ภาคผนวก

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $G = S_4$ และ $X = \{1,2,3,4\}$ โดยที่ G กระทำบน X นิยามโดย $(\sigma, x) = \sigma(x)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G$ และ $x \in X$

$$G = S_4 = \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

ให้ $R = G_1 = \{(1), (23), (24), (34), (234), (243)\}$

เลือก $H = G_1$ ดังนั้น $H \leq G = S_4$

เพื่อความสะดวกจะให้

$$\begin{array}{llll} \rho_0 = (1) & & \mu_1 = (34) \\ \rho_1 = (234) & & \mu_2 = (24) \\ \rho_2 = (243) & & \mu_3 = (23) \end{array}$$

เลือก $x_0 = 2$

เพราะฉะนั้น $G_{x_0} = G_2 = \{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\}$

เลือก $N = \{\rho_0\}$

ดังนั้น $N \lhd H = G_1$ และ $N \leq G_2$

$$G_1/N = \{\rho_0 N, \rho_1 N, \rho_2 N, \mu_1 N, \mu_2 N, \mu_3 N\}$$

และ $G(2) = \{\rho_0(2), \rho_1(2), \rho_2(2), \mu_1(2), \mu_2(2), \mu_3(2)\}$

ให้ G_1/N กระทำบน $G_1(2)$ มีนิยามคือ $(\sigma N)\cdot(\tau(2)) = (\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2))$ สำหรับทุก ๆ $\sigma, \tau \in G_1$

ให้ $\Psi : G_1 \to G_1/N$ นิยามโดย $\Psi(\sigma) = \sigma^{-1}N$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

ให้ $\sigma, \tau \in G_1$

$$\Psi(\sigma\tau) = (\sigma\tau)^{-1}N = (\tau^{-1}\sigma^{-1})N = \tau^{-1}N\sigma^{-1}N = \Psi(\tau)\Psi(\sigma)$$

ให้ $x : G_1 \to X$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $x(\sigma) = \sigma^{-1}(2)$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $x(\rho_0) = \rho_0^{-1}(2) = (\rho_0^{-1}\rho_0)(2) = (\rho_0^{-1}N)\cdot(\rho_0(2)) = \Psi(\rho_0)\cdot 2$

ในทำนองเดียวกันได้

$x(\rho_1) = \Psi(\rho_1)\cdot 2$, $x(\rho_2) = \Psi(\rho_2)\cdot 2$, $x(\mu_1) = \Psi(\mu_1)\cdot 2$, $x(\mu_2) = \Psi(\mu_2)\cdot 2$ และ $x(\mu_3) = \Psi(\mu_3)\cdot 2$

ดังนั้น $x(\sigma) = \Psi(\sigma)\cdot x_0$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

ให้ $h:G_1 \to G$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดยนิยามโดย $h(\sigma) = \sigma^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $h(\rho_0) = \rho_0^{-1}$ จะได้ว่า $h(\rho_0) = \rho_0^{-1} \in \rho_0^{-1}N = \Psi(\rho_0)$

ดังนั้น $h(\rho_0) \in \Psi(\rho_0)$

ในทำนองเดียวกันได้

$h(\rho_1) \in \Psi(\rho_1), h(\rho_2) \in \Psi(\rho_2), h(\mu_1) \in \Psi(\mu_1), h(\mu_2) \in \Psi(\mu_2)$ และ $h(\mu_3) \in \Psi(\mu_3)$

นั่นคือ $h(\sigma) \in \Psi(\sigma)$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

แทนค่าฟังก์ชัน g กลับด้วยฟังก์ชัน h ซึ่งนิยามโดย $g(\sigma) = g_0 h(\sigma)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$ จะได้ว่า $g(\sigma) = g_0 h(\sigma) = g_0\sigma^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

นั่นคือผลเฉลยของสมการคือ $x(\sigma) = \sigma^{-1}(2)$ และ $g(\sigma) = g_0\sigma^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

ตรวจคำตอบ

ให้ $\sigma,\tau,\upsilon \in G_1$

จาก
$$\begin{aligned} g(\sigma\tau)x(\upsilon) &= g(\tau)x(\upsilon\sigma) \\ g_0(\sigma\circ\tau)^{-1}(\upsilon^{-1}(2)) &= g_0\tau^{-1}((\upsilon\sigma)^{-1}(2)) \\ (\tau^{-1}\sigma^{-1}\upsilon^{-1})(2) &= (\tau^{-1}\sigma^{-1}\upsilon^{-1})(2) \end{aligned}$$

สมการเป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 2

จากตัวอย่างที่ 1 หาค่าของฟังก์ชัน $g:G_1 \to G$ และ $x:G_1 \to X$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน $g(\sigma\tau)x(\upsilon) = g(\sigma)x(\upsilon\tau^{-1})$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau,\upsilon \in G_1$

จากตัวอย่างที่ 1 ให้ $H = G_1$ $x_0 = 2$ และ $N = \{\rho_0\}$

ให้ G_1/N กระทำบน $G_1(2)$ มีนิยามคือ $(\sigma N)\cdot(\tau(2)) = (\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2))$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau \in G_1$

ให้ $\Psi: G_1 \to G_1/N$ นิยามโดย $\Psi(\sigma) = \sigma N$

ให้ $\sigma,\tau \in G_1$

$$\Psi(\sigma\tau) = (\sigma\tau)N = \sigma N\tau N = \Psi(\sigma)\Psi(\tau)$$

ดังนั้น Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ $x:G_1 \to X$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $x(\sigma) = \sigma^{-1}(2)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $x(\rho_0) = \rho_0^{-1}(2) = (\rho_0^{-1}\rho_0)(2) = (\rho_0^{-1}N)\cdot(\rho_0(2))$

$= \Psi(\rho_0^{-1})\cdot 2$

ในทำนองเดียวกันได้

$x(\rho_1) = \Psi(\rho_1^{-1})\cdot 2$, $x(\rho_2) = \Psi(\rho_2^{-1})\cdot 2$, $x(\mu_1) = \Psi(\mu_1^{-1})\cdot 2$, $x(\mu_2) = \Psi(\mu_2^{-1})\cdot 2$ และ $x(\mu_3) = \Psi(\mu_3^{-1})\cdot 2$

ดังนั้น $x(\sigma) = \Psi(\sigma^{-1})\cdot x_0$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

ให้ $h: G_1 \to G$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดยนิยามโดย $h(\sigma) = \sigma$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $h(\rho_0) = \rho_0$ จะได้ว่า $h(\rho_0) = \rho_0 \in \rho_0 N = \Psi(\rho_0)$

ดังนั้น $h(\rho_0) \in \Psi(\rho_0)$

ในทำนองเดียวกันได้

$h(\rho_1) \in \Psi(\rho_1)$, $h(\rho_2) \in \Psi(\rho_2)$, $h(\mu_1) \in \Psi(\mu_1)$, $h(\mu_2) \in \Psi(\mu_2)$ และ $h(\mu_3) \in \Psi(\mu_3)$

ดังนั้น $h(\sigma) \in \Psi(\sigma)$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

แทนค่าฟังก์ชัน g กลับด้วยฟังก์ชัน h ซึ่งนิยามโดย $g(\sigma) = g_0 h(\sigma)$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$ จะได้ว่า $g(\sigma) = g_0 h(\sigma) = g_0\sigma$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

นั่นคือผลเฉลยของสมการคือ $x(\sigma) = \sigma^{-1}(2)$ และ $g(\sigma) = g_0\sigma$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

ตรวจคำตอบ

ให้ $\sigma, \tau, \upsilon \in G_1$

จาก

$$\begin{aligned}
g(\sigma\tau)x(\upsilon) &= g(\sigma)x(\upsilon\tau^{-1}) \\
g_0(\sigma\tau)(\upsilon^{-1}(2)) &= g_0\sigma((\upsilon\tau^{-1})^{-1}(2)) \\
(\sigma\tau\upsilon^{-1})(2) &= (\sigma(\tau^{-1})^{-1}\upsilon^{-1})(2) \\
(\sigma\tau\upsilon^{-1})(2) &= (\sigma\tau\upsilon^{-1})(2)
\end{aligned}$$

สมการเป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 3

จากตัวอย่างที่ 1 หาค่าของฟังก์ชัน $g: G_1 \to G$ และ $x: G_1 \to X$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน $g(\sigma\tau)x(\upsilon) = g(\tau)x(\sigma^{-1}\upsilon)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma, \tau, \upsilon \in R$

จากตัวอย่างที่ 1 ให้ $H = G_1$ $x_0 = 2$ และ $N = \{\rho_0\}$

ให้ G_1/N กระทำบน $G_1(2)$ มีนิยามคือ $(\sigma N)\cdot(\tau(2)) = (\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2))$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau \in G_1$

ให้ $\Psi : G_1 \to G_1/N$ นิยามโดย $\Psi(\sigma) = \sigma^{-1}N$

จากตัวอย่าง 1 ได้ว่า $\Psi(\sigma\tau) = \Psi(\tau)\Psi(\sigma)$ สำหรับทุกๆ $\sigma,\tau \in G_1$

ให้ $x{:}G_1 \to X$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $x(\sigma) = \sigma(2)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $x(\rho_0) = \rho_0(2) = (\rho_0\rho_0)(2) = (\rho_0 N)\cdot(\rho_0(2)) = \Psi(\rho_0^{-1})\cdot 2$

ในทำนองเดียวกันได้

$x(\rho_1) = \Psi(\rho_1^{-1})\cdot 2$, $x(\rho_2) = \Psi(\rho_2^{-1})\cdot 2$, $x(\mu_1) = \Psi(\mu_1^{-1})\cdot 2$, $x(\mu_2) = \Psi(\mu_2^{-1})\cdot 2$ และ $x(\mu_3) = \Psi(\mu_3^{-1})\cdot 2$

ดังนั้น $x(\sigma) = \Psi(\sigma^{-1})\cdot x_0$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

ให้ $h{:}G_1 \to G$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $h(\sigma) = \sigma^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $h(\rho_0) = \rho_0^{-1}$ จะได้ว่า $h(\rho_0) = \rho_0^{-1} \in \rho_0^{-1}N = \Psi(\rho_0)$

ดังนั้น $h(\rho_0) \in \Psi(\rho_0)$

ในทำนองเดียวกันได้

$h(\rho_1) \in \Psi(\rho_1)$, $h(\rho_2) \in \Psi(\rho_2)$, $h(\mu_1) \in \Psi(\mu_1)$, $h(\mu_2) \in \Psi(\mu_2)$ และ $h(\mu_3) \in \Psi(\mu_3)$

ดังนั้น $h(\sigma) \in \Psi(\sigma)$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

แทนค่าฟังก์ชัน g กลับด้วยฟังก์ชัน h ซึ่งนิยามโดย $g(\sigma) = g_0 h(\sigma)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$ จะได้ว่า $g(\sigma) = g_0 h(\sigma) = g_0\sigma^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

นั่นคือผลเฉลยของสมการคือ $x(\sigma) = \sigma(2)$ และ $g(\sigma) = g_0\sigma^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

ตรวจคำตอบ

ให้ $\sigma,\tau,\upsilon \in G_1$

จาก
$$\begin{aligned} g(\sigma\tau)x(\upsilon) &= g(\tau)x(\sigma^{-1}\upsilon) \\ g_0(\sigma\tau)^{-1}(\upsilon(2)) &= g_0\tau^{-1}((\sigma^{-1}\upsilon)(2)) \\ (\tau^{-1}\sigma^{-1}\upsilon)(2) &= (\tau^{-1}\sigma^{-1}\upsilon)(2) \end{aligned}$$

สมการเป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 4

จากตัวอย่างที่ 1 ให้ $a = \rho_1$ ต้องการหาค่าของฟังก์ชัน $g:G_1 \to G$ และ $x:G_1 \to X$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน $g(\sigma\tau)x(\upsilon) = g(\sigma\rho_1)x(\tau\rho_1^{-1}\upsilon)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau,\upsilon \in R$

จากตัวอย่างที่ 1 ให้ $H = G_1$ $x_0 = 2$ และ $N = \{\rho_0\}$

ให้ G_1/N กระทำบน $G_1(2)$ มีนิยามคือ $(\sigma N)\cdot(\tau(2)) = (\sigma\tau)(2)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau \in G_1$

ให้ $\Psi : G_1 \to G_1/N$ นิยามโดย $\Psi(\sigma) = \sigma N$

จากตัวอย่าง 2 ได้ว่า Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ $x:G_1 \to X$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $x(\sigma) = \sigma(2)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $x(\rho_0) = \rho_0(2) = (\rho_0\rho_0)(2) = (\rho_0 N)\cdot(\rho_0(2)) = \Psi(\rho_0)\cdot 2$

ในทำนองเดียวกันได้

$x(\rho_1) = \Psi(\rho_1)\cdot 2$, $x(\rho_2) = \Psi(\rho_2)\cdot 2$, $x(\mu_1) = \Psi(\mu_1)\cdot 2$, $x(\mu_2) = \Psi(\mu_2)\cdot 2$ และ $x(\mu_3) = \Psi(\mu_3)\cdot 2$

ดังนั้น $x(\sigma) = \Psi(\sigma)\cdot x_0$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$

ให้ $h:G_1 \to G$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $h(\sigma) = \sigma\rho_1^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

เนื่องจาก $h(\rho_0) = \rho_0\rho_1^{-1}$ จะได้ว่า $h(\rho_0) = \rho_0\rho_1^{-1} \in \rho_0\rho_1^{-1}N = \Psi(\rho_0\rho_1^{-1})$

ดังนั้น $h(\rho_0) \in \Psi(\rho_0\rho_1^{-1})$

ในทำนองเดียวกันได้

$h(\rho_1) \in \Psi(\rho_1\rho_1^{-1})$, $h(\rho_2) \in \Psi(\rho_2\rho_1^{-1})$, $h(\mu_1) \in \Psi(\mu_1\rho_1^{-1})$, $h(\mu_2) \in \Psi(\mu_2\rho_1^{-1})$ และ $h(\mu_3) \in \Psi(\mu_3\rho_1^{-1})$

ดังนั้น $h(\sigma) \in \Psi(\sigma)\rho_1^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$

แทนค่าฟังก์ชัน g กลับด้วยฟังก์ชัน h ซึ่งนิยามโดย $g(\sigma) = g_0 h(\sigma)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$ จะได้ว่า $g(\sigma) = g_0 h(\sigma) = g_0\sigma\rho_1^{-1}$ สำหรับทุกๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

นั่นคือผลเฉลยของสมการคือ $x(\sigma) = \sigma(2)$ และ $g(\sigma) = g_0\sigma\rho_1^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G_1$ และ $g_0 \in G$

ตรวจคำตอบ

ให้ $\sigma,\tau,\upsilon \in G_1$

จาก $\qquad g(\sigma\tau)x(\upsilon) \qquad = \qquad g(\sigma\rho_1)x(\tau\rho_1^{-1}\upsilon)$

$$g_0\sigma\tau\rho_1^{-1}(\upsilon(2)) \quad = \quad g_0\sigma\rho_1\rho_1^{-1}((\tau\rho_1^{-1}\upsilon)(2))$$
$$(\sigma\tau\rho_1^{-1}\upsilon)(2) \quad = \quad (\sigma\tau\rho_1^{-1}\upsilon)(2)$$

สมการเป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 5

กำหนดให้ $G = S_4$ และ $X = \{1,2,3,4\}$ โดยที่ G กระทำบน X นิยามโดย $(\sigma,x) = \sigma(x)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in G$ และ $x \in X$

ให้ $R = \{\rho_0 = (1), \rho_1 = (234), \rho_2 = (243)\}$ ต้องการหาค่าของฟังก์ชัน $g: G_1 \to G$ และ $x: G_1 \to X$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน $g(\sigma\tau)x(\upsilon) = g(\tau)x(\sigma\upsilon)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau,\upsilon \in R$

เลือก $H = R$ ดังนั้น $H \le G$

เลือก $x_0 = 2$

เพราะฉะนั้น $H(x_0) = R(2) = \{\rho_0(2), \rho_1(2), \rho_2(2)\}$

เลือก $N = \{\rho_0\}$

ดังนั้น $N \lhd H = R$ และ $N \le G_2$

ให้ R/N กระทำบน $R(2)$ มีนิยามคือ $(\sigma N)\cdot(\tau(2)) = (\sigma\tau)(2)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau \in R$

ให้ $\Psi: H \to H/N$ นิยามโดย $\Psi(\sigma) = \sigma N$

เห็นได้ชัดว่า Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน $\Psi(\rho\tau) = \Psi(\tau)\Psi(\rho)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma,\tau \in R$

ให้ $x: R \to X$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $x(\sigma) = \sigma(2)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$

เนื่องจาก $x(\rho_0) = \rho_0(2) = (\rho_0 \circ \rho_0)(2) = (\rho_0 N)\cdot(\rho_0(2)) = \Psi(\rho_0)\cdot 2$

ในทำนองเดียวกันได้

$$x(\rho_1) = \Psi(\rho_1)\cdot 2 \text{ และ } x(\rho_2) = \Psi(\rho_2)\cdot 2$$

ดังนั้น $x(\sigma) = \Psi(\sigma)\cdot x_0$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$

ให้ $h: R \to S_4$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $h(\sigma) = \sigma$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$

เนื่องจาก $h(\rho_0) = \rho_0$ จะได้ว่า $h(\rho_0) = \rho_0 \in \rho_0 N = \Psi(\rho_0)$

ในทำนองเดียวกันได้

$$h(\rho_1) = \Psi(\rho_1) \text{ และ } h(\rho_2) = \Psi(\rho_2)$$

ดังนั้น $h(\sigma) \in \Psi(\sigma)$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$

แทนค่าฟังก์ชัน g กลับด้วยฟังก์ชัน h ซึ่งนิยามโดย $g(\sigma) = g_0 h(\sigma)$

สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$ และ $g_0 \in G$ จะได้ว่า $g(\sigma) = g_0h(\sigma) = g_0\sigma$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$ และ $g_0 \in G$

นั่นคือผลเฉลยของสมการคือ $x(\sigma) = \sigma(2)$ และ $g(\sigma) = g_0\sigma$ สำหรับทุก ๆ $\sigma \in R$ และ $g_0 \in G$

ตรวจคำตอบ

ให้ $\sigma, \tau, \upsilon \in R$

จาก

$$\begin{aligned} g(\sigma\tau)x(\upsilon) &= g(\tau)x(\sigma\upsilon) \\ g_0(\sigma\tau)(\upsilon(2)) &= g_0\tau((\sigma\upsilon)(2)) \\ (\sigma\tau\upsilon)(2) &= (\tau\sigma\upsilon)(2) \end{aligned}$$

ถ้า $\sigma = \rho_0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\rho_0\tau\upsilon)(2) &= (\tau\rho_0\upsilon)(2) \\ (\tau\upsilon)(2) &= (\tau\upsilon)(2) \end{aligned}$$

ถ้า $\sigma = \tau$ จะได้ว่า

$$(\sigma\sigma\upsilon)(2) = (\sigma\sigma\upsilon)(2)$$

ถ้า $\sigma = \sigma^{-1}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\sigma\sigma^{-1}\upsilon)(2) &= (\sigma^{-1}\sigma\upsilon)(2) \\ \upsilon(2) &= \upsilon(2) \end{aligned}$$

สมการเป็นจริง #