บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขทั้งสองปลาย (Two Point Boundary Value Conditions) นับว่าเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อย ๆ ในหลาย ๆ ปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาการเปลี่ยนวงโคจรของยานอวกาศ (อำพล ธรรมเจริญ, 2530) ปัญหานอยมันน์ (สุทธีรา วสุวานิช, 2547) ปัญหาดังกล่าวนั้น สามารถแก้ปัญหาโดยวิธีวิเคราะห์ซึ่งอาจทำได้ แต่ก็เพียงเฉพาะปัญหาบางชนิดบางแบบเท่านั้น เพราะสมการส่วนมากแล้วต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) เข้ามาช่วย

สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นคือ

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0 \ , \ y \in R^n$$

มีชื่อเรียกว่า ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial Value Problem) วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหามีหลายวิธี เช่น วิธีของเทย์เลอร์ (Taylor's Method) วิธีของรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta Method) (Gerald & Wheatley, 2004) เป็นต้น

ปัญหาค่าขอบเป็นปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขที่จุดปลาย

$$y' = f(t, y) \tag{1.1}$$

$$g(y(t_0), y(t_f)) = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

เมื่อ $f : R \times R^n \to R^n, g : R^n \times R^n \to R^n$, $t \in [t_0, t_f]$ และ $y \in R^n$

ถ้าเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบ $y(t_0) = y_0$ และ $y(t_f) = y_f$ เราเรียกว่า ปัญหาค่าขอบปรกติ (Normal Boundary Value Problems) และถ้าเงื่อนไขค่าขอบเป็นสมการเราเรียกว่า ปัญหาสมการค่าขอบ (Equations Boundary Value Problems) ดังตัวอย่าง

$y_1' = 2y_1 - ty_2$	$y_1' = 2y_1 - ty_2$	$y_1' = 2y_1 - ty_2$
$y_2' = y_1^2 - 3y_2$	$y_2' = y_1^2 - 3y_2$	$y_2' = y_1^2 - 3y_2$
$y_1(0) = 0 \ , \ y_2(0) = 1$	$y_1(0) = 0 \ , y_2(1) = 3$	$[y_1(0)]^2 + y_1(1) = 1$ $y_1(0) - 3y_1(1) = 5$
ปัญหาค่าเริ่มต้น	ปัญหาค่าขอบปรกติ	ปัญหาสมการค่าขอบ

การแก้ปัญหาค่าขอบมีหลายวิธี เช่น วิธีผลต่างจำกัด (Finite-Difference Method) วิธีฟังก์ชันประมาณค่า (Collocation Method) วิธียิงเป้า (Shooting Method) (ศิริพงษ์ ศรีพิพัฒน์,

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

2528) ในวิธียิงเป้า เราปรับรูปแบบของปัญหาเป็นการแก้สมการ

$$F(y(t_0)) = \mathbf{0}$$

ผลเฉลยของระบบสมการจะทำให้ได้ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบตามต้องการ ในปัญหาดังกล่าวนี้ ค่าของฟังก์ชัน F ได้มาจากการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีค่าเริ่มต้นเป็น $y(t_0)$

วิธีการแก้ระบบสมการมีหลายวิธี เช่น วิธีของนิวตัน (Newton's Method) วิธีของบรอยเดน (Broyden's Method) (Faires & Richard, 1997) วิธีที่นิยมใช้คือใช้วิธีของนิวตัน สำหรับระบบสมการ

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

เมื่อ $F : R^n \to R^n$ วิธีของนิวตันมีสูตรที่ใช้ในการคำนวณ ในขั้นตอนวิธีดังนี้

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i - [F'(\boldsymbol{x}_i)]^{-1} F(\boldsymbol{x}_i) \quad , \quad i = 0,1,2,...$$

เมื่อ $\boldsymbol{x}_0$ เป็นจุดเริ่มต้นที่กำหนดขึ้น จะได้ลำดับ $< \boldsymbol{x}_n >$ ที่คาดว่าจะลู่เข้าหาผลเฉลย แต่บางครั้งการหาอนุพันธ์ $F'(\boldsymbol{x}_i)$ กระทำได้ยากเราจึงปรับปรุงเปลี่ยนสูตร เป็นดังนี้

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i - D_i^{-1} F(\boldsymbol{x}_i) \quad , \quad i = 0,1,2,...$$

เมื่อ D_i เป็นเมทริกซ์ที่ใช้แทน $F'(\boldsymbol{x}_i)$ และปรับค่า D_{i+1} โดยสูตรการปรับค่า วิธีนี้มีชื่อว่า วิธีของบรอยเดน

กระบวนการแก้ปัญหาโดยใช้วิธียิงเป้าเป็นดังนี้

1. สมมุติค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบค่า $y(t_0)$ แล้วแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น จะได้ค่าของฟังก์ชัน $F(y(t_0))$ ซึ่งเป็นค่าที่จุดปลาย $y(t_f)$

2. ถ้าค่า $F(y(t_0))$ ยังไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข เราปรับค่าของจุดเริ่มต้น $y(t_0)$ แล้วแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นกระทำดังนี้ จะได้ผลเฉลยคือ ได้ค่าเริ่มต้นที่ค่าที่จุดปลายสอดคล้องกับเงื่อนไข

สำหรับปัญหาค่าขอบปรกติ ค่า $y(t_f)$ จะเป็นค่าของฟังก์ชันด้วย ดังนั้นแก้ปัญหาได้โดยกระบวนการข้างบน

สำหรับปัญหาสมการค่าขอบนั้น การแก้ปัญหาอาจทำได้ 2 วิธีคือ

1. แก้สมการของค่าขอบเพื่อให้เป็นปัญหาค่าขอบปรกติ

2. ปรับสมการค่าขอบให้เป็นส่วนหนึ่งของฟังก์ชันแล้วแก้ปัญหา

ในวิทยานิพนธ์ผู้วิจัยจะศึกษาการแก้ปัญหาสมการค่าขอบโดยใช้วิธียิงเป้า การปรับปัญหาสมการค่าขอบเป็นระบบสมการ สำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ในครั้งนี้ได้เลือกวิธีของเทย์เลอร์ เพื่อแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีของเทย์เลอร์สามารถที่จะแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ไม่เชิงเส้น, อันดับสูง) ส่วนการปรับค่าเริ่มต้นจะใช้วิธีของบรอยเดน

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาและทดลองการแก้ปัญหาสมการค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ไม่เชิงเส้น,อันดับสูง)โดยใช้วิธีของเทย์เลอร์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้น

2. จำแนกประเภทของปัญหาที่สามารถใช้วิธีแก้ปัญหาในแบบค่าขอบปรกติและแบบสมการค่าขอบ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้วิธีการแก้ปัญหาสมการค่าขอบที่มีประสิทธิภาพและใช้แรงงานน้อย

2. ทราบลักษณะของปัญหาที่สามารถแก้ได้ในแบบค่าขอบปรกติและแบบสมการค่าขอบ

ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาปัญหาสมการค่าขอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2. ใช้วิธียิงเป้าในการแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและใช้ระเบียบวิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้น

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University