บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทฤษฎีบทจุดตรึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญและมีประสิทธิภาพในการศึกษาถึงตัวแบบทางคณิตศาสตร์หรือระบบสมการต่าง ๆ ในการทราบถึงการมีคำตอบและการสร้างระเบียบวิธีเพื่อหาหรือประมาณค่าคำตอบของ ระบบสมการนั้น ๆ จึงได้มี การนำทฤษฎีบทจุดตรึงไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตัวอย่างเช่น ทฤษฎีการดำเนินการ ทฤษฎีการควบคุม ทฤษฎีของสมการ และคณิตศาสตร์เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น (อรรถพล แก้วขาว, 2550)

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง (Metric Space) และ $T : X \to X$ เป็นการส่ง (Mapping) เราเรียกสมาชิก $x \in X$ ที่ $x = T(x)$ ว่าจุดตรึง (Fixed Point) ของ T และสนใจเงื่อนไขของ T และเงื่อนไขของปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) ที่ทำให้ T มีจุดตรึง

ทฤษฎีบทจุดตรึงที่สำคัญคือ The Principle of Banach's Contraction Mappings และ Schauder-Tychonoff Fixed Point Theorem ซึ่งถูกคิดค้นและพิสูจน์โดย Banach และ Schauder-Tychonoff ใน ค.ศ. 1922 และ ค.ศ.1930 ตามลำดับ ถึงแม้ว่าทฤษฎีบทที่สำคัญทั้งสองสามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในวงวิชาการแต่ผลสรุปของทฤษฎีบทดังกล่าวไม่ครอบคลุมถึงการส่งที่มีความทั่วไปกว่าการส่งแบบหดตัว (Contraction Mapping) เช่น การส่งแบบไม่ขยาย (Nonexpansive Mapping)

Kirk (1965) ได้พิสูจน์ว่า ทุกการส่งแบบไม่ขยายบนเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขต (Closed Convex and Bounded Subset) ของปริภูมิบานาคที่สะท้อน (Reflexive Banach Space) และมีโครงสร้างปรกติ (Normal Structure) ซึ่งเป็นสมบัติทางเรขาคณิต (Geometric Property) เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (Sufficient Condition) ต่อการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย ตั้งแต่นั้นเป็นต้นมาได้มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างปรกติและสมบัติการมีจุดตรึง (Fixed Point Property) ของการส่งแบบไม่ขยายที่เป็นผลงานพื้นฐานสำหรับการอ้างอิงที่มีคุณภาพ (Valuable Citation)

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาทฤษฎีจุดตรึงในปริภูมิบานาคที่สำคัญคือ ค่าคงที่เรขาคณิต (Geometric Constant) ของปริภูมิบานาคที่มีความสัมพันธ์กับโครงสร้างปรกติและการมีจุดตรึงของการส่งบนปริภูมิบานาค ตัวอย่างค่าคงที่เรขาคณิตที่สำคัญและมีชื่อเสียงคือ ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ (Jordan Von-Neumann Constant) ของปริภูมิบานาค สร้างโดย Clarkson ใน ค.ศ. 1937 ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์นั้นนักคณิตศาสตร์หลายท่านทั้งในประเทศและต่างประเทศได้ให้ความสนใจและมีผลงานวิจัยออกมามากมายที่ศึกษาค่าคงที่ดังกล่าวบนปริภูมิบานาค

วิฑูรย์ พึ่งรัตนา (2551) ได้ศึกษาค่าคงที่เจมส์ (หรือ ค่าคงที่นอนสแควร์) บนปริภูมิอิงระยะทาง และคำนวณหาค่าของค่าคงที่เจมส์บนปริภูมิอิงระยะทางที่สำคัญ ดังนี้

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิก และกำหนด $B(u,r)=\{x\in X: d(u,x)\le r\}$ แทนบอลปิด จุดศูนย์กลางที่ u รัศมี r

ค่าคงที่เจมส์บนปริภูมิ X นิยามโดย

$$J_d(X)=\sup\left\{\min\{d(x,y),\ 2d(u,m[x,y])\}:\ x,y\in B(u,1),\ u\in X\right\}$$

โดยที่ $m[x,y]$ เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ $[x,y]$

ผู้ดำเนินการวิจัยจะศึกษาและแก้ปัญหาเพื่อให้ได้ข้อสรุปซึ่งเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ของปริภูมิอิงระยะทางและศึกษาความสัมพันธ์ต่าง ๆ ของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์กับสมบัติอื่น ๆ ที่สำคัญของปริภูมิอิงระยะทาง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. สร้างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ของปริภูมิอิงระยะทาง
2. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทาง
3. คำนวณหาค่าของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์สำหรับปริภูมิอิงระยะทางสำคัญ เช่น ปริภูมิ CAT(0)
4. ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์กับสมบัติอื่น ๆ บนปริภูมิอิงระยะทาง เช่น มอดูลัสของความคอนเวกซ์ (Modulus of Convexity)

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ได้ผลสรุปที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ดังนี้

1. ได้ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ของปริภูมิอิงระยะทาง
2. ได้สมบัติต่าง ๆ ของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทาง
3. ได้ค่าของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์สำหรับปริภูมิอิงระยะทางที่สำคัญ

4. ได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์กับสมบัติอื่น ๆ บนปริภูมิอิงระยะทาง

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิก