บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาวิจัยการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่มีความลึกต่าง ๆ ด้วยการไหลแบบเอกรูปนั้น จะเริ่มจากการกำหนดสมการควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง นำสมการควบคุมดังกล่าวมาทำให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติด้วยวิธีมาตราส่วน แล้วนำวิธีหลายมาตราส่วนมาใช้ในการประมาณค่า จากนั้นหาผลเฉลยของสมการ KdV ที่ได้รับและอธิบายผลที่ได้จากการดำเนินการดังกล่าว ซึ่งสามารถแสดงเป็นขั้นตอนต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. สมการควบคุม
2. วิธีมาตราส่วน
3. วิธีหลายมาตราส่วน

เราจะแสดงรายละเอียดของแต่ละขั้นตอนข้างต้นดังต่อไปนี้

สมการควบคุม

เราจะดำเนินการเช่นเดียวกับ Johnson (1994) ที่ความลึกคงตัว เริ่มจากแบบจำลองที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น จะสามารถเขียนสมการออยเลอร์ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{Du'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x'} \tag{3.1}$$

$$\frac{Dw'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial z'} - g \tag{3.2}$$

เมื่อ

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + u'\frac{\partial}{\partial x'} + w'\frac{\partial}{\partial z'}$$

เป็นอนุพันธ์วัสดุ

นอกจากนี้ เรายังสามารถเขียนสมการภาวะต่อเนื่องได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \tag{3.3}$$

เมื่อ P' เป็นความดันของของไหล ρ เป็นความหนาแน่นคงตัวของของไหล u' เป็นความเร็วประกอบในแนวระดับสำหรับการไหลของของไหล w' เป็นความเร็วประกอบในแนวดิ่งสำหรับการไหลของของไหล และ g เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง สมการข้างต้นจะใช้เครื่องหมาย (′) แทนตัวแปรที่มีมิติ

ต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขขอบบนผิวหน้า ซึ่งเขียนแทนด้วย $z' = h'(x',t')$ ได้แก่ เงื่อนไขขอบจลนศาสตร์ และเงื่อนไขขอบพลศาสตร์ ดังต่อไปนี้

ในเงื่อนไขขอบจลนศาสตร์นั้น เราจะพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่ของอนุภาคของน้ำ ได้แก่ ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง เวลา ความเร็ว และความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง โดยจะไม่พิจารณาถึงแรงที่มากระทำต่ออนุภาคของน้ำ ดังนั้น

$$z' - h'(x',t') = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{D}{Dt'}[z' - h'(x',t')] = 0$$

นั่นคือ

$$w' - \frac{\partial h'}{\partial t'} - u'\frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \qquad \text{บน} \qquad z' = h'(x',t') \tag{3.4}$$

ส่วนเงื่อนไขขอบพลศาสตร์นั้น เราจะพิจารณาเฉพาะค่าความดันเท่านั้น เนื่องจากในแบบจำลองได้กำหนดให้ความตึงผิวมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นความดันที่ผิวน้ำจะถูกกำหนดให้เป็นค่าคงตัวดังนี้

$$P' = P_a = \text{ค่าคงตัว} \qquad \text{บน} \qquad z' = h'(x',t') \tag{3.5}$$

เมื่อ P_a เป็นความดันบรรยากาศ

ต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขขอบบนพื้นล่าง โดยเรากำหนดให้ของไหลมีการไหลแบบคงตัว นั่นแสดงว่าสมบัติของของไหลที่ทุกจุดในของไหลนั้น จะไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลา ดังนั้น เงื่อนไขขอบบนพื้นล่าง ซึ่งเขียนแทนด้วย $z' = b'(x')$ จะเป็นดังนี้

$$z' - b'(x') = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{D}{Dt'}[z' - b'(x')] = 0$$

ดังนั้น

$$w' = u'\frac{db'}{dx'} \qquad \text{บน} \qquad z' = b'(x') \tag{3.6}$$

ดังนั้น เราสามารถรวบรวมสมการควบคุมที่ได้จากแบบจำลองดังกล่าวได้ดังนี้

$$u'_{t'} + u'u'_{x'} + w'u'_{z'} = -\frac{1}{\rho}P'_{x'} \tag{3.7}$$

$$w'_{t'} + u'w'_{x'} + w'w'_{z'} = -\frac{1}{\rho}P'_{z'} - g \tag{3.8}$$

$$u'_{x'} + w'_{z'} = 0 \tag{3.9}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} w' &= h'_{t'} + u'h'_{x'} \\ P' &= P_a \end{aligned}\right\} \qquad \text{บน} \qquad z' = h'(x',t') \tag{3.10}$$

และ

$$w' = u'b'_{x'} \qquad \text{บน} \qquad z' = b'(x') \tag{3.11}$$

วิธีมาตราส่วน

เนื่องจากสมการควบคุม (3.7) – (3.11) อยู่ในรูปตัวแปรที่มีมิติ เราจะใช้วิธีมาตราส่วนทำให้สมการควบคุมเหล่านี้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ ซึ่งทำให้เราสามารถสร้างตัวแปรเสริมการรบกวนได้ โดยที่ตัวแปรเสริมการรบกวนดังกล่าวนี้จะถูกนำมาใช้ในการแปลงตัวแปรอิสระ ดังต่อไปนี้

เราจะเริ่มพิจารณาตัวแปร และมิติของตัวแปรที่อยู่ในสมการควบคุมข้างต้น ซึ่งได้แก่

ตัวแปร	หน่วย
x'	m
z'	m
t'	s
u'	m/s
w'	m/s
P'	N/m^2
ρ	kg/m^3
g	m/s^2

จะเห็นว่า หกบรรทัดแรกเป็นพิกัด และสองบรรทัดสุดท้ายเป็นตัวแปรเสริมธรรมชาติ แต่ในแบบจำลองของเราจะมีตัวแปรเสริมธรรมชาติที่มีมิติเหมือนกับพิกัดอีก เราจะให้เป็นมาตราส่วนความยาวดังนี้

มาตราส่วน	หน่วย
a	m
λ	m
h_0	m

เมื่อ a เป็นแอมพลิจูดของคลื่นผิวน้ำ λ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นผิวน้ำ และ h_0 เป็นความลึกคงตัวของน้ำที่ยังไม่ถูกรบกวนใน $x' < 0$ (คลื่นจะเริ่มแผ่ขยายจากความลึกคงตัวนี้ก่อนที่

จะเข้าไปในพื้นที่ที่มีความลึกเปลี่ยนแปลง) ต่อไปเราจะปรับมาตราตัวแปรเสริมธรรมชาติข้างต้นให้มีมิติเหมือนกับพิกัดได้เป็น

มาตราส่วน	**หน่วย**
$\sqrt{gh_0}$	m/s
$h_0\sqrt{gh_0}/\lambda$	m/s
$\lambda/\sqrt{gh_0}$	s
ρgh_0	N/m^2

จะเห็นว่า สองบรรทัดแรกเป็นมาตราส่วนความเร็วสำหรับความเร็วประกอบในแนวระดับ และความเร็วประกอบในแนวดิ่ง ตามลำดับ บรรทัดถัดมาเป็นมาตราส่วนเวลา และบรรทัดสุดท้ายเป็นมาตราส่วนความดัน ดังนั้นเราสามารถนิยามตัวแปรไร้มิติได้ดังนี้

$$x = x'/\lambda \qquad z = z'/h_0$$

$$u = u'/\sqrt{gh_0} \qquad w = w'\lambda/h_0\sqrt{gh_0}$$

$$h(x,t) = h'/h_0 \qquad b(x) = b'/h_0$$

$$t = t'\sqrt{gh_0}/\lambda$$

และตัวแปรไร้มิติ p จะอยู่ในรูป

$$P' = P_a - \rho gz' + \rho gh_0 p$$

นอกจากนี้ เรายังสามารถปรับมาตราตัวแปรเสริมธรรมชาติให้กลายเป็นตัวแปรเสริมการรบกวนไร้มิติได้ นั่นคือ $\delta = h_0/\lambda$ เป็นตัวแปรเสริมของความยาวคลื่น

ดังนั้น สมการควบคุม (3.7) – (3.11) จะกลายเป็น

$$u_t + uu_x + wu_z = -p_x \tag{3.12}$$

$$\delta^2(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z \tag{3.13}$$

$$u_x + w_z = 0 \tag{3.14}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} w &= h_t + uh_x \\ p &= h \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z = h \tag{3.15}$$

และ

$$w = ub_x \qquad \text{บน} \quad z = b \tag{3.16}$$

จะเห็นว่า ระบบสมการข้างต้นบรรจุตัวแปรไร้มิติและตัวแปรเสริมการรบกวน δ ไว้ด้วย นอกจากนี้ เรายังสามารถปรับตัวแปรเสริมธรรมชาติให้กลายเป็นตัวแปรเสริมการรบกวนไร้มิติได้อีกคือ $\varepsilon = a/h_0$ เป็นตัวแปรเสริมเล็กของแอมพลิจูดของคลื่น

เราจะเริ่มดำเนินการแปลงตัวแปรอิสระ x และ t ดังนี้

$$\chi = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} x$$

และ

$$\tau = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} t$$

เพื่อให้สอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล เราจะดำเนินการแปลงตัวแปรตาม w ดังนี้

$$w \rightarrow \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} w$$

เมื่อเครื่องหมาย " $\rightarrow$ " หมายถึง การแทนที่

ดังนั้น สมการควบคุม (3.12) – (3.16) จะกลายเป็น

$$u_\tau + uu_\chi + wu_z + p_\chi = 0 \tag{3.17}$$

$$\varepsilon(w_\tau + uw_\chi + ww_z) + p_z = 0 \tag{3.18}$$

$$u_\chi + w_z = 0 \tag{3.19}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} p &= h \\ w &= h_\tau + uh_\chi \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z = h \tag{3.20}$$

และ

$$w = ub_\chi \qquad \text{บน} \qquad z = b \tag{3.21}$$

จะเห็นว่า ระบบสมการข้างต้นจะบรรจุตัวแปรเสริมการรบกวนหนึ่งตัวที่ความลึกคงตัว ใน $x < 0$ โดยที่คลื่นผิวหน้ายังไม่ปรากฏ

ต่อไปเราจะพิจารณาการปรากฏของคลื่นผิวหน้าซึ่งแผ่ขยายไปทางขวาที่ความลึกคงตัว ใน $x < 0$ โดยการนิยามตัวแปร h ให้อยู่ในรูป

$$h = 1 + \varepsilon\eta(x,t), \qquad x < 0$$

จะเห็นว่า ผิวหน้าที่ยังไม่ถูกรบกวน $(h = 1)$ จะถูกรบกวนโดยคลื่น $\varepsilon\eta(x,t)$ (ซึ่งจะถูกกำหนด) ในกรณีที่ $\varepsilon = 0$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ผิวหน้ายังไม่ถูกรบกวน หรือคลื่นยังไม่ปรากฏ โดยที่ $\eta = O(1)$ เป็นคลื่นปฐมภูมิในการวิจัยของเรานั่นเอง

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการไหลที่มีความลึกคงตัวซึ่งดำเนินการเช่นเดียวกับ Johnson (1994) ต่อไปเราจะพิจารณาการไหลที่มีความลึกเปลี่ยนแปลงซึ่งกำหนดให้เป็นการไหลแบบเอกรูป นั่นคือ ความเร็วประกอบในแนวระดับ $u = \dfrac{U_0}{D(Y)}$ เมื่อ U_0 เป็นค่าคงตัว และ $D(Y) = 1 + H(Y) - B(Y)\ \ (> 0)$ เป็นความลึกเฉพาะที่ (ซึ่งจะกล่าวถึงในไม่ช้านี้) ซึ่งพบว่าเมื่อ

ความลึกคงตัว ($D=1$) ความเร็วประกอบในแนวระดับจะเป็นค่าคงตัว แต่เมื่อความลึกมีการเปลี่ยนแปลง ความเร็วประกอบในแนวระดับก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงด้วย (Panupintu, 2002)

ก่อนอื่นเราจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงความลึกซึ่งถูกควบคุมด้วยฟังก์ชัน $b(x)=B(\alpha x)$ เมื่อ α^{-1} เป็นมาตราส่วนความลึกที่มีการเปลี่ยนแปลง เราจะพิจารณากรณีที่ขนาดของ α สัมพันธ์กับ ε ดังนี้

$$\frac{\delta\alpha}{\varepsilon^{1/2}}=\varepsilon\sigma \qquad \text{สำหรับ} \qquad \varepsilon\to 0\,,\ \sigma\to 0$$

เมื่อ σ เป็นตัวแปรเสริมเล็กที่ใช้คำนวณเกี่ยวกับความลึก ซึ่งในกรณีนี้จะใช้อธิบายเงื่อนไขของการเปลี่ยนแปลงความลึกที่เกิดขึ้นบนมาตราส่วนที่ยาวกว่าวิวัฒนาการของคลื่นไม่เชิงเส้น (Johnson, 1994) จะได้ว่า

$$b(x)=B(\alpha x)=B(\alpha\frac{\delta\chi}{\varepsilon^{1/2}})=B(\varepsilon\sigma\chi)=B(Y) \qquad \text{เมื่อ} \qquad Y=\varepsilon\sigma\chi$$

เป็นพื้นล่างที่มีการเปลี่ยนแปลงความลึก

ต่อไปเราจะเริ่มนำมาตราส่วนการเปลี่ยนแปลงความลึกที่ได้จาก Johnson (1994) มาพิจารณาร่วมกับการไหลแบบเอกรูปที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงความลึกที่ได้มาจาก Panupintu (2002) ดังนั้น เมื่อคลื่นผิวหน้ายังไม่ปรากฏ เราจะกำหนดให้การไหลเป็นแบบคงที่ใน $x<0$ และกำหนดการไหลให้เป็นแบบเอกรูปบนมาตราส่วน $\varepsilon\sigma\chi$ ใน $x>0$ โดยที่พื้นล่าง $z=b(x)=B(Y)$ มีการเปลี่ยนแปลง เราสามารถกำหนดตัวแปรต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

$$u=\frac{U_0}{D(Y;\varepsilon)} \qquad w=\varepsilon\sigma W(z,Y;\varepsilon)$$

$$p=P(z,Y;\varepsilon) \qquad h=1+H(Y;\varepsilon)$$

ดังนั้น สมการควบคุม (3.17) – (3.21) จะกลายเป็น

$$-\frac{{U_0}^2D'}{D^3}+P_Y=0 \tag{3.22}$$

$$\varepsilon^3\sigma^2\left(\frac{U_0W_Y}{D}+WW_z\right)+P_z=0 \tag{3.23}$$

$$-\frac{U_0D'}{D^2}+W_z=0 \tag{3.24}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned}P&=1+H\\ W&=\frac{U_0H'}{D}\end{aligned}\right\} \qquad \text{บน} \qquad z=1+H \tag{3.25}$$

และ

$$W = \frac{U_0 B'}{D} \qquad \text{บน} \qquad z = B \tag{3.26}$$

จะเห็นว่า ระบบสมการข้างต้นบรรจุสองตัวแปรเสริมการรบกวนเล็ก ซึ่งจะถูกใช้ในวิธีหลายมาตราส่วนในการวิจัยของเรา

วิธีหลายมาตราส่วน

เนื่องจากปัญหาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในการศึกษาวิจัยของเราจะเกิดบนมาตราส่วนความลึกที่มีการเปลี่ยนแปลง และมาตราส่วนวิวัฒนาการของคลื่นไม่เชิงเส้น ดังนั้นเราจะใช้วิธีหลายมาตราส่วนในการวิจัยดังนี้

เริ่มจากทำการแยกตัวแปรปริภูมิได้เป็น X ซึ่งเป็นมาตราส่วนช้าสำหรับวิวัฒนาการของคลื่นไม่เชิงเส้นและ Y ซึ่งเป็นมาตราส่วนช้าสำหรับการเปลี่ยนแปลงความลึก (ซึ่งได้กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้) โดยที่

$$X = \frac{1}{\sigma}\int_0^Y S(y)dy \tag{3.27}$$

และ

$$Y = \varepsilon\sigma\chi \tag{3.28}$$

นอกจากนี้ยังมีวิวัฒนาการอย่างช้า ๆ ของคลื่นประกอบซึ่งเทียบกับตัวแปรลักษณะเฉพาะ โดยที่ในการวิจัยจะศึกษาคลื่นปฐมภูมิที่แผ่ขยายไปทางขวา ดังนั้น ตัวแปรลักษณะเฉพาะทางขวาคือ

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon\sigma}\int_0^Y R(y)dy - \tau \tag{3.29}$$

เมื่อ $R(Y)$ และ $S(Y)$ ถูกกำหนดในพจน์ของ $D(Y)$ (Johnson, 1994) ดังนั้นผลเฉลยของคลื่นผิวหน้าจะถูกแสดงในพจน์ของตัวแปรอิสระ (X,Y,ξ) และตัวแปรเสริมการรบกวน (ε,σ)

ต่อไปเราจะใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์เทียบกับ χ และ τ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \equiv -\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi} \equiv R\frac{\partial}{\partial\xi} + \varepsilon S\frac{\partial}{\partial X} + \varepsilon\sigma\frac{\partial}{\partial Y}$$

เราจะเริ่มพิจารณาการไหลแบบเอกรูปที่ผิวหน้าของน้ำถูกก่อกวนด้วย $O(\varepsilon)$ บนการเปลี่ยนแปลงความลึก นั่นคือคลื่นผิวหน้าของน้ำจะปรากฏ เราสามารถนิยามตัวแปรต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$u = \frac{U_0}{D(Y;\varepsilon)} + \varepsilon u \qquad w = \varepsilon\sigma W(z,Y;\varepsilon) + \varepsilon w$$

$$p = P(z,Y;\varepsilon) + \varepsilon p \qquad h = 1 + H(Y;\varepsilon) + \varepsilon\eta$$

ดังนั้น สมการควบคุม (3.17) – (3.21) จะกลายเป็น

$$\left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)u_\xi + \varepsilon\frac{SU_0}{D}u_X + \varepsilon\sigma\left(u\frac{U_0}{D}\right)_Y + \varepsilon u\left(Ru_\xi + \varepsilon Su_X + \varepsilon\sigma u_Y\right)$$
$$+ \varepsilon wu_z + \varepsilon\sigma Wu_z + Rp_\xi + \varepsilon Sp_X + \varepsilon\sigma p_Y = 0 \tag{3.30}$$

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)w_\xi + \varepsilon\frac{SU_0}{D}w_X + \varepsilon\sigma\frac{U_0}{D}w_Y + \varepsilon^2\sigma^2 uW_Y\right.$$
$$\left. + \varepsilon u(Rw_\xi + \varepsilon Sw_X + \varepsilon\sigma w_Y) + \varepsilon\sigma(Ww)_z + \varepsilon ww_z\right\} + p_z = 0 \tag{3.31}$$

$$Ru_\xi + \varepsilon Su_X + \varepsilon\sigma u_Y + w_z = 0 \tag{3.32}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} p &= \eta \\ w &= \left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)\eta_\xi + \varepsilon\left[\frac{SU_0}{D}\eta_X + u(R\eta_\xi\right. \\ &\quad \left. + \varepsilon S\eta_X + \varepsilon\sigma\eta_Y)\right] + \varepsilon\sigma\frac{U_0}{D}\eta_Y + \varepsilon\sigma uH' \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z = 1 + H + \varepsilon\eta \tag{3.33}$$

และ

$$w = \varepsilon\sigma uB' \qquad \text{บน} \quad z = B \tag{3.34}$$

เราสามารถหาผลเฉลยของระบบสมการข้างต้นโดยเขียนตัวแปรตามทุกตัวให้อยู่ในรูปสองการกระจายเชิงเส้นกำกับดังนี้

$$Q \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^n\sigma^m Q_{nm}, \qquad \varepsilon \to 0, \sigma \to 0 \tag{3.35}$$

เมื่อ Q แทนค่า u, w, p และ η โดยที่ η_{00} แทนคลื่นปฐมภูมิ และ η_{01} แทนชั้นคลื่นทางขวา ซึ่งจะกล่าวถึงในไม่ช้านี้

แต่เงื่อนไขขอบที่ผิวหน้าบน $z = 1 + H + \varepsilon\eta$ นั้น เราจะสมมุติให้ทุกฟังก์ชันถูกแสดงเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) ที่ $z = 1 + H$ ดังนั้น เงื่อนไขขอบที่ผิวหน้าบน $z = 1 + H$ จะกลายเป็น

$$p + \varepsilon\eta p_z + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 p_{zz} + \cdots = \eta \tag{3.36}$$

และ

$$
\begin{aligned}
& w+\varepsilon\eta w_z+\frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 w_{zz}+\cdots=\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\eta_\xi+\varepsilon\left\{\frac{SU_0}{D}\eta_X+\Big[u+\varepsilon\eta u_z\right. \\
& \quad \left.+\frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 u_{zz}+\cdots\Big]\left(R\eta_\xi+\varepsilon S\eta_X+\varepsilon\sigma\eta_Y\right)\right\}+\varepsilon\sigma\frac{U_0}{D}\eta_Y+\varepsilon\sigma\Big[u+\varepsilon\eta u_z \\
& \quad +\frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 u_{zz}+\cdots\Big]H' \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

แทนค่าสมการ (3.35) ลงในสมการควบคุม (3.30), (3.31), (3.32), (3.34), (3.36) และ (3.37) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)_\xi+\varepsilon\frac{SU_0}{D}\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)_X \\
& \quad +\varepsilon\sigma\left[\frac{U_0}{D}\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)\right]_Y+\varepsilon\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)\Big[R\big(u_{00} \\
& \quad +\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\big)_\xi+\varepsilon S\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)_X+\varepsilon\sigma\big(u_{00}+\varepsilon u_{10} \\
& \quad +\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\big)_Y\Big]+\varepsilon\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)\big(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01} \\
& \quad +\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\big)_z+\varepsilon\sigma W\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)_z+R\big(p_{00}+\varepsilon p_{10}+\sigma p_{01} \\
& \quad +\varepsilon\sigma p_{11}+\cdots\big)_\xi+\varepsilon S\left(p_{00}+\varepsilon p_{10}+\sigma p_{01}+\varepsilon\sigma p_{11}+\cdots\right)_X+\varepsilon\sigma\big(p_{00}+\varepsilon p_{10}+\sigma p_{01} \\
& \quad +\varepsilon\sigma p_{11}+\cdots\big)_Y=0 \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon\left\{\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_\xi+\varepsilon\frac{SU_0}{D}\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_X\right. \\
& \quad +\varepsilon\sigma\frac{U_0}{D}\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_Y+\varepsilon^2\sigma^2\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)W_Y \\
& \quad +\varepsilon\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)\Big[R\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_\xi \\
& \quad +\varepsilon S\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_X+\varepsilon\sigma\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_Y\Big] \\
& \quad +\varepsilon\sigma\left[W\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)\right]_z+\varepsilon\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)\big(w_{00} \\
& \quad \left.+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\big)_z\right\}+\left(p_{00}+\varepsilon p_{10}+\sigma p_{01}+\varepsilon\sigma p_{11}+\cdots\right)_z=0 \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& R\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)_\xi+\varepsilon S\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)_X+\varepsilon\sigma\big(u_{00}+\varepsilon u_{10} \\
& \quad +\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\big)_Y+\left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)_z=0 \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
& \left(p_{00}+\varepsilon p_{10}+\sigma p_{01}+\varepsilon\sigma p_{11}+\cdots\right)+\varepsilon\left(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots\right)\big(p_{00}+\varepsilon p_{10}+\sigma p_{01} \\
& \quad +\varepsilon\sigma p_{11}+\cdots\big)_z+\cdots=\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots \qquad \text{บน} \qquad z=1+H \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\right)+\varepsilon\left(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots\right)\big(w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01} \\
& \quad +\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots\big)_z+\cdots=\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\left(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots\right)_\xi+\varepsilon\left\{\frac{SU_0}{D}\big(\eta_{00}\right. \\
& \quad +\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots\big)_X+\Big[\left(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots\right)+\varepsilon\big(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}
\end{aligned}
$$

$$+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots)(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots)_z+\cdots]\,[R(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}$$
$$+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots)_\xi+\varepsilon S(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots)_X+\varepsilon\sigma(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}$$
$$+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots)_Y]\}+\varepsilon\sigma\frac{U_0}{D}(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots)_Y+\varepsilon\sigma[(u_{00}+\varepsilon u_{10}$$
$$+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots)+\varepsilon(\eta_{00}+\varepsilon\eta_{10}+\sigma\eta_{01}+\varepsilon\sigma\eta_{11}+\cdots)(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}$$
$$+\varepsilon\sigma u_{11}+\cdots)_z+\cdots]H' \qquad \text{บน} \quad z=1+H \tag{3.42}$$

และ

$$w_{00}+\varepsilon w_{10}+\sigma w_{01}+\varepsilon\sigma w_{11}+\cdots=\varepsilon\sigma(u_{00}+\varepsilon u_{10}+\sigma u_{01}+\varepsilon\sigma u_{11}$$
$$+\cdots)B' \qquad \text{บน} \quad z=B \tag{3.43}$$

จัดรูปสมการ (3.38) – (3.43) ให้อยู่ในแต่ละลำดับ จะได้ว่า

$$\left[\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)u_{00\xi}+Rp_{00\xi}\right]+\varepsilon\left[\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)u_{10\xi}+\frac{SU_0}{D}u_{00X}+Ru_{00}u_{00\xi}+w_{00}u_{00z}\right.$$
$$\left.+Rp_{10\xi}+Sp_{00X}\right]+\sigma\left[\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)u_{01\xi}+Rp_{01\xi}\right]+\varepsilon\sigma\left[\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)u_{11\xi}+\frac{SU_0}{D}u_{01X}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{U_0}{D}u_{00}\right)_Y+R(u_{00}u_{01})_\xi+w_{00}u_{01z}+w_{01}u_{00z}+Wu_{00z}+Rp_{11\xi}+Sp_{01X}+p_{00Y}\right]$$
$$+\cdots=0 \tag{3.44}$$

$$p_{00z}+\varepsilon\left[\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)w_{00\xi}+p_{10z}\right]+\sigma p_{01z}+\varepsilon\sigma\left[\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)w_{01\xi}+p_{11z}\right]+\cdots$$
$$=0 \tag{3.45}$$

$$(Ru_{00\xi}+w_{00z})+\varepsilon(Ru_{10\xi}+Su_{00X}+w_{10z})+\sigma(Ru_{01\xi}+w_{01z})+\varepsilon\sigma(Ru_{11\xi}+Su_{01X}$$
$$+u_{00Y}+w_{11z})+\cdots=0 \tag{3.46}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned}
&(p_{00}-\eta_{00})+\varepsilon(p_{10}+\eta_{00}p_{00z}-\eta_{10})+\sigma(p_{01}-\eta_{01})\\
&\quad+\varepsilon\sigma(p_{11}+\eta_{01}p_{00z}+\eta_{00}p_{01z}-\eta_{11})+\cdots=0\\
&\left[w_{00}-\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\eta_{00\xi}\right]+\varepsilon\left[w_{10}+\eta_{00}w_{00z}-\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\eta_{10\xi}\right.\\
&\quad\left.-\frac{SU_0}{D}\eta_{00X}-Ru_{00}\eta_{00\xi}\right]+\sigma\left[w_{01}-\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\eta_{01\xi}\right]\\
&\quad+\varepsilon\sigma\left[w_{11}+\eta_{00}w_{01z}+\eta_{01}w_{00z}-\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\eta_{11\xi}-\frac{SU_0}{D}\eta_{01X}\right.\\
&\quad\left.-Ru_{00}\eta_{01\xi}-Ru_{01}\eta_{00\xi}-\frac{U_0}{D}\eta_{00Y}-u_{00}H'\right]+\cdots=0
\end{aligned}\right\}\quad \text{บน}\ z=1+H \tag{3.47}$$

และ

$$w_{00} + \varepsilon w_{10} + \sigma w_{01} + \varepsilon\sigma\left(w_{11} - u_{00}B'\right) + \cdots = 0 \qquad \text{บน} \quad z = B \quad (3.48)$$

ต่อไปเราจะพิจารณาระบบสมการที่แต่ละอันดับ ($\varepsilon^n\sigma^m$) โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของทฤษฎีการรบกวน และกำหนดเงื่อนไขที่รับรองว่าการกระจายเชิงเส้นกำกับเป็นแบบเอกรูป ดังต่อไปนี้

พจน์ $\varepsilon^0\sigma^0$

$$\left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)u_{00\xi} + Rp_{00\xi} = 0 \qquad (3.49)$$

$$p_{00z} = 0 \qquad (3.50)$$

$$Ru_{00\xi} + w_{00z} = 0 \qquad (3.51)$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} p_{00} &= \eta_{00} \\ w_{00} &= \left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)\eta_{00\xi} \end{aligned}\right\} \qquad \text{บน} \quad z = 1 + H \qquad (3.52)$$

และ

$$w_{00} = 0 \qquad \text{บน} \quad z = B \qquad (3.53)$$

หาปริพันธ์สมการ (3.50) เทียบกับ z จะได้ว่า

$$p_{00} = \eta_{00} \qquad (3.54)$$

จากสมการ (3.51) จะได้ว่า

$$u_{00\xi} = -\frac{1}{R}w_{00z} \qquad (3.55)$$

แทนค่าสมการ (3.54) และสมการ (3.55) ลงในสมการ (3.49) จะได้ว่า

$$w_{00z} = \frac{R^2}{(RU_0/D) - 1}\eta_{00\xi} \qquad (3.56)$$

หาปริพันธ์สมการ (3.56) เทียบกับ z และประมาณค่าบน $z = B$ จะได้ว่า

$$w_{00} = \eta_{00\xi}\int_B^z \frac{R^2}{(RU_0/D) - 1}dz \qquad (3.57)$$

แทนค่าสมการ (3.57) ลงในสมการ (3.55) และหาปริพันธ์เทียบกับ ξ จะได้ว่า

$$u_{00} = -\frac{R}{(RU_0/D) - 1}\eta_{00} \qquad (3.58)$$

จากสมการ (3.57) ประมาณค่าบน $z = 1 + H$ จะได้ว่า

$$\int_B^{1+H} \frac{1}{\left[(U_0/D) - C\right]^2}dz = 1 \qquad (3.59)$$

เมื่อ $C = 1/R$ เป็นความเร็วของการแผ่ขยายของคลื่น สมการ (3.59) เป็น The Burns Condition (Johnson, 2003) ซึ่งทำให้พบว่า

$$C = \frac{U_0 \pm D\sqrt{D}}{D} \tag{3.60}$$

เป็นสองความเร็วของการแผ่ขยายของคลื่นไปทางขวา และซ้าย

พจน์ $\varepsilon^1\sigma^0$

$$\left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)u_{10\xi} + \frac{SU_0}{D}u_{00X} + Ru_{00}u_{00\xi} + w_{00}u_{00z} + Rp_{10\xi} + Sp_{00X} = 0 \tag{3.61}$$

$$\left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)w_{00\xi} + p_{10z} = 0 \tag{3.62}$$

$$Ru_{10\xi} + Su_{00X} + w_{10z} = 0 \tag{3.63}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} p_{10} &= \eta_{10} \\ w_{10} &= \left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)\eta_{10\xi} - \eta_{00}w_{00z} \\ &\quad + \frac{SU_0}{D}\eta_{00X} + Ru_{00}\eta_{00\xi} \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z = 1 + H \tag{3.64}$$

และ

$$w_{10} = 0 \qquad \text{บน} \quad z = B \tag{3.65}$$

จากสมการ (3.63) จะได้ว่า

$$u_{10\xi} = -\frac{1}{R}\left(Su_{00X} + w_{10z}\right) \tag{3.66}$$

แทนค่าสมการ (3.66) และผลลัพธ์จากอันดับที่ต่ำกว่าลงในสมการ (3.61) จะได้ว่า

$$w_{10z} = -\frac{S}{\sqrt{D}}\eta_{00X} - \frac{SU_0}{D^2}\eta_{00X} - \frac{R}{D\sqrt{D}}\eta_{00}\eta_{00\xi} - \frac{R}{\sqrt{D}}p_{10\xi} - \frac{S}{\sqrt{D}}\eta_{00X} \tag{3.67}$$

จากสมการ (3.62) และผลลัพธ์จากอันดับที่ต่ำกว่า จะได้ว่า

$$p_{10z} = \frac{R(RU_0 - D)}{D\sqrt{D}}(z - B)\eta_{00\xi\xi} \tag{3.68}$$

หาปริพันธ์สมการ (3.68) เทียบกับ z และประมาณค่าบน $z = 1 + H$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_{10} = \eta_{10} &- \frac{R(RU_0 - D)}{D\sqrt{D}}\left[\frac{(1+H)^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right]\eta_{00\xi\xi} \\ &+ \frac{R(RU_0 - D)}{D\sqrt{D}}\left[B(1+H) - Bz\right]\eta_{00\xi\xi} \end{aligned} \tag{3.69}$$

แทนค่าสมการ (3.69) ลงในสมการ (3.67) และหาปริพันธ์เทียบกับ z แล้วประมาณค่าบน $z = B$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{10} = &-\frac{S}{\sqrt{D}}\eta_{00X}\int_B^z dz - \frac{SU_0}{D^2}\eta_{00X}\int_B^z dz - \frac{R}{D\sqrt{D}}\eta_{00}\eta_{00\xi}\int_B^z dz - \frac{S}{\sqrt{D}}\eta_{00X}\int_B^z dz \\ &-\frac{R}{\sqrt{D}}\eta_{10\xi}\int_B^z dz + \frac{R^2(RU_0 - D)}{D^2}\eta_{00\xi\xi\xi}\int_B^z\left[\frac{(1+H)^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right]dz \\ &-\frac{R^2(RU_0 - D)}{D^2}\eta_{00\xi\xi\xi}\int_B^z [B(1+H) - Bz]dz \end{aligned} \tag{3.70}$$

จากสมการ (3.70) ประมาณค่าบน $z = 1 + H$ จะได้ว่า

$$2S\left(\frac{U_0 + D\sqrt{D}}{D\sqrt{D}}\right)\eta_{00X} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})}\eta_{00}\eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3}\eta_{00\xi\xi\xi} = 0 \tag{3.71}$$

เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรของความลึก นั่นแสดงว่าจะมีพื้นที่ของปริภูมิ (χ,τ)และคลื่นปฐมภูมิ (η_{00}) จะเป็นไปตามสมการข้างต้น ดังนั้น ในธรรมชาติเราคาดว่าจะเห็นคลื่นวิเวกบนผิวของน้ำที่กำลังไหลอยู่ เมื่อน้ำไม่มีการไหล $(U_0 = 0)$ จะให้ผลลัพธ์ที่เป็นสมการ KdV เช่นเดียวกับ Johnson (1994) เรายังไม่สามารถคำนวณค่า η_{00} ได้ที่อันดับนี้ เนื่องจากยังไม่ทราบค่า S จึงต้องทำการพิจารณาระบบสมการที่อันดับถัดไป

พจน์ $\varepsilon^0\sigma^1$

$$\left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)u_{01\xi} + Rp_{01\xi} = 0 \tag{3.72}$$

$$p_{01z} = 0 \tag{3.73}$$

$$Ru_{01\xi} + w_{01z} = 0 \tag{3.74}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} p_{01} &= \eta_{01} \\ w_{01} &= \left(\frac{RU_0}{D} - 1\right)\eta_{01\xi} \end{aligned}\right\} \qquad \text{บน} \qquad z = 1 + H \tag{3.75}$$

และ

$$w_{01} = 0 \qquad\qquad \text{บน} \qquad z = B \tag{3.76}$$

หาปริพันธ์สมการ (3.73) เทียบกับ z จะได้ว่า

$$p_{01} = \eta_{01} \tag{3.77}$$

จากสมการ (3.74) จะได้ว่า

$$u_{01\xi} = -\frac{1}{R}w_{01z} \tag{3.78}$$

แทนค่าสมการ (3.77) และสมการ (3.78) ลงในสมการ (3.72) จะได้ว่า

$$w_{01z} = \frac{R^2 D}{RU_0 - D}\eta_{01\xi} \tag{3.79}$$

หาปริพันธ์สมการ (3.79) เทียบกับ z และประมาณค่าบน $z = B$ จะได้ว่า

$$w_{01} = -\frac{R}{\sqrt{D}}\eta_{01\xi}\int_B^z dz \tag{3.80}$$

แทนค่าสมการ (3.80) ลงในสมการ (3.74) และหาปริพันธ์เทียบกับ ξ จะได้ว่า

$$u_{01} = \frac{1}{\sqrt{D}}\eta_{01} \tag{3.81}$$

จะเห็นว่า ในอันดับนี้เราสามารถหาความเร็วประกอบต่าง ๆ ได้ ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในอันดับถัดไป นอกจากนี้ เรายังพบชั้นคลื่นทางขวา (η_{01}) ซึ่งเป็นคลื่นประกอบที่มีการแผ่ขยายไปทางขวาเท่านั้น

พจน์ $\varepsilon^1\sigma^1$

$$\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)u_{11\xi} + \frac{SU_0}{D}u_{01X} + \left(\frac{U_0}{D}u_{00}\right)_Y + Ru_{00}u_{01\xi} + Ru_{01}u_{00\xi} + w_{00}u_{01z}$$
$$+ w_{01}u_{00z} + Wu_{00z} + Rp_{11\xi} + Sp_{01X} + p_{00Y} = 0 \tag{3.82}$$

$$\left(\frac{RU_0}{D}-1\right)w_{01\xi} + p_{11z} = 0 \tag{3.83}$$

$$Ru_{11\xi} + Su_{01X} + u_{00Y} + w_{11z} = 0 \tag{3.84}$$

ซึ่ง

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} = \eta_{11} \\ &w_{11} = -\eta_{00}w_{01z} - \eta_{01}w_{00z} + \left(\frac{RU_0}{D}-1\right)\eta_{11\xi} \\ &\qquad + \frac{SU_0}{D}\eta_{01X} + Ru_{00}\eta_{01\xi} + Ru_{01}\eta_{00\xi} \\ &\qquad + \frac{U_0}{D}\eta_{00Y} + u_{00}H' \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z = 1 + H \tag{3.85}$$

และ

$$w_{11} = u_{00}B' \qquad \text{บน} \quad z = B \tag{3.86}$$

จากสมการ (3.84) จะได้ว่า

$$u_{11\xi} = -\frac{1}{R}\left(Su_{01X} + u_{00Y} + w_{11z}\right) \tag{3.87}$$

แทนค่าสมการ (3.87) และผลลัพธ์จากอันดับที่ต่ำกว่าลงในสมการ (3.82) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w_{11z} = &-\frac{S}{\sqrt{D}}\eta_{01X} - \frac{1}{\sqrt{D}}\eta_{00Y} + \frac{D'}{2D\sqrt{D}}\eta_{00} - \frac{SU_0}{D^2}\eta_{01X} + \frac{2U_0D'}{D^3}\eta_{00} \\
&-\frac{U_0}{D^2}\eta_{00Y} + \frac{U_0D'}{2D^3}\eta_{00} - \frac{R}{D\sqrt{D}}\eta_{00}\eta_{01\xi} - \frac{R}{D\sqrt{D}}\eta_{01}\eta_{00\xi} \\
&-\frac{R}{\sqrt{D}}p_{11\xi} - \frac{S}{\sqrt{D}}\eta_{01X} - \frac{1}{\sqrt{D}}\eta_{00Y} \qquad (3.88)
\end{aligned}
$$

จากสมการ (3.83) จะได้ว่า

$$
p_{11z} = \frac{R(RU_0 - D)}{D\sqrt{D}}\eta_{01\xi\xi}\int_B^z dz \qquad (3.89)
$$

หาปริพันธ์สมการ (3.89) เทียบกับ z และประมาณค่าบน $z = 1 + H$ จะได้ว่า

$$
p_{11} = \eta_{11} - \frac{R(RU_0 - D)}{D\sqrt{D}}\eta_{01\xi\xi}\left[\frac{(1+H)^2}{2} - \frac{z^2}{2} - B(1+H) + Bz\right] \qquad (3.90)
$$

แทนค่าสมการ (3.90) ลงในสมการ (3.88) และหาปริพันธ์เทียบกับ z แล้วประมาณค่าบน $z = B$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w_{11} = &\frac{1}{\sqrt{D}}\eta_{00}B' - \left(\frac{SU_0 + 2SD\sqrt{D}}{D^2}\right)\eta_{01X}\int_B^z dz - \left(\frac{U_0 + 2D\sqrt{D}}{D^2}\right)\eta_{00Y}\int_B^z dz \\
&-\frac{R}{D\sqrt{D}}\eta_{00}\eta_{01\xi}\int_B^z dz - \frac{R}{D\sqrt{D}}\eta_{01}\eta_{00\xi}\int_B^z dz + \left(\frac{5U_0D' + D\sqrt{D}D'}{2D^3}\right)\eta_{00}\int_B^z dz \\
&-\frac{R}{\sqrt{D}}\eta_{11\xi}\int_B^z dz + \frac{R^2(RU_0 - D)}{D^2}\eta_{01\xi\xi\xi}\int_B^z\left[\frac{(1+H)^2}{2} - \frac{z^2}{2} - B(1+H)\right. \\
&\left. + Bz\right]dz \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

จากสมการ (3.91) ประมาณค่าบน $z = 1 + H$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&2S\left(\frac{U_0 + D\sqrt{D}}{D}\right)\eta_{01X} + \frac{3\sqrt{D}}{(U_0 + D\sqrt{D})}(\eta_{00}\eta_{01})_\xi + \frac{D^5\sqrt{D}}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3}\eta_{01\xi\xi\xi} \\
&\quad = -2D^{1/4}\left[(U_0D^{-5/4} + D^{1/4})\eta_{00}\right]_Y \qquad (3.92)
\end{aligned}
$$

เป็นสมการ KdV ชนิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรของความลึกซึ่งเกิดจากคลื่นปฐมภูมิ เมื่อน้ำไม่มีการไหล $(U_0 = 0)$ จะให้ผลลัพธ์ที่เป็นสมการ KdV เช่นเดียวกับ Johnson (1994) เนื่องจากคลื่นปฐมภูมิจะแผ่ขยายไปทางขวาเท่านั้น จึงทำให้ชั้นคลื่นทางขวานี้มีการแผ่ขยายไปทางขวาเพียงอย่างเดียวเท่านั้น และในอันดับนี้เรายังพบ η_{11} ซึ่งเป็นชั้นคลื่นทางซ้าย แต่จะไม่ถูกพิจารณาในการวิจัยนี้ เราจะใช้สมการ KdV ที่อันดับนี้ร่วมกับสมการ (3.71) ในการพิจารณากฎทรงโมเมนตัม ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของคลื่นปฐมภูมิในการวิจัยนี้ต่อไป