บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

กระบวนการแก้ปัญหาสมการค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยใช้วิธีของเทย์เลอร์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ไม่เชิงเส้น , อันดับสูง) และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีของบรอยเดนนั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนการใช้ระเบียบวิธีของบรอยเดน
2. ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
3. การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ขั้นตอนการใช้ระเบียบวิธีของบรอยเดน

สรุปขั้นตอนการใช้ระเบียบวิธีของบรอยเดนในการแก้ปัญหาระบบสมการ

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

เมื่อฟังก์ชัน $\boldsymbol{f} : R^n \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งได้ โดยใช้สูตรเวียนเกิด

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i - D_i^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)\ ,\ i = 0,1,2,3,...$$

และใช้สูตรปรับเปลี่ยนเมทริกซ์แบบตัวผกผัน

$$D_{i+1}^{-1} = D_i^{-1} - \frac{1}{\boldsymbol{b}^T D_i^{-1}\boldsymbol{y}_i} D_i^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i+1})\boldsymbol{b}^T D_i^{-1} \quad ,\ i = 0,1,2,3,...$$

มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนด $\boldsymbol{x}_0 := (x_1, x_2, ..., x_n)$ เป็นจุดเริ่มต้น D_0^{-1} เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น (ปกติเรากำหนด $D_0 = I$)

2. คำนวณค่า $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)$ และ $\boldsymbol{b} := D_i^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)$

3. ให้ $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{b}_i$

4. ให้ $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i+1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)$ และคำนวณ $\boldsymbol{d} := (\boldsymbol{b}^T D_i^{-1})\boldsymbol{y}_i$ และ $E := \frac{1}{\boldsymbol{d}} D_i^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i+1})\boldsymbol{b}^T D_i^{-1}$

5. ปรับปรุง $D_{i+1}^{-1} = D_i^{-1} - E$

กระทำซ้ำ ข้อ 2 – 5

6. หยุดกระทำเมื่อ i มีค่ามากพอ หรือเมื่อ $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\| < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อย ๆ

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ระเบียบวิธีของบรอยเดนในการแก้ปัญหาสมการค่าขอบนั้นได้เลือกตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้น (Linear) และแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) ที่มีเงื่อนไขค่าขอบที่อยู่ในรูปแบบค่าขอบปรกติและรูปแบบสมการค่าขอบ สำหรับเงื่อนไขค่าขอบที่อยู่ในรูปแบบสมการค่าขอบยังแยกเป็นแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

ตัวอย่าง 1 ปัญหานี้เรียกว่า Swirling Flow III (Ascher et al., 1988) ซึ่งปัญหาค่าขอบดังกล่าว อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสองและอันดับสี่ ODEs เงื่อนไขค่าขอบเป็นปัญหาค่าขอบปรกติ ดังต่อไปนี้

$$y_1'' = \frac{(y_1 y_2' - y_2 y_1')}{0.1} \tag{3.6}$$

$$y_2^{(4)} = \frac{(-y_2 y_2''' - y_1 y_1')}{0.1}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$y_1(0) = -1, y_1(1) = 1, y_2(0) = y_2'(0) = y_2(1) = y_2'(1) = 0$$

ตัวอย่าง 2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้น อันดับหก ที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบค่าขอบปรกติ

$$y^{(6)} - y = -6e^x \ ; \ 0 \le x \le 1$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(0) = 1$ $\quad y(1) = 0$

$$y'(0) = 0 \qquad y'(1) = -e$$

$$y''(0) = -1 \qquad y''(1) = -2e$$

ตัวอย่าง 3 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้น ที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบสมการค่าขอบแบบเชิงเส้น

$$x' = 2x + e^t(y+1)$$

$$y' = -xe^t + y + 1 \qquad ; \quad 0 \le t \le 1$$

เงื่อนไขค่าขอบ $x(0) + x(1) = 6.217676$

$$x(0) + 2x(1) = 12.435352$$

ตัวอย่าง 4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับสาม ที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบสมการค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น

$$3y''' - 4y'' - 6xy' + 18y = 0 \ ; \ 0 \le x \le 1$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(0) + y^2(1) = 3$

$$y(0) + y'(0) = 1$$

$$y'(0) + y^2(1) = 6$$

ตัวอย่าง 5 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง ที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบสมการค่าขอบแบบเชิงเส้น

$$x'' - 2xx' = -\frac{4}{t^2} \ ; 1 \le t \le 2$$

เงื่อนไขค่าขอบ $x(1) - 2x(2) = -2$

$$x(1) + x(2) = 2.5$$

ตัวอย่าง 6 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง ที่มีเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบสมการค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น

$$x'' - (x')^2 - x^2 = -1 - \sin t \ ; \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

เงื่อนไขค่าขอบ $x^2(0) + x(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$x^2(0) + x^2(\frac{\pi}{2}) = 1$$

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยวิธียิงเป้า ใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับ 4 ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์และปรับค่าเริ่มต้นด้วยวิธีของบรอยเดน จะแสดงการแก้ปัญหาในตัวอย่าง 1 โดยละเอียดดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์

$$y_1'' = \frac{(y_1 y_2' - y_2 y_1')}{0.1}$$

$$y_2^{(4)} = \frac{(-y_2 y_2''' - y_1 y_1')}{0.1}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$y_1(0) = -1, y_1(1) = 1, y_2(0) = y_2'(0) = y_2(1) = y_2'(1) = 0$$

1. ปัญหาค่าขอบ

$y_1(0) = -1, y_1'(0)$ ไม่กำหนด , $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0$, $y_2''(0)$ ไม่กำหนด และ $y_2'''(0)$ ไม่กำหนด

$y_1(1) = 1$, $y_1'(1)$ ไม่กำหนด, $y_2(1) = 0$, $y_2'(1) = 0$, $y_2''(1)$ ไม่กำหนด และ $y_2'''(1)$ ไม่กำหนด

2. แก้ปัญหาโดยกำหนดค่าเริ่มต้น

$y_1(0) = -1$, $y_1^{'}(0) = z_2$, $y_2(0) = 0$, $y_2^{'}(0) = 0$, $y_2^{''}(0) = z_5$ และ $y_2^{'''}(0) = z_6$

โดย z_2 , z_5 และ z_6 เป็นค่าที่สมมุติในการดำเนินการ

จากปัญหาค่าขอบเราสามารถหาอนุพันธ์เพื่อใช้ในสูตรของเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$y_1^{''} = \frac{(y_1 y_2^{'} - y_2 y_1^{'})}{0.1} = 10(y_1 y_2^{'} - y_2 y_1^{'})$$

$$y_1^{'''} = 10(y_1 y_2^{''} - y_1^{''} y_2)$$

$$y_1^{(4)} = 10(y_1 y_2^{'''} + y_1^{'} y_2^{''} - y_1^{''} y_2^{'} - y_1^{'''} y_2)$$

$$y_1^{(5)} = 10(y_1 y_2^{(4)} + 2y_1^{'} y_2^{'''} - 2y_1^{'''} y_2^{'} - y_1^{(4)} y_2)$$

$$y_2^{(4)} = \frac{(-y_2 y_2^{'''} - y_1 y_1^{'})}{0.1} = 10(-y_2 y_2^{'''} - y_1 y_1^{'})$$

$$y_2^{(5)} = 10(-y_2 y_2^{(4)} - y_2^{'''} y_2^{'} - y_1 y_1^{''} - y_1^{'} y_1^{'})$$

$$y_2^{(6)} = 10(-y_2 y_2^{(5)} - 2y_2^{(4)} y_2^{''} - y_2^{'''} y_2^{''} - y_1 y_1^{'''} - 3y_1^{'} y_1^{''})$$

$$y_2^{(7)} = 10(-y_2 y_2^{(6)} - 3y_2^{(5)} y_2^{'} - 3y_2^{(4)} y_2^{''} - y_2^{'''} y_2^{'''} - y_1 y_1^{(4)} - 4y_1 y_1^{'''} - 3y_1^{''} y_1^{''})$$

หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญข้างต้นโดยระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ อันดับ 4 โดยสูตร

$$y_{i+1} = y_i + hy^{'}(t_i) + \frac{h^2}{2} y^{''}(t_i) + \frac{h^3}{6} y^{'''}(t_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(t_i)$$

และกำหนดค่า $h = 0.05$ ค่า y , $y^{'}$, $y^{''}$, $y^{'''}$ ที่ขาดหายไปได้จากสูตร

$$y_1 = y_1 + hy_1^{'} + \frac{h^2}{2} y_1^{''} + \frac{h^3}{6} y_1^{'''} + \frac{h^4}{24} y_1^{(4)}$$

$$y_1^{'} = y_1^{'} + hy_1^{''} + \frac{h^2}{2} y_1^{'''} + \frac{h^3}{6} y_1^{(4)} + \frac{h^4}{24} y_1^{(5)}$$

$$y_2 = y_2 + hy_2^{'} + \frac{h^2}{2} y_2^{''} + \frac{h^3}{6} y_2^{'''} + \frac{h^4}{24} y_2^{(4)}$$

$$y_2^{'} = y_2^{'} + hy_2^{''} + \frac{h^2}{2} y_2^{'''} + \frac{h^3}{6} y_2^{(4)} + \frac{h^4}{24} y_2^{(5)}$$

$$y_2^{''} = y_2^{''} + hy_2^{'''} + \frac{h^2}{2} y_2^{(4)} + \frac{h^3}{6} y_2^{(5)} + \frac{h^4}{24} y_2^{(6)}$$

$$y_2^{'''} = y_2^{'''} + hy_2^{(4)} + \frac{h^2}{2} y_2^{(5)} + \frac{h^3}{6} y_2^{(6)} + \frac{h^4}{24} y_2^{(7)}$$

โดยจุดเริ่มต้น $[1\ z_2\ \ 0\ 0\ z_5\ \ z_6]^T$ แก้สมการเชิงอนุพันธ์เราจะได้จุดปลายเป็น

$$y(t) = \left[y_1\ \ y_1^{'}\ \ y_2\ \ y_2^{'}\ \ y_2^{''}\ \ y_2^{'''} \right]^T$$

ฟังก์ชัน G คือ $G(z_2,z_5,z_6)=\begin{bmatrix} y_1-1 \\ y_2 \\ y_2^{'} \end{bmatrix}$

3. ตรวจสอบว่า $\boldsymbol{y}(t_f)$ สอดคล้องเงื่อนไขที่จุดปลายหรือไม่ $|\, y_1(1)-1\,|<\varepsilon$, $|\, y_2(1)-0\,|<\varepsilon$ และ $|\, y_2^{'}(1)-0\,|<\varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon = 0.000000001$ ถ้าสอดคล้องเราจึงหยุด และได้ $\boldsymbol{y}(t)$ เป็นผลเฉลย ถ้ายังไม่สอดคล้อง ให้ทำขั้นตอนที่ 4 ต่อไป

4. หาผลเฉลยของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นของ Δz_2 , Δz_5 และ Δz_6 จากสมการ (2.10)

$$\Delta z = -D_i^{-1} G(z_2,z_5,z_6)$$

5. ให้ $z_2 = z_2 + \Delta z_2$, $z_5 = z_5 + \Delta z_5$ และ $z_6 = z_6 + \Delta z_6$

6. คำนวณหาค่า D_{i+1}^{-1} จากสูตรปรับเปลี่ยนเมทริกซ์แบบตัวผกผันและกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 2 กระทำได้ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 1

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 3 กำหนด $x(0)=z_1, y(0)=z_2$

ดังนั้นฟังก์ชันเป็น $G(z_1,z_2)=\begin{bmatrix} x(0)+x(1)-6.217676 \\ x(0)+2x(1)-12.435352 \end{bmatrix}$

และเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบเชิงเส้น

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 4 กำหนด $y(0)=z_1, y^{'}(0)=z_2, y^{''}(0)=z_3$

ดังนั้นฟังก์ชันเป็น $G(z_1,z_2,z_3)=\begin{bmatrix} y(0)+y^2(0)-3 \\ y(0)+y^{'}(0)-1 \\ y^{'}(0)+y^2(0)-6 \end{bmatrix}$

และเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบไม่เชิงเส้น

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 5 การแก้ปัญหาค่าขอบ กระทำ 2 ครั้ง ดังนี้

1. โดยการแก้ปัญหาเงื่อนไขค่าขอบที่อยู่ในรูปแบบสมการค่าขอบ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t_0),\boldsymbol{y}(t_f))=\boldsymbol{0}$ ให้อยู่ในรูปแบบค่าขอบปรกติ $\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}(t_f)=\boldsymbol{y}_f$ โดยระเบียบวิธีของบรอยเดน

2. เมื่อได้เงื่อนไขค่าขอบเป็นค่าขอบปรกติ $\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}(t_f)=\boldsymbol{y}_f$ แล้วกระทำในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 1

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 6 กระทำได้ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 5