บทที่ 4
ผลการวิจัย

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทาง

ในส่วนนี้ผู้วิจัยจะนิยามค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทางและคำนวณหาค่าของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทางที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิ X นิยามโดย
สำหรับ $x \in X$ นิยาม

$$C_{NJ}^{d}(x) = \sup\left\{ \frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} : \begin{array}{c} y_1, y_2 \in X,\ y_0 = m[y_1,y_2] \\ \text{และ } (x,x) \neq (y_1,y_2) \end{array} \right\}$$

และนิยาม

$$C_{NJ}^{d}(X) = \sup\{C_{NJ}(x) : x \in X\}$$

โดยที่ y_0 เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ $[y_1,y_2]$

ข้อสังเกต 4.2 สมการด้านบนนี้แจ่มชัด (Well-Defined)

พิสูจน์ เนื่องจาก $\operatorname{card}(X) \geq 2$
จะมี $y_1, y_2 \in X$ ซึ่ง $y_1 \neq y_2$
ให้ $x \in X$ จะได้ว่า $(x,x) \neq (y_1,y_2)$
และ

$$\left\{ \frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} : \begin{array}{c} y_1, y_2 \in X,\ y_0 = m[y_1,y_2] \\ \text{และ } (x,x) \neq (y_1,y_2) \end{array} \right\} \neq \emptyset$$

แสดงว่า

$$\sup\left\{ \frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} : \begin{array}{c} y_1, y_2 \in X,\ y_0 = m[y_1,y_2] \\ \text{และ } (x,x) \neq (y_1,y_2) \end{array} \right\} \geq 0$$

ทำให้ได้ว่า $C_{NJ}^{d}(x) \geq 0$
เพราะฉะนั้น $C_{NJ}^{d}(X) = \sup\{C_{NJ}(x) : x \in X\} \geq 0$
ดังนั้นการนิยามค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์นี้แจ่มชัด □

ต่อไปเราจะหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ $C_{NJ}^{d}(X)$ บนปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก X โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$

ทฤษฎีบท 4.3 ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$ แล้ว $1 \leq C_{NJ}^{d}(X) \leq 2$

พิสูจน์ จะแสดงว่าขอบเขตล่างของ $C_{NJ}^{d}(X)$ คือ 1

ให้ $x \in X$ และ $y \in X - \{x\}$ กำหนด $y_1 = x,\ y_2 = y$ และ $y_0 = m[y_1, y_2] = m[x,y]$

เพราะฉะนั้น $d(x,y_0) = \frac{1}{2} d(x,y)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} &= \frac{d(x,y)^2 + 4\left(\frac{d(x,y)}{2}\right)^2}{2\left(d(x,x)^2 + d(x,y)^2\right)} \\
&= \frac{d(x,y)^2 + 4\left(\frac{d(x,y)^2}{4}\right)}{2d(x,y)^2} \\
&= \frac{d(x,y)^2 + d(x,y)^2}{2d(x,y)^2} \\
&= \frac{2d(x,y)^2}{2d(x,y)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $C_{NJ}^{d}(x) \geq 1$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

เพราะฉะนั้น $C_{NJ}^{d}(X) \geq 1$

ต่อไปจะแสดงว่าขอบเขตบนของ $C_{NJ}^{d}(X)$ คือ 2

ให้ $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ และ $(x,x) \neq (y_1,y_2)$ ที่ $y_0 = m[y_1,y_2]$

โดยอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมจะได้

$$d(y_1,y_2) \leq d(x,y_1) + d(x,y_2)$$

จากที่ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก จะได้

$$d(x,y_0) \leq \frac{1}{2}\left(d(x,y_1) + d(x,y_2)\right)$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2 \ \leq\ \left(d(x,y_1) + d(x,y_2)\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}d(x,y_1) + \frac{1}{2}d(x,y_2)\right)^2$$

$$\leq \; d(x,y_1)^2 + 2d(x,y_1)\,d(x,y_2) + d(x,y_2)^2$$

$$+ \; d(x,y_1)^2 + 2d(x,y_1)\,d(x,y_2) + d(x,y_2)^2$$

$$\leq \; 2d(x,y_1)^2 + 2d(x,y_2)^2 + 4d(x,y_1)\,d(x,y_2)$$

จะได้ว่า

$$\frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} \leq \frac{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right) + 4d(x,y_1)\,d(x,y_2)}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)}$$

$$\leq 1 + \frac{4d(x,y_1)\,d(x,y_2)}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)}$$

จากความจริงที่

$$2d(x,y_1)\,d(x,y_2) \;\leq\; d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2$$

จะได้

$$\leq \; 1 + \frac{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)}$$

$$\leq \; 2$$

ดังนั้น $C^d_{NJ}(x) \leq 2$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

เพราะฉะนั้น $C^d_{NJ}(X) \leq 2$

จากการพิสูจน์ทั้งสองตอนจึงได้ว่า $1 \leq C^d_{NJ}(X) \leq 2$ □

Clarkson (1937) สร้างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมินอร์ม X ดังนี้

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} : \forall x,\ y \in X, (x,y) \neq (0,0)\right\}$$

ทฤษฎีบท 4.4 ถ้า X เป็นปริภูมิภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม จะได้ว่า $C_{NJ}(X) = C^d_{NJ}(X)$

พิสูจน์ ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม และ d เป็นเมตริกที่เกิดจากนอร์ม $\|\cdot\|$

ดังนั้น $d(x,y) = \|x-y\|$ สำหรับทุก $x,\ y \in X$

จะแสดงว่า $C_{NJ}(X) \leq C^d_{NJ}(X)$

ให้ $x,\ y \in X$ และ $(x,y) \neq (0,0)$ กำหนด $x = y_1,\ y = y_2$ ที่ $y_0 = \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{y_1+y_2}{2}$

ดังนั้น

$$\frac{\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} = \frac{\|y_1-y_2\|^2 + \|y_1+y_2\|^2}{2\left(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right)}$$

$$= \frac{\|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|0 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2}{2\left(\|0 - y_1\|^2 + \|0 - y_2\|^2\right)}$$

$$= \frac{d(y_1, y_2)^2 + 4d(0, y_0)^2}{2\left(d(0, y_1)^2 + d(0, y_2)^2\right)}$$

ทำให้ได้ว่า $C_{NJ}(X) \leq C^d_{NJ}(0)$

เพราะฉะนั้น $C_{NJ}(X) \leq C^d_{NJ}(X)$

ต่อไปจะแสดงว่า $C^d_{NJ}(X) \leq C_{NJ}(X)$

ให้ $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ และ $(x,x) \neq (y_1, y_2)$ ที่ $y_0 = m[y_1, y_2]$

$$\frac{d(y_1, y_2)^2 + 4d(x, y_0)^2}{2\left(d(x, y_1)^2 + d(x, y_2)^2\right)} = \frac{\|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2}{2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right)}$$

$$= \frac{\|y_1 - y_2\|^2 + \|2x - (y_1 + y_2)\|^2}{2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right)}$$

$$= \frac{\|y_1 - y_2\|^2 + \|(x - y_1) + (x - y_2)\|^2}{2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right)}$$

$$= \frac{\|(x - y_1) - (x - y_2)\|^2 + \|(x - y_1) + (x - y_2)\|^2}{2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right)}$$

เราพบว่า $x - y_1,\ x - y_2 \in X$

จึงได้ว่า $C^d_{NJ}(x) \leq C_{NJ}(X)$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

เพราะฉะนั้น $C^d_{NJ}(X) \leq C_{NJ}(X)$

จากการพิสูจน์ทั้งสองตอนจึงได้ว่า $C_{NJ}(X) = C^d_{NJ}(X)$ □

ตลอดงานวิจัยนี้ ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\mathrm{card}(X) \geq 2$ เพื่อความสะดวกจะเขียนเพียง X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก

ลำดับต่อไปจะกล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการเป็นปริภูมิ CAT(0)

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก จะได้ว่า $C^d_{NJ}(X) = 1$ ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ CAT(0)

พิสูจน์ ให้ $C^d_{NJ}(X) = 1$ จะแสดงว่า X เป็นปริภูมิ CAT(0)

เราจะแสดงโดยการพิสูจน์ว่าปริภูมิ X สอดคล้องกับอสมการที่ 2.1

ให้ $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ และ $y_0 = m[y_1, y_2]$ เราจะแยกการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1. ถ้า $(x,x) = (y_1, y_2)$ จะได้ $x = y_0 = y_1 = y_2$
ฉะนั้น $d(x,y_0) = d(x,y_1) = d(x,y_2) = d(y_1,y_2) = 0$
ดังนั้นสอดคล้องกับอสมการที่ 2.1

กรณีที่ 2. ถ้า $(x,x) \neq (y_1, y_2)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} &\leq C_{NJ}(M) = 1 \\
d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2 &\leq 2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right) \\
\frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 + d(x,y_0)^2 &\leq \frac{1}{2}\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right) \\
d(x,y_0)^2 &\leq \frac{1}{2}d(x,y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x,y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้นสอดคล้องกับอสมการที่ 2.1
จากการพิสูจน์ทั้งสองกรณีจะพบว่าปริภูมิ X สอดคล้องกับอสมการที่ 2.1 จึงได้ว่า X เป็นปริภูมิ CAT(0)

ให้ X เป็นปริภูมิ CAT(0) จะแสดงว่า $C_{NJ}^d(X) = 1$
ให้ $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ และ $(x,x) \neq (y_1, y_2)$ ที่ $y_0 = m[y_1, y_2]$
โดย อสมการที่ 2.1 จะได้

$$\begin{aligned}
d(x,y_0)^2 &\leq \frac{1}{2}d(x,y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x,y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 \\
\frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 + d(x,y_0)^2 &\leq \frac{1}{2}\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right) \\
d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2 &\leq 2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right) \\
\frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} &\leq 1 \quad \text{สำหรับทุก } d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2 \neq 0
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $C_{NJ}^d(x) \leq 1$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$
ดังนั้น $C_{NJ}^d(X) \leq 1$
และโดยทฤษฎีบท 4.3 จะได้ขอบเขตล่างของ $C_{NJ}^d(X)$ คือ 1
เพราะฉะนั้น $C_{NJ}^d(X) = 1$
จากการพิสูจน์ทั้งสองตอนจึงได้ว่า $C_{NJ}^d(X) = 1$ ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ CAT(0) $\square$

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์กับสมบัติอื่น ๆ

ในส่วนนี้ผู้วิจัยจะศึกษาถึงสมบัติอื่น ๆ ที่นิยามบนปริภูมิอิงระยะทาง รวมทั้งความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ที่ได้นิยามไว้ในปริภูมิอิงระยะทางซึ่งได้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.6 ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก แล้ว

$$\tilde{N}(X) \leq \left(C_{NJ}^{d}(X)-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตย่อยแอดมิสซิเบิลที่มีขอบเขตของ X ซึ่ง $\operatorname{diam}(A)>0$
สำหรับ $\varepsilon>0$ จะมี $y_1,\, y_2 \in A$ ที่ $d(y_1,y_2)>\operatorname{diam}(A)(1-\varepsilon)$ กำหนด $y_0=m[y_1,y_2]$
สำหรับทุก $x\in A$
กรณี 1. ถ้า $(x,x)=(y_1,y_2)$ จะได้ $x=y_0=y_1=y_2$
ฉะนั้น $d(x,y_0)=d(x,y_1)=d(x,y_2)=d(y_1,y_2)=0$
ไม่สามารถสร้าง $\tilde{N}(X)$ ได้

กรณี 2. ถ้า $(x,x)\neq(y_1,y_2)$ จะได้

$$\frac{4d(x,y_0)^2+d(y_1,y_2)^2}{2\left(d(x,y_1)^2+d(x,y_2)^2\right)} \leq C_{NJ}^{d}(X)$$

$$\frac{4\left(d(x,y_0)^2+\frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2\right)}{2\left(d(x,y_1)^2+d(x,y_2)^2\right)} \leq C_{NJ}^{d}(X)$$

$$d(x,y_0)^2+\frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 \leq \frac{1}{2}C_{NJ}^{d}(X)\left(d(x,y_1)^2+d(x,y_2)^2\right)$$

$$\begin{aligned} d(x,y_0)^2 &\leq \frac{1}{2}C_{NJ}^{d}(X)\left(d(x,y_1)^2+d(x,y_2)^2\right)-\frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 \\ &\leq \operatorname{diam}(A)^2C_{NJ}^{d}(X)-\frac{1}{4}\operatorname{diam}(A)^2(1-\varepsilon)^2 \\ &\leq \operatorname{diam}(A)^2\left(C_{NJ}^{d}(X)-\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2\right) \end{aligned}$$

ได้ว่า

$$d(x,y_0) \leq \operatorname{diam}(A)\left(C_{NJ}^{d}(X)-\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

และ

$$r_{y_0}(A) = \sup\{d(x,y_0):x\in A\} \leq \operatorname{diam}(A)\left(C_{NJ}^{d}(X)-\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

เนื่องจาก

$$\mathrm{rad}_A(A) \leq r_{y_0}(A)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\mathrm{rad}_A(A) \leq \mathrm{diam}(A)\left(C_{NJ}^d(X) - \frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น

$$\frac{\mathrm{rad}_A(A)}{\mathrm{diam}(A)} \leq \left(C_{NJ}^d(X) - \frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ให้ $\varepsilon \to 0$ ได้ว่า

$$\tilde{N}(X) \leq \left(C_{NJ}^d(X) - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

ทฤษฎีบท 4.7 ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก ที่ $C_{NJ}^d(X) < 5/4$ แล้ว
X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป

พิสูจน์ จาก $C_{NJ}^d(X) < 5/4$
จะได้ $C_{NJ}^d(X) - \frac{1}{4} < 1$
และ $\left(C_{NJ}^d(X) - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$
ฉะนั้น $\tilde{N}(X) < 1$
ดังนั้นจากบทนิยาม 2.41 จึงสรุปได้ว่า X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป □

บทแทรก 4.8 ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิ CAT(0) ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.5 จะได้ว่า

$$C_{NJ}^d(X) = 1 < \frac{5}{4}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.7 จึงได้ว่า X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป □

ทฤษฎีบท 4.9 ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก บริบูรณ์ที่มีขอบเขต ซึ่ง $C_{NJ}^d(X) < 5/4$ แล้ว สำหรับทุก ๆ การส่งแบบไม่ขยาย $T: X \to X$ มีจุดตรึง

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่า X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป และทฤษฎีบท 2.42 จึงได้ว่า สำหรับทุก ๆ การส่งแบบไม่ขยาย $T: X \to X$ มีจุดตรึง □

วิทูรย์ พึ่งรัตนา (2551) ได้ศึกษาค่าคงที่เจมส์ (หรือ ค่าคงที่นอนสแคว) บนปริภูมิอิงระยะทาง ดังนี้

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิก และกำหนด $B(u,r)=\{x\in X: d(u,x)\le r\}$ แทนบอลปิด จุดศูนย์กลางที่ u รัศมี r

ค่าคงที่เจมส์บนปริภูมิ X นิยามโดย

$$J_d(X)=\sup\left\{\min\{d(x,y),\ 2d(u,m[x,y])\}\ :\ x,y\in B(u,1),u\in X\right\}$$

โดยที่ $m[x,y]$ เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ $[x,y]$

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก ดังนั้น $J_d(X)\le\sqrt{2C_{NJ}^d(X)}$

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก

ให้ $u\in X$ และ $x,\ y\in B(u,1)$ กำหนด $u=x,\ x=y_1,\ y=y_2$ ที่ $y_0=m[x,y]=m[y_1,y_2]$

จะได้

$$\begin{aligned}\min\left\{d(x,y)^2,\ 4d(u,m[x,y])^2\right\} &= \min\left\{d(y_1,y_2)^2,\ 4d(x,y_0)^2\right\}\\ &\le \frac{d(y_1,y_2)^2+4d(x,y_0)^2}{2}\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$d(x,y_1)^2+d(x,y_2)^2\le 2$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}&\le 2\left(\frac{d(y_1,y_2)^2+4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2+d(x,y_2)^2\right)}\right)\\ &\le 2C_{NJ}^d(X)\end{aligned}$$

ดังนั้น $J_d(X)\le\sqrt{2C_{NJ}^d(X)}$ □

บทแทรก 4.11 ขอบเขตบนของ $J_d(X)$ คือ 2

พิสูจน์ จากขอบเขตบนของ $C_{NJ}(X)$ คือ 2

และจากทฤษฎีบท 4.10 ได้ว่า

$$J_d(X)\le\sqrt{2C_{NJ}^d(X)}\le 2$$

ดังนั้น $J_d(X)\le 2$ □

บทแทรก 4.12 ถ้า $C_{NJ}^{d}(X) < 2$ แล้ว $J_d(X) < 2$

พิสูจน์ ให้ $C_{NJ}^{d}(X) < 2$

จากทฤษฎีบท 4.10 ได้ว่า

$$\frac{J_d(X)^2}{2} \leq C_{NJ}^{d}(X) < 2$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{J_d(X)^2}{2} < 2$$

ดังนั้น $J_d(X) < 2$ □

ทฤษฎีบท 4.13 ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว $J_d(X) \leq \sqrt{2}$

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิ CAT(0) ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.2 จะได้ $C_{NJ}^{d}(X) = 1$

และจากทฤษฎีบท 4.10 ทำให้ได้ว่า $J_d(X) \leq \sqrt{2C_{NJ}^{d}(X)} = \sqrt{2}$

ดังนั้น ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว $J_d(X) \leq \sqrt{2}$ □

ข้อสังเกต 4.14 สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต H จะได้ว่า $J(H) = \sqrt{2}$ แต่อย่างไรก็ตาม เราไม่ทราบว่าบทกลับจริงหรือไม่

บทนิยาม 4.15 (วิฑูรย์ พึ่งรัตนา, 2551) จะเรียกปริภูมิไฮเพอร์โบลิก X ว่า นอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d (d-Uniformly Nonsquare) ถ้ามี $\delta \in (0,1)$ ซึ่งสำหรับ $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ ที่ $d(x,y_1) \leq 1$ และ $d(x,y_2) \leq 1$ จะได้ว่า

$$d(y_1,y_2) \leq 2(1-\delta) \quad \text{หรือ} \quad d(x,y_0) \leq 1-\delta$$

ทฤษฎีบท 4.16 ถ้า $C_{NJ}^{d}(X) < 2$ แล้ว ปริภูมิไฮเพอร์โบลิก X เป็นนอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d

พิสูจน์ ให้ $C_{NJ}^{d}(X) < 2$ นั่นคือ $C_{NJ}^{d}(X) = 2-\delta$ สำหรับบาง $\delta > 0$ ที่ $d(x,y_1) \leq 1$ และ $d(x,y_2) \leq 1$ สมมติว่า $d(x,y_1) > 0$ หรือ $d(x,y_2) > 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 2-\delta &\geq \frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} \\ &\geq \frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{4} \\ &\geq \frac{1}{2}\min\left\{d(y_1,y_2)^2, 4d(x,y_0)^2\right\} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(y_1,y_2)^2 \leq 2(2-\delta) \quad \text{หรือ} \quad 4d(x,y_0)^2 \leq 2(2-\delta)$$

เพราะฉะนั้น

$$d(y_1,y_2) \le 2\sqrt{1-\frac{\delta}{2}} \le 2(1-\delta) \quad \text{หรือ} \quad d(x,y_0) \le \sqrt{1-\frac{\delta}{2}} \le 1-\delta$$

จึงได้ว่า

$$d(y_1,y_2) \le 2(1-\delta) \quad \text{หรือ} \quad d(x,y_0) \le 1-\delta$$

ดังนั้น ปริภูมิไฮเพอร์โบลิก X เป็นนอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d □

บทแทรก 4.17 ปริภูมิ CAT (0) เป็นนอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิ CAT(0) ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.2 จะได้ว่า

$$C_{NJ}^{d}(X) = 1 < 2$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.16 จึงได้ว่า X เป็นนอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d □

บทนิยาม 4.18 (Leustean, 2005) จะเรียกปริภูมิไฮเพอร์โบลิก X ว่าคอนเวกซ์แบบเอกรูป ถ้าสำหรับทุก ๆ $r > 0$ และ $\varepsilon \in (0,2]$ จะมี $\delta \in (0,1]$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x, y_1, y_2 \in X$ ที่

$$\left.\begin{array}{l} d(x,y_1) \le r \\ d(x,y_2) \le r \\ d(y_1,y_2) \ge \varepsilon r \end{array}\right\} \text{ทำให้ได้ว่า} \quad d(x,m[y_1,y_2]) \le (1-\delta)r$$

บทนิยาม 4.19 (Kirk, 2003, 2004) ให้ X เป็นปริภูมิไฮเพอร์โบลิก สำหรับทุก ๆ $r > 0$ และ $\varepsilon \in (0,2]$ มอดูลัสของความคอนเวกซ์คือฟังก์ชัน $\delta : X \times (0,\infty) \times (0,2] \to [0,1]$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in X$ นิยามโดย

$$\delta(x,r,\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{r}d(x,m[y_1,y_2]) \;:\; d(x,y_1) \le r,\ d(x,y_2) \le r,\ d(y_1,y_2) \ge \varepsilon r\right\}$$

ข้อสังเกต 4.20 ถ้า X เป็นปริภูมิภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม จะพบว่า $\delta(x,1,\varepsilon) = \delta_X(\varepsilon)$

บทนิยาม 4.21 (Kirk, 2003) ปริภูมิไฮเพอร์โบลิก X เป็นคอนเวกซ์แบบเอกรูป ก็ต่อเมื่อ $\delta(x,r,\varepsilon) > 0$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

บทแทรก 4.22 ให้ X เป็นปริภูมิที่คอนเวกซ์แบบเอกรูป ถ้า $C_{NJ}^{d}(X) < 5/4$ แล้ว $\delta(x,1,1) > 0$

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิที่คอนเวกซ์แบบเอกรูป และ $C_{NJ}^{d}(X) < 5/4$

กำหนด $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{5}{4} &> \frac{4d(x,y_0)^2 + d(y_1,y_2)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} \\
&\geq \frac{4d(x,y_0)^2 + d(y_1,y_2)^2}{4} \\
&\geq \frac{4d(x,y_0)^2 + \varepsilon^2}{4} \\
1 - d(x,y_0) &> 1 - \sqrt{\frac{5-\varepsilon^2}{4}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\delta(x,1,1) > 0$ □

บทตั้ง 4.23 ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว $\delta(x,1,\varepsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิ CAT(0) กำหนด $x,\ y_1,\ y_2 \in X$ และ $(x,x) \neq (y_1,y_2)$ ที่ $y_0 = m[y_1,y_2]$ สำหรับ $\varepsilon \in (0,2]$ ที่ $d(x,y_1) \leq 1,\ d(x,y_2) \leq 1$ และ $d(y_1,y_2) \geq \varepsilon$
โดยอสมการที่ 2.1 จะได้

$$\begin{aligned}
d(x,y_0)^2 &\leq \frac{1}{2}d(x,y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x,y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \\
1 - d(x,y_0) &\leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\delta(x,1,\varepsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ □

ทฤษฎีบท 4.24 $C_{NJ}^d(X) \geq \sup\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + (1 - \delta(x,1,\varepsilon))^2 : \varepsilon \in (0,2] \right\}$

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon \in (0,2]$ ที่ $d(x,y_1) \leq 1,\ d(x,y_2) \leq 1$ และ$d(y_1,y_2) \geq \varepsilon$ ดังนั้นจากนิยามของมอดูลัสของความคอนเวกซ์ จะได้

$$d(x,y_0) \leq 1 - \delta(x,1,\varepsilon)$$

และได้ว่า

$$\begin{aligned}
C_{NJ}^d(X) &\geq \frac{4d(x,y_0)^2 + d(y_1,y_2)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} \\
&\geq \frac{4d(x,y_0)^2 + \varepsilon^2}{4}
\end{aligned}$$

จะได้

$$1 - d(x, y_0) \geq 1 - \sqrt{C_{NJ}^{d}(X) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

และ

$$\delta(x, 1, \varepsilon) \geq 1 - \sqrt{C_{NJ}^{d}(X) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{C_{NJ}^{d}(X) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \geq 1 - \delta(x, 1, \varepsilon)$$

ดังนั้น $C_{NJ}^{d}(X) \geq \sup\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + (1 - \delta(x, 1, \varepsilon))^2 : \varepsilon \in [0, 2]\right\}$ □