บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาวิจัยการแผ่ขยายของคลื่นน้ำแบบไม่เชิงเส้นที่มีความลึกต่าง ๆ ด้วยการไหลแบบเอกรูปนั้น ผู้วิจัยได้รวบรวมเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องไว้ดังต่อไปนี้

1. ทฤษฎีการรบกวน (Perturbation Theory)
2. เอกสารและบทความที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีการรบกวน (Perturbation Theory)

Christopher (2002 a) กล่าวว่า ทฤษฎีการรบกวน คือการศึกษาผลของการรบกวนเล็กน้อยในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบฟิสิกส์ โดยที่แบบจำลองสามารถถูกแสดงเป็นสมการพีชคณิต (Algebraic Equation) สมการปริพันธ์ (Integral Equation) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) หรือระบบของสมการเหล่านี้ ซึ่งจะกลายเป็นปัญหาที่เราต้องทำการศึกษาวิจัย โดยทั่ว ๆ ไปในการหาผลเฉลยแน่ชัด (Exact Solution) ของปัญหาเหล่านี้จะเป็นไปไม่ได้ หรือไม่ก็ยากมากที่จะดำเนินการแก้ปัญหาจนได้ผลเฉลยแน่ชัด ดังนั้นเราสามารถนำวิธีการต่าง ๆ ของทฤษฎีการรบกวนมาประมาณค่าผลเฉลย ซึ่งจะเป็นการประมาณค่าที่ดีของผลเฉลย

เราจะเริ่มพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=\varepsilon f(x,y,y';\varepsilon) \tag{2.1}$$

$$y(0)=\alpha, \frac{dy}{dx}(0)=\beta$$

ตัวแปร $(a,b,c,\alpha,\beta,\varepsilon)$ จะถูกเรียกว่า **ตัวแปรเสริม** (Parameters) เราสามารถตรึงค่าเหล่านี้ให้เป็นค่าคงตัวได้ โดยจะไม่เปลี่ยนลักษณะเฉพาะของปัญหาเมื่อ $a \neq 0$ ส่วนตัวแปร x และ y จะถูกเรียกว่า **พิกัด** (Coordinates) ผลเฉลยของสมการ (2.1) จะอยู่ในรูป

$$y=y(x;a,b,c,\alpha,\beta;\varepsilon)=y(x;\ \boldsymbol{p};\ \varepsilon)$$

นั่นคือ พิกัด y จะเป็น **ตัวแปรตาม** (Dependent Variable) และพิกัด x กับตัวแปรเสริม $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$ และ ε จะเป็น **ตัวแปรอิสระ** (Independent Variables) จะเห็นว่า ตัวแปรเสริมต่าง ๆ เหล่านี้จะเป็นตัวแปรอิสระเสมอ ในขณะที่พิกัดอาจจะเป็นตัวแปรอิสระ หรือตัวแปรตามก็ได้

ตัวแปรเสริม ε จะเป็น **ตัวแปรเสริมการรบกวน** (Perturbation Parameter) เพราะเมื่อ $\varepsilon = 0$ จะได้รับปัญหาลดรูป (Reduced Problem) ส่วนตัวแปรเสริมอื่น ๆ จะเป็น **ตัวแปรเสริมควบคุม** (Control Parameters)

ต่อไปเราจะพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน $f(\varepsilon)$ เมื่อ $\varepsilon \to 0$ ถ้าลิมิตของ $f(\varepsilon)$ หาค่าได้แล้วมีความเป็นไปได้ดังนี้

$$f(\varepsilon) \to 0$$
$$f(\varepsilon) \to A$$
$$f(\varepsilon) \to \infty$$

เมื่อ $\varepsilon \to 0,\ 0 < A < \infty$ ในกรณีแรกและกรณีสุดท้ายอัตราส่วนซึ่ง $f(\varepsilon) \to 0$ และ $f(\varepsilon) \to \infty$ จะถูกแสดงโดยการเปรียบเทียบ $f(\varepsilon)$ กับฟังก์ชันที่ถูกเรียกว่า **ฟังก์ชันเกจ**

บทนิยาม 2.1 ฟังก์ชันเกจ (Gauge Functions) เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่มีค่าเป็นบวก ซึ่งถูกนิยามบนบางช่วงที่เราสนใจ $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

ฟังก์ชันเกจที่ง่ายที่สุด และใช้ประโยชน์ได้มากที่สุดคือ กำลังของ ε

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$$

และกำลังผกผันของ ε

$$\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-3}, \ldots$$

ในบางกรณีฟังก์ชันเกจเหล่านี้ อาจจะถูกสร้างเป็นฟังก์ชันเกจใหม่ ตัวอย่างเช่น

$\log \varepsilon^{-1}, \log\log \varepsilon^{-1}, e^{\varepsilon^{-2}}, \sin \varepsilon, \cos \varepsilon, \tan \varepsilon, \sinh \varepsilon, \cosh \varepsilon$ เป็นต้น

บทนิยาม 2.2 ถ้า $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A,\ 0 < A < \infty$ แล้ว $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ เมื่อ $\varepsilon \to \varepsilon_0$ ซึ่งอ่านว่า " f เป็นบิก โอ ของ g เมื่อ ε เข้าสู่ ε_0 "

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^n = O(\varepsilon^n),\ \sin \varepsilon = O(\varepsilon),\ \cos \varepsilon = O(1) \text{ เป็นต้น}$$

บทนิยาม 2.3 ถ้า $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0$ แล้ว $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ เมื่อ $\varepsilon \to \varepsilon_0$ ซึ่งอ่านว่า " f เป็นลิทเทิล โอ ของ g เมื่อ ε เข้าสู่ ε_0 "

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^n = o(\varepsilon^{n-1}), \sin \varepsilon = o(1), \cos \varepsilon = o(\varepsilon^{-1/2}) \text{ เป็นต้น}$$

บทนิยาม 2.4 ถ้า $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1$ แล้ว $f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon)$ เมื่อ $\varepsilon \to \varepsilon_0$ ซึ่งอ่านว่า " f

แอสซิมโททิคกับ g เมื่อ ε เข้าสู่ ε_0" และจะเรียกฟังก์ชัน $f(\varepsilon)$ และ $g(\varepsilon)$ ว่าเป็น **สมมูลเชิงเส้นกำกับ** (Asymptotically Equivalent)

ข้อสังเกต สามารถแสดงได้ดังนี้

1. ถ้า $f(\varepsilon)=o(g(\varepsilon))$ แล้ว $f(\varepsilon)=O(g(\varepsilon))$ แต่บทกลับไม่จริง
2. $f(\varepsilon)=O(g(\varepsilon))$ และ $g(\varepsilon)=O(f(\varepsilon))$ ก็ต่อเมื่อ $f(\varepsilon)\sim g(\varepsilon)$
3. $f(\varepsilon)\sim g(\varepsilon)$ จะสมมูลกับ $f(\varepsilon)-g(\varepsilon)=o(g(\varepsilon))$
4. $f(\varepsilon)+g(\varepsilon)\sim 0$ จะหมายความว่า $f(\varepsilon)\sim -g(\varepsilon)$

บทนิยาม 2.5 ลำดับ $\delta_n(\varepsilon),\ n=1,2,3,\ldots$ (จำกัด หรืออนันต์) เป็น **ลำดับเชิงเส้นกำกับ** (An Asymptotic Sequence) ถ้า

$$\delta_{n+1}(\varepsilon)=o(\delta_n(\varepsilon)) \text{ เมื่อ } \varepsilon\to\varepsilon_0$$

ซึ่งจะสมมูลกับ

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0}\frac{\delta_{n+1}(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}=0$$

ตัวอย่างของลำดับเชิงเส้นกำกับ มีดังนี้

$$\varepsilon^n, (\sin\varepsilon)^n, (\log\varepsilon)^{-n}$$

บทนิยาม 2.6 ให้ $\delta_n(\varepsilon)$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเกจ การประมาณ

$$\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)\sim f_0(x;p)\delta_0(\varepsilon)+\ldots+f_k(x;p)\delta_k(\varepsilon)}$$

จะถูกเรียกว่า **อนุกรมเชิงเส้นกำกับ** (An Asymptotic Series) ถ้า

$$\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)=f_0(x;p)\delta_0(\varepsilon)+o(\delta_0(\varepsilon))} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)=f_0(x;p)\delta_0(\varepsilon)+f_1(x;p)\delta_1(\varepsilon)+o(\delta_1(\varepsilon))}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)=\sum_{n=0}^{k}f_n(x;p)\delta_n(\varepsilon)+o(\delta_k(\varepsilon))}$$

ผลบวกสุดท้ายนี้จะถูกเรียกว่า **การกระจายเชิงเส้นกำกับ** ของฟังก์ชัน $\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)}$ ถึงพจน์ที่ k เมื่อ $\varepsilon\to\varepsilon_0$ เราสามารถใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับ และอนุกรมเชิงเส้นกำกับแทนกันได้

สำหรับฟังก์ชัน $\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)}$ ใด ๆ การกระจายเชิงเส้นกำกับ (2.2) จะไม่เป็นอย่างเดียว (Unique) เพราะว่าจะมีลำดับเชิงเส้นกำกับจำนวนอนันต์ที่สามารถใช้แทนใน (2.2) ได้ อย่างไรก็ตามเราสามารถให้ลำดับเชิงเส้นกำกับเป็นไปตามทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 [ทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว (Uniqueness Theorem)] ให้ลำดับเชิงเส้นกำกับ $\delta_n(\varepsilon)$ ที่แทนในฟังก์ชัน $\boldsymbol{f(x;p;\varepsilon)}$ ใด ๆ ในพจน์ของลำดับนี้เป็นอย่างเดียว

บทนิยาม 2.7 ถ้าการกระจายเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชัน $f(x;p;\varepsilon)$ เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระของ ε อยู่ในรูปของลำดับเชิงเส้นกำกับ $\delta_n(\varepsilon)$ ดังนี้

$$f(x;p;\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{k} f_n(x;p)\delta_n(\varepsilon) \text{ เมื่อ } \varepsilon \to 0$$

การกระจายนี้จะถูกเรียกว่า **สมเหตุสมผลแบบเอกรูป หรือปรกติ** (Uniformly Valid or Regular) ถ้า

$$f(x;p;\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{k} f_n(x;p)\delta_n(\varepsilon) + R_{k+1}(x;p;\varepsilon)$$

$$R_{k+1}(x;p;\varepsilon) = o(\delta_k(\varepsilon))$$

เป็นเอกรูปสำหรับทุก ๆ x และ p ในเซตเจาะจง และถ้าสัญลักษณ์ o เป็นเอกรูปในเซตเหล่านี้ นั่นคือเราต้องการให้ $f_n(x;p) = O(f_{n-1}(x;p))$ เมื่อ $\varepsilon \to 0$ สำหรับแต่ละ n ที่ x และ p ถูกตรึง ถ้าการกระจายไม่เป็นไปตามนี้จะถูกเรียกว่า **สมเหตุสมผลแบบไม่เอกรูป หรือเอกฐาน** (Nonuniformly Valid or Singular)

โดยปกติปัญหาการรบกวนเอกฐาน มีผลเฉลยอนุกรมเชิงเส้นกำกับอยู่ในรูป

$$f(x;p;\varepsilon) \sim f_0(x;p)\delta_0(\varepsilon) + \ldots + f_k(x;p)\delta_k(\varepsilon)$$

ซึ่งจะไม่เป็นเอกรูปบนโดเมนทั้งหมดของ x แต่อาจจะเป็นเอกรูปใน x ที่เป็นเซตย่อยของโดเมนดังกล่าว ดังนั้นการหาผลเฉลยประมาณของปัญหาเอกฐานที่สมเหตุสมผลแบบเอกรูปในโดเมนทั้งหมดของ x จะแสดงอยู่ในรูป

$$f(x;p;\varepsilon) \sim f_0(x;p;\varepsilon)\delta_0(\varepsilon) + \ldots + f_k(x;p;\varepsilon)\delta_k(\varepsilon)$$

การประมาณนี้จะถูกเรียกว่า **การกระจายเชิงเส้นกำกับถูกวางนัยทั่วไป** (A Generalized Asymptotic Expansion) ซึ่งเราต้องการเพียง $f_n(x;p;\varepsilon) = O(f_{n-1}(x;p;\varepsilon))$ เมื่อ $\varepsilon \to 0$ สำหรับแต่ละ n ที่ x และ p ถูกตรึง

ทฤษฎีบท 2.2 [ทฤษฎีบทหลักมูลของทฤษฎีการรบกวน (Fundamental Theorem of Perturbation Theory)] ถ้า

$$A_0\delta_0(\varepsilon) + A_1\delta_1(\varepsilon) + \ldots + A_n\delta_n(\varepsilon) + O(\delta_{n+1}(\varepsilon)) = 0$$

เมื่อ $\delta_n(\varepsilon)$ เป็นลำดับเชิงเส้นกำกับ และ $A_i,\ i = 0,1,2,\ldots,n$ เป็นอิสระจาก ε แล้ว

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$$

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นเป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาทฤษฎีการรบกวน ต่อไปเราจะพิจารณาวิธีการรบกวนที่ใช้ในการแก้ปัญหาที่เราทำการศึกษาวิจัย ซึ่งเป็นปัญหาที่บรรจุตัวแปรเสริมเล็ก (Small Parameters) โดยที่ตัวแปรเสริมเหล่านี้จะถูกใช้เป็นตัวแปรเสริมการรบกวนในการกระจายเชิงเส้นกำกับของผลเฉลย

โดยทั่ว ๆ ไปปัญหาการรบกวนจะถูกแบ่งเป็นปัญหาปรกติ (Regular Problem) หรือปัญหาเอกฐาน (Singular Problem) ซึ่งเราจะใช้วิธีการรบกวนปรกติ (Regular Perturbation Method) ในการแก้ปัญหาปรกติ และใช้วิธีการรบกวนเอกฐาน (Singular Perturbation Method) ในการแก้ปัญหาเอกฐาน โดยที่ปัญหาในการศึกษาวิจัยของเรานี้จะเป็นแบบเอกฐาน และเราจะใช้วิธีหลายมาตราส่วน (Method of Multiple Scales) ซึ่งเป็นหนึ่งในวิธีการรบกวนเอกฐานในการแก้ปัญหาดังกล่าว

Christopher (2002 b) ก่อนที่เราจะเริ่มศึกษาวิธีหลายมาตราส่วน เราจะสังเกตเห็นว่าตัวแปรในปัญหาของเราจะอยู่ในรูปตัวแปรที่มีมิติ ดังนั้นเราจำเป็นต้องทำให้ตัวแปรดังกล่าวไร้มิติเสียก่อน โดยในการศึกษาวิจัยนี้จะใช้**วิธีมาตราส่วน** (Method of Scale) ซึ่งมีวิธีการดังนี้ เริ่มจากเขียนมิติของตัวแปรต่าง ๆ ที่ประกอบไปด้วยพิกัด และตัวแปรเสริมธรรมชาติ (Natural Parameters) จากนั้นปรับมาตราตัวแปรเสริมธรรมชาติเหล่านี้ให้มีมิติเหมือนกับพิกัด แล้วนำมาแสดงเป็นอัตราส่วนกับพิกัดดังกล่าว เพื่อจัดให้เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติ จากกระบวนการที่กล่าวมาแล้วนี้จะทำให้เราสามารถสร้างตัวแปรเสริมการรบกวนได้ ซึ่งจะถูกนำมาใช้ในการแปลงตัวแปรอิสระในปัญหาที่เราทำการศึกษาวิจัย

เราจะยกตัวอย่างของวิธีมาตราส่วนด้วยการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และเงื่อนไขเริ่มต้นดังต่อไปนี้

$$m\frac{d^2X}{dT^2}+\mu\frac{dX}{dT}+kX=0 \tag{2.3}$$

$$X(0)=0$$

$$\frac{dX}{dT}(0)=\frac{C}{m}$$

เมื่อ m เกือบเป็นตัวแปรเสริมการรบกวนในปัญหา แต่ในการวิเคราะห์มิติจะพบตัวแปรเสริมการรบกวนเล็กไร้มิติที่ดีกว่า

เราจะเริ่มพิจารณาตัวแปรต่าง ๆ และมิติของตัวแปรเหล่านี้ ซึ่งได้แก่

ตัวแปร	**หน่วย**
X	m
T	sec
m	kg
μ	kg/sec
k	$\mathrm{kg/sec^2}$
C	kg m/sec

จะเห็นว่า สองบรรทัดแรกเป็นพิกัด และสี่บรรทัดสุดท้ายเป็นตัวแปรเสริมธรรมชาติ ต่อไปเราจะปรับมาตราตัวแปรเสริมธรรมชาติเหล่านี้ให้มีมิติเหมือนกับพิกัดได้เป็น

มาตราส่วน	**หน่วย**
C/μ	m
μ/k	sec

ดังนั้น เราจะสามารถนิยามตัวแปรไร้มิติได้ดังนี้

$$x = \mu X/C$$

$$t = kT/\mu$$

นอกจากนี้เรายังสามารถปรับมาตราตัวแปรเสริมธรรมชาติให้มีมิติเดียวกับมวล m ได้แก่ μ^2/k ดังนั้น เราจะได้ตัวแปรเสริมการรบกวนเป็น

$$\varepsilon = km/\mu^2$$

และดำเนินการแปลงตัวแปรอิสระ t ได้ดังนี้

$$\tau = t/\varepsilon$$

ดังนั้น สมการ (2.3) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + \varepsilon x = 0 \tag{2.4}$$

$$x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{d\tau}(0) = 1$$

จะเห็นว่า เราสามารถลดจำนวนตัวแปรเสริมจากเดิมที่มีสี่ตัวได้แก่ m, μ, k และ C เหลือเพียงตัวแปรเสริมการรบกวน ε เพียงตัวเดียวเท่านั้น จากนั้นเราสามารถใช้วิธีการรบกวนแก้สมการดังกล่าวได้

สมาน เจริญกิจพูลผล และมนตรี พิรุณเกษตร (2535) ได้ให้ข้อสังเกตเกี่ยวกับกลุ่มตัวแปรไร้มิติไว้ดังนี้

1. ตัวแปรใดที่ไม่มีมิติ ตัวแปรนั้นถือเป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติกลุ่มหนึ่ง
2. อัตราส่วนของตัวแปรที่มีมิติเหมือนกัน จะเป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติกลุ่มหนึ่ง
3. กลุ่มตัวแปรไร้มิติที่นำไปบวก ลบ คูณ หาร หรือยกกำลังด้วยตัวเลขตัวหนึ่งจะได้เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติอีกกลุ่มหนึ่ง
4. กลุ่มตัวแปรไร้มิติต่าง ๆ ที่นำมาคูณหรือหารกัน จะได้เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติอีกกลุ่มหนึ่ง

เมื่อได้ปัญหาที่อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติแล้ว ต่อไปเราจะทำการศึกษา**วิธีหลายมาตราส่วน** เพื่อใช้แก้ปัญหาในการวิจัยของเราดังต่อไปนี้

Michael (2005) ในปัญหาซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มี 2 ตัวแปรเสริมการรบกวนในพิกัดปริภูมิ และพิกัดเวลา เราสามารถนำวิธีหลายมาตราส่วนมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งมีแนวคิดดังต่อไปนี้ เริ่มจากการปรับมาตราให้เกิดมาตราส่วนช้า ซึ่งจะทำให้เกิดมาตราส่วนปริภูมิ และมาตราส่วนเวลาที่แตกต่างกัน จากนั้นทำการแยกตัวแปรเหล่านี้ ซึ่งจะเป็นการเพิ่มจำนวนตัวแปรอิสระจากเดิม

ต่อไปใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระเหล่านี้ เราจะได้ระบบสมการที่มีตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น และผลเฉลยของระบบสมการนี้จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปสองการกระจายเชิงเส้นกำกับ (Double Asymptotic Expansion) ของสองตัวแปรเสริมการรบกวนข้างต้น จากนั้นดำเนินการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยเชิงเส้นกำกับ แต่ในการวิจัยของเราต้องนำระบบสมการที่ได้จากอันดับต่าง ๆ มาทำให้เกิดสมการ KdV เสียก่อน จึงดำเนินการแก้สมการ KdV เพื่อหาผลเฉลยเชิงเส้นกำกับที่เราต้องการทำการศึกษาวิจัย

Christopher (2003) ได้ให้ตัวอย่างง่าย ๆ ของวิธีหลายมาตราส่วนบนพิกัดเวลา ที่มีตัวแปรเสริมการรบกวนเพียงตัวเดียวเท่านั้น โดยการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และเงื่อนไขเริ่มต้นดังต่อไปนี้

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{du}{dt} + u = 0 \tag{2.5}$$

$$u(0) = \alpha$$

$$\frac{du}{dt}(0) = \beta$$

เราจะหาผลเฉลยประมาณของปัญหาค่าเริ่มต้นดังกล่าวในรูป

$$u(t,\tau,\varepsilon) = u_0(t,\tau) + \varepsilon u_1(t,\tau) + \varepsilon^2 u_2(t,\tau) + \cdots + \varepsilon^n u_n(t,\tau) + O(\varepsilon^{n+1}) \tag{2.6}$$

เมื่อ

$$\tau = \varepsilon t \tag{2.7}$$

จะเห็นว่า เราสามารถเพิ่มตัวแปรอิสระได้เป็นมาตราส่วนเวลาปกติ t และมาตราส่วนเวลาช้า τ โดยที่เราจะหาเพียงพจน์แรกของสมการ (2.6) เท่านั้น ต่อไปใช้สมการ (2.7) และกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$u' = u_t + \varepsilon u_\tau \tag{2.8}$$

$$u'' = u_{tt} + 2\varepsilon u_{t\tau} + \varepsilon^2 u_{\tau\tau} \tag{2.9}$$

$('=\frac{d}{dt})$ แทนค่าสมการ (2.8) และสมการ (2.9) ลงในสมการ (2.5) และแทนค่าสมการ (2.6) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$u_{tt}+u+2\varepsilon(u_{t\tau}+u_t)+\varepsilon^2(u_{\tau\tau}+2u_\tau)=0 \tag{2.10}$$

$$u_0(0,0)+\varepsilon u_1(0,0)+\varepsilon^2 u_2(0,0)+\cdots=\alpha$$

$$u_{0t}(0,0)+\varepsilon[u_{0\tau}(0,0)+u_{1t}(0,0)]+\varepsilon^2[u_{1\tau}(0,0)+u_{2t}(0,0)]+\cdots=\beta$$

แทนค่าสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.10) และใช้ทฤษฎีบทหลักมูล จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

$$u_{0tt}+u_0=0 \tag{2.11}$$

$$u_0(0,0)=\alpha$$

$$u_{0t}(0,0)=\beta$$

และ

$$u_{1tt}+u_1=-2(u_{0t\tau}+u_{0t}) \tag{2.12}$$

$$u_1(0,0)=0$$

$$u_{1t}(0,0)+u_{0\tau}(0,0)=0$$

ดังนั้น สมการ (2.11) จะมีผลเฉลยทั่วไปที่ใช้ฟังก์ชันไม่เจาะจงของ τ แทนค่าคงตัวไม่เจาะจง ดังนี้

$$u_0(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t \tag{2.13}$$

เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$A(0)=\alpha$$

$$B(0)=\beta$$

จะเห็นว่า เรายังไม่สามารถหาค่าของ $A(\tau)$ และ $B(\tau)$ ได้ แต่จะสามารถหาค่าดังกล่าวได้จากอันดับถัดไป ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.11) จะอยู่ในรูป

$$u_0(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t$$

เมื่อ

$$A(0)=\alpha \tag{2.14}$$

$$B(0)=\beta$$

สมการของ u_1 จะกลายเป็น

$$u_{1tt}+u_1=2\{[A'(\tau)+A(\tau)]\sin t-[B'(\tau)+B(\tau)]\cos t\}$$

เนื่องจาก u_1 บรรจุพจน์ τ - secular แต่ไม่บรรจุพจน์ t - secular จะได้ว่า

$$A'(\tau)=-A(\tau)$$

และ

$$B'(\tau) = -B(\tau)$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเหล่านี้ที่สอดคล้องกับสมการ (2.14) คือ

$$A(\tau) = \alpha e^{-\tau}$$

$$B(\tau) = \beta e^{-\tau}$$

นั่นคือ ผลเฉลยของสมการ (2.5) จะอยู่ในรูป

$$u(t,\varepsilon) = \alpha e^{-\tau}\cos t + \beta e^{-\tau}\sin t + O(\varepsilon)$$

เอกสารและบทความที่เกี่ยวข้อง

Johnson (1997) ได้อธิบายแนวคิดพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาการแผ่ขยายของคลื่น โดยใช้หลักคณิตศาสตร์อธิบายการแผ่ขยายของคลื่นเบื้องต้น ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของเชือกที่ตรึงกับผนัง จะนำไปสู่สมการคลื่นพื้นฐานใน 1 มิติ ได้แก่

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{2.15}$$

เมื่อ $u(x,t)$ เป็นแอมพลิจูดของคลื่นและ $c > 0$ เป็นความเร็วคงตัวของการแผ่ขยายของคลื่น สมการ (2.15) นี้จะมีผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูป

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{2.16}$$

เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันใดๆ ผลเฉลยทั่วไป (2.16) นี้จะถูกเรียกว่า ผลเฉลย d'Alembert เป็นผลรวมของสองคลื่นประกอบได้แก่ f ซึ่งเป็นการแผ่ขยายของคลื่นประกอบไปทางขวาและ g ซึ่งเป็นการแผ่ขยายของคลื่นประกอบไปทางซ้าย โดยที่การแผ่ขยายของคลื่นประกอบทั้งสองมีความเร็วคงตัว c และจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของการแผ่ขยาย นั่นคือ ทั้งสองคลื่นประกอบจะไม่ทำปฏิกิริยากันเอง และจะไม่ทำปฏิกิริยากับคลื่นประกอบอื่น ๆ ซึ่งจะสอดคล้องกับสมการ (2.15) ที่เป็นสมการเชิงเส้น

ถ้าเราพิจารณาคลื่นประกอบที่มีการแผ่ขยายไปทางขวาเพียงทิศทางเดียว จะได้สมการ

$$u_t + cu_x = 0 \tag{2.17}$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูป

$$u(x,t) = f(x-ct) \tag{2.18}$$

ส่วนคลื่นประกอบที่มีการแผ่ขยายไปทางซ้ายเพียงทิศทางเดียวจะดำเนินการได้ในทำนองเดียวกัน

สำหรับสมการการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ได้มาจากแบบจำลองทางฟิสิกส์ที่มีความละเอียดมากพอจะไม่ง่ายเหมือนสมการ (2.15) และสมการ (2.17) ดังต่อไปนี้

เมื่อดำเนินการจำกัดการแผ่ขยายของคลื่นให้ไปในทิศทางเดียวกัน จะได้สมการเชิงเส้น

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.19}$$

ผลเฉลยของสมการ (2.19) จะถูกเรียกว่า **ผลเฉลยฮาร์มอนิก** (Harmonic Solution) ซึ่งจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \tag{2.20}$$

แทนค่าสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.19) จะเห็นว่าสมการ (2.20) จะเป็นผลเฉลยของสมการ (2.19) ถ้า

$$\omega = k - k^3 \tag{2.21}$$

จะได้ว่า

$$kx - \omega t = k[x - (1-k^2)t]$$

ดังนั้น ความเร็วเฟสของการแผ่ขยายของคลื่นเป็นดังนี้

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \tag{2.22}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ k และพบว่าคลื่นที่มีเลขคลื่น (k) แตกต่างกัน คลื่นจะมีการแผ่ขยายด้วยความเร็วที่แตกต่างกัน ปรากฏการณ์นี้จะถูกเรียกว่า **การกระจาย** และคลื่นนี้จะถูกเรียกว่า **คลื่นกระจาย** (Dispersive Wave) จะเห็นว่าสมการ (2.19) เป็นสมการคลื่นกระจายที่ง่ายที่สุด และสมการ (2.21) เป็น**ความสัมพันธ์การกระจาย** (Dispersion Relation) ผลเฉลยของสมการ (2.19) จะเป็นผลรวมของสองคลื่นประกอบ โดยที่แต่ละคลื่นประกอบจะมีค่า k ที่แตกต่างกัน สมการ (2.22) จะแสดงให้เห็นว่า แต่ละคลื่นประกอบจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่แตกต่างกันโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราจำกัดการแผ่ขยายของคลื่นให้ไปในทิศทางเดียวกันอีกวิธีหนึ่ง จะได้สมการเชิงเส้น

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \tag{2.23}$$

ผลเฉลยฮาร์มอนิกของสมการ (2.23) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \tag{2.24}$$

นั่นคือ ผลเฉลยฮาร์มอนิก (2.24) จะเป็นผลเฉลยของสมการ (2.23) ถ้า

$$\omega = k - ik^2 \tag{2.25}$$

ดังนั้น

$$u(x,t) = e^{ik(x-t)-k^2 t} \tag{2.26}$$

จะพบว่า สำหรับทุก ๆ k คลื่นจะแผ่ขยายไปทางขวาด้วยความเร็วเป็นหนึ่ง แต่จะสลายตัวลงเมื่อ $t \to +\infty$ (สำหรับ $k \neq 0$) ปรากฏการณ์ที่คลื่นสลายตัวลงนี้จะถูกเรียกว่า **การสลาย**

โดยปกติแล้วปรากฏการณ์นี้จะเกิดขึ้นในกระบวนการทางฟิสิกส์ที่เกิดการเสียดสี ตัวอย่างเช่น ความหนืดของของไหล สมการ (2.23) นี้เป็นสมการการสลายที่ง่ายที่สุดซึ่งสัมประสิทธิ์ในสมการจะไม่มีความสำคัญ แต่เครื่องหมายในพจน์ของ u_t และ u_{xx} จะมีความสำคัญ เพราะถ้าเปลี่ยนเครื่องหมายในพจน์ดังกล่าวแล้ว แอมพลิจูดของคลื่นจะสูงขึ้นโดยไม่มีขอบเขตเมื่อ $t \to +\infty$

ไพโรจน์ สัตยธรรม (2541) โดยปกติแล้วการแผ่ขยายของคลื่นส่วนใหญ่จะเป็นแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งรูปแบบที่ง่ายที่สุดของสมการคลื่นแบบไม่เชิงเส้นเป็นดังนี้

$$u_t + (1+u)u_x = 0 \tag{2.27}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.27) ที่ได้จากวิธีลักษณะเฉพาะจะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$u = \text{ค่าคงตัว} \qquad \text{บนเส้นตรง} \quad \frac{dx}{dt} = 1+u$$

ถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้เป็น $u(x,0) = f(x)$ จะสามารถเขียนผลเฉลยให้อยู่ในรูป

$$u(x,t) = f[x-(1+u)t] \tag{2.28}$$

โดยทั่ว ๆ ไปแล้วคงจะมีเส้นตรงลักษณะเฉพาะตัดกันได้บ้าง และผลเฉลย $u(x,t)$ ก็จะอยู่ภายในบริเวณเส้นตรงที่ตัดกัน โดยที่คลื่นมีความเร็วของการแผ่ขยายเป็น $1+u$ ซึ่งจะพบว่าบางส่วนของคลื่นจะเคลื่อนที่เร็วกว่าส่วนอื่น ๆ และในบริเวณบางส่วนของคลื่นที่มีการอัด ผลเฉลยจะมีการเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม นั่นคือส่วนที่อยู่บริเวณยอดคลื่นจะเคลื่อนที่เร็วกว่าส่วนอื่น ๆ และคลื่นนี้จะถูกเรียกว่า **คลื่นกระแทก** (Shock Waves) จะเห็นว่าเมื่อ u มีค่ามากขึ้นความเร็วคลื่นก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย ดังนั้นส่วนของคลื่นที่เคลื่อนที่เร็ว (บริเวณส่วนใหญ่) ก็จะไปทับส่วนของคลื่นที่เคลื่อนที่ช้า (บริเวณส่วนน้อย) ของคลื่นถัดไป ตัวอย่างเช่น เมื่อคลื่นกระแทกชายหาด ดังนั้นเมื่อเกิดคลื่นกระแทกขึ้น ผลเฉลย $u(x,t)$ จะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด ซึ่งทำให้ผลเฉลย $u(x,t)$ อาจจะไม่มีความเป็นหนึ่งเดียว

ต่อไปเราจะพิจารณาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ใช้อธิบายการแผ่ขยายของคลื่นซึ่งถูกเรียกว่า **โซลิตอน** (Solitons) และพบว่ามีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหลายสมการที่ใช้อธิบายการแผ่ขยายของคลื่น ตัวอย่างเช่น

1. สมการ KdV (Korteweg-de Vries Equation)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \tag{2.29}$$

เป็นสมการการกระจายไม่เชิงเส้น

2. สมการเบอร์เกอร์ (Burgers Equation)

$$u_t + (1+u)u_x - u_{xx} = 0 \tag{2.30}$$

เป็นสมการการสลายไม่เชิงเส้น

3. สมการที่ขยายความมาจาก KdV (Modified Korteweg-de Vries Equation)

$$u_t + u_{xxx} + u^p u_x = 0 \qquad (p = 2,3) \qquad (2.31)$$

เมื่อ $u = u(x,t)$ และสัมประสิทธิ์ (6) ในสมการ (2.29) จะไม่มีความสำคัญ เพราะจะสามารถเปลี่ยนเป็นค่าคงตัวอื่น ๆ ได้ สมการดังกล่าวข้างต้นนั้นมาจากปัญหาต่าง ๆ ในวิชาฟิสิกส์ และจะถูกเรียกว่า **สมการโซลิตอน** (Soliton Equation) ซึ่งสมการโซลิตอนเหล่านี้จะมีลักษณะพิเศษ คือ ถ้าเกิดการเปลี่ยนแปลงตรงพจน์ที่ไม่เชิงเส้น จะทำลายความเป็นสมการโซลิตอนไปทันที ตัวอย่างเช่น สมการ (2.31) จะเป็นสมการโซลิตอนถ้า $p = 2$ หรือ 3 เท่านั้น

คำว่า "โซลิตอน" ได้ถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกในปีค.ศ. 1965 โดย Zabusky และ Kruskal เพื่อแสดงถึงพฤติกรรมของผลเฉลยของสมการโซลิตอนที่มีความเป็น**เฉพาะที่** (Local) และยังคงสามารถรักษารูปแบบเดิมไว้ได้หลังจากที่ทำปฏิกิริยากับโซลิตอนตัวอื่น ๆ (ไพโรจน์ สัตยธรรม, 2541) ถึงแม้ว่าจะไม่มีการให้นิยามที่รัดกุมแก่คำว่าโซลิตอน แต่เราก็สามารถแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของโซลิตอนได้ 3 ข้อดังต่อไปนี้

1. โซลิตอนจะมีความเป็นเฉพาะที่ ซึ่งความหมายว่า การแผ่ขยายของคลื่นจะเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $x \to \pm\infty$
2. การแผ่ขยายของโซลิตอนเดี่ยวตัวหนึ่งจะไม่เปลี่ยนรูปทรง
3. เมื่อโซลิตอนตัวหนึ่งทำปฏิกิริยากับโซลิตอนตัวอื่น หลังจากที่ทำปฏิกิริยากันแล้วจะสามารถรักษารูปทรงเดิมไว้ได้

ในปีค.ศ. 1834 J. Scott Russell ซึ่งเป็นนักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษได้ทำการสังเกตเห็นโซลิตอนเป็นคนแรก โดยสังเกตการแผ่ขยายของคลื่นวิเวกที่เคลื่อนที่ในช่องแคบ และได้จดบันทึกผลของการสังเกตไว้ กล่าวว่า ขณะที่สังเกตการเคลื่อนที่ของเรือลำหนึ่งซึ่งถูกลากด้วยม้าสองตัวไปตามช่องแคบ เมื่อเรือลำนี้หยุดทันที จะพบว่าคลื่นน้ำที่เกิดขึ้นรอบ ๆ หัวเรือจะแผ่ขยายต่อไปข้างหน้าโดยไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปทรงและความเร็วก็ไม่ลดลงด้วย เมื่อนั่งบนหลังม้าตามคลื่นนี้ไป พบว่าคลื่นจะแผ่ขยายไปด้วยอัตราเร็วประมาณ 8-9 ไมล์ต่อชั่วโมง เมื่อคลื่นแผ่ขยายไปได้ระยะทาง 30 ฟุต ความสูงของคลื่นจะลดลงครึ่งหนึ่ง หลังจากนั้นความสูงของคลื่นก็จะลดลงเรื่อย ๆ เมื่อตามคลื่นเหล่านี้ไปได้ระยะทาง 1 หรือ 2 ไมล์ คลื่นเหล่านี้ก็จะหายไปในกระแสลมของช่องแคบนั้น (ไพโรจน์ สัตยธรรม, 2541)

จากข้อสังเกตของรัสเซลที่กล่าวมาข้างต้น จะพบว่าการแผ่ขยายของคลื่นน้ำนั้นสอดคล้องกับคุณสมบัติที่สำคัญ 3 ข้อของโซลิตอน ตัวอย่างเช่น

1. ความสูงของคลื่นน้ำจะลดลงเรื่อย ๆ เมื่อคลื่นแผ่ขยายห่างออกไปจากเรือ ซึ่งตรงกับคุณสมบัติข้อแรก
2. คลื่นน้ำจะแผ่ขยายออกจากหัวเรือด้วยรูปทรงเดิมไปตลอด ซึ่งตรงกับคุณสมบัติ

ข้อสอง

3. เมื่อคลื่นน้ำมีการแผ่ขยายและเกิดไปชนกับคลื่นน้ำอื่น ๆ ซึ่งเกิดจากลมในช่องแคบนั้น ขณะที่เกิดการชนกันคลื่นทั้งสองจะรวมกัน และภายหลังจากชนกันแล้วคลื่นทั้งสองจะเคลื่อนที่ไปคนละทางด้วยรูปทรงเดิม ทำให้จำแนกได้ยากว่าคลื่นใดเกิดจากเรือและคลื่นใดเกิดจากลมในบริเวณนั้น รัสเซลจึงได้กล่าวว่า คลื่นเหล่านั้นหายไปในกระแสลม ซึ่งตรงกับคุณสมบัติข้อสาม

ต่อมาในปีค.ศ. 1895 Korteweg และ de Vries ได้พัฒนาสมการไม่เชิงเส้นขึ้น เพื่ออธิบายการแผ่ขยายของคลื่นวิเวกที่เคลื่อนที่ในช่องแคบดังกล่าว (ไพโรจน์ สัตยธรรม, 2541) เมื่อนำสมการดังกล่าวมาทำให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ และปรับมาตราตัวแปรให้เหมาะสม จะได้เป็นสมการ KdV (2.29) ซึ่งมีผลเฉลยของคลื่นวิเวก (1-soliton) อยู่ในรูป

$$u(x,t)=\frac{1}{2}c\ \mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right] \tag{2.32}$$

Johnson (1994) ได้นำการกระจายเชิงเส้นกำกับมาใช้ในการแก้ปัญหาการแผ่ขยายของคลื่นวิเวกจนสามารถอธิบายได้ว่า คลื่นวิเวกที่แผ่ขยายบนความลึกต่าง ๆ จะเกิดคลื่นประกอบที่สำคัญได้แก่ คลื่นปฐมภูมิ ชั้นคลื่นทางขวา ชั้นคลื่นทางซ้าย และชั้นคลื่นทางขวาใหม่ เป็นต้น นอกจากนั้นยังได้อธิบายความสำคัญของคลื่นประกอบเหล่านี้ไว้ด้วย

ขวัญชัย สินทิพย์สมบูรณ์ และวิศิษฏ์ จาตุรมาน (2533) กล่าวว่า การไหลแบบเอกรูป คือการไหลซึ่งความเร็วของของไหลที่ทุก ๆ จุดในของไหลเท่ากัน (ทั้งขนาด และทิศทาง) ตัวอย่างเช่น การไหลของของเหลว (ภายใต้ความดัน) ไหลผ่านท่อขนาดยาวที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางคงที่ เป็นต้น

สมาน เจริญกิจพูลผล และมนตรี พิรุณเกษตร (2535) กล่าวว่า การไหลแบบเอกรูป คือการไหลที่มีความเร็วคงตัวขนานกับแนวระดับ ซึ่งสอดคล้องกับสมการภาวะต่อเนื่อง และเงื่อนไขการไหลที่ปราศจากการหมุน

Panupintu (2002) ได้ศึกษาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำแบบไม่เชิงเส้น ร่วมกับการเปลี่ยนแปลงความลึก ด้วยการไหลแบบเฉือน (Shear Flow) แต่ได้กล่าวถึงกรณีเฉพาะที่มีการไหลแบบเอกรูปไว้ดังนี้ ความเร็วประกอบในแนวระดับ U จะกลายเป็น $\dfrac{U_0}{D(Y)}$ เมื่อ U_0 เป็นค่าคงตัว และ $D(Y)=1+H(Y)-B(Y)$ เป็นความลึกเฉพาะที่ ซึ่งพบว่าเมื่อความลึกคงตัว ($D=1$) ความเร็วประกอบในแนวระดับจะเป็นค่าคงตัว แต่เมื่อความลึกเปลี่ยนแปลง ความเร็วประกอบในแนวระดับจะเกิดการเปลี่ยนแปลงด้วย โดยกำหนดฟังก์ชันกระแส (Stream Function) ไว้ดังนี้

$$\psi=\phi(Y)z+\beta(Y) \tag{2.33}$$

ดังนั้น ความเร็วประกอบในแนวระดับ

$$\frac{U_0}{D}=\psi_z=\phi(Y) \tag{2.34}$$

และความเร็วประกอบในแนวดิ่ง

$$W = -\psi_Y = -\phi'(Y)z - \beta'(Y) \tag{2.35}$$

จะพบว่า

$$\psi_{zz} = 0 \tag{2.36}$$

นั่นคือ เงื่อนไขปราศจากการหมุนของของไหลแบบเอกรูป และสมการภาวะต่อเนื่องคือ

$$(U_0/D)_Y + W_z = \phi'(Y) - \phi'(Y) = 0 \tag{2.37}$$

ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติของการไหลแบบเอกรูป

Oleg (2000) พิจารณาสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + {}^{1}Q + {}^{2}Q + {}^{3}Q + \cdots = 0 \tag{2.38}$$

หาปริพันธ์สมการ (2.39) เทียบกับปริมาตร จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \phi dV + \sum_k \iiint_V {}^{k}Q dV = 0 \tag{2.39}$$

เราจะกล่าวว่า ${}^{k}Q$ อนุรักษ์ ϕ ถ้า

$$\iiint_V {}^{k}Q dV = 0 \tag{2.40}$$

จากนิยามของการอนุรักษ์นี้ จะสามารถแสดงได้ว่าเป็นไปตามสมการ (2.40) ถ้า ${}^{k}Q$ เขียนในรูปแบบไดเวอร์เจนซ์

$${}^{k}Q = \frac{\partial\left({}^{k}F_j\right)}{\partial x_j} \tag{2.41}$$

และเราสามารถกล่าวว่า ${}^{k}Q$ เป็นการอนุรักษ์แบบอ้างเหตุผล (A Priori) ถ้า ${}^{k}Q$ เขียนในรูปแบบไดเวอร์เจนซ์

Johnson (1997) พิจารณาสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \tag{2.42}$$

เมื่อ $T(x,t)$ และ $X(x,t)$ ไม่บรรจุอนุพันธ์เทียบกับ t สมการ (2.42) จะถูกเรียกว่ากฎการอนุรักษ์ ถ้าทั้ง T และ X_x สามารถหาปริพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ x จะได้ว่า

$$X \to X_0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad x \to \pm\infty \tag{2.43}$$

เมื่อ X_0 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} T dx\right) = 0$$

นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx = \text{ค่าคงตัว} \tag{2.44}$$

ปริพันธ์ของ $T(x,t)$ สำหรับทุก ๆ x เป็นการอนุรักษ์ปริมาณ