บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ถ้ามีจำนวนจริง $m \in A$ ที่มีสมบัติว่า $m \leq x$ ทุกค่า $x \in A$ แล้ว เรากล่าวว่า m เป็นค่าที่น้อยที่สุดของ A และถ้ามีจำนวนจริง $M \in A$ ที่มีสมบัติว่า $x \leq M$ ทุกค่า $x \in A$ เรากล่าวว่า M เป็นค่าที่มากที่สุดของ A

ใช้สัญลักษณ์ $\min A$ แทนค่าที่น้อยที่สุดของ A และ $\max A$ แทนค่าที่มากที่สุดของ A

ทฤษฎีบท 2.2 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A และ B เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงที่มากที่สุดและค่าน้อยที่สุด ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\min A \geq \min B$ และ $\max A \leq \max B$

ทฤษฎีบท 2.3 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A มีค่าน้อยที่สุด แล้ว จะมีเพียงค่าเดียว และ ถ้า A มีค่าที่มากที่สุดแล้ว จะมีเพียงค่าเดียว

บทนิยาม 2.4 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ถ้ามีจำนวนจริง a ที่มีสมบัติว่า $a \leq x$ ทุกค่า $x \in A$ แล้ว เรากล่าวว่า a เป็นขอบเขตล่าง (Lower Bound) ของ A และกล่าวว่า A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง (Bounded Below)

และถ้ามีจำนวนจริง b ที่มีสมบัติว่า $x \leq b$ ทุกค่า $x \in A$ เรากล่าวว่า b เป็นขอบเขตบน (Upper Bound) ของ A และกล่าวว่า A เป็นเซตที่มีขอบเขตบน (Bounded Above)

บทนิยาม 2.5 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริงที่มีขอบเขตล่าง เรากล่าวว่า a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของ A ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A และถ้า y เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $y \leq a$

ให้ A เป็นเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริงที่มีขอบเขตบน เรากล่าวว่า b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A ถ้า b เป็นขอบเขตบนของ A และถ้า y เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $b \leq y$

ใช้สัญลักษณ์ $\inf A$ (Infimum of A) แทนขอบเขตล่างมากที่สุดของ A และ $\sup A$ (Supremum of A) แทนขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A

ทฤษฎีบท 2.6 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A มีขอบเขตล่างมากที่สุดแล้ว จะมีเพียงค่าเดียว และ ถ้า A มีขอบเขตบนน้อยที่สุดแล้ว จะมีเพียงค่าเดียว

ทฤษฎีบท 2.7 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) สำหรับเซตของจำนวนจริง A ถ้า m เป็นขอบเขตล่างของ A และ $m \in A$ แล้ว m เป็นค่าน้อยที่สุดของ A และถ้า M เป็นขอบเขตบนของ A และ $M \in A$ แล้ว M เป็นค่ามากที่สุดของ A

ทฤษฎีบท 2.8 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ถ้า m เป็นค่าน้อยที่สุดของ A จะได้ว่า $\inf A = m$ และถ้า M เป็นค่ามากที่สุดของ A จะได้ว่า $\sup A = M$

ทฤษฎีบท 2.9 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A มีขอบเขตบนแล้วจะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด

ทฤษฎีบท 2.10 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A มีขอบเขตล่างแล้วจะมีขอบเขตล่างมากที่สุด

ทฤษฎีบท 2.11 (อำพล ธรรมเจริญ, 2551) ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงที่มีขอบเขต จะได้

1. ถ้า $x \in A$ แล้ว $\inf A \le x \le \sup A$
2. y เป็นขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ $y \le \inf A$ และ z เป็นขอบเขตบนของ A ก็ต่อเมื่อ $z \ge \sup A$
3. ถ้า $x \le b$ ทุก ๆ $x \in A$ จะได้ว่า $\sup A \le b$ และ ถ้า $x \ge a$ ทุก ๆ $x \in A$ จะได้ว่า $\inf A \ge a$
4. y เป็นขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $x \notin A$ และ z เป็นขอบเขตบนของ A ก็ต่อเมื่อ ถ้า $z < x$ แล้ว $x \notin A$
5. $a = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นขอบเขตล่างของ A และสำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวน $y \in A$ ที่ $y < a + \varepsilon$ และ $b = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ b เป็นขอบเขตบนของ A และสำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวน $y \in A$ ที่ $y > b - \varepsilon$

การเชิงนับ (Cardinality) เป็นสัญลักษณ์ของขนาดเซตที่ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวเลข ซึ่งเป็นสัญลักษณ์ที่บอกความสัมพันธ์ได้ ยกตัวอย่างเช่น เซตสองเซตอาจเป็นเซตอนันต์ทั้งคู่ แต่มีจำนวนชิงนับ (Cardinal Number) ไม่เท่ากัน

ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{card}(X)$ แทนจำนวนชิงนับของเซต X

ทฤษฎีบท 2.12 (Cantor's Theorem) เซตไม่มีการเชิงนับที่เท่ากับเซตกำลัง (Power Set) ของตัวเอง

บทนิยาม 2.13 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ประกอบไปด้วยเซต X ที่ไม่เป็นเซตว่าง และฟังก์ชัน $d : X \times X \to \mathbb{R}$ มีสมบัติดังนี้ สำหรับ $x,y,z \in X$

1. $d(x,y) \ge 0$

2. $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

3. $d(x,y) = d(y,x)$

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

เรียก d ว่าฟังก์ชันระยะทาง (Distance Function) หรือเมตริก (Metric) บน X

บทนิยาม 2.14 (Kreyszig, 1989)ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

1. บอลเปิด (Open Ball) นิยามโดย $B(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$
2. บอลปิด (Closed Ball) นิยามโดย $\tilde{B}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$

โดยที่ $x_0 \in X$ เป็นจุดศูนย์กลาง และ $r \in \mathbb{R}^+$ เป็นรัศมี

บทนิยาม 2.15 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียก $O \subseteq X$ ว่าเป็น เซตเปิด (Open Set) ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in O$ มีบอลเปิดที่ x เป็นจุดศูนย์กลาง โดยที่บอลเปิดนั้นเป็นเซตย่อยของ O และเรียก $F \subseteq X$ ว่าเป็น เซตปิด (Closed Set) ถ้าคอมพลีเมนต์ (Complement) ใน X ของ F เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.16 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) และ (Y,d') เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะกล่าวว่าการส่ง $T : X \to Y$ ต่อเนื่อง (Continuous) ที่จุด $x_0 \in X$ ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับ $x \in X$

$$\text{ถ้า } d(x,x_0) < \delta \text{ แล้ว } d'(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$$

และจะกล่าวว่า T ต่อเนื่องบน X ถ้า T ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน X

ทฤษฎีบท 2.17 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) และ (Y,d') เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T : X \to Y$ จะได้ว่า T ต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ ภาพของตัวผกผัน (Inverse Image) ของเซตย่อยเปิดใด ๆ ของ Y เป็นเซตย่อยเปิดใน X

บทนิยาม 2.18 (Kreyszig, 1989) ลำดับ (x_n) ในปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) จะกล่าวว่าเป็น ลำดับลู่เข้า (Convergent Sequence) ถ้ามี $x \in X$ ซึ่ง

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n,x) = 0$$

เรียก x ว่าเป็น ลิมิต ของลำดับ (x_n) เขียนแทนด้วย $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ และถ้าลำดับ (x_n) ไม่เป็นลำดับลู่เข้า จะเรียกลำดับ (x_n) ว่า ลำดับลู่ออก (Divergent Sequence)

ทฤษฎีบท 2.19 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะได้ว่าลำดับที่ลู่เข้าในปริภูมิอิงระยะทางเป็นลำดับที่มีขอบเขตและมีลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 2.20 (Kreyszig, 1989) ลำดับ (x_n) ในปริภูมิอิงระยะทาง $(X.d)$ จะกล่าวว่าเป็น ลำดับโคชี (Cauchy Sequence) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ N ซึ่ง

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } m,n \geq N$$

จะเรียกปริภูมิอิงระยะทาง X ว่า ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (Complete Metric Space) ถ้าทุก ๆ ลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้า

บทนิยาม 2.21 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) และ (Y,d') เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T : X \to Y$ จะกล่าวว่า T เป็นสมมิติ (Isometry) ถ้า

$$d'(T(x),T(y)) = d(x,y) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x,y \in X$$

บทนิยาม 2.22 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตย่อย E ของ X ว่าเซตกระชับ ถ้าทุก ๆ ลำดับใน E มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าซึ่งลิมิตเป็นสมาชิกใน E

บทนิยาม 2.23 (Kreyszig, 1989) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตย่อย E ของ X ว่าเซตกระชับ ถ้าทุก ๆ ลำดับใน E มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าซึ่งลิมิตเป็นสมาชิกใน E

บทนิยาม 2.24 (Kreyszig, 1989)ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space) เหนือฟิลด์ $\mathbb{R}$ ประกอบไปด้วยสมาชิกใน X ที่เรียกว่า เวกเตอร์ พร้อมด้วยการดำเนินการ $+ : X \times X \to X$ ซึ่งเรียกว่าเป็น การบวกของเวกเตอร์ และการดำเนินการ $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ ซึ่งเรียกว่าเป็น การคูณของเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (Scalar) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. การบวกมีสมบัติการสลับที่ (Commutative) และสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ (Associative)
2. มีเวกเตอร์ $0 \in X$ ซึ่ง $x + 0 = x$ ทุก ๆ $x \in X$
3. สำหรับแต่ละ $x \in X$ มีเวกเตอร์ $-x$ ซึ่ง $x + (-x) = 0$
4. สำหรับสเกลาร์ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ และสำหรับเวกเตอร์ $x,y \in X$
   4.1 $\alpha(x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
   4.2 $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$
   4.3 $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
5. สำหรับแต่ละ $x \in X$ จะได้ว่า $1 \cdot x = x$

บทนิยาม 2.25 (Kreyszig, 1989) ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ นอร์ม (Norm) บน X คือการส่ง $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้ สำหรับทุก ๆ $x,y \in X$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

เราจะเรียก $(X, \|\cdot\|)$ ว่า ปริภูมินอร์ม (Normed Space)

ถ้า $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม และ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ เป็นเมตริกบน X ที่กำหนดโดย

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \text{สำหรับ } x,y \in X$$

เรียกเมตริก d ว่าเป็น เมตริกที่เกิดจากนอร์ม (Metric Induced by The Norm)

บทนิยาม 2.26 (Kreyszig, 1989) จะเรียกปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ ว่า ปริภูมิบานาค ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม

บทนิยาม 2.27 (Kreyszig, 1989) ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner Product Space) เป็นปริภูมิเวกเตอร์ X เหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ ซึ่งมีผลคูณภายในนิยามบน X และผลคูณภายในของ x และ y เขียนแทนด้วย $< x,y >$ โดยมีสมบัติดังนี้

สำหรับแต่ละ $x,y,z \in X$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $< x+y,z > = < x,z > + < y,z >$
2. $< \alpha x,y > = \alpha < x,y >$
3. $< x,y > = < y,x >$
4. $< x,x > \geq 0$ และ $< x,x > = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

ถ้า X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน นิยามนอร์มบน X โดย $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ เรียกว่าเป็นนอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน

บทนิยาม 2.28 (Kreyszig, 1989) จะเรียกปริภูมิผลคูณภายใน X ว่าเป็น ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Space) ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคภายใต้นอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน

ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต จะได้ว่าสอดคล้องกับกฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram Law) นั่นคือ

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x,y \in X$$

บทนิยาม 2.29 (Kreyszig, 1989) ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ จะกล่าวว่า $E \subseteq X$ เป็นเซตคอนเวกซ์ (Convex Set) ถ้า $\alpha x + (1-\alpha)y \in E$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in E$ และ $\alpha \in [0,1]$

บทนิยาม 2.30 (Kreyszig, 1989) ให้ T เป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real-Valued Function) ที่นิยามบนช่วง (a,b) จะเรียก T ว่าเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ (Convex Function) ถ้าสอดคล้องกับ

$$T(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha T(x)+(1-\alpha)T(y)$$

สำหรับทุก ๆ $x,y\in(a,b)$ และ $\alpha\in[0,1]$

ทฤษฎีบทจุดตรึงบนปริภูมิบานาค

ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ $E\subseteq X$ โดยที่ $T:E\to X$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า T มีจุดตรึง ถ้ามีสมาชิก $x\in E$ ที่ $T(x)=x$

ทฤษฎีบทจุดตรึงที่สำคัญ 2 ทฤษฎีบทได้แก่

ทฤษฎีบท 2.31 (The Principle of Banach's Contraction Mappings) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ และ $T:X\to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว นั่นคือ มี $k\in[0,1)$ ที่

$$d(T(x),T(y))\leq kd(x,y) \quad \text{สำหรับทุก } x,y\in X$$

จะได้ว่า T มีจุดตรึง x_0 เพียงจุดเดียวเท่านั้น และสำหรับ $x\in X$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}T^n(x)=x_0$ และ

$$d(T^n(x),x_0)\leq\frac{k^n}{1-k}d(x,T(x))$$

ทฤษฎีบท 2.32 (Schauder-Tychonoff Fixed Point Theorem) ให้ C เป็นสับเซตที่กระชับและคอนเวกซ์ (Compact Convex Subset) ของปริภูมิเวกเตอร์เชิงโทโพโลยี (Topological Vector Space) ดังนั้นทุกการส่งต่อเนื่อง (Continuous Mapping) $T:C\to C$ จะมีจุดตรึง

อย่างไรก็ตามทฤษฎีบททั้งสองยังไม่ครอบคลุมถึงการส่งที่มีความทั่วไปกว่าการส่งแบบหดตัวในปริภูมิบานาค

บทนิยาม 2.33 (Goebel & Kirk, 1990) ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ E เป็นเซตย่อยกระชับแบบอ่อนและ คอนเวกซ์ (Weakly Compact Convex Subset) และ $T:E\to E$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย นั่นคือ

$$\|T(x)-T(y)\|\leq\|x-y\| \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x,y\in E$$

บทนิยาม 2.34 (Goebel & Kirk, 1990) เรากล่าวว่า X มีโครงสร้างปรกติ (Normal Structure) ถ้าทุกเซตย่อย E ของ X ที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งสมาชิก จะมี $z\in E$ ที่

$$\sup\{\|z-y\|:y\in E\}<\sup\{\|x-y\|:x,y\in E\}$$

ทฤษฎีบทที่สำคัญและเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายบนปริภูมิบานาคคือทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 2.35 (Kirk, 1965) ถ้าปริภูมิบานาค X มีโครงสร้างปรกติ แล้วทุกการส่งแบบไม่ขยาย T บน E จะมีจุดตรึง

จากทฤษฎีบทจุดตรึงของ Kirk จะเห็นว่า โครงสร้างปรกติเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (Sufficient Condition) สำหรับการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายบนเซต E ดังนั้นจึงได้มีการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของปริภูมิบานาคที่มีความสัมพันธ์กับโครงสร้างปรกติและเครื่องมือที่สำคัญเครื่องมือหนึ่งก็คือค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์

Clarkson (1937) สร้างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ของ X ดังนี้

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{ \frac{\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} : \forall x,y \in X, (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

โดยพบว่า $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ และได้คำนวณหาค่าที่ถูกต้องของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ ดังนี้ $C_{NJ}(X) = 1$ เมื่อ X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต

Kato, Maligranda, and Takahashi (2001) ได้พิสูจน์ว่า ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคที่ $C_{NJ}(X) < 5/4$ แล้ว X มีโครงสร้างปรกติ

Dhompongsa and Kaewkhao (2006) ได้ศึกษาวิจัยจนได้ข้อสรุปที่ดีกว่าของ Kato et al. โดยพิสูจน์ว่า ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคที่ $C_{NJ}(X) < (1+\sqrt{3})/2$ แล้ว X มีโครงสร้างปรกติ

Garca-Falset, Llorens-Fuster, and Mazeonan-Navarro (2006) ได้แสดงว่า เงื่อนไข $C_{NJ}(X) < 2$ เพียงพอต่อการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย T บน E

บทนิยาม 2.36 (Goebel & Kirk, 1990) ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะเรียกว่าเป็นคอนเวกซ์แบบเอกรูป ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon \in (0,2]$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับ $x,y \in X$ ที่

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x-y\| \geq \varepsilon \end{array}\right\} \text{ ทำให้ได้ว่า } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

บทนิยาม 2.37 (Goebel & Kirk, 1990) มอดูลัสของความคอนเวกซ์ (Convex) บนปริภูมิบานาค เป็นฟังก์ชัน $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ นิยามโดย

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{ 1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : x,y \in B(0,1), \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}$$

บทนิยาม 2.38 (Goebel & Kirk, 1990) จะเรียกปริภูมิบานาค X ว่าคอนเวกซ์แบบเอกรูป (Uniformly Convex) เมื่อ $\delta_X(\varepsilon) > 0$ สำหรับ $\varepsilon \in (0,2]$

ทฤษฎีบทจุดตรึงบนปริภูมิอิงระยะทาง

ต่อไปเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาวิจัยทางทฤษฎีจุดตรึงอิงระยะทาง

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และสามารถนิยามการส่งแบบไม่ขยายบน X ได้ทำนองเดียวกันกับบนปริภูมิบานาค

Espinola and Fernandez-Leon (2009) กล่าวถึงโครงสร้างปรกติในปริภูมิอิงระยะทางดังต่อไปนี้

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $D,E \subseteq X$ กำหนด

$$r_x(D) = \sup\{d(x,y) : y \in D\}, \quad x \in X$$

$$\text{rad}_E(D) = \inf\{r_x(D) : x \in E\}$$

$$\text{diam}(D) = \sup\{d(x,y) : x,y \in D\}$$

$$\text{cov}(D) = \cap\left\{B : B \text{ แทนบอลปิด และ } D \subset B\right\}$$

ซึ่ง $\text{rad}_E(D)$ คือ รัศมีเชบีเชฟ (Chebyshev radius) ของ D ใน E และ $\text{cov}(D)$ แทนเปลือกหุ้มแอดมิสซิเบิล (Admissible Hull) ของ D ใน X

เซตย่อย A ของ X จะกล่าวว่าเป็นแอดมิสซิเบิล ถ้า $\text{cov}(A) = A$

บทนิยาม 2.39 (Espinola & Fernandez-Leon, 2009) ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะกล่าวว่า X มีโครงสร้างปรกติ (Normal Structure) ถ้า $\text{rad}_A(A) < \text{diam}(A)$ และ มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป (Uniformly Normal Structure) ถ้า $\text{rad}_A(A) < c\,\text{diam}(A)$ สำหรับ $c \in (0,1)$ โดยที่ A เป็นเซตย่อยแอดมิสซิเบิลที่มีขอบเขตของ X

บทนิยาม 2.40 (Espinola & Fernandez-Leon, 2009) ค่าสัมประสิทธิ์โครงสร้างปรกติ $\tilde{N}(X)$ ของ X นิยามดังนี้

$$\tilde{N}(X) = \sup\left\{\frac{\text{rad}_A(A)}{\text{diam}(A)}\right\}$$

โดยที่ A เป็นเซตย่อยแอดมิสซิเบิลที่มีขอบเขตของ X และ $\text{diam}(A) > 0$

บทนิยาม 2.41 (Espinola & Fernandez-Leon, 2009) ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทาง จะกล่าวว่า X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป ถ้า $\tilde{N}(X) \le c$ เมื่อ $c < 1$

ทฤษฎีบท 2.42 (Espinola & Fernandez-Leon, 2009) ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่มีขอบเขตซึ่งมีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป แล้วสำหรับทุก ๆ การส่งแบบไม่ขยาย $T : X \to X$ มีจุดตรึง

จีออเดซิก (Geodesic) จาก x ไป y คือสมมิติ $c:[0,l]\to X$ ที่ $c(0)=x$ และ $c(l)=y$ และเขียนแทนภาพ (Image) ของ c ด้วย $[x,y]$ (ถ้ามีเพียงหนึ่ง) จะเรียกปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) ว่า ปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิก ถ้าทุกสมาชิก $x,y\in X$ จะมีจีออเดซิกจาก x ไป y เสมอ

กำหนด $\mathbb{R}^2$ เป็นปริภูมิแบบยูคลิด (Euclidean Space)

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิก และ $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ เป็น รูปสามเหลี่ยมจีออเดซิก (Geodesic Triangle) ใน (X,d) ประกอบด้วย 3 จุดใน X (จุดยอดของ Δ) และจีออเดซิกเซกเมนต์ (Geodesic Segment) ระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอด (เส้นเชื่อมของ Δ) รูปสามเหลี่ยมจีออเดซิก $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ ใน (X,d) มีรูปสามเหลี่ยมเปรียบเทียบ (Comparison Triangle) คือ $\bar{\Delta}(x_1,x_2,x_3):=\Delta(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ ใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่ง $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}_i,\bar{x}_j)=d(x_i,x_j)$ สำหรับ $i,j\in\{1,2,3\}$

อสมการ CAT(0) : ให้ Δ เป็นรูปสามเหลี่ยมจีออเดซิกใน X และให้ $\bar{\Delta}\subset\mathbb{R}^2$ เป็น รูปสามเหลี่ยมเปรียบเทียบสำหรับ Δ ดังนั้นจะเรียกได้ว่า Δ สอดคล้องกับอสมการ CAT(0) ถ้าทุก ๆ $x,y\in\Delta$ และทุก ๆ จุดเปรียบเทียบ (Comparison Points) $\bar{x},\bar{y}\in\bar{\Delta}$ สอดคล้องกับ $d(x,y)\le d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x},\bar{y})$

เมตริกบนปริภูมิ X เรียกว่า เมตริกคอนเวกซ์ ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิก และทุก ๆ จีออเดซิก $c_1:[0,a_1]\to X$ และ $c_2:[0,a_2]\to X$ ซึ่ง $c_1(0)=c_2(0)$ สอดคล้องกับ

$$d(c_1(ta_1),c_2(ta_2))\le td(c_1(a_1),c_2(a_2)) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } t\in[0,1]$$

ทฤษฎีบท 2.43 (Bridson & Haefliger, 1999) ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้วฟังก์ชันระยะทาง $d:X\times X\to\mathbb{R}$ จะเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์

ถ้า x,y_1,y_2 เป็นจุดของปริภูมิ CAT(0) และถ้า y_0 เป็นจุดกึ่งกลางของ $[y_1,y_2]$ ดังนั้น อสมการ CAT(0) ส่งผลให้

$$d(x,y_0)^2\le\frac{1}{2}d(x,y_1)^2+\frac{1}{2}d(x,y_2)^2-\frac{1}{4}d(y_1,y_2)^2 \tag{2.1}$$

บทแทรก 2.44 (Bridson & Haefliger, 1999) ปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเป็นปริภูมิ CAT(0) ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับอสมการที่ 2.1

Kirk (2003) ปริภูมิที่จะกล่าวถึงต่อไปคือ ปริภูมิไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Spaces)

กำหนด (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ซึ่งบรรจุวงศ์ (Family) G ของเมตริกเซกเมนต์ (Metric Segment) ซึ่งจุด$x,y\in X$ที่ต่างกัน จะมี $[x,y]$ เป็นสมาชิกใน G

บทนิยาม 2.45 เราจะเรียก (X,G) ว่ามี แบบไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Type) ถ้ามีสมบัติตามเงื่อนไข ดังนี้ ถ้า $p,q,r\in X$ และถ้า m_1 และ m_2 กำหนดเป็นจุดกึ่งกลาง (Midpoint) ของ $[p,q]$ และ $[p,r]$ ตามลำดับ แล้ว $d(m_1,m_2)\le\frac{1}{2}d(r,q)$

ทฤษฎีบท 2.46 (Kirk, 1981-1982) ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบไฮเพอร์โบลิก ให้ $p, x, y \in X$ และ $\alpha \in (0,1)$ และสมมุติ m เป็นจุดของ $[x,y]$ สอดคล้องกับ $d(x,m) = \alpha d(x,y)$ และ $d(y,m) = (1-\alpha)d(x,y)$ ดังนั้น

$$d(p,m) \leq \alpha d(p,y) + (1-\alpha)d(p,x)$$

Kirk (2003, 2004) ได้กล่าวถึง มอดูลัสของความคอนเวกซ์ $\delta : X \times (0,\infty) \times (0,2] \to [0,1]$ ในปริภูมิไฮเพอร์โบลิก ซึ่งได้นิยามไว้ดังนี้

$$\delta(a,r,\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{r}d(a, m[x,y])\right\}$$

โดยที่ $m[x,y]$ เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ $[x,y]$

ปริภูมิ X จะเรียกว่า คอนเวกซ์แบบเอกรูป (Uniformly Convex) ถ้า δ มีค่าเป็นบวกเสมอ