\right)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - \rho_h^2 S_{Yh}^2 + S_{Yh}^2\right) &< \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{\left(1-f_h\right)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - 2R_h S_{XYh} + S_{Yh}^2\right) \\
\rho_h^2 S_{Yh}^2 &> 2R_h S_{XYh} \\
\rho_h^2 &> \frac{2\bar{Y}_h S_{XYh}}{\bar{X}_h S_{Yh}^2} \\
\rho_h^2 &> \frac{2\bar{Y}_h \rho_h S_{Xh} S_{Yh}}{\bar{X}_h S_{Yh}^2} \\
\rho_h^2 &> \frac{2\bar{Y}_h \rho_h S_{Xh}}{\bar{X}_h S_{Yh}} \\
\rho_h &> \frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจะเห็นว่า $MSE\left(\bar{y}_{RS.new1}\right)$ มีค่าน้อยกว่า $MSE\left(\bar{y}_{RS}\right)$ หรือ $\bar{y}_{RS.new1}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ ก็ต่อเมื่อค่า ρ_h ในแต่ละชั้นภูมิสอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข (4.12)

2. เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
MSE(\bar{y}_{RS.new2})-MSE(\bar{y}_{RS}) &=(k^2-1)MSE(\bar{y}_{RS})+\bar{Y}(k-1)\left[\bar{Y}(k-1)+2kb(\bar{y}_{RS})\right]\\
&=(k-1)\left\{(k+1)MSE(\bar{y}_{RS})+\bar{Y}\left[\bar{Y}(k-1)+2kb(\bar{y}_{RS})\right]\right\}\\
&=(k-1)\left\{MSE(\bar{y}_{RS})-\bar{Y}^2+k\left[MSE(\bar{y}_{RS})+\bar{Y}^2\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+2\bar{Y}b(\bar{y}_{RS})\right\}\right]\\
&=(k-1)\left\{MSE(\bar{y}_{RS})-\bar{Y}^2+k\left[Var(\bar{y}_{RS})+\left(b(\bar{y}_{RS})\right)^2\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\bar{Y}^2+2\bar{Y}b(\bar{y}_{RS})\right\}\right]\\
&=(k-1)\left\{MSE(\bar{y}_{RS})-\bar{Y}^2+k\left[Var(\bar{y}_{RS})+\left(\bar{Y}+b(\bar{y}_{RS})\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

ซึ่ง $MSE(\bar{y}_{RS.new2})-MSE(\bar{y}_{RS})<0$ ก็ต่อเมื่อ

$$(k-1)\left\{MSE(\bar{y}_{RS})-\bar{Y}^2+k\left[Var(\bar{y}_{RS})+\left(\bar{Y}+b(\bar{y}_{RS})\right)^2\right]\right\}<0$$

หรือ

$$(k-1)\left\{MSE(\bar{y}_{RS})-R^2\bar{X}^2+k\left[Var(\bar{y}_{RS})+\left(R\bar{X}+b(\bar{y}_{RS})\right)^2\right]\right\}<0 \qquad (4.13)$$

ต่อไปเราจะหาเงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k ที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณีดังนี้

กรณีที่ 1. ถ้า $k<1$

จากอสมการ (4.13) หารตลอดด้วย $(k-1)$ เราจะได้ว่า

$$MSE(\bar{y}_{RS})-R^2\bar{X}^2+k\left[Var(\bar{y}_{RS})+\left(R\bar{X}+b(\bar{y}_{RS})\right)^2\right]>0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$1>k>\frac{R^2\bar{X}^2-MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS})+\left[R\bar{X}+b(\bar{y}_{RS})\right]^2}$$

ในกรณีนี้เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$\frac{R^2\bar{X}^2-MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS})+\left[R\bar{X}+b(\bar{y}_{RS})\right]^2}<k<1 \qquad (4.14)$$

กรณีที่ 2. ถ้า $k > 1$

จากอสมการ (4.13) หารตลอดด้วย $(k-1)$ เราจะได้ว่า

$$MSE(\bar{y}_{RS}) - R^2\bar{X}^2 + k\left[Var(\bar{y}_{RS}) + \left(R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right)^2\right] < 0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$1 < k < \frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2}$$

ในกรณีนี้เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$1 < k < \frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} \qquad (4.15)$$

ดังนั้นจากทั้งสองกรณี $MSE(\bar{y}_{RS.new2})$ มีค่าน้อยกว่า $MSE(\bar{y}_{RS})$ หรือ $\bar{y}_{RS.new2}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ ก็ต่อเมื่อค่า k สอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข (4.14) หรือ (4.15)

3. เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$MSE(\bar{y}_{RS.new1}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - \rho_h^2 S_{Yh}^2 + S_{Yh}^2\right)$$

$$MSE(\bar{y}_{RS.new2}) = k^2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - 2R_h S_{XYh} + S_{Yh}^2\right) + \bar{Y}(k-1)\left[k-1+2kb(\bar{y}_{RS})\right]$$

ให้ $\theta = \bar{Y}(k-1)\left[k-1+2kb(\bar{y}_{RS})\right]$ ดังนั้น

$$MSE(\bar{y}_{RS.new2}) < MSE(\bar{y}_{RS.new1})$$

$$k^2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - 2R_h S_{XYh} + S_{Yh}^2\right) + \theta < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - \rho_h^2 S_{Yh}^2 + S_{Yh}^2\right)$$

$$k^2 < \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - \rho_h^2 S_{Yh}^2 + S_{Yh}^2\right) - \theta}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\left(R_h^2 S_{Xh}^2 - 2R_h S_{XYh} + S_{Yh}^2\right)}$$

$$k < \sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}} \qquad (4.16)$$

ดังนั้นจะเห็นว่า $MSE(\bar{y}_{RS.new2})$ มีค่าน้อยกว่า $MSE(\bar{y}_{RS.new1})$ หรือ $\bar{y}_{RS.new2}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ ก็ต่อเมื่อค่า k มีค่าน้อยกว่าค่า $\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1})-\theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ในตัวอย่างสอดคล้องอสมการเงื่อนไข (4.16)

ตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาหรือทดสอบว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขจะมีความสอดคล้องกับผลลัพธ์ในเชิงทฤษฎีหรือไม่ ดังนั้นเราจึงนำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขสนับสนุนผลการศึกษาในเชิงทฤษฎีที่ได้ในหัวข้อที่ผ่านมา ซึ่งตัวอย่างที่เรานำมาเสนอในงานวิจัยนี้มี 4 ตัวอย่าง โดยตัวอย่างที่ 1 และ 3 เป็นข้อมูลที่มาจากงานวิจัยของ Kadilar and Cingi (2005) และตัวอย่างที่ 2 และ 4 เป็นข้อมูลที่มาจากงานวิจัยของ Koyuncu and Kadilar (2009)

ตัวอย่างที่ 1 ประชากรที่ใช้เป็นตัวอย่างการคำนวณจะใช้ข้อมูลของ Kadilar and Cingi (2005) ซึ่งเป็นข้อมูลปริมาณผลผลิตของแอปเปิ้ล (Y) และจำนวนต้นแอปเปิ้ล (X) ใน 854 หมู่บ้านของประเทศตุรกี ในปี 1999 ลักษณะของประชากรแสดงดังตาราง

ตารางที่ 1 แสดงลักษณะและค่าพารามิเตอร์ของประชากร

$N = 854$	$\bar{X} = 37600$	$\bar{Y} = 2930$	$S_X = 144794$	$S_Y = 17106$	$\rho = 0.92$	$C_X = 3.85$	$C_Y = 5.84$
$N_1 = 106$	$\bar{X}_1 = 24375$	$\bar{Y}_1 = 1536$	$S_{X1} = 49189$	$S_{Y1} = 6425$	$\rho_1 = 0.82$	$C_{X1} = 2.02$	$C_{Y1} = 4.18$
$N_2 = 106$	$\bar{X}_2 = 27421$	$\bar{Y}_2 = 2212$	$S_{X2} = 57461$	$S_{Y2} = 11552$	$\rho_2 = 0.86$	$C_{X2} = 2.09$	$C_{Y2} = 5.22$
$N_3 = 94$	$\bar{X}_3 = 72409$	$\bar{Y}_3 = 9384$	$S_{X3} = 160757$	$S_{Y3} = 29907$	$\rho_3 = 0.90$	$C_{X3} = 2.22$	$C_{Y3} = 3.19$
$N_4 = 171$	$\bar{X}_4 = 74365$	$\bar{Y}_4 = 5588$	$S_{X4} = 285603$	$S_{Y4} = 28643$	$\rho_4 = 0.99$	$C_{X4} = 3.84$	$C_{Y4} = 5.13$
$N_5 = 204$	$\bar{X}_5 = 26441$	$\bar{Y}_5 = 967$	$S_{X5} = 45403$	$S_{Y5} = 2390$	$\rho_5 = 0.71$	$C_{X5} = 1.72$	$C_{Y5} = 2.47$
$N_6 = 173$	$\bar{X}_6 = 9844$	$\bar{Y}_6 = 404$	$S_{X6} = 18794$	$S_{Y6} = 946$	$\rho_6 = 0.89$	$C_{X6} = 1.91$	$C_{Y6} = 2.34$

จากตัวอย่างตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณค่าที่นำเสนอ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกดั้งเดิม พิจารณาได้ดังนี้

1. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ คือ $\rho_h > \dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ พิจารณาดังนี้

ตารางที่ 2 แสดงค่าพารามิเตอร์เพื่อตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

ชั้นภูมิ (h)	ρ_h	$2C_{Xh}/C_{Yh}$
1	0.82	0.967
2	0.86	0.80
3	0.90	1.39
4	0.99	1.49
5	0.71	1.39
6	0.89	1.63

จากตารางที่ 2 เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข $\rho_h > \frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ จะเห็นว่าค่า ρ_h ที่ได้ในแต่ละชั้นภูมิมีค่าน้อยกว่าค่า $\frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ ยกเว้นในชั้นภูมิที่ 2 ซึ่งค่า ρ_h มีค่ามากกว่า $\frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ต่ำกว่า $\bar{y}_{RS}$

2. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณีดังนี้

2.1 ถ้า $k < 1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$\frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} < k < 1$$

2.2 ถ้า $k > 1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$1 < k < \frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเมื่อพิจารณาค่า k ที่คำนวณได้จากสมการ (4.10) เราพบว่า $\frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} = 1.19$ มีค่ามากกว่า $k = 1.09$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 1 แสดงว่าค่า k ที่คำนวณได้สอดคล้องกับอสมการในข้อ 2.2 จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

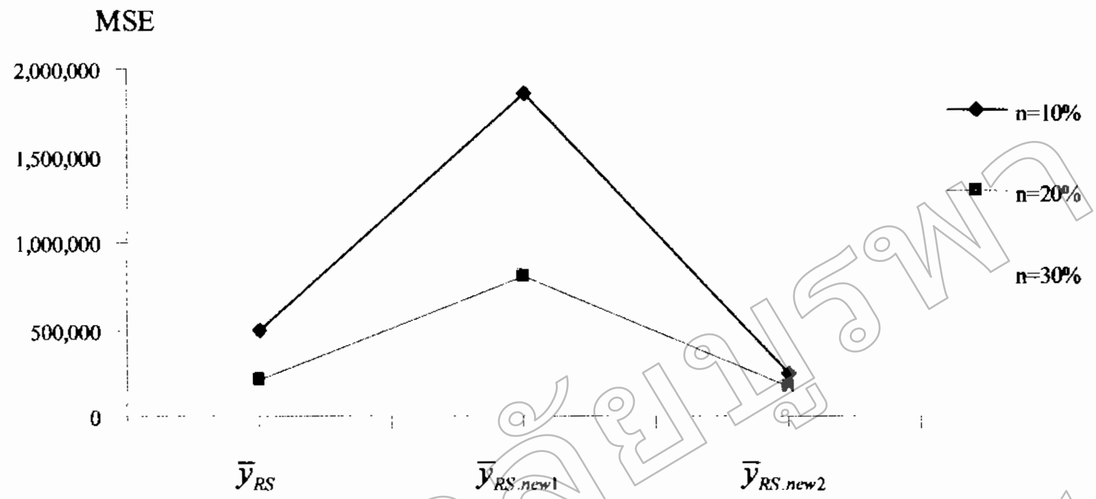
3. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ คือ $k < \sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งจากตัวอย่างข้างต้นคำนวณค่า $k = 1.09$, $MSE(\bar{y}_{RS}) = 300,738.22$, $MSE(\bar{y}_{RS.new1}) = 816,600.45$ และ $\theta = -148,792.67$ ดังนั้นจาก $\sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}} = 1.792$ เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข (4.16) คือ $k < \sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ จะเห็นว่าค่า k มีค่าน้อยกว่าค่า $\sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$

จากการตรวจสอบเงื่อนไขข้างต้นพบว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ มีประสิทธิภาพต่ำกว่า $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new2}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่าง คือ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน และการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวประมาณค่า	**MSE**		
	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 30\%$
$\bar{y}_{RS}$	491,237.87	214,243.24	125,915.44
$\bar{y}_{RS.new1}$	1,851,078.27	806,262.57	474,294.61
$\bar{y}_{RS.new2}$	**252,739.63**	**173,633.74**	**112,969.57**

จากตารางที่ 3 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน ปรากฏตามภาพดังนี้



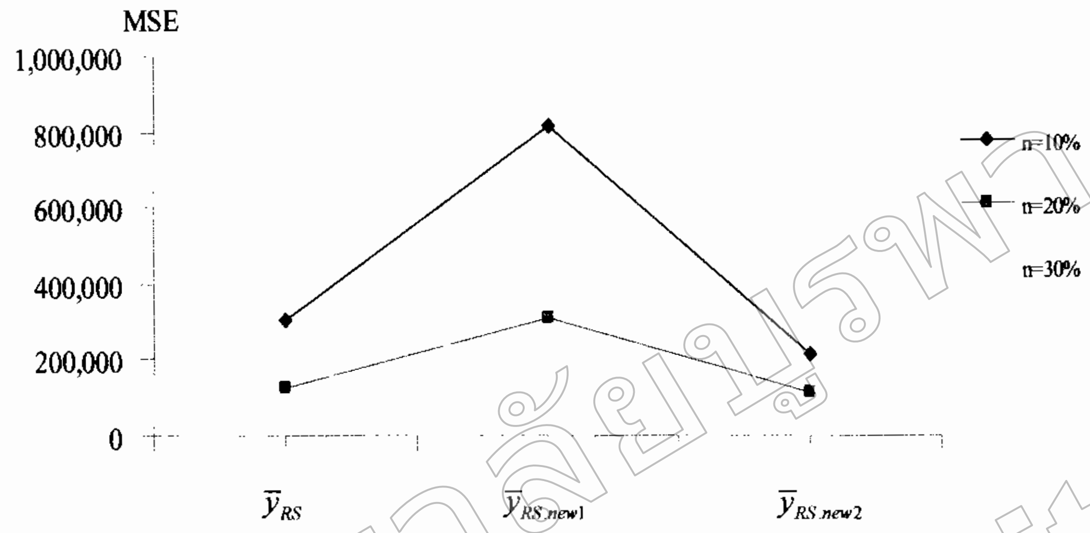
ภาพที่ 1 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

จากภาพที่ 1 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new2}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 3

ตารางที่ 4 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

ตัวประมาณค่า	**MSE**		
	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 30\%$
$\bar{y}_{RS}$	300,738.22	125,599.71	65,017.39
$\bar{y}_{RS.new1}$	816,600.45	311,380.66	138,679.12
$\bar{y}_{RS.new2}$	**211,709.35**	**111,386.31**	**61,215.17**

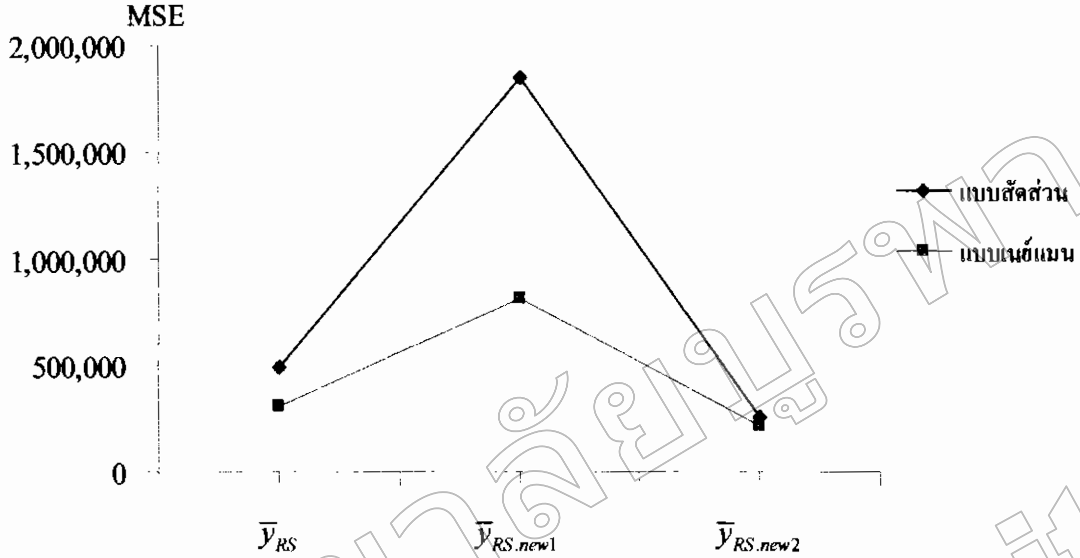
จากตารางที่ 4 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



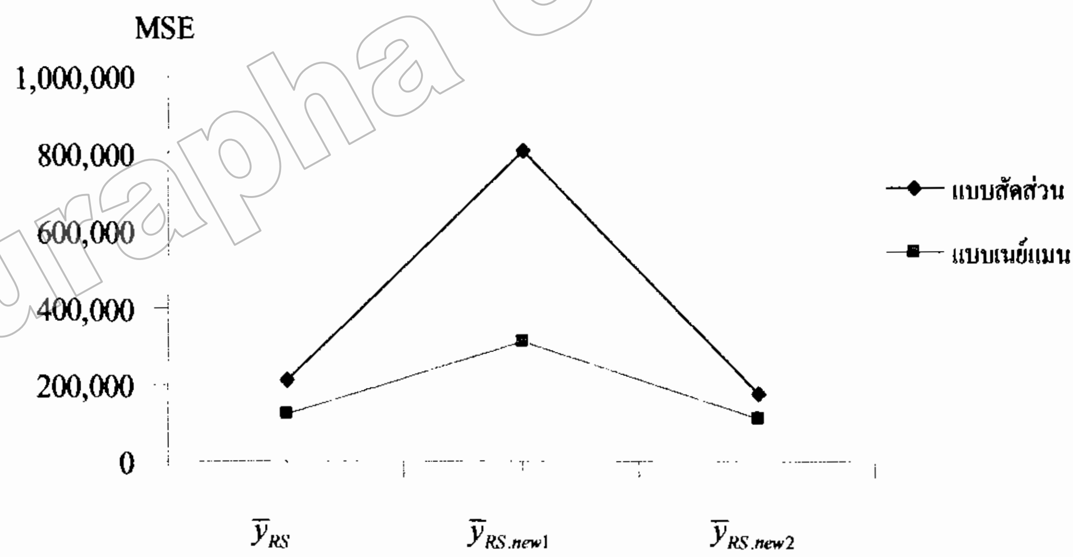
ภาพที่ 2 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 2 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\overline{y}_{RS.new2}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\overline{y}_{RS}$ และ $\overline{y}_{RS.new1}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 4

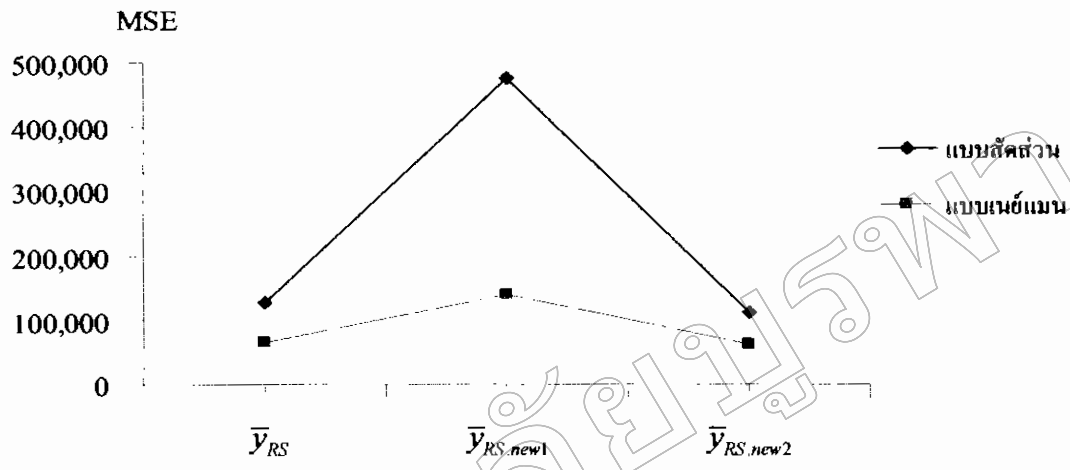
จากตารางที่ 3 และ 4 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10%, 20% และ 30% จากขนาดประชากร ซึ่งจำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



ภาพที่ 3 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 4 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 20% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 5 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 30% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 3, 4 และ 5 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าจะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นการประมาณค่าจะมีประสิทธิภาพสูงขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบการกำหนดขนาดตัวอย่างจะเห็นว่า การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด แสดงว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนมีประสิทธิภาพสูงกว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวอย่างที่ 2 ประชากรที่ใช้เป็นตัวอย่างการคำนวณจะใช้ข้อมูลของ Koyuncu and Kadilar (2009) ซึ่งเป็นข้อมูลของอาจารย์ผู้สอน (Y) และจำนวนนักเรียน (X) ของ 923 โรงเรียนโดยแบ่งเป็น 6 เขต ในประเทศตุรกี ปี 2007 ลักษณะของประชากรแสดงดังตาราง

ตารางที่ 5 แสดงลักษณะและค่าพารามิเตอร์ของประชากร

$N = 923$	$\bar{X} = 11440$	$\bar{Y} = 437$					
$N_1 = 127$	$\bar{X}_1 = 20805$	$\bar{Y}_1 = 704$	$S_{X1} = 30487$	$S_{Y1} = 884$	$\rho_1 = 0.94$	$C_{X1} = 1.47$	$C_{Y1} = 1.25$
$N_2 = 117$	$\bar{X}_2 = 9212$	$\bar{Y}_2 = 413$	$S_{X2} = 15181$	$S_{Y2} = 645$	$\rho_2 = 0.99$	$C_{X2} = 1.65$	$C_{Y2} = 1.56$
$N_3 = 103$	$\bar{X}_3 = 14309$	$\bar{Y}_3 = 573$	$S_{X3} = 27550$	$S_{Y3} = 1033$	$\rho_3 = 0.99$	$C_{X3} = 1.93$	$C_{Y3} = 1.80$
$N_4 = 170$	$\bar{X}_4 = 9479$	$\bar{Y}_4 = 425$	$S_{X4} = 18219$	$S_{Y4} = 811$	$\rho_4 = 0.98$	$C_{X4} = 1.92$	$C_{Y4} = 1.91$
$N_5 = 205$	$\bar{X}_5 = 5570$	$\bar{Y}_5 = 267$	$S_{X5} = 8498$	$S_{Y5} = 404$	$\rho_5 = 0.99$	$C_{X5} = 1.53$	$C_{Y5} = 1.51$
$N_6 = 201$	$\bar{X}_6 = 12998$	$\bar{Y}_6 = 394$	$S_{X6} = 23094$	$S_{Y6} = 712$	$\rho_6 = 0.97$	$C_{X6} = 1.78$	$C_{Y6} = 1.81$

จากตัวอย่างตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณค่าที่นำเสนอ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกดั้งเดิม พิจารณาได้ดังนี้

1. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS,new1}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS,new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ คือ $\rho_h > \frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ พิจารณาดังนี้

ตารางที่ 6 แสดงค่าพารามิเตอร์เพื่อตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS,new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

ชั้นภูมิ (h)	ρ_h	$2C_{Xh}/C_{Yh}$
1	0.94	2.471
2	0.99	2.115
3	0.99	2.144
4	0.98	2.011
5	0.99	2.026
6	0.97	1.967

จากตารางที่ 6 เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข $\rho_h > \frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ จะเห็นว่าค่า ρ_h ที่ได้ในแต่ละชั้นภูมิมีค่าน้อยกว่าค่า $\frac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS,new1}$ ต่ำกว่า $\bar{y}_{RS}$

2. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS,new2}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS,new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณีดังนี้

2.1 ถ้า $k < 1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$\frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} < k < 1$$

2.2 ถ้า $k > 1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$1 < k < \frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเมื่อพิจารณาค่า k ที่คำนวณได้จากสมการ (4.10) เราพบว่า $\frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} = 0.976$ มีค่าน้อยกว่า $k = 0.988$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1 แสดงว่าค่า k ที่คำนวณได้สอดคล้องกับอสมการในข้อ 2.1 จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

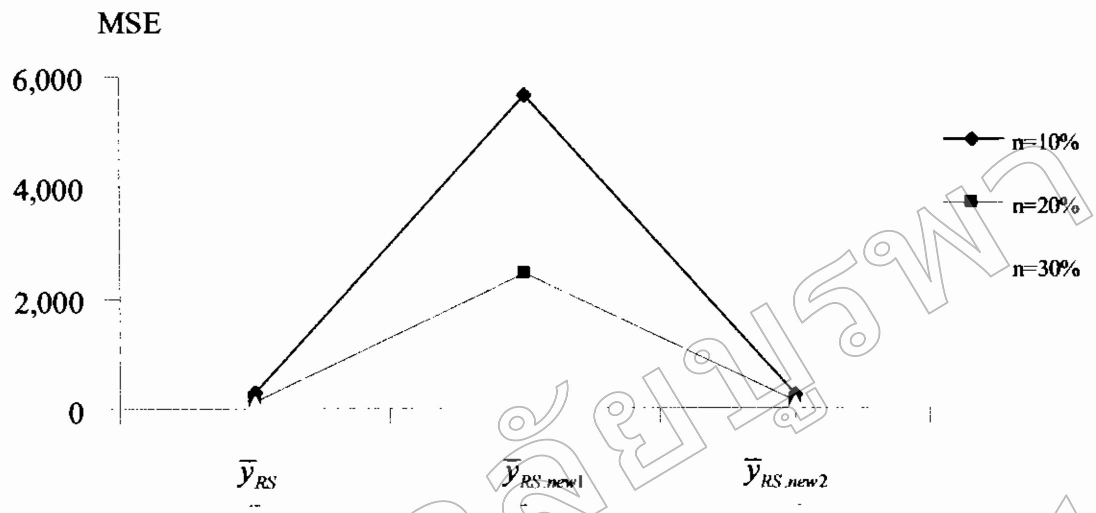
3. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ คือ $k < \sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งจากตัวอย่างข้างต้นคำนวณค่า $k = 0.988$, $MSE(\bar{y}_{RS}) = 289.17$, $MSE(\bar{y}_{RS.new1}) = 5,630.54$ และ $\theta = -21.37$ ดังนั้นจาก $\sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}} = 4.421$ เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข (4.16) คือ $k < \sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ จะเห็นว่าค่า k มีค่าน้อยกว่าค่า $\sqrt{\frac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$

จากการตรวจสอบเงื่อนไขข้างต้นพบว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ มีประสิทธิภาพต่ำกว่า $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new2}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่าง คือ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน และการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 7 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวประมาณค่า	**MSE**		
	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 30\%$
$\bar{y}_{RS}$	333.96	147.61	87.68
$\bar{y}_{RS.new1}$	6,201.19	2,728.29	1,607.81
$\bar{y}_{RS.new2}$	**293.25**	**139.62**	**84.84**

จากตารางที่ 7 จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนปรากฏตามภาพดังนี้



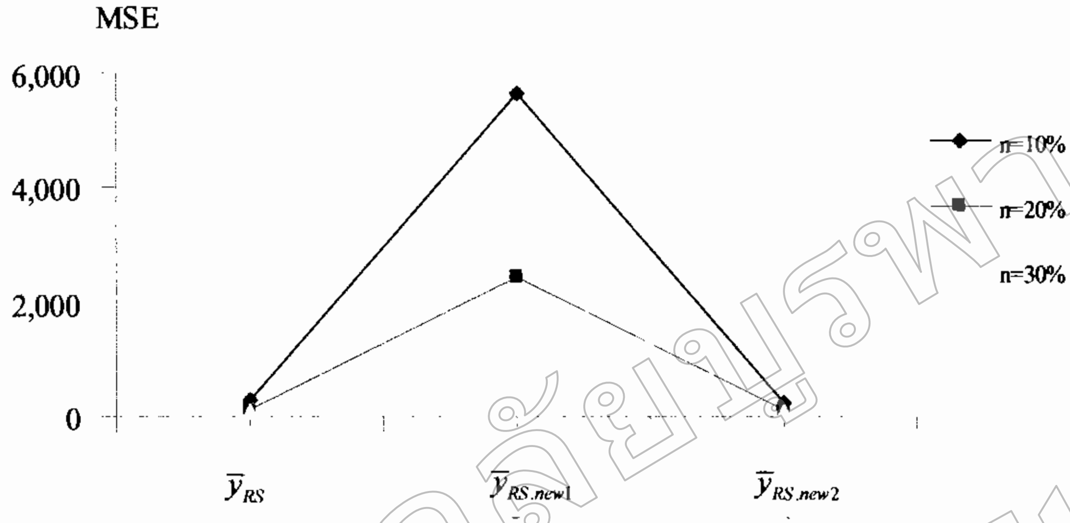
ภาพที่ 6 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

จากภาพที่ 6 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new2}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 7

ตารางที่ 8 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

ตัวประมาณค่า	**MSE**		
	$n=10\%$	$n=20\%$	$n=30\%$
$\bar{y}_{RS}$	289.17	125.15	72.03
$\bar{y}_{RS.new1}$	5,630.55	2,452.27	1,411.31
$\bar{y}_{RS.new2}$	**260.80**	**119.87**	**70.31**

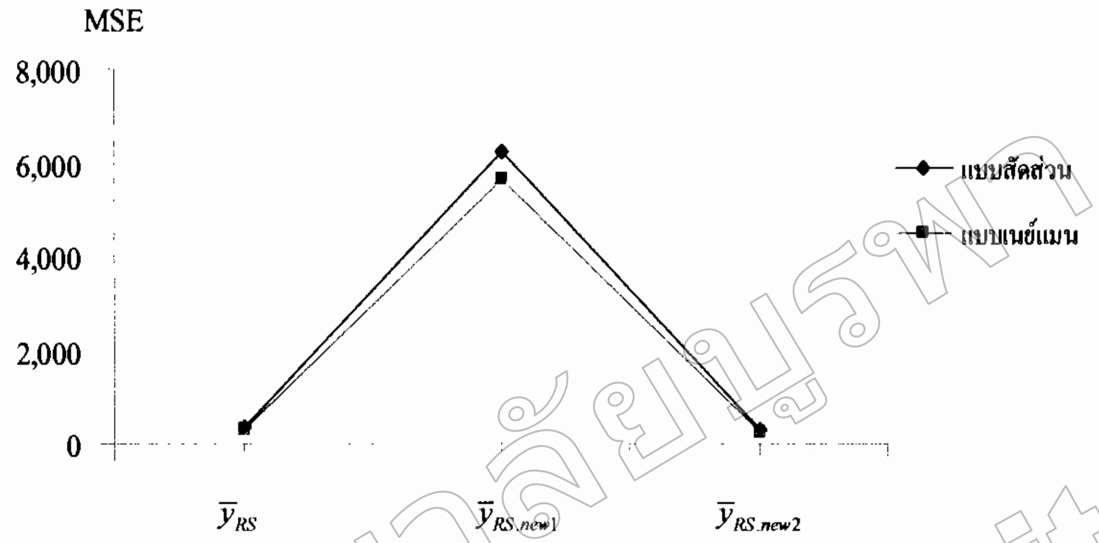
จากตารางที่ 8 จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



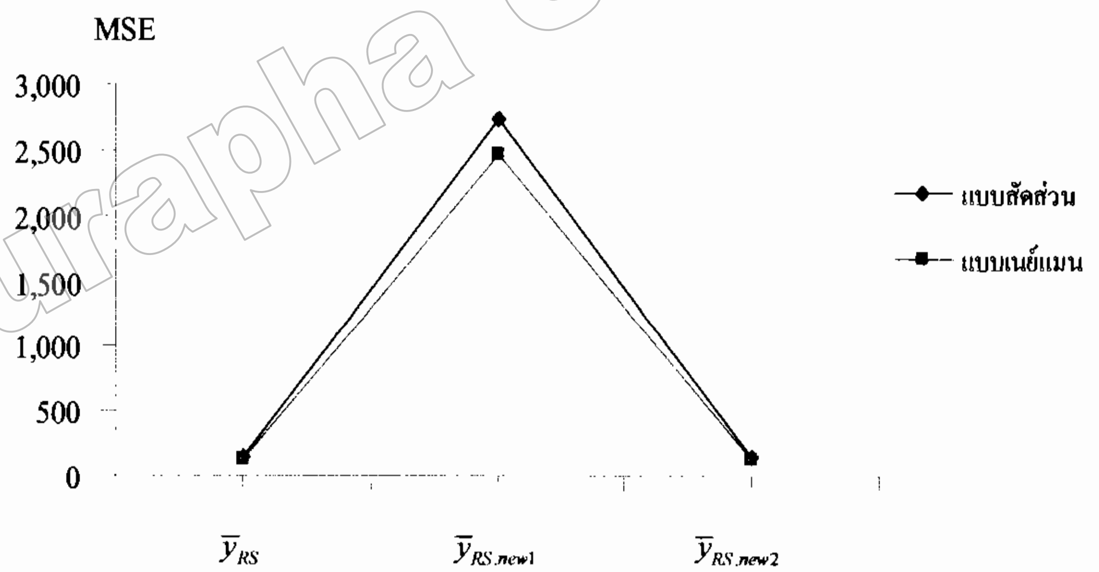
ภาพที่ 7 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 7 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new2}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 8

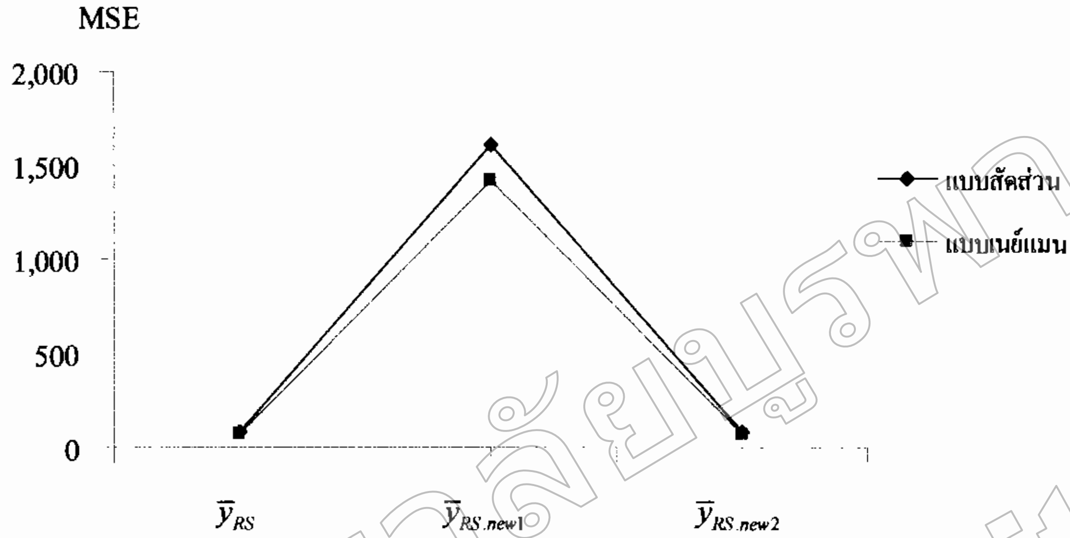
จากตารางที่ 7 และ 8 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10%, 20% และ 30% จากขนาดประชากร ซึ่งจำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



ภาพที่ 8 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 9 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 20% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 10 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 30% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 8, 9 และ 10 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าจะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นการประมาณค่าจะมีประสิทธิภาพสูงขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบการกำหนดขนาดตัวอย่างจะเห็นว่า การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด แสดงว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนมีประสิทธิภาพสูงกว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวอย่างที่ 3 ประชากรที่ใช้เป็นตัวอย่างการคำนวณจะใช้ข้อมูลของ Kadilar and Cingi (2005) ซึ่งเป็นข้อมูลปริมาณผลผลิตของแอปเปิ้ล (Y) และจำนวนต้นแอปเปิ้ล (X) ใน 854 หมู่บ้านของประเทศตุรกี ในปี 1999 ซึ่งนำมาปรับใหม่เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขของตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new1}$ ดังอสมการที่ 4.12 ซึ่งมีวิธีในการปรับดังนี้

1. ปรับให้อัตราส่วนระหว่าง $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ มีค่าไม่ต่ำกว่า 11
2. ปรับให้อัตราส่วนระหว่าง S_X และ S_Y มีค่าไม่ต่ำกว่า 4

จะได้ลักษณะประชากรแสดงดังตาราง

ตารางที่ 9 แสดงลักษณะและค่าพารามิเตอร์ของประชากร

$N = 854$	$\bar{X} = 37600$	$\bar{Y} = 3930$	$S_X = 144794$	$S_Y = 37106$	$\rho = 0.92$	$C_X = 3.85$	$C_Y = 9.44$
$N_1 = 106$	$\bar{X}_1 = 24375$	$\bar{Y}_1 = 1936$	$S_{X1} = 49189$	$S_{Y1} = 9425$	$\rho_1 = 0.82$	$C_{X1} = 2.02$	$C_{Y1} = 4.87$
$N_2 = 106$	$\bar{X}_2 = 27421$	$\bar{Y}_2 = 2212$	$S_{X2} = 57461$	$S_{Y2} = 11552$	$\rho_2 = 0.86$	$C_{X2} = 2.09$	$C_{Y2} = 5.22$
$N_3 = 94$	$\bar{X}_3 = 72409$	$\bar{Y}_3 = 6384$	$S_{X3} = 160757$	$S_{Y3} = 39907$	$\rho_3 = 0.90$	$C_{X3} = 2.22$	$C_{Y3} = 6.25$
$N_4 = 171$	$\bar{X}_4 = 74365$	$\bar{Y}_4 = 6588$	$S_{X4} = 285603$	$S_{Y4} = 58643$	$\rho_4 = 0.99$	$C_{X4} = 3.84$	$C_{Y4} = 9.18$
$N_5 = 204$	$\bar{X}_5 = 26441$	$\bar{Y}_5 = 2936$	$S_{X5} = 45403$	$S_{Y5} = 15990$	$\rho_5 = 0.71$	$C_{X5} = 1.72$	$C_{Y5} = 5.45$
$N_6 = 173$	$\bar{X}_6 = 9844$	$\bar{Y}_6 = 804$	$S_{X6} = 18794$	$S_{Y6} = 3946$	$\rho_6 = 0.89$	$C_{X6} = 1.91$	$C_{Y6} = 4.91$

จากตัวอย่างตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณค่าที่นำเสนอ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกดั้งเดิม พิจารณาได้ดังนี้

1. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ คือ $\rho_h > \dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ พิจารณาดังนี้

ตารางที่ 10 แสดงค่าพารามิเตอร์เพื่อตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

ชั้นภูมิ (h)	ρ_h	$2C_{Xh}/C_{Yh}$
1	0.82	0.82
2	0.86	0.80
3	0.90	0.32
4	0.99	0.41
5	0.71	0.22
6	0.89	0.35

จากตารางที่ 10 เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข $\rho_h > \dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ จะเห็นว่าค่า ρ_h ที่ได้ในแต่ละชั้นภูมิมีค่ามากกว่าค่า $\dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

2. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณีดังนี้

2.1 ถ้า $k<1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$\frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} < k < 1$$

2.2 ถ้า $k>1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$1 < k < \frac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเมื่อพิจารณาค่า k ที่คำนวณได้จากสมการ (4.10) เราพบว่า $\dfrac{R^2\bar{X}^2 - MSE(\bar{y}_{RS})}{Var(\bar{y}_{RS}) + \left[R\bar{X} + b(\bar{y}_{RS})\right]^2} = 0.990$ มีค่าน้อยกว่า $k = 0.992$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1 แสดงว่าค่า k ที่คำนวณได้สอดคล้องกับอสมการในข้อ 2.1 จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$

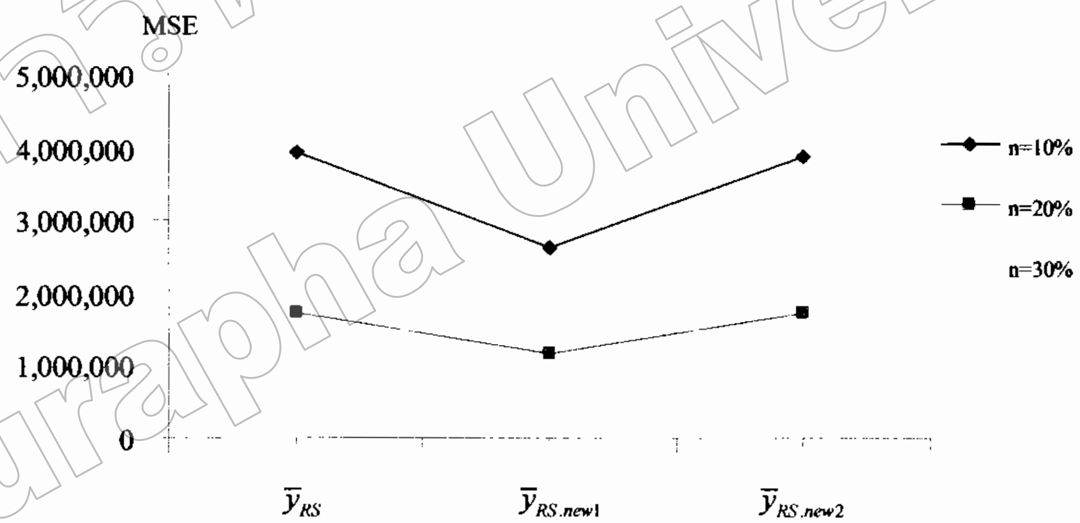
3. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ คือ $k < \sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งจากตัวอย่างข้างต้นคำนวณค่า $k = 0.992$, $MSE(\bar{y}_{RS}) = 2,326,524.26$, $MSE(\bar{y}_{RS.new1}) = 1,764,549.30$ และ $\theta = 0.02$ ดังนั้นจาก $\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}} = 0.871$ เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข (4.16) คือ $k < \sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ จะเห็นว่าค่า k มีค่ามากกว่าค่า $\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1}) - \theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ต่ำกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$

จากการตรวจสอบเงื่อนไขข้างต้นพบว่า $\bar{y}_{RS.new2}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS.new2}$ และ $\bar{y}_{RS}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่าง คือ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน และการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 11 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวประมาณค่า	MSE		
	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 30\%$
$\bar{y}_{RS}$	3,923,407.23	1,727,403.40	1,002,652.14
$\bar{y}_{RS.new1}$	**2,627,394.46**	**1,159,287.86**	**673,079.74**
$\bar{y}_{RS.new2}$	3,882,382.04	1,717,165.81	999,021.83

จากตารางที่ 11 จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน ปรากฏตามภาพดังนี้



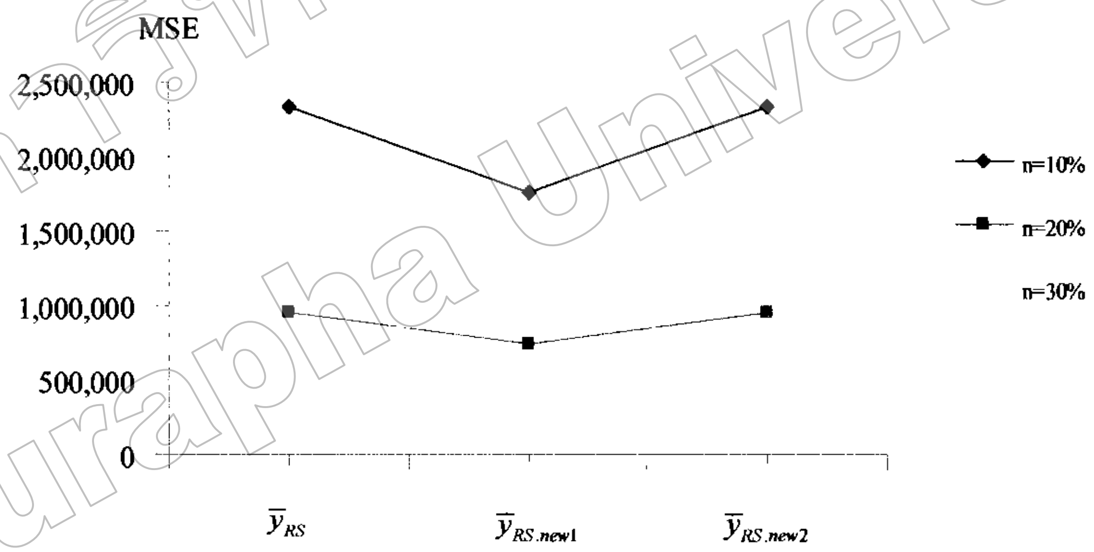
ภาพที่ 11 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

จากภาพที่ 11 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new1}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\bar{y}_{RS.new2}$ และ $\bar{y}_{RS}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 11

ตารางที่ 12 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

ตัวประมาณค่า	MSE		
	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 30\%$
$\bar{y}_{RS}$	2,326,524.26	954,383.05	490,366.18
$\bar{y}_{RS.new1}$	**1,764,549.30**	**742,442.09**	**396,779.19**
$\bar{y}_{RS.new2}$	2,332,626.79	950,473.45	487,733.03

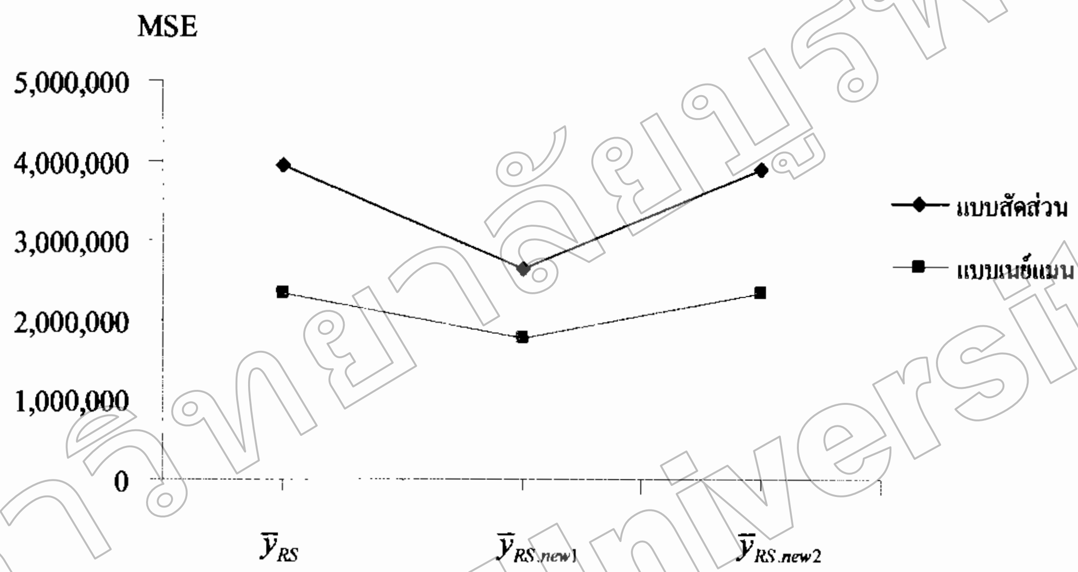
จากตารางที่ 12 จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



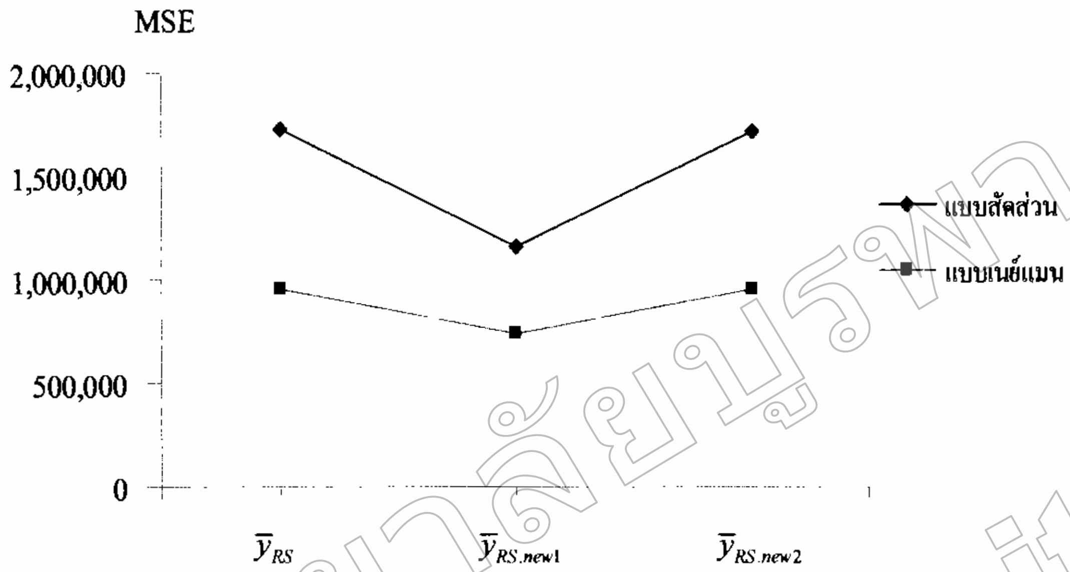
ภาพที่ 12 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 12 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new1}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\bar{y}_{RS.new2}$ และ $\bar{y}_{RS}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 12

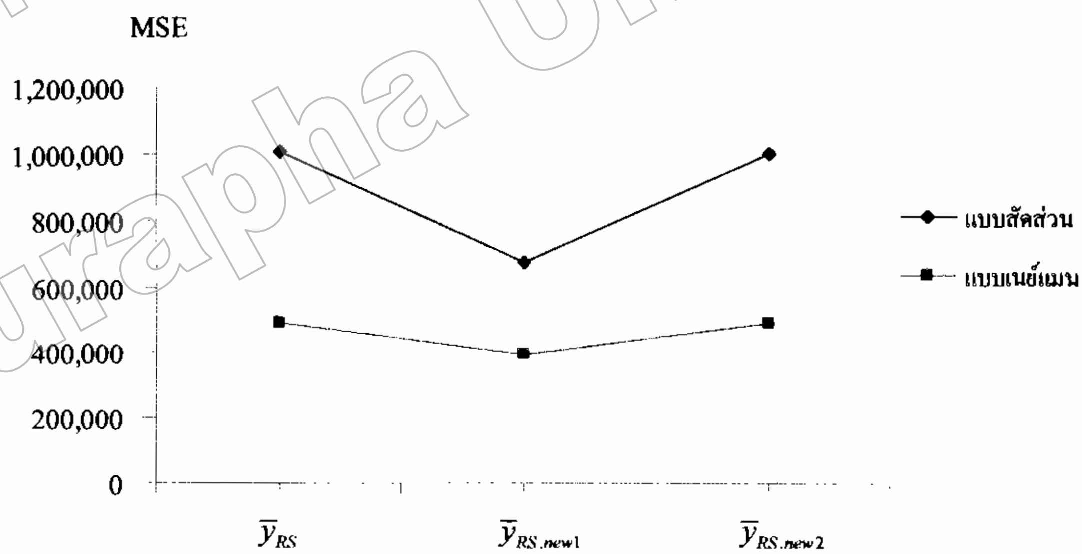
จากตารางที่ 11 และ 12 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10%, 20% และ 30% จากขนาดประชากร ซึ่งจำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



ภาพที่ 13 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 14 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 20% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 15 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 30% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 13, 14 และ 15 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าจะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นการประมาณค่าจะมีประสิทธิภาพสูงขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบการกำหนดขนาดตัวอย่างจะเห็นว่า การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด แสดงว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนมีประสิทธิภาพสูงกว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวอย่างที่ 4 ประชากรที่ใช้เป็นตัวอย่างการคำนวณจะใช้ข้อมูลของ Koyuncu and Kadilar (2009) ซึ่งเป็นข้อมูลอาจารย์ผู้สอน (Y) และจำนวนนักเรียน (X) 923 โรงเรียนโดยแบ่งเป็น 6 เขตในประเทศตุรกีปี 2007 ซึ่งนำมาปรับใหม่เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขของตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new1}$ ดังอสมการที่ 4.12 ซึ่งมีวิธีในการปรับดังนี้

1. ปรับให้อัตราส่วนระหว่าง $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ มีค่าไม่ต่ำกว่า 11
2. ปรับให้อัตราส่วนระหว่าง S_X และ S_Y มีค่าไม่ต่ำกว่า 4

จะได้ลักษณะประชากรแสดงดังตาราง

ตารางที่ 13 แสดงลักษณะและค่าพารามิเตอร์ของประชากร

$N = 923$	$\bar{X} = 11440$	$\bar{Y} = 992$					
$N_1 = 127$	$\bar{X}_1 = 20805$	$\bar{Y}_1 = 1704$	$S_{X1} = 30487$	$S_{Y1} = 5884$	$\rho_1 = 0.94$	$C_{X1} = 1.47$	$C_{Y1} = 3.45$
$N_2 = 117$	$\bar{X}_2 = 9212$	$\bar{Y}_2 = 813$	$S_{X2} = 15181$	$S_{Y2} = 3645$	$\rho_2 = 0.99$	$C_{X2} = 1.65$	$C_{Y2} = 4.48$
$N_3 = 103$	$\bar{X}_3 = 14309$	$\bar{Y}_3 = 1273$	$S_{X3} = 27550$	$S_{Y3} = 6033$	$\rho_3 = 0.99$	$C_{X3} = 1.93$	$C_{Y3} = 4.74$
$N_4 = 170$	$\bar{X}_4 = 9479$	$\bar{Y}_4 = 925$	$S_{X4} = 18219$	$S_{Y4} = 3811$	$\rho_4 = 0.98$	$C_{X4} = 1.92$	$C_{Y4} = 4.12$
$N_5 = 205$	$\bar{X}_5 = 5570$	$\bar{Y}_5 = 467$	$S_{X5} = 8498$	$S_{Y5} = 1704$	$\rho_5 = 0.99$	$C_{X5} = 1.53$	$C_{Y5} = 3.65$
$N_6 = 201$	$\bar{X}_6 = 12998$	$\bar{Y}_6 = 1094$	$S_{X6} = 23094$	$S_{Y6} = 4712$	$\rho_6 = 0.97$	$C_{X6} = 1.78$	$C_{Y6} = 4.31$

จากตัวอย่างตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณค่าที่นำเสนอ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกดั้งเดิม พิจารณาได้ดังนี้

1. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ กับ $\bar{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ คือ $\rho_h > \dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ พิจารณาดังนี้

ตารางที่ 14 แสดงค่าพารามิเตอร์เพื่อตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\overline{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\overline{y}_{RS}$

ชั้นภูมิ (h)	ρ_h	$2C_{Xh}/C_{Yh}$
1	0.94	0.852
2	0.99	0.737
3	0.99	0.814
4	0.98	0.932
5	0.99	0.838
6	0.97	0.826

จากตารางที่ 14 เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข $\rho_h > \dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ จะเห็นว่าค่า ρ_h ที่ได้ในแต่ละชั้นภูมิมีค่ามากกว่าค่า $\dfrac{2C_{Xh}}{C_{Yh}}$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\overline{y}_{RS.new1}$ ดีกว่า $\overline{y}_{RS}$

2. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\overline{y}_{RS.new2}$ กับ $\overline{y}_{RS}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\overline{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\overline{y}_{RS}$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณีดังนี้

2.1 ถ้า $k<1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$\frac{R^2\overline{X}^2 - MSE(\overline{y}_{RS})}{Var(\overline{y}_{RS}) + \left[R\overline{X} + b(\overline{y}_{RS})\right]^2} < k < 1$$

2.2 ถ้า $k>1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า k คือ

$$1 < k < \frac{R^2\overline{X}^2 - MSE(\overline{y}_{RS})}{Var(\overline{y}_{RS}) + \left[R\overline{X} + b(\overline{y}_{RS})\right]^2}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเมื่อพิจารณาค่า k ที่คำนวณได้จากสมการ (4.10) เราพบว่า $\dfrac{R^2\overline{X}^2 - MSE(\overline{y}_{RS})}{Var(\overline{y}_{RS}) + \left[R\overline{X} + b(\overline{y}_{RS})\right]^2} = 1.358$ มีค่ามากกว่า $k = 1.179$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 1 แสดงว่าค่า k ที่คำนวณได้สอดคล้องกับอสมการในข้อ 2.2 จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\overline{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\overline{y}_{RS}$

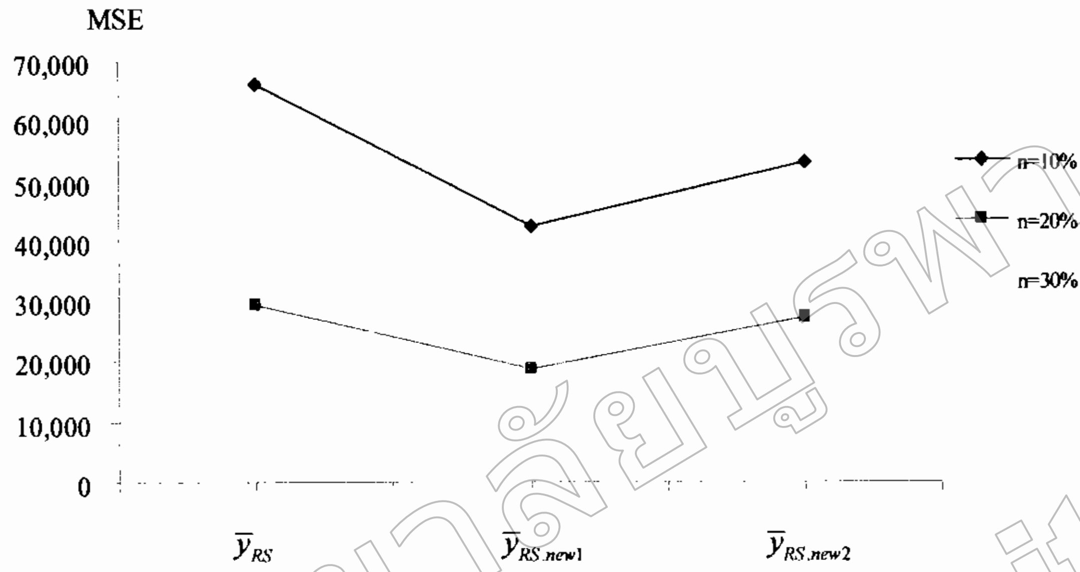
3. จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ เงื่อนไขที่ทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ดีกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$ คือ $k<\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1})-\theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งจากตัวอย่างข้างต้นคำนวณค่า $k=1.179$, $MSE(\bar{y}_{RS})=57,392.85$, $MSE(\bar{y}_{RS.new1})=36,190.67$ และ $\theta=-35,410.37$ ดังนั้นจาก $\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1})-\theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ = 1.117 เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไข (4.16) คือ $k<\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1})-\theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ จะเห็นว่าค่า k มีค่ามากกว่าค่า $\sqrt{\dfrac{MSE(\bar{y}_{RS.new1})-\theta}{MSE(\bar{y}_{RS})}}$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับอสมการเงื่อนไข จึงทำให้ประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{RS.new2}$ ต่ำกว่า $\bar{y}_{RS.new1}$

จากการตรวจสอบเงื่อนไขข้างต้นพบว่า $\bar{y}_{RS.new2}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS}$ และ $\bar{y}_{RS.new1}$ มีประสิทธิภาพดีกว่า $\bar{y}_{RS.new2}$ และ $\bar{y}_{RS}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่าง คือ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน และการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 15 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

ตัวประมาณค่า	MSE		
	$n=10\%$	$n=20\%$	$n=30\%$
$\bar{y}_{RS}$	66,252.47	29,183.15	17,211.61
$\bar{y}_{RS\ new1}$	**42,299.76**	**18,638.49**	**11,012.52**
$\bar{y}_{RS\ new2}$	52,962.24	27,170.19	16,584.05

จากตารางที่ 15 จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน ปรากฏตามภาพดังนี้



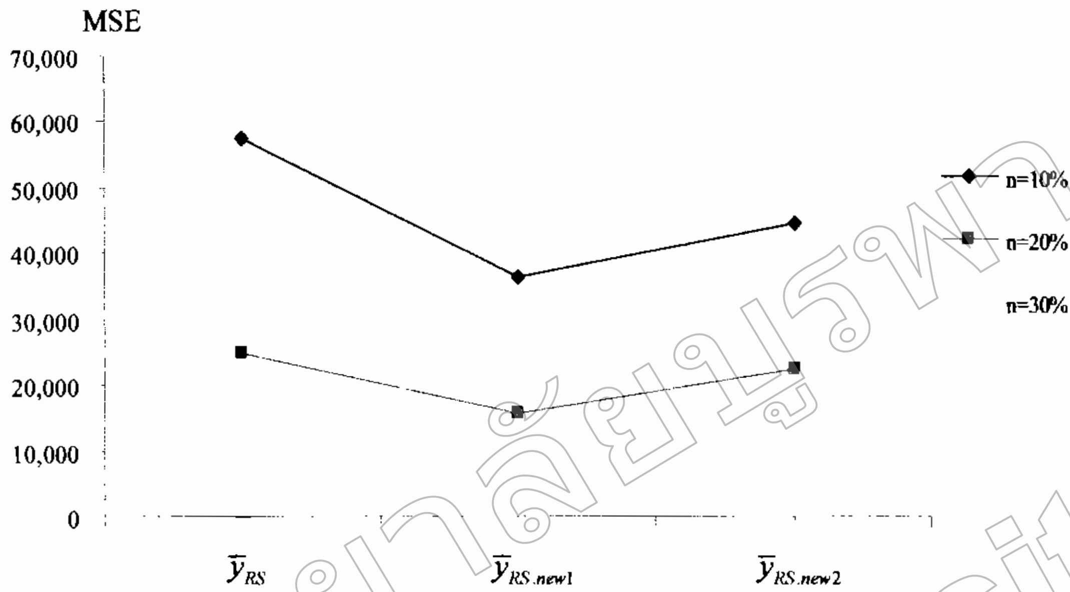
ภาพที่ 16 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน

จากภาพที่ 16 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\overline{y}_{RS.new1}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\overline{y}_{RS.new2}$ และ $\overline{y}_{RS}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 15

ตารางที่ 16 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

ตัวประมาณค่า	MSE		
	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 30\%$
$\overline{y}_{RS}$	57,392.85	24,702.72	14,052.51
$\overline{y}_{RS.new1}$	**36,190.67**	**15,560.21**	**8,842.08**
$\overline{y}_{RS.new2}$	44,349.28	22,580.82	13,393.07

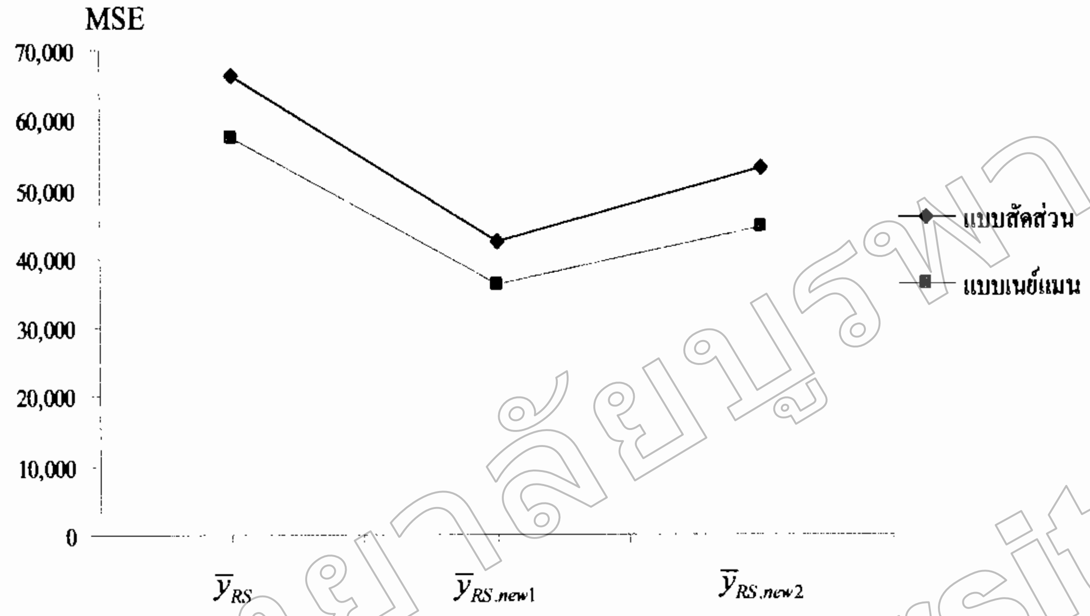
จากตารางที่ 16 จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



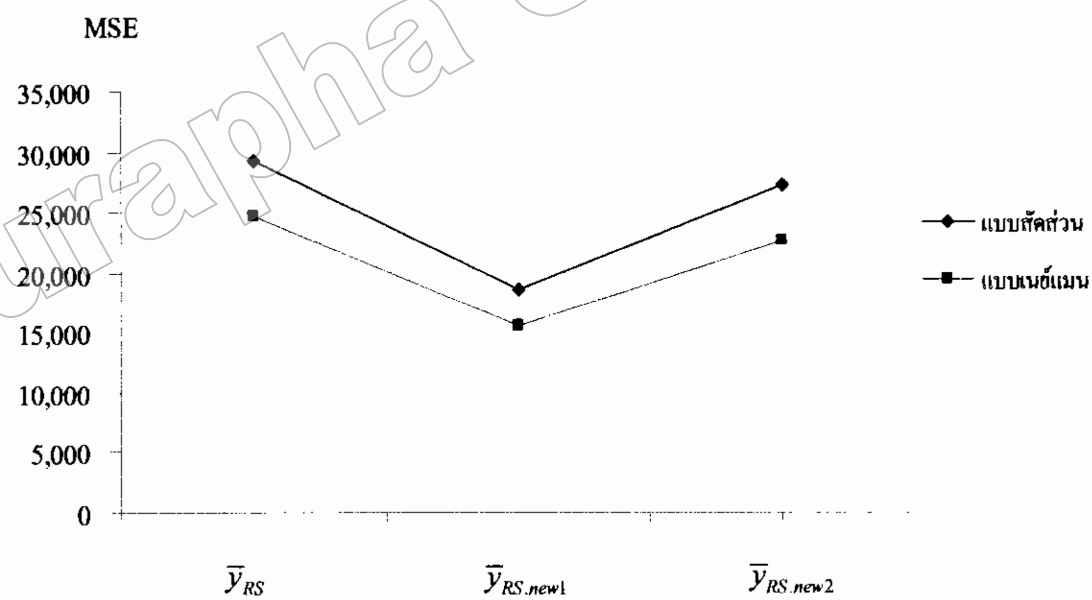
ภาพที่ 17 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 17 จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าลดลง แสดงว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การประมาณค่ามีประสิทธิภาพสูงขึ้น จากภาพตัวประมาณค่า $\bar{y}_{RS.new1}$ มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดจึงมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือ $\bar{y}_{RS.new2}$ และ $\bar{y}_{RS}$ ตามลำดับ ซึ่งสนับสนุนข้อมูลในตารางที่ 16

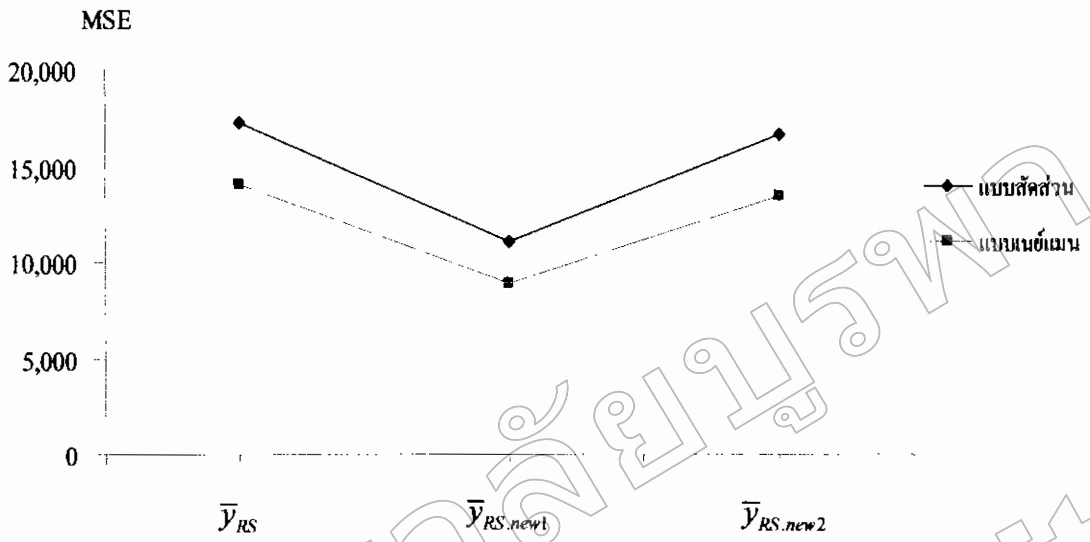
จากตารางที่ 15 และ 16 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10%, 20% และ 30% จากขนาดประชากร ซึ่งจำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน ปรากฏตามภาพดังนี้



ภาพที่ 18 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 19 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 20% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน



ภาพที่ 20 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่า เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 30% จำแนกตามการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วนและ การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมน

จากภาพที่ 18, 19 และ 20 แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าจะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นการประมาณค่าจะมีประสิทธิภาพสูงขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบการกำหนดขนาดตัวอย่างจะเห็นว่า การกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด แสดงว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบเนย์แมนมีประสิทธิภาพสูงกว่าการกำหนดขนาดตัวอย่างแบบสัดส่วน